Diplomamunka

Variációk az Erdős-Szekeres problémára

Gulyás Attila
Témavezető: Szabó László

ELTE TTK, 2000.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Eme dolgozat célja, hogy összefoglalja azokat a kérdéseket, melyek az Erdős-Szekeres tételkör egy szeletén felbukkantak, illetve, hogy egy újabb kérdést felvessünk és valamennyire kielégítő választ is adjunk erre.

Mint ismert, a probléma első kérdését, még a '30-as években vetette fel Klein Eszter. Nevezetesen megmutatta, hogy bármely öt általános helyzetű pont között van egy konvex négyszög és kíváncsi volt arra, hogy igaz-e ez általában, vagyis minden m-re van-e olyan $f(m)$ szám, hogy a sík minden legalább $f(m)$ pontú, általános helyzetű halmazából kiválasztható egy konvex m-szög. A kérdésre Erdős Pál és Szekeres György igenlő választ adott, sőt alsó és felső becslést is adtak $f(m)$-re. Az már egy másik kérdés, hogy ezek a határok jelentősen eltérnek egymástól, és 60 évig nem is sikerült ennél jobbat mutatni.

A következő problémát Erdős Pál (ki más?) vetette fel. Azt már tudjuk, hogy elegendően nagy ponthalmazban van konvex n-szög. De van-e üres, azaz olyan, mely nem tartalmazza a pontrendszer egyetlen más pontját sem. Négyszögre könnyű, hogy öt pontból mindig van. Heiko Harborth látta be teljesen elemi módszerrel, hogy 10 pont között mindig van üres, konvex ötszög, továbbá van 9 pont a síkon, melyek között nincsen ilyen ötszög. Aztán 1983-ban "robbant a bomba", Horton mutatott minden n-re olyan n elemű halmazt, mely nem tartalmaz üres, konvex hétszöget.

Ha már tudjuk, hogy valami létezik egy pontrendszerben, akkor mindenkinek eszébe juthat, hogy na jó, de mennyi van. Katchalski és Meir kérdezte 1988-ban, hogy hány üres háromszög van egy síkbeli ponthalmazban és mutattak alsó és felső becslést elemi módszerekkel. Ezt az eredményt javította, illetve általánosította Bárány Imre és Füredi Zoltán. Két irányban általánosították: egyrészt tetszőleges d-dimenzióban, hány üres szimplex van, illetve hány üres, konvex négy-, öt- és hatszöget találhatunk. Ők már nem csak elemi, hanem gráfelméleti és valószínűségi módszereket is használtak.

Én azt vizsgáltam meg, hogy mi történik akkor, ha a feltételeket egy kicsit tovább erősítjük és nemcsak azt követeljük meg a sokszögekről, hogy üresek legyenek, hanem azt is, hogy diszjunktak. Ha most ezeknek a számát szeretnénk meghatározni egy ponthalmazban, akkor ez a kérdés a fentiek szerint csak legfeljebb hatszögekre érdekes, és értelmes alsó és felső becslést csak három-, négy- és ötszögekre remélhetünk jelenlegi tudásunkkal. A helyzetet könnyíti, hogy itt a nagyságrendet biztosan tudjuk, hiszen legfeljebb a pontok számában lineáris sok üres, diszjunkt konvex sokszög lehet egy ponthalmazban. Ezért a fő kérdés itt az, hogy mekkora a lineáris tag együtthatója.

Könnyen adható egy triviális konstrukció mind a három esetben. Ez a háromszög esetében optimálisnak is bizonyul. A dolgozat egyik fő része az, hogy ennél a triviális alsó korlátnál jobbat mutassunk a négyszög esetén, másrészt az azonnal adódó felső becslésnél egy picivel jobbat mutassunk egy konstrukció segítségével.

Itt nem foglalkozom a témakör azon klasszikus eredményével, hogy hány pontból található konvex n-szög. Azt fel fogjuk használni, hogy 5 pontból mindig kiválasztható egy konvex négyszög, továbbá azt, hogy 9 pont között mindig található egy konvex ötszög. Ezt először Makai Endre és Turán Pál bizonyította még elemi geometriai eszközökkel a '30-as években.

1. fejezet

Üres konvex sokszögek létezése

Mindenekelőtt néhány fogalmat kell definiálnunk és felsoroljuk a nem-üres, konvex sokszögekre vonatkozó eredményeket.

Definíció: Egy $\mathcal{P}$ síkbeli pontrendszert általános helyzetűnek mondunk, ha semelyik három pontja nincs egy egyenesen és semelyik két pontja által meghatározott egyenes nem függőleges. Ez utóbbi feltételre csak technikai okból van szükség.

Definíció: Egy $P_1, P_2, \ldots, P_n$ síkbeli pontsorozatot konvex láncnak nevezünk, ha $n \geq 3$, a pontok x-koordinátája szigorúan monoton nő és a P_iP_{i+1} szakaszok meredeksége szigorúan monoton nő. Konkáv láncnak akkor nevezzük, ha az x-tengelyre vett tükörképe konvex lánc.

1.0.1. Tétel. *(Erdős P., Szekeres Gy., 1935) Minden n pozitív egészhez van olyan $f(n)$ pozitív egész szám, hogy a sík minden legalább $f(n)$ pontú, általános helyzetű ponthalmaza tartalmaz egy konvex n-szöget.*

Ezt a tételt a Ramsey-tételek segítségével is be lehet látni, de abból nem tudunk meg túl sokat arról, hogy mekkora $f(n)$. Erre ad választ a következő tétel.

1.0.2. Tétel. *(Erdős P., Szekeres Gy., 1935, 1960)*

$$2^{n-2} + 1 \leq f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1.$$

A sejtés az, hogy itt az alsó határ körül van $f(n)$. Ennél a két határnál egyébként hatvan évig nem sikerült jobbat mutatni. Akkor is csak egy kicsit tudtak a felső határon javítani.

1.0.3. Tétel. *(Tóth G., Valtr, P., 1998)* $f(n) \leq \binom{2n-5}{n-2} + 2$.

Mint azt az Erdős-Szekeres tételből tudjuk megfelelően sok pont között már található konvex n-szög. Elég természetesen adódik a kérdés, hogy elegendően sok pont között mindig van-e üres konvex n-szög is, azaz olyan konvex n-szög, amely a csúcsain kívül nem tartalmaz a pontrendszerből más pontot. Kiderül, hogy, ha $n \geq 7$ esetben a válasz nemleges, azaz lehet mutatni olyan m általános helyzetű pontot a síkon, hogy abban nincs üres, konvex n-szög. $n \leq 5$-re már van elegendően nagy pontszámra üres, konvex n-szög. Ez a szám 3-ra 3, 4-re 5 és 5-re 10. Az Erdős-Szekeres problémakör egyik nagy nyitott kérdése az, hogy mi a helyzet az $n = 6$ esetben.

1.1. Kis, üres sokszögek létezése

Ebben a részben megmutatjuk, hogy elegendően sok pont között mindig van kis üres, konvex sokszög. Továbbá pontos értéket adunk erre az elég sokra, amiről kiderül, hogy nem is olyan sok, ugyanis az Erdős-Szekeres tételbeli számnál legfeljebb eggyel nagyobb.

Azt kell még látni, hogy ha m általános helyzetű pont között van üres, konvex n-szög, akkor $l \geq m$ pont között is van. Ekkor rendezzük x-koordináta szerint a pontokat és vegyük az első m pontot. Ezek között van üres, konvex n-szög, de ez nem tartalmazhatja a maradék $(l - m)$ pont egyikét sem, így az l pont között is üres lesz.

1.1.1. Tétel. *Minden $n \leq 5$-re van olyan $g(n)$, hogy ha $m \geq g(n)$, akkor a sík bármely m általános helyzetű pontja között van üres, konvex n-szög.*

Bizonyítás: Az Erdős-Szekeres tételből tudjuk, hogy elegendően sok pont között mindig található konvex hatszög. Azt fogjuk megmutatni, hogy ekkor van benne üres ötszög is. Persze ha van benne üres ötszög, akkor van benne üres négy- és háromszög is, hiszen az üres ötszög megfelelő számú csúcsa jó lesz. Legyen most H egy olyan hatszög, melynek konvex burkában a legkevesebb pont van. Legyen a belsejében levő pontok halmaza I. Ekkor megkülönböztetünk három esetet, annak megfelelően, hogy hány pont van I-ben.

1. eset: Amikor $I = \emptyset$. Ekkor H egy üres hatszög, melynek bármely öt csúcsa egy üres ötszöget alkot és ezzel készen vagyunk.

2. eset: Ha I-ben egy pont van, mondjuk X, akkor a hatszöget egy tetszőleges nagyátlóval osszuk fel két négyszögre. Most X benne van az egyik négyszögben és így a másik négyszög és X egy üres ötszöget alkot.

3. eset: $|I| \geq 2$. Legyen most $\overline{PQ}$ az I konvex burkának egy éle és legyen h az a $\overline{PQ}$ által meghatározott nyílt félsík, mely nem tartalmazza I-t. Ez csak akkor nem egyértelmű, ha $|I| = 2$, ekkor h-t tetszőlegesen választhatjuk a két félsík közül. Ha $|h \cap H| \geq 3$, akkor $h \cap H$-hoz hozzávéve P-t és Q-t egy üres ötszöget kapunk.

Ha $h \cap H = \{X, Y\}$, akkor az $\overline{XY}$-t $\overline{PQ}$-ra lecserélve egy olyan konvex hatszöget kapnánk, mely kevesebb pontot tartalmaz, mint H és ez ellentmond H választásának.

Ha $h \cap H = \{X\}$, akkor ugyanígy jutunk ellentmondásra, ha X-et lecseréljük P-re.

□

Beláttuk tehát, hogy üres három-, négy- és ötszög létezik elég sok pont között. Felmerül a kérdés, hogy mit jelent az elég sok, azaz mennyi $g(3)$, $g(4)$ és $g(5)$. Erre a kérdésre szeretnénk a továbbiakban választ kapni.

1.1.2. Állítás. $g(3) = 3$.

Ennek a bizonyítása triviális.

1.1.3. Állítás. $g(4) = 5$.

Bizonyítás: Ez se sokkal nehezebb, mint az előző állítás. Ugyanis ha az öt pont konvex burka ötszög, akkor annak bármely négy csúcsa egy üres négyszöget ad.

Ha a konvex burok négyszög, akkor vegyük az egyik átlót és osszuk fel vele a négyszöget két háromszögre. Az egyikben benne van az ötödik pont. Most ez a pont és a másik háromszög alkot egy üres, konvex négyszöget.

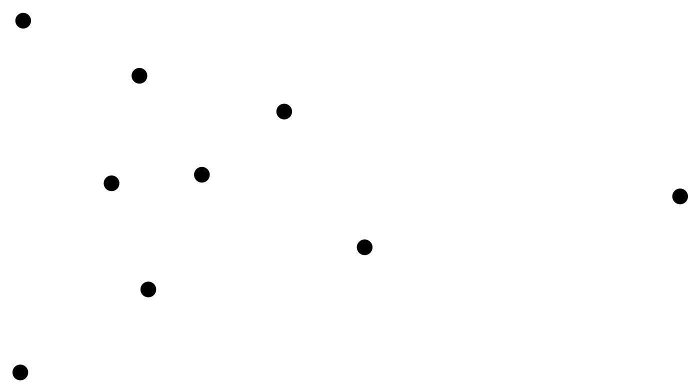
Ha a konvex burok háromszög, akkor a maradék két pont egyenese nem metszi el valamelyik oldalt. Ebben az esetben ezen oldal két végpontja és a benti két pont konvex négyszöget alkot, de ebben nem lehet benne a háromszög harmadik csúcsa, ezért ez üres is lesz.

□

1.1.4. Állítás. *(Harborth, H.,1978)* $g(5) = 10$.

Bizonyítás: Az 1.1 ábra mutatja, hogy $g(5) \geq 10$. Az ábra felső három pontja egy konkáv, míg az alsó három pont egy konvex görbén van rajta és a jobb szélső pont ezen ívek metszéspontja.

Legyen most adva a síkon 10 általános helyzetű pont. Az Erdős-Szekeres tételből tudjuk, hogy 9 pont között mindig van egy konvex ötszög, mivel most ennél több pontunk van, ezért van egy konvex ötszögünk. Ha ez az ötszög üres, akkor készen vagyunk.



1.1. ábra. 9 pontú példa

Tegyük most fel, hogy ennek az ötszögnek a belsejében legalább két pont van. Vegyük most két ilyen belső pont egyenesét. Ennek egyik oldalán legalább három csúcsa van az ötszögnek. Akkor ez a két pont és három csúcs is egy konvex ötszöget alkot. Ebben az ötszögben kevesebb pont van. Ha ez üres, akkor megint készen vagyunk. Ha megint legalább két pont van benne, akkor ugyanezt a lépést kell megismételni. Így csak akkor kerülünk bajba, ha valamelyik lépés során a konvex ötszögben, csak 1 pont lenne.

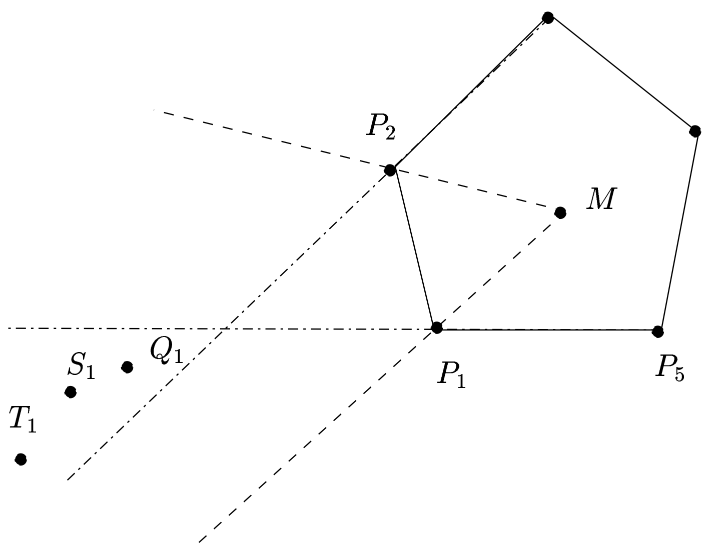
Tehát ott tartunk, hogy készen vagyunk annak az esetnek a kivételével, hogy ha egy pont van a konvex ötszög belsejében, legyen ez M. A konvex ötszög csúcsai legyenek P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, negatív körüljárás szerint. Tekintsük a $G_i = MP_iP_{i+i}P_{i+2}$ négyszögeket, $i = 1, 2, \dots, 5$. Ha lenne egy olyan négyszög, amely nem konvex, akkor legyen ez a $MP_1P_2P_3$. Most az $MP_3P_4P_5P_1$ ötszög konvex lesz és nem tartalmazhatja a pontrendszer egyetlen más pontját sem.

Így feltehető, hogy mind az öt négyszög konvex. Így ha U és V két pont, akkor (UV) jelölje az UV egyenesnek azt a félsíkját, melynek P pontjaira UVP pozitív körüljárású. Legyen most $A_i = (P_iM) \cap (P_iP_{i+1}) \cap (MP_{i+1})$. Ekkor a pontrendszer tetszőleges pontja legfeljebb egy A_i-ben lehet benne. Ha egy pont az $A_i \cap (P_iP_{i-1})$ -ben, vagy $A_i \cap (P_{i+2}P_{i+1})$-ben van, akkor G_{i-1}-t, illetve G_i-t ezzel a ponttal kiegészítve egy konvex ötszöget kapunk. Ráadásul, ha ezt a pontot úgy választjuk, hogy a P_iP_{i+1} oldalhoz legközelebbi pont legyen, akkor az ötszög üres is lesz.

Legyen most $B_i = A_i \cap (P_{i-1}P_i) \cap (P_{i+1}P_{i+2})$, minden i-re. Ekkor megkülönböztetünk három esetet annak megfelelően, hogy hány pont van egy B_i-ben.

1. eset: Van olyan B_i, melyben legalább három pont van. Legyen ez B_1. Ekkor legyen a P_1P_2-höz legközelebbi pont Q_1. Ha most lenne egy pont $B_1 \cap (Q_1P_1)$ halmazban, vagy a $B_1 \cap (P_2Q_1)$ halmazban, akkor ezzel kiegészítve a $\{Q_1, P_2, M, P_1\}$ halmazt egy konvex ötszöget kapunk. Ha ezt a pontot úgy választjuk, hogy a P_1P_2 egyeneshez legközelebbi pont legyen, akkor ez az ötszög üres is lesz. Így feltehető, hogy a többi pont a $C_1 = B_1 \cap (P_1Q_1) \cap (Q_1P_2)$ halmazban van. Legyen ezek közül a P_1P_2 egyeneshez legközelebbi S_1. Ha most a Q_1S_1 egyenes nem metszi a $\overline{P_1P_2}$ oldalt, akkor a P_1, P_2, Q_1, S_1, M halmaz egy üres és konvex ötszög lesz, ezért feltesszük, hogy elmetszi.

Tudjuk, hogy a B_1 halmazban még legalább egy pont van. Legyen közülük a P_1P_2 egyeneshez legközelebbi pont T_1. Feltehető, hogy ez a T_1 pont a $C_1 \cap (Q_1S_1)$ halmazban van. (A másik eset bizonyítása teljesen hasonló.) Forgassuk most el a T_1P_1 félegyenest a T_1 pont körül negatív irányba és legyen az első pont, amit elérünk U (P_5P_1)-ben. Ez lehet, hogy csak P_5 lesz. Ekkor a $T_1S_1Q_1P_1U$ ötszög konvex és üres lesz.

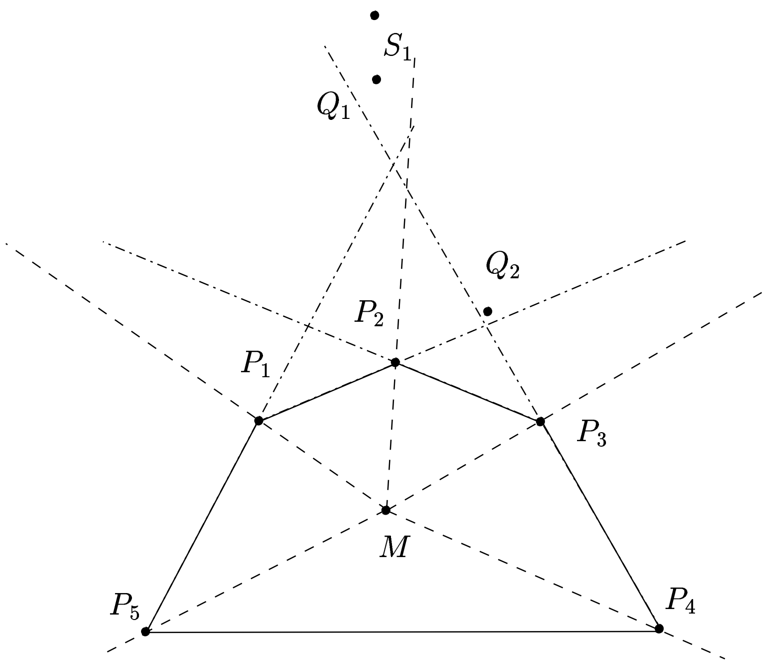


1.2. ábra. 1. eset

2. eset: Minden B_j halmazban legfeljebb két pont van és van egy olyan B_i, melyben két pont van. Legyen B_1 az a tartomány, amelyben két pont van. A két pont Q_1 és S_1 ugyanazzal a definícióval, mint az előbbi esetben. Most is feltehető, hogy a Q_1S_1 egyenes metszi a $\overline{P_1P_2}$ oldalt. Ez összesen nyolc pont, tehát pontrendszerünknek még két pontja van.

Nézzük most a következő két négyszöget: $S_1Q_1P_1P_5$ és $S_1Q_1P_2P_3$. Mind a két négyszög konvex. Ha mind a két pont a $B_3 \cup B_4$ halmazban akkor tegyük fel, hogy a B_3 halmazban van pont. Ekkor az $S_1Q_1P_2P_3Q_3$ ötszög konvex és üres lesz.

Ha van $B_2 \cup B_5$ halmazban pont, akkor tegyük fel, hogy B_2-ben van. Legyen ez a pont Q_2. Ha az $S_1Q_1P_2P_3Q_2$ ötszög konvex, akkor készen vagyunk. Így feltehető, hogy Q_2 benne van a másik négy pont konvex burkában. Azaz feltehető, hogy a helyzet a következő:



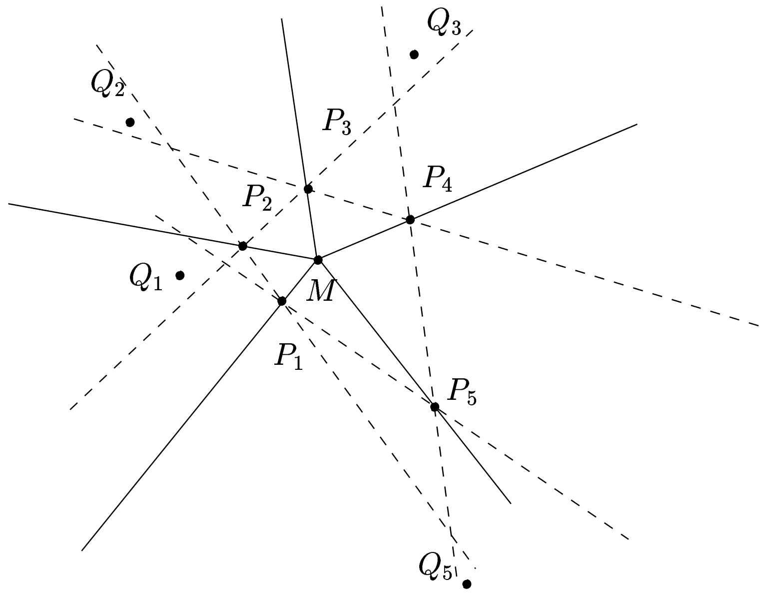
1.3. ábra. 2. eset

Nézzük most hol lehet a tizedik pont.

- Ha B_2-ben van, akkor az $S_1Q_1P_1Q_2S_2$ ötszög lesz konvex és üres.
- Ha B_3-ban van legyen a pont Q_3. Még két lehetőségünk van. Ha Q_1 a P_3Q_2 egyenes S_1-gyel ellentétes oldalára esik, akkor a $Q_1P_2P_2Q_3Q_2$ ötszög, ha azonosra, akkor a $S_1Q_1Q_2P_3Q_3$ lesz üres és konvex ötszög.
- Ha B_4-ben van a tizedik pont. Legyen ez a pont Q_4. Ebben az esetben az $S_1Q_1P_1P_5Q_4$ ötszög konvex és üres.
- B_5-ben van a tizedik pont. Legyen ez Q_5. Ekkor az $S_1Q_1P_1P_5Q_5$ lesz a keresett ötszög.

3. eset: Minden B_i halmazban legfeljebb egy pont van. Ez azt jelenti, hogy négy halmazban van egy-egy pont és egy halmazban nincs a pontrendszernek pontja. Legyen ez a halmaz B_4. Továbbá a B_i halmazban legyen benne a Q_i pont, ahol $i = 1, 2, 3, 5$. Most a $Q_5Q_1Q_2P_2P_1$, $Q_1Q_2Q_3P_3P_2$ ötszög közül legalább az egyik konvex és üres lesz. Azt vegyük észre, hogy az ötszögnek

Q_5, illetve Q_3 biztosan csúcsa lesz, mert a P_4P_5 egyenes elválasztja a többi ponttól. Így a fenti állítás csak akkor nem teljesülne, ha Q_1 benne lenne a $Q_5Q_2P_2P_1$ négyszögben és Q_2 a $Q_1Q_3P_3P_2$ négyszögben, de ez lehetetlen, mert az első feltétel szerint van egyenes, mely elválasztja a Q_2 pontot a $P_1P_2Q_3$ háromszögtől és ez ellentmond a második feltételnek.



1.4. ábra. 3. eset

Az 1.4 ábra mutatja az általánosság megszorítása nélkül, hogy hogyan helyezkednek el most a pontok. (Megjegyzendő, hogy ha a Q_1 pontot elhagyjuk, akkor éppen az 1.1 ábra elrendezését kapjuk.)

Mivel minden esetben találtunk egy üres konvex ötszöget, ezért az állítást beláttuk.

□

1.2. Horton-halmazok

Az egész tételkörben ez volt talán az első negatív eredmény abban az értelemben, hogy valamilyen struktúra nem fordul elő akármilyen nagy ponthalmazt is veszünk. Ebben a részben megkonstruáljuk ezeket a halmazokat és belátjuk, hogy nem tartalmaznak üres, konvex hétszöget. Kezdjük néhány definícióval.

Definíció: Legyenek X és Y a síknak véges halmazai. Azt mondjuk, hogy X az Y felett van és Y az X alatt, ha a következő három állítás teljesül.

(i) $X \cup Y$ egyetlen egyenese sem függőleges.

(ii) X bármely két pontja által meghatározott egyenese alatt van Y minden pontja.

(iii) Y bármely két pontja által meghatározott egyenes felett van X minden pontja.

Definíció: Legyen X a síknak egy n elemű halmaza. Rendezzük a pontokat x-koordináta szerint növekvően. Legyen $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Legyen $X_0 = x_1, x_3, \ldots$ és $X_1 = x_2, x_4, \ldots$, vagyis X_0 a páratlan, X_1 a páros indexű elemekből áll.

Definíció: Legyen H a sík egy általános helyzetű, véges részhalmaza. Ekkor H Horton-halmaz, ha $|H| \leq 1$, vagy ha $|H| \geq 2$ és H_0, H_1 szintén Horton-halmazok, továbbá H_0 a H_1 felett van, vagy H_1 van H_0 felett.

Látható, hogy ez a definíció rekurzív és még az is, hogy egy legfeljebb egyelemű halmaz mindig Horton-halmaz. Ami nem világos az az, hogy létezik-e tetszőlegesen nagy pontszámú Horton-halmaz. Erre a kérdésre ad választ a következő állítás.

1.2.1. Állítás. *Minden $n \geq 1$-re létezik n-pontú Horton-halmaz.*

Bizonyítás: Először vegyük észre, hogy ha létezik egy n pontú Horton-halmaz és $m \leq n$, akkor van m pontú is. Ugyanis felváltva hagyjuk el H_0 és H_1 elemeit a széléről, így továbbra is Horton-halmazt kapunk.

Ezek után elég 2^n eleműeket definiálni. Legyen $H^{(0)}$ a $(0,0)$ pont, továbbá legyen $h_0 = 1$. Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk a 2^n elemű $H^{(n)}$ Horton-halmazt, ahol a pontok x-koordinátái $0, 1, \ldots, 2^n - 1$ és adott h_n is. Most meghatározzuk $H^{(n+1)}$-et. Legyen h_{n+1} elég nagy.

Legyen A az a halmaz, melyet $H^{(n)}$ kétszeresére nagyításával kapunk, továbbá B az a halmaz, amit úgy kapunk, hogy A minden eleméhez hozzáadjuk az $(1, h_{n+1})$ vektort. Legyen $H^{(n+1)} = A \cup B$. Nyilván $H_0^{(n+1)} = B$ és $H_1^{(n+1)} = A$. Ekkor könnyen látható, hogy $H^{(n+1)}$ egy Horton-halmaz.

Az világos, hogy nem tartalmaz függőleges egyenest. Másrészt ha h_{n+1} elég nagy, akkor a második és harmadik feltétel is teljesül.

$\square$

Igazából arról van szó, hogy ha már van egy halmazunk, akkor azt el tudjuk tolni felfelé elég messze ahhoz, hogy a feltétel teljesüljön. Most azt látjuk be, hogy ezeknek a Horton-halmazoknak van néhány érdekes tulajdonságuk, például nem tartalmaznak üres, konvex hétszöget.

Definíció: A sík egy X részhalmazát felülről r-zártnak mondjuk, ha X bármely r-pontú konvex lánca felett van még X-nek pontja. Hasonlóképpen X alulról r-zárt, ha X bármely r-pontú konkáv lánca alatt van pontja.

1.2.2. Állítás. *Egy Horton-halmaz alulról és felülről is* 4*-zárt.*

Bizonyítás: A Horton-halmaz méretére vonatkozó indukcióval. Ha legfeljebb 3 elem van, akkor az állítás semmitmondó. Legyen most H Horton-halmaz és feltehető, hogy H_0 van H_1 alatt. Legyen $C \subseteq H$ egy 4-pontú konvex lánc.

Ha most $C \subseteq H_0$, vagy $C \subseteq H_1$, akkor az indukciós feltevés szerint már H_0-ban, illetve H_1-ben is van olyan pont, mely lezárja C-t.

Így feltehető, hogy $C \cap H_0 \neq \emptyset \neq C \cap H_1$. Azt állítjuk, hogy C-nek H_1-ben legfeljebb két pontja van. Ha ugyanis $P, Q, R \in C \cap H_1$, akkor a PQ egyenes H_0 felett halad el, így C csak úgy lehet konvex lánc, hogy a negyedik pont is H_1-ben van, de ezt kizártuk.

Ez azt jelenti, hogy C-nek legalább két pontja (mondjuk A és B) van H_0-ban. De mivel H_0 és H_1 pontjai felváltva vannak, ezért A és B között van H_1 egy C pontja, ami nyilván lezárja C-t, lévén a konvex burok alsó részének egy éle felett van.

□

1.2.3. Tétel. *(Horton, 1983) Ha H egy Horton-halmaz, akkor nem tartalmaz üres, konvex hétszöget.*

Bizonyítás: Megint csak H méretére vonatkozó indukcióval. Ha legfeljebb 6 pontja van, akkor készen vagyunk. Legyen $X \subseteq H$ egy konvex hétszög. Megint tegyük fel, hogy H_0 van H_1 alatt. Ha most $X \subseteq H_0$, vagy $X \subseteq H_1$, akkor az indukciós feltétel szerint van benne pontja H_0-nak, illetve H_1-nek, így H-nak is és készen vagyunk.

Vegyük most H_0 és H_1 közül azt, amelyikbe X-nek több pontja esik, tehát legalább 4. Tegyük fel, hogy ez H_0, a másik eset bizonyítása nagyon hasonló. Legyen X H_0-ba eső csúcsainak halmaza X_0, a maradék csúcsok halmaza X_1. Azt állítjuk, hogy X_0 egy konvex láncot alkot. Ha valamely három pontja konkáv láncot alkotna, akkor a X_1-t nem lehetne konvex módon hozzárakni. Ekkor viszont H_0 Horton-halmaz, így az előző állítás szerint felülről 4-zárt, ezért van $P \in H_0$, amely lezárja. Azt állítjuk, hogy $P \in X$ és ez elég lesz, hiszen mutattunk ebben a hétszögben egy pontot. Tegyük fel, hogy P nincs benne a hétszögben. P lezárja X_0-t, ezért P az X_0 halmaz felett van. Így az indirekt feltevés csak akkor teljesülhet, ha P fölötte van minden X_0-t és X_1-t összekötő egyenesnek, de ez nem lehet, mert P a H_0-beli pont, ezért az ilyen egyenesek alatt kell lennie. Ez ellentmondás, így az indirekt feltevés hamis, azaz $P \in X$.

$\square$

2. fejezet

Üres konvex sokszögek száma

Eddig azt vizsgáltuk, hogy elegendően nagy ponthalmazban létezik-e üres konvex k-szög. Természetesen adódik a kérdés, hogy ha létezik, akkor mennyi van. Erről persze általában nehéz nyilatkozni, hiszen ha a ponthalmaz konvex helyzetben van, akkor bármely k pont megteszi. Arra vagyunk tehát kíváncsiak, hogy mennyit tudunk garantálni, azaz m általános helyzetű pont közül legalább hány üres, konvex n-szög van. Az eddigiekből azonnal következik, hogy a kérdés csak $n \leq 6$ esetén érdekes.

Ebben a részben szeretnénk becslést adni az üres három-, négy- és ötszögek számára.

Kezdjük ez előbbivel. Először is meg kell gondolni, hogy mit jelent az általános helyzet d-dimenzióban. Nyilván azt, hogy semelyik $d+1$ pont nem esik egy $d-1$ dimenziós hipersíkra. Katchalski és Meir kérdezte, hogy ha P egy általános helyzetű pontrendszer d-dimenzióban, akkor hány üres szimplex van $\mathcal{P}$-ben. Legyen $f(\mathcal{P})$ a $\mathcal{P}$-beli üres szimplexek száma. Legyen most $f_d(n) = \min\{f(\mathcal{P}) : |\mathcal{P}| = \backslash\}$, ahol $\mathcal{P}$ d-dimenziós pontrendszer . Először Purdy említette bizonyítás nélkül, hogy $f_2(n) = O(n^2)$. Katchalski és Meir (1988) mutatta meg, hogy

$$\binom{n-1}{2} \leq f_2(n) \leq Kn^2,$$

megfelelő K konstanssal. Bárány és Füredi (1987) ezt élesítette, mégpedig véletlen módszerrel.

2.1. Alsó becslések

Mint azt korábban láttuk, az üres sokszögek számára vonatkozó kérdés csak legfeljebb hatszögekre érdekes és hatszög esetében is csak valamilyen felső becslésben reménykedhetünk, hiszen ha lenne nem triviális alsó becslés, akkor az mutatná, hogy mindig létezik üres hatszög. A maradék három esetben azonban tudunk alsó becslést is adni és ez három-, illetve négyszög esetében megegyező nagyságrendű a felső becsléssel.

Legyen $\mathcal{P}$ egy n elemű pontrendszer a síkon, ekkor jelölje $h^k(\mathcal{P})$ az üres k-szögek számát $\mathcal{P}$-ben, továbbá legyen $h^k(n)$ a minimuma az n elemű $\mathcal{P}$ pontrendszerekre vett $h^k(\mathcal{P})$ értékeknek. A Horton-halmazok mutatják, hogy $h^7(n) = 0$. Elméletileg $h^k(n)$ nagyságrendje $\binom{n}{k}$ is lehetne, de látni fogjuk, hogy ennél kisebb.

Ebben a részben fel fogjuk használni a következő gráfelméleti állítást.

2.1.1. Állítás. *Legyen G egy gráf az $\{1, \ldots, n\}$ csúcshalmazon. Tegyük fel, hogy nem létezik $i < j < k < l$, hogy $(i,k),(i,l),(j,l) \in E(G)$. Ekkor $|E(G)| \leq 3n\lceil \log_2 n \rceil$.*

Bizonyítás: Legyen $E(G) = \cup E(G_i)$, ahol $1 \leq i \leq \lceil \log_2 n \rceil$ és $E(G_i) = \{(u,v) \in E(G) \mid 1 \leq u \leq v \leq n, 2^{i-1} \leq v - u \leq 2^i\}$. Nyilván elég megmutatni minden $E(G_i)$-ről, hogy legfeljebb lineáris sok él van benne. Ennek érdekében osszuk fel $E(G_i)$-t három részre: U-ra, T-re és V-re.

$$V = \{(u,v) \in E(G_i) \mid \exists w: \ u < w < v, \ (w,v) \in E(G_i)\}.$$

$$U = \{(u,v) \in E(G_i) \mid \exists w: \ u < w < v, \ (u,w) \in E(G_i)\}.$$

$$T = E(G_i) - V - U.$$

Vegyük észre, hogy $U \cap V = \emptyset$, mert ha lenne ilyen (u,v) él, akkor ahhoz tartozna egy w_1 és w_2 is és ez a négy pont éppen a tiltott konfigurációt adná. Továbbá egyik részben sem lehet kör. Tegyük fel, hogy van T-ben kör. Akkor legyen ennek legelső csúcsa u, és a két szomszédja v és w, ahol $w < v$. Ekkor ez pont azt jelenti, hogy $(u,v) \in U$, ami nem lehet. Hasonlóképpen, ha U-ban lenne egy kör, akkor legyen a kör maximális eleme v és annak két szomszédja u és w, ahol $u < w$. Ekkor definíció szerint $(u,v) \in V$, ami nem lehet, mert $U \cap V = \emptyset$. Teljesen ugyanígy, ha V-ben lenne kör, akkor legyen a kör minimális eleme u és a két szomszédja v és w, ahol $w < v$. Ekkor $(u,v) \in U$, ami ellentmodás.

Így egyik részben sem lehet kör, ami azt jelenti, hogy mindegyik részben legfeljebb $n-1$ él van, így $|E(G_i)| \leq 3n - 3$, így az össz élszám legfeljebb $3n \log_2 n$, és éppen ezt akartuk.

□

Most alsó becslést fogunk adni $f_2(n)$-re.

2.1.2. Tétel. *Legyen $\mathcal{P}$ egy síkbeli, általános helyzetű pontrendszer, melynek n pontja van. Ekkor $n^2 - O(n \log n) \leq h^3(\mathcal{P})$.*

Bizonyítás: Legyenek $\mathcal{P}$ pontjai $p_1, p_2, \ldots p_n$ és legyen e egy olyan egyenes, melyre levetítve a p_i pontokat csupa különböző pontot kapunk. Legyen p_i levetítettje q_i. A pontok átszámozásával elérhető, hogy q_i a q_{i-1} és a q_{i+1} pontok közé essen.

Definiáljuk a G_u és a G_d gráfokat a következőképpen. Mindkettő csúcshalmaza legyen a $\{q_1, \ldots, q_n\}$ halmaz. Legyen $E(G_u)$ azon (q_i, q_j) élek halmaza (ahol $i < j$), melyekre $i < k < j$ esetben a p_k pont a $p_i p_j$ egyenes alatt van és legfeljebb egy $p_i p_k p_j$ háromszög üres. Legyen továbbá $E(G_d)$ azon (q_i, q_j) élek halmaza (ahol $i < j$), melyekre $i < k < j$ esetben a p_k pont a $p_i p_j$ egyenes felett van és legfeljebb egy $p_i p_k p_j$ háromszög üres.

Mindkét gráfra teljesül az előző állítás feltétele. Tegyük fel indirekten, hogy pl. G_u-ra nem teljesül. Ekkor vannak olyan $i < j < k < l$ indexek, hogy $(q_i, q_k), (q_i, q_l), (q_j, q_l) \in E(G_u)$. Ekkor található egy $i < j' \leq j$ és $k < k' \leq l$, hogy a $p_i p_{j'} p_l$ és a $p_i p_{k'} p_l$ háromszög is üres, ez pedig ellentmond annak, hogy $q_i q_l \in E(G_u)$. Így azon üres $p_i p_k p_j$ háromszögek száma, ahol $i < k < j$:

$$h^3(\mathcal{P}) \geq 2\binom{n}{2} - |E(G_u)| - |E(G_d)| = n^2 - O(n \log n).$$

Ez az egyenlőtlenség némi magyarázatot igényel. Először is vegyük észre, hogy egyetlen pár sem lehet él mind a két gráfban. Egyszerűen minden párhoz, amely egy gráfban sem él fogunk mutatni két üres háromszöget. Legyen (q_i, q_j) ilyen pár. Ekkor három lehetőség van:

(i) Minden $i < k < j$ esetén a p_k pont a $p_i p_j$ egyenes alatt van. Ekkor mivel $(q_i, q_j) \notin E(G_u)$, azért legalább két üres $p_i p_k p_j$ háromszög van.

(ii) Minden $i < k < j$ esetén a p_k pont a $p_i p_j$ egyenes felett van. Ekkor $(q_i, q_j) \notin E(G_d)$, megint van két üres $p_i p_k p_j$ háromszög.

(iii) Van olyan $i < k_1, k_2 < j$, hogy p_{k_1} a $p_i p_j$ egyenes alatt, míg p_{k_2} az egyenes felett van. Ekkor vegyük azt a q_l és q_m pontokat, melyekre $i < l, m < j$, p_l az egyenes alatt van és p_l az ilyen pontok közül a legközelebb van az egyeneshez. p_m-t, pedig ugyanígy definiáljuk, csak éppen az egyenes feletti pontok közül választjuk.

Az is látható, hogy különböző párokhoz különböző háromszögeket rendeltünk, ugyanis a (q_i, q_j) párhoz rendelt háromszögek sorrendben legtávolabbi csúcsai p_i és p_j.

$\square$

2.1.3. Tétel. $h^5(n) \geq \lfloor \frac{n-4}{6} \rfloor$.

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{P}$ egy általános helyzetű pontrendszer. Legyenek a pontok x-koordináta szerint rendezve. Legyen $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-4}{6} \rfloor$ és tekintsük az $A_k = \{P_{6k-5}, \dots, P_{6k+4}\}$ ponthalmazt. Triviális, hogy $A_k \cap A_l \leq 4$, ha $k \neq l$. Azt is tudjuk, hogy A_k-ban van egy üres ötszög, legyen ez B_k, mert tudjuk, hogy 10 pont között mindig van egy üres ötszög. De az előbbi meglátásunk szerint $B_k \neq B_l$, ha $k \neq l$, hiszen, legfeljebb 4 közös csúcsuk lehet. Így tudtunk mutatni $\lfloor \frac{n-4}{6} \rfloor$ darab üres ötszöget.

□

2.1.4. Tétel. *(Bárány I., Füredi Z., 1988)* $h^4(n) \geq \frac{1}{4}n^2 - O(n)$.

Legyen a pontrendszerünk megint $\mathcal{P}$. Ekkor teljesül a következő lemma.

2.1.5. Állítás. *Legyen $u, v, x, y \in \mathcal{P}$ és $\overline{uv} \cap \overline{xy} \neq \emptyset$. Ekkor létezik $x', y' \in \mathcal{P}$, hogy az $ux'vy'$ négyszög üres és konvex, továbbá uv az egyik átlója.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az uvx háromszög belseje üres. Ekkor az $x' = x$ választással megvan x'. Ha nem akkor x' legyen ezen háromszögbeli azon pont, mely az uv oldalhoz a legközelebb van. y'-t teljesen hasonlóan kell meghatározni.

Definiáljunk most egy G gráfot a $\mathcal{P}$ ponthalmazon. (u, v) akkor éle a G gráfnak, ha az $\overline{uv}$ nem átlója egyetlen $\mathcal{P}$-beli konvex, üres négyszögnek sem. A 2.1.5. Állítás szerint G egy síkgráf, ezért $|E(G)| \leq 3n - 6$. De az összes többi pár így valamelyik üres, konvex négyszög átlója lesz, és egy négyszögnek két átlója van, így $h^4(\mathcal{P}) \geq \frac{1}{2}(\binom{n}{2} - (3n - 6))$.

□

2.2. Felső becslések

Ebben a részben olyan pontrendszereket konstruálunk, melyekben nem található túl sok üres, konvex sokszög. Az egyik esetben a pontrendszer nem lesz más, mint a már megismert Horton-halmazoknak egy másik megadása. Erről a halmazról már tudjuk, hogy nem tartalmaz üres hétszöget, de most az is ki fog derülni, hogy a kisebb sokszögekből sem tartalmazhat túl sokat. A másik esetben pedig véletlen módszerrel megmutatjuk, hogy ha párhuzamos egységszakaszokról választunk pontokat, akkor választhatjuk úgy ezeket a pontokat, hogy a kapott pontrendszer nem tartalmazhat túl sok üres háromszöget.

Legyenek $I_1, \ldots, I_n$ párhuzamos, függőleges egységintervallumok a síkon: $I_i = \{(x,y) | x = i, 0 \leq y \leq 1\}$. Válasszuk p_i-t I_i-ből egyenletes eloszlással. Legyen $\mathcal{P}_n = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

2.2.1. Tétel. $E(h^3(\mathcal{P}_n)) \leq 2n^2 + O(n \log n)$.

Bizonyítás: Legyen $A = (i,x)$, $B = (i+a,y)$ és $C = (i+k,z)$, ahol $k = a+b \geq 3$. Legyen $m = |y - x + (a/k)(z-x)|$, azaz a távolság B és $I_{i+a} \cap AC$ között. Válasszuk p_j-t véletlenül az I_j-ről, ahol $i < j < i+k$ és $j \neq i+a$.

$$\Pr(ABC_\triangle \text{ üres }) =$$

$$= \left(1 - \frac{m}{a}\right)\left(1 - 2\frac{m}{a}\right) \ldots \left(1 - (a-1)\frac{m}{a}\right)\left(1 - (b-1)\frac{m}{b}\right) \ldots \left(1 - \frac{m}{b}\right) \leq$$

$$\leq \exp\left[-\frac{m}{a} - 2\frac{m}{a} - \ldots - (a-1)\frac{m}{a} - (b-1)\frac{m}{b} - \ldots - \frac{m}{b}\right] =$$

$$= \exp\left(-\binom{a}{2}\frac{m}{a} - \binom{b}{2}\frac{m}{b}\right) = \exp\left(-\frac{(k-2)m}{2}\right).$$

Az első egyenlőség azért teljesül, mert az I_i és I_{i+a}, illetve az I_{i+a} és I_{i+k} közti intervallumok ekkora része nincs benne a háromszögben a párhuzamos szelők tétele szerint. Válasszuk most a p_i pontokat véletlenszerűen. Az előbbiek szerint

$$P(p_i p_{i+a} p_{i+k\triangle} \text{ üres }) \leq$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \exp\left(-\frac{(k-2)m}{2}\right) dx dy dz \leq$$

$$\leq 2\int_0^{1/2} \exp\left(-\frac{(k-2)m}{2}\right) dm \leq \frac{4}{k-2}.$$

Ennek következménye, hogy

$$E(f(P)) \leq n - 1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=3}^{n-i} \sum_{a=1}^{k-1} \frac{4}{k-2} =$$

$$= n - 1 + \sum_{k=3}^{n} (n-k+1) \frac{4(k-1)}{k-2} =$$

$$= n - 1 + \sum_{k=3}^{n} \frac{4(n-k+1)}{k-2} + 4 \sum_{k=3}^{n} (n-k+1) = O(n \log n) + 2n^2.$$

□

A $\mathcal{P}_n$ pontrendszer egy valószínűséggel általános helyzetű lesz, és az üres háromszögek számának várható értéke a fenti korlát alatt marad, ezért pozitív valószínűségű, és így nem üres azon ponthalmazok halmaza, melyekben legfeljebb $2n^2 + O(n \log n)$ üres háromszög van, azaz $h^3(n) \leq 2n^2 + O(n \log n)$.

Konstrukció: Legyen n egy 2-hatvány. Rekurzívan definiálni fogjuk a $Q(n)$ ponthalmazt. Legyen $Q(1) = \{(1,1)\}$ és $Q(2) = \{(1,1),(2,2)\}$. Tegyük fel, hogy $Q(n)$-t már definiáltuk, ekkor legyen

$$Q(2n) = \{(2x-1, y) \mid (x,y) \in Q(n)\} \cup \{(2x, y + d_n) \mid (x,y) \in Q(n)\},$$

ahol d_n egy megfelelően nagy szám. Látható, hogy ezek éppen a Horton-halmazokat adják, illetve azoknak egy eltoltját.

2.2.2. Tétel. *Ha n egy 2-hatvány, akkor*

$$h^3(n) \leq 2n^2 \ , \ h^4(n) \leq 3n^2 \ , \ h^5(n) \leq 2n^2 \ , h^6(n) \leq \frac{1}{2} n^2.$$

Bizonyítás: Csak a négyszögekre vonatkozó állítást fogjuk belátni, a többi teljesen hasonlóan megy.

Legyen $P = (x_1, y_1), R = (x_2, y_2) \in \mathcal{P}$. Azt mondjuk, hogy a $\overline{PQ}$ szakasz alulról üres, ha a $PR\left(\frac{x_1+x_2}{2}, -\infty\right)$ "végtelen" háromszög belseje üres. A szakasz felülről ürességét teljesen hasonlóan definiáljuk. Egy PRS hármas alulról (felülről) üres, ha mindhárom általuk meghatározott szakasz alulról (felülről) üres. Jelölje $h_2^-(\mathcal{P})$ és $h_2^+(\mathcal{P})$ az alulról, illetve felülről üres szakaszok számát $\mathcal{P}$-ben. Hasonlóan $h_3^-(\mathcal{P})$, illetve $h_3^+(\mathcal{P})$ jelöli az alulról, illetve felülről üres hármasok számát $\mathcal{P}$ -ben.

Tekintsük az imént meghatározott $Q(n)$ halmazokat. $Q(2n)$-t természetes módon két részre tudjuk vágni: $Q^+(n) = \{(2x, y + d_n) \mid (x,y) \in Q(n)\}$, és $Q^-(n) = Q(2n) - Q^+(n)$. Vegyük észre, hogy ezek éppen H_0-nak, illetve H_1-nek felelnek meg.

2.2.3. Állítás. *Ha A_1 és $A_2 \in Q(2n)$ és $\overline{A_1A_2}$ alulról üres, akkor*

- *vagy $A_1, A_2 \in Q^-(n)$,*
- *vagy $A_1 \in Q^-(n),\ A_2 \in Q^+(n)$ és $|x_1 - x_2| = 1$,*
- *vagy $A_1 \in Q^+(n),\ A_2 \in Q^-(n)$ és $|x_1 - x_2| = 1$.*

Bizonyítás: Ha mindkét pont $Q^+(n)$ -ben volna, akkor lenne köztük egy $Q^-(n)$ -beli pont, mely a Horton-halmaz definíciója szerint az egyenesük, és ezért a szakaszuk alatt lenne, ami ellentmond a szakasz ürességének. Ha csak az egyik pont lenne $Q^+(n)$ -ben, de $|x_1 - x_2| \geq 2$, akkor megint kell, hogy legyen köztük egy $Q^-(n)$ -beli pont és ennek a két pont egyenese alatt kell maradnia, különben a két $Q^-(n)$ -beli pont egyenese a $Q^+(n)$ -beli pont felett haladna el, ami nem lehet. Megjegyezzük, hogy az állításban szereplő esetek közül a másodikban és a harmadikban minden szakasz alulról üres lesz.

□

2.2.4. Állítás. $h_2^-(Q(2n)) = h_2^-(Q^-(n)) + 2n - 1.$

Bizonyítás: Ez az előző állítás azonnali következménye. Számoljuk meg hányszor fordulhatnak elő az ott megjelölt esetek. Az első nyilván $h_2^-(Q^-(n))$ -szer, a másik kettő eset pedig összesen $(2n-1)$ -szer, lévén ennyi szomszédos pár van.

□

Innét indukcióval triviálisan következik, hogy

$$h_2^-(Q(n)) < 2n.$$

Továbbá mivel az egész konstrukció a lenti és a fenti ürességre szimmetrikus, azért $h_2^+(Q(n)) < 2n$ is teljesül. Az is nyilvánvaló, hogy

$$h_3^-(Q(2n)) = h_3^-(Q(n)) + n - 1,$$

ugyanis a három csúcs közül legalább kettőnek $Q^-(n)$-be kell esnie. Ha mindhárom odaesik, akkor ez a hármas benne van $h_3^-(Q^-(n))$-ben. Ha pedig csak kettő van benne, akkor azok x-koordinátái között a különbség 2 és a harmadik pont köztük van. Ilyen hármasból pedig éppen $n-1$ van és ezek a hármasok alulról mind üresek. Innét megint csak indukcióval következik, hogy $h_3^-(Q(n)) < n$.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen lehet egy $Q(2n)$-beli üres négyszög. Az első eset az, hogy mind a négy csúcsa $Q^+(n)$-ben van. A második lehetőség, hogy itt három csúcsa van $Q^-(n)$-ben pedig egy. Ekkor a három csúcsnak egy alulról üres hármast kell adnia $Q^+(n)$-ben, hiszen ha lenne alatta csúcs az beleesne a négyszögbe is. Hasonlóan, ha a pontok eloszlása kettő-kettő, akkor a $Q^+(n)$-beliek egy alulról üres, a $Q^-(n)$-beliek egy felülről üres szakaszt alkotnak. Ha egy-három a pontok eloszlása, akkor a $Q^-(n)$-belieknek felülről üres hármast kell alkotniuk. Így indukcióval adódik a következő egyenlőtlenség:

$$h^4(Q(2n)) = h^4(Q^+(n)) + h_3^-(Q^+(n))n + h_2^-(Q^+(n))h_2^+(Q^-(n)) +$$

$$+ nh_3^+(Q^-(n)) + h^4(Q^-(n)) < 2h^4(Q(n)) + 6n^2 \leq 12n^2 = 3(2n)^2.$$

Éppen ezt akartuk belátni.

□

Megjegyzés: Valtr-nak sikerült a konstansokat megjavítania ennél jóval bonyolultabb konstrukciók segítségével. Így a következő állítások kapjuk:

$$h^3(n) \leq 1,8n^2, \quad h^4(n) \leq 2,42n^2, \; h^5(n) \leq 1,46n^2, \quad h^6(n) \leq \frac{1}{3}n^2.$$

3. fejezet

Diszjunkt üres konvex sokszögek száma

Eddig csak azt a kikötést tettük, hogy a konvex sokszögek nem tartalmazhatják a pontrendszer egyetlen más pontját sem. Most egy kicsit erősebb feltevést teszünk, nevezetesen a sokszögeknek diszjunktaknak is kell lenniük. Azonban négyszögek esetén az üresség nem jelent a diszjunktsághoz képest megszorítást, amin azt értem, hogy egy adott pontrendszerben a diszjunkt, konvex négyszögek maximális száma megegyezik az üres, diszjunkt, konvex négyszögek maximális számával. Az világos, hogy ez utóbbi nem lehet nagyobb, mert minden üres, diszjunkt rendszer egyben diszjunkt rendszer. Másrészt vegyük észre, hogy minden konvex négyszög tartalmaz üres, konvex négyszöget. Így tekintsük négyszögeknek egy diszjunkt rendszerét. Ezek mindegyike tartalmaz egy üres négyszöget. Tekintsük ezen üres négyszögeket, ezek is diszjunkt rendszert alkotnak, és persze annyi van belőlük, mint amennyi az eredeti rendszerben volt.

Ezek szerint elég megkeresni a diszjunkt, konvex négyszögeket egy pontrendszerben. Legfeljebb $\lfloor\frac{n}{4}\rfloor$ diszjunkt négyszög lehet n pont között. Az Erdős-Szekeres tételből tudjuk, hogy legalább $\lfloor\frac{n}{5}\rfloor$ van. Ezt a szokásos módon lehet megmutatni. Adott irány szerinti sorrendben ötös csoportokra osztjuk a ponthalmazt, és minden csoportban van egy négyszög, és ezek nyilván diszjunktak.

A kérdés az, hogy mennyit tudunk garantálni. Ebben a részben megmutatjuk, hogy ennél a triviálisnál tudunk jobbat mutatni, jelesen mindig van $\lfloor\frac{2n}{9}\rfloor$ diszjunkt, konvex négyszög. Másrészt azt is belátjuk, hogy a triviális felső becslésnél egy hajszállal kevesebbet lehet bizonyos esetekben kiválasztani.

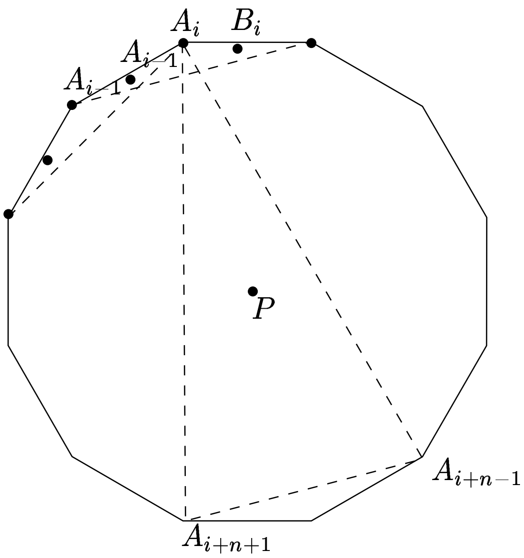
3.1. Felső becslés

Nyilván üres, konvex háromszögből legfeljebb $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, míg ötszögből legfeljebb $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ van, hiszen a csúcshalmazoknak is diszjunktaknak kell lenniük. Négyszögre hasonló becslés adódna, azonban tudunk mutatni egy olyan konstrukciót, melyben biztosan nincs ennyi diszjunkt, négyszög.

Az ötlet az, hogy ha van négy pont, melyet el lehet választani a többi ponttól, ráadásul ezek még konvex helyzetben is vannak, akkor rekurzívan mindig levágnánk egy konvex négyszöget és így meglenne az $\frac{n}{4}$ konvex négyszög. Tehát egy olyan konfigurációt kell találni, melyben bármilyen irányban is vágjuk le a szélső négy pontot, akkor azok konvex burka csak háromszög.

3.1.1. Tétel. *Van $4n+1$ általános helyzetű pont a síkon melyből nem választható ki n darab diszjunkt, konvex négyszög, ha $n \geq 3$.*

Bizonyítás: Vegyünk egy szabályos $2n$-szöget, és legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ a csúcsai. Továbbá vegyünk az A_iA_{i+1} oldal felezőpontjához elég közel egy B_i pont. Válasszunk ki még egy P pontot, a szabályos $2n$-szög középpontjához elég közel. Azt állítjuk, hogy ebben a rendszerben nem található n darab diszjunkt négyszöget.



3.1. ábra. Az n=6 eset.

Az elég közel azt jelenti, hogy minden i-re $A_iA_{i+1}A_j$ és $A_iA_{i+1}B_j$ háromszög tartalmazza B_i-t, továbbá P legyen benne minden $A_iA_{i+n-1}A_{i+n+1}$ háromszögben.

Az egészet a legjobb úgy elképzelni, hogy kombinatorikusan B_i-k az oldalfelező pontok, míg P a szabályos sokszög középpontja. Ez persze lehetetlen, mert három pont nem eshet egy egyenesre, de intuitíven jó képet ad a konfigurációról.

Az állítást indirekten látjuk be. Tegyük fel először, hogy $n \geq 3$. Ha lenne n darab négyszög, akkor a pontrendszer minden pontja egy kivételével csúcsa kellene, hogy legyen valamely négyszögnek. Így az ellentmondáshoz elég két olyan pontot mutatni, melyek nem lehetnek négyszögnek csúcsai, amit röviden csak úgy mondunk, hogy a pontok fedetlenek. Vegyük észre a következő dolgokat. Ha egy négyszögnek csúcsa A_i és A_{i+1}, akkor B_i biztosan nem lehet négyszögnek csúcsa, mert benne van abban a négyszögben, melynek A_i és A_{i+1} a csúcsai. A másik hasonló triviális észrevétel az, hogy ha A_i és A_{i+2} csúcsa egy négyszögnek, akkor A_{i+1} vagy csúcsa ennek a négyszögnek és az előző megállapítás szerint B_i és B_{i+1} fedetlen és készen vagyunk, vagy pedig ő maga fedetlen. Megjegyzendő, hogy ilyenkor csak akkor nem vagyunk készen, ha a kérdéses négyszög $A_iB_iB_{i+1}A_{i+2}$. Azt láttuk, hogy bármelyik eset is áll fent, akkor van egy olyan pontunk, ami nem lehet valamely négyszögnek csúcsa. Azt fogjuk megmutatni, hogy a két eset összesen legalább kétszer fennáll. Ez az előbbiek szerint nyilván elég. Megkülönböztetünk két esetet. Az első esetben van olyan Q négyszög, amelynek három csúcsa van a szabályos $2n$-szög csúcsai között, a másik esetben minden négyszögnek legfeljebb kettő van.

1. eset: Nézzük a négyszögnek a szabályos $2n$-szög csúcsai között levő legalább három csúcsát. Ha ezek között van két legfeljebb másodszomszédos pár, akkor készen vagyunk. Ezért feltehető, hogy legfeljebb 1 van. Persze $n = 3$ esetben mindig van két legfeljebb másodszomszédos pár. Ekkor ezek a pontok legalább két részre osztják a maradék pontokat, mely részek között nem futhat él, hiszen ellenkező esetben ez metszené Q-t. Egyébként a $2n$-szög csúcsainak egy részbe eső halmaza intervallumot alkot és az ide eső pontok másik része az oldalakhoz tartozó B_i pontokból és esetleg P-ből áll. Tudjuk azt, hogy legalább két intervallum van és ezekben legalább két csúcsa van a $2n$-szögnek van, azaz az intervallumok legalább kettő hosszúak. Nézzünk most egy tetszőleges ilyen intervallumot. Tegyük fel, hogy ebben k darab pont van. Ekkor $k \geq 2$. Tegyük fel továbbá azt, hogy az intervallumhoz tartozó részben nincsen olyan négyszög melynek legalább két csúcsa van az A_i-k között. De ebben a részben van k darab A_i, az ezekhez tartozó $k+1$ darab B_i és esetleg P. Ez összesen legfeljebb $2k+2$ pont. Azonban itt van k darab négyszög, így legalább $4k$ pontnak kell lennie. Ebből következik, hogy $4k \leq 2k+2$ vagyis $k \leq 1$, ami ellentmondás, azaz minden részben van olyan négyszög, melynek legalább két csúcsa szerepel az A_i-k között. Nézzünk most egy tetszőleges intervallumot és nézzük az ideeső előbbi tulajdonságú négyszögek közül azt, amelynek az A_i-beli csúcsai közötti távolság minimális. Itt a távolságot úgy értem, hogy hány csúcs van ebben az intervallumban a két csúcs között. Nézzünk most egy a minimumot realizáló párt. Ha ezek távolsága legfeljebb 1, akkor készen vagyunk, mert pont ilyeneket kerestünk. Ha a távolságuk legalább három, akkor az előbb láttuk be, hogy ezek nem tartozhatnak mind különböző négyszöghöz, így van olyan pár, ami ugyanahhoz a négyszöghöz tartozik, de ezek távolsága kisebb, mint a minimumot realizáló párnál, ami ellentmondás. Kettő azért nem lehet, mert nem tartozhatnak ugyanahhoz a négyszöghöz, hiszen ekkor az ő távolságuk kisebb lenne, mint a minimum, két különbözőhöz pedig azért nem, mert éppen ezt láttuk be ezen bekezdésben, kicsit korábban. Ezért minden intervallumban, valamely eset legalább egyszer előfordul, ezért legalább kétszer van két legfeljebb másodszomszédos pár, ezért van két fedetlen pont is.

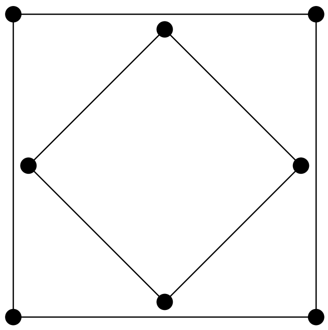
2. eset: Ebben az esetben minden négyszögnek legfeljebb két csúcsa van az A_i-k között és az indirekt feltevés szerint van n konvex négyszögünk a pontrendszerben, ezért legalább $n-1$ négyszögnek van két csúcsa és legfeljebb egy négyszögnek van egy csúcsa az A_i-k között. Ha van ilyen csúcs, azt hívjuk magányosnak. A $2n$-szög két csúcsának távolságán a köztük lévő pont közti csúcsok száma közül a kisebbiket értjük. Tekintsünk most egy legközelebbi csúcspárt. Ezek távolsága nem lehet kettőnél nagyobb, ugyanis ha lenne köztük legalább három csúcs, akkor azok között lehet egy magányos csúcs, de még maradt legalább két csúcs és ezek nem tartozhatnak ugyanahhoz a négyszöghöz, hiszen közelebb lennének, mint a legközelebbi pár, így fedetlennek kell lenniük és készen vagyunk. Ha a legközelebbi pár távolsága legfeljebb egy, akkor automatikusan van egy fedetlen pontunk. Ha pedig kettő, akkor ez a két pont nem lehet ugyanannak a négyszögnek két csúcsa, mert ennek a két pontnak a távolsága kisebb lenne, mint a minimum. De így "legrosszabb" esetben az egyik csúcs magányos, a másik pedig fedetlen. Így arra a következtetésre jutottunk, hogy ebben az intervallumban legalább egy fedetlen pontunk.

Tekintsük most a legközelebbi pontpár által meghatározott másik intervallumot. Ebben a részben ugyanúgy találhatunk egy fedetlen pontot. Vegyük azt a négyszöget, melynek csúcsai ide esnek és csúcsai között a távolság minimális. Ez meghatároz egy I intervallumot, mely része a nagy intervallumnak és ebben az I intervallumban találhatunk egy fedetlen pontot.

□

Megjegyzés: Ez a konstrukció azért nem működik az $n = 2$ esetben, mert itt nincs meg az a középső rész, amelybe P-t beletehetnénk. Ebben az esetben nyolcpontú halmazt tudunk mutatni, mely nem tartalmaz két diszjunkt, konvex négyszöget.

3.1.2. Állítás. *Van a síknak egy olyan nyolpontú részhalmaza, mely nem tartalmaz két diszjunkt, konvex négyszöget.*



3.2. ábra. 8 pontú ellenpélda

Bizonyítás: A 3.2. ábra nyolc pontja között nincsen két diszjunkt, konvex négyszög. Hasonlóan a korábbi konstrukcióhoz a belső négyzet csúcsai elég közel vannak a külső négyzet oldalfelező pontjaihoz. A bizonyítás indirekten megy. Tekintsük a két konvex négyszöget a ponthalmazból. Ha az egyiknek a csúcsai a külső négyzet csúcsai, akkor a másik négyszög nem lesz tőle diszjunkt. Ha csak három csúcsa van a külső négyzetből, akkor is eme három pont konvex burkában van még egy pontja a pontrendszerünkne, ezért a ebben a négyszögben legalább öt pont van, ami kizárja, hogy legyen még egy konvex négyszög, ami az elsőtől diszjunkt.

Ha kettő lenne, akkor a diszjunktság csak akkor teljesülhet, ha a két csúcs a négyzetnek szomszédos csúcsai. viszont a belső négyzet azon csúcsa, amely elég közel van az oldalfelező ponthoz benne lesz a konvex négyszögben, így a másik konvex négyszögnek legfeljebb három csúcsa lehet, ami lehetetlen. Ha pedig van két konvex, diszjunkt négyszög, és az egyiknek legfeljebb egy csúcsa van a külső négyzeten, akkor a másiknak van legalább három, és ezzel a problémával már az imént elbántunk.

□

3.2. Alsó becslés

3.2.1. Három- és ötszögek

Ebben az esetben van a két triviális korlát, nevezetesen a háromszögek számára $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, az ötszögekre $\lfloor \frac{n}{10} \rfloor$. A pontrendszer $P = \{A_1, \ldots A_n\}$, növekvő

x-koordináta szerint indexelve. Legyen $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{10} \rfloor$. Tekintsük a következő részhalmazt $P_k = \{A_{10k-9}, \dots A_{10k}\}$. Ekkor ha $k \neq l$, $P_k \cap P_l = \emptyset$. Viszont a korábban belátott állítás szerint mindegyik P_k-ban van egy üres, konvex ötszög, melyek az előbbiek szerint diszjunktak.

Háromszögre a bizonyítás teljesen hasonló. Ez viszont azt jelenti, hogy háromszögekre ennyi a pontos érték, mert ennyi volt a felső becslés is.

Négyszögekre ugyanez a konstrukció $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$-t ad, de most ennél egy jobbat fogunk mutatni.

3.2.2. Négyszögek

Az alsó becslés javításának az elve nem különbözik attól, ahogy a triviális alsó becslés készült. Megmutatjuk, hogy 9 pontból mindig található két diszjunkt, konvex négyszög és ezután elég 9 pontú halmazokra felosztani az eredeti ponthalmazt. Ami érdekessé teszi a dolgot az, hogy nem két négyszöget akarunk kiválasztani, hanem hármat, vagy négyet, akkor rosszabb arányt kapunk, mint $\frac{2}{9}$, csak $\frac{3}{14}$, illetve $\frac{4}{17}$.

3.2.1. Tétel. *Egy n pontú általános helyzetű síkbeli pontrendszerből mindig ki lehet választani $\lfloor \frac{2n}{9} \rfloor$ diszjunkt üres konvex négyszöget.*

Bizonyítás: Mint azt láttuk az állítást elég diszjunkt, konvex négyszögekre belátni. Először azt fogjuk belátni, hogy 9 pontból van mindig 2 diszjunkt, konvex négyszög.

Ehhez néhány fogalmat fogunk bevezetni.

Definíció: Adott néhány általános helyzetű pont a síkon. Legyen A, B, C csúcsa a konvex buroknak, akkor mondjuk, hogy az $ABC_\triangle$ háromszög szélső, ha az AC egyenes elválasztja a háromszöget a pontrendszer többi csúcsától. Két szélső háromszög szomszédos, ha belsejük metszete nem üres.

3.2.2. Állítás. *Ha van üres szélső háromszög és legalább 4 pontja van a pontrendszernek, akkor létezik egy üres konvex négyszög, melyet egy egyenessel el lehet választani a pontrendszer többi pontjától.*

Bizonyítás: Tekintsünk egy üres, szélső háromszöget, legyen ez $ABC_\triangle$. Legyen továbbá az AC egyeneshez legközelebbi, B-től különböző pontja a pontrendszernek D. Ekkor az $ABCD$ négyszög konvex lesz, és a D-n keresztülmenő, AC-vel párhuzamos e egyenes elválasztja a pontrendszer maradékától.

□

Konvenció: A 9 pont konvex burkának csúcsait A_i-vel, a többi(belső) pontot B_j-vel jelöljük.

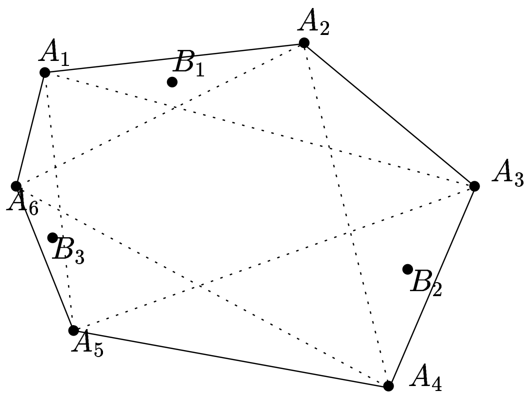
Az előbbi állításból következik, hogy ha van üres, szélső háromszög, akkor le lehet vágni egy konvex négyszöget, és a maradék 5 pont között van még egy konvex négyszög és ezek nyilván diszjunktak. Vegyük észre, hogy minden belső pont legfeljebb két szélső háromszögben lehet benne. Továbbá egy konvex m szögben m darab szélső háromszög van.

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy a 9 pont konvex burkának hány oldala van. Az eddigiekből azonnal következik, hogy ha a 9 pont konvex burka legalább hétszög, akkor van üres, szélső háromszög és így van benne egy konvex négyszög, melyet le lehet vágni egy egyenessel a ponthalmazból.

A bizonyítás gondolatmenete az, hogy bizonyos esetekben triviálisan található két diszjunkt konvex négyszög, és ha ezeket az eseteket kizártuk, akkor csak néhány speciális konfiguráció marad, melyekben már megint lehet két négyszöget találni. Azt próbáljuk megmutatni, hogy mindig lehet találni egy konvex négyszöget és egy egyenest, mely elválasztja a többi ponttól. Ezt elég lenne belátni, mert ekkor a maradék öt pont között még kell lennie egy konvex négyszögnek, ami nyilván diszjunkt az előzőleg megtalálttól.

A továbbiakban azt is feltesszük, hogy az pontrendszer semelyik két egyenese nem párhuzamos. Ez nem jelent megszorítást, ugyanis válasszunk egy olyan egyenest, mely nem metsz bele a konvex burok belsejébe és nem metszi rajta egymást a pontrendszer semelyik két egyenese. Ekkor egy projektív transzformációval elérhető, hogy ez az egyenes legyen az ideális egyenes, és ez a konvexitást és az ürességet nem változtatja meg.

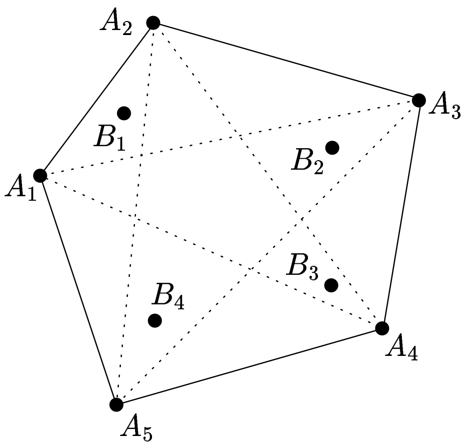
1. eset: Hatszög a konvex burok. Legyenek $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ a hatszög csúcsai, a maradék három pont B_1, B_2 és B_3. Ebben az esetben tudjuk, hogy minden belső pontnak pontosan két szélső háromszögben kell lennie és nem lehet két pont ugyanabban a szélső háromszögben, mert különben lenne üres szélső háromszög. Vagyis a helyzet a következő.



3.3. ábra. A konvex burok hatszög

Ekkor az $A_2A_3B_2B_1$ négyszög konvex lesz, mert A_1 és A_2 az eredeti konvex buroknak is csúcsa, B_1-t az A_1A_3, B_2-t pedig az A_2A_4 egyenes választja el a másik három ponttól.

2. eset: A konvex burok ötszög. Ekkor öt szélső háromszöget kell lefognunk négy ponttal, ezért van olyan belső pont, mely két szélső háromszögben van benne.



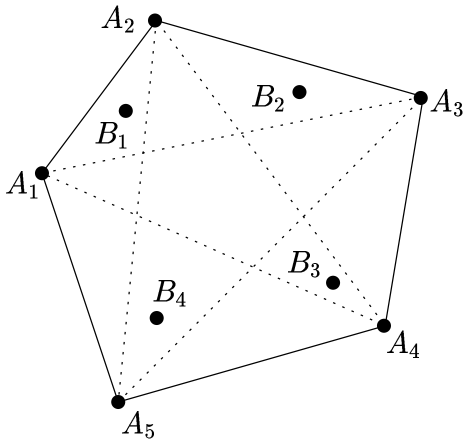
3.4. ábra. 2.1. eset

2.1. eset: Egy ilyen pont van. Ekkor a maradék három pontnak le kell fognia a maradék három szélső háromszöget.

Ekkor a $B_1B_4A_5A_1$ négyszög konvex lesz, hiszen mindegyik csúcsát el lehet választani a maradék háromtól egy egyenessel. Megint elég egy olyan egyenest mutatni, mely a négyszöget elválasztja a többi öt ponttól. Legyen $C = A_3A_5 \cap A_1A_4$. Most az A_2C egyenes jó lesz elválasztónak.

2.2. eset: Két ilyen pont van: B_1 és B_2. Ezek nem eshetnek ugyanabba a két szélső háromszögbe, mert akkor a maradék két pontnak, melyek egy-egy szélső háromszögben vannak le kellene fognia három szélső háromszöget, ami lehetetlen. Azt persze ezzel nem zártuk ki, hogy legyen egy olyan szélső háromszög, melybe mindkét pont beleesik. Ennek megfelelően különböztetjük meg a maradék két esetet.

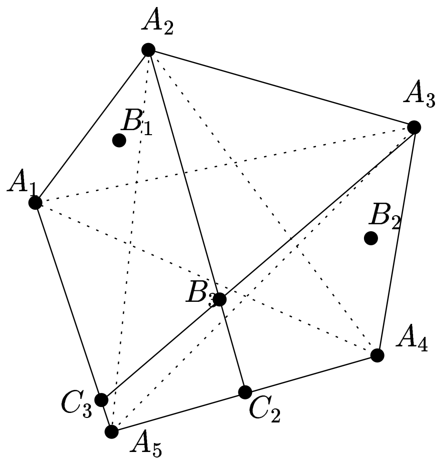
2.2.1. eset: Van olyan szélső háromszög, melyben B_1 és B_2 is benne van. Ekkor a két pont csak három szélső háromszöget fog le, így a maradék két pontnak le kell még fognia a lefogatlan két szélső háromszöget, ebben az esetben a helyzet a következő:



3.5. ábra. 2.2.1. eset

Ekkor a $B_3B_4A_5A_4$ négyszög konvex lesz, mert megint van minden csúcsára olyan egyenes, mely elválasztja a másik három csúcstól és az A_1A_3 egyenes szeparálja a maradék 5 ponttól. Az is látható, hogy a másik konvex négyszög az $A_1B_1B_2A_3$.

2.2.2. eset: Nincs ilyen háromszög. Most B_1 és B_2 összesen négy négyszöget fog le. Ekkor az ötödiket is le kell fognia valamely pontnak, mondjuk B_3-nak. Azaz a pontok a következőképpen helyezkednek el:



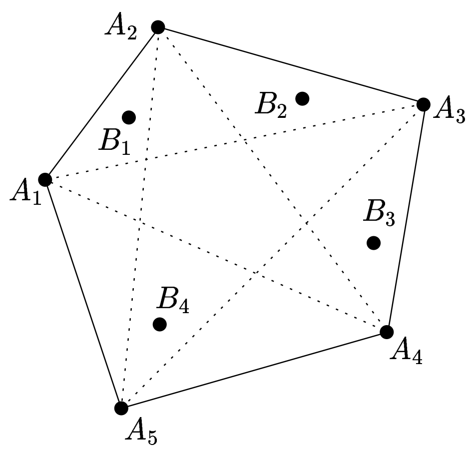
3.6. ábra. 2.2.2. eset

Igazából a kilenc pontból nyolcnak a helyzetét már tudjuk, még B_4 helyzete kérdéses. Vegyük azt észre, hogy az A_2B_3 egyenesnek A_1, A_5 és B_1, illetve A_2, A_3, A_4 és ezzel persze B_2 is ellentétes oldalán helyezkednek el. Hasonlóképpen az A_3B_3 egyenesnek B_2, A_4 és A_5, illetve A_1, A_2, A_3 és B_1 vannak ellentétes partján.

Ha B_4 az A_2B_3-nak a B_1-gyel ellentétes oldalán helyezkedik el, akkor az $A_1B_1B_3A_5$ konvex négyszöget az A_2B_3 elválasztja a maradék öt ponttól. Ugyanígy ha B_4 az A_3B_3-nak B_2-vel ellentétes oldalán van, akkor az $A_4B_2B_3A_5$ vágható le az A_3B_3 egyenessel. Legyen most $C_3 = A_3B_3 \cap A_1A_5$ és $C_2 = A_2B_3 \cap A_4A_5$. Most csak akkor nem vagyunk készen ha B_4 benne van az $A_5C_3B_3C_2$ négyszögben, mert különben az előbb említett két eset valamelyike teljesülne. De ez a négyszög része az $A_1A_4A_5$ háromszögnek, így B_4 is benne van ebben a háromszögben, ezért a $B_1B_2A_3A_2$ négyszöget az A_1A_4 egyenes elválasztja a maradék öt ponttól, így most is készen vagyunk.

2.3. eset: 3 ilyen pont van: B_1, B_2 és B_3. Ha ezek közül kettő ugyanabba a két szélső háromszögbe esne, akkor ez a három pont legfeljebb négy háromszöget fogna le, ami azt jelenti, hogy a negyedik pontnak még benne kell lennie az ötödik szélső háromszögben. De ekkor az $A_5B_4B_3A_4$ egy konvex négyszög lesz, melyet az A_1A_3 egyenes szeparál a többi ponttól. Tehát feltehető, hogy nem esik két pont ugyanabba a két szélső háromszögbe. Mivel öt szélső háromszög van és B_1, B_2 és B_3 is két szélső háromszögben van benne, azért van olyan szélső háromszög, melybe közülük legalább kettő esik. Azonban legfeljebb két ilyen háromszög lehet.

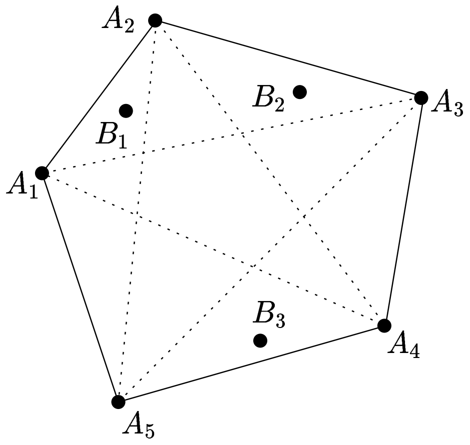
2.3.1. eset: Két ilyen háromszög van. Ekkor B_1, B_2 és B_3 összesen négy szélső háromszögben van benne, így B_4-nek le kell fognia az ötödiket.



3.7. ábra. 2.3.1. eset

Vegyük észre, hogy B_2 A_1A_3-nak a B_3-mal ellentétes oldalára esik, így az $A_5B_4B_3A_4$ konvex négyszöget az A_1A_3 egyenes elválasztja a többi ponttól.

2.3.2. eset: Csak egy ilyen háromszög van.

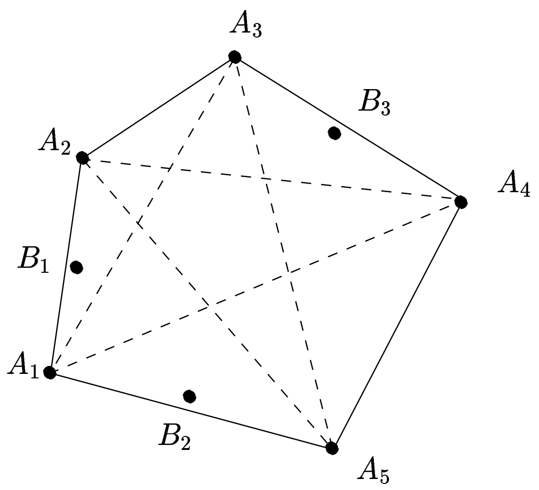


3.8. ábra. 2.3.2. eset

Ekkor B_4 az A_2B_3 egyenes valamelyik oldalára esik, mondjuk a B_1-gyel ellentétesre. Most a $B_1B_3A_5A_1$ négyszög konvex és az A_2B_3 egyenes szeparálja a másik öt ponttól.

2.4. eset: Négy ilyen pont van, azaz az összes belső pont két szélső háromszöget fog le. Ekkor nem eshet három pont ugyanabba a két szélső háromszögbe, mert ebben az esetben csak négy szélső háromszöget fogna le a négy pont. Azaz van három olyan belső pont, melyek közül semelyik kettő nem ugyanabban a két szélső háromszögben van. Ekkor viszont kell lennie egy olyan szélső háromszögnek, amiben két pont van ebből a háromból. Legyen ez a háromszög az $A_2A_1A_5$ háromszög és essen ebbe bele a B_1 és B_2 pont. Megint két lehetőségünk van, annak megfelelően, hogy a harmadik belső pont, B_3 hol helyezkedik el.

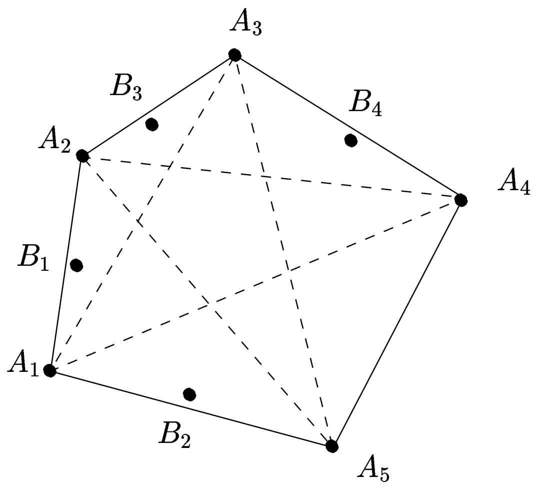
2.4.1. eset: A B_3 pont nincs benne azokban a szélső háromszögekben, melyek tartalmazzák B_1-t és B_2-t. Ekkor megint feltehető, hogy a pontok a következőképpen helyezkednek el.



3.9. ábra. 2.4.1 eset

Ebben az esetben a B_4 pont az A_1B_3 egyenesnek valamelyik oldalára esik, feltehető, hogy a B_2-vel ellentétesre. Ekkor a $B_2B_3A_4A_5$ négyszög konvex lesz és az A_1B_3 egyenes elválasztja a többi ponttól.

2.4.2. eset: A B_3 valamelyik ponttal azonos szélső háromszögbe esik. Legyen mondjuk ez a pont a B_1. Most feltehető az általánosság megszorítása nélkül, hogy a pontok a következőképpen helyezkednek el. Ekkor az $A_3A_4A_5$ szélső háromszöget a B_4 pontnak le kell fognia.

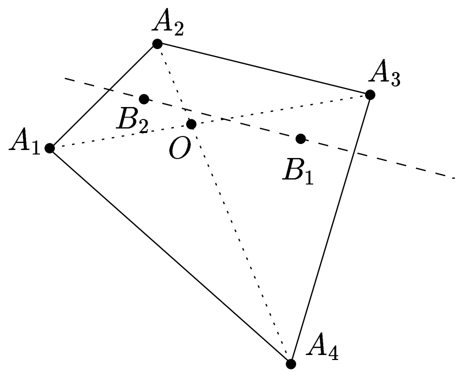


3.10. ábra. 2.4.2. eset

De ekkor a $B_4B_2A_5A_4$ konvex négyszöget az A_1B_4 egyenes elválasztja a többi ponttól.

3. eset: Négyszög a konvex burok. Legyenek A_1, A_2, A_3, A_4 a négyszög csúcsai ciklikus sorrendben, a többi pont pedig B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, legyen továbbá O az $\overline{A_1A_3}$ és $\overline{A_2A_4}$ átlók metszéspontja. Két alapeset van: vagy van olyan A_iOA_{i+1} háromszög, ami üres, vagy nincs ilyen.

3.1. eset: Van ilyen üres háromszög.

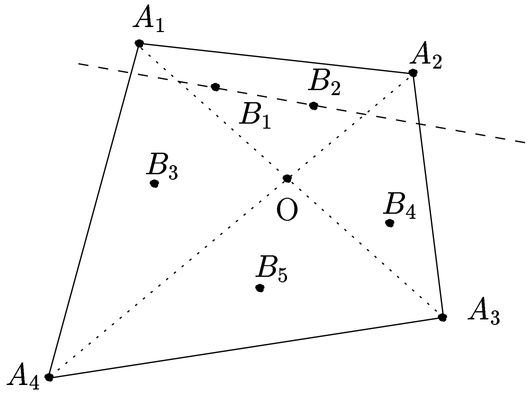


3.11. ábra. Van üres háromszög

Legyen egy ilyen háromszög A_1A_4O. Ekkor az A_4A_3O és az A_1A_2O háromszögekben kell lennie pontnak, különben lenne üres szélső háromszög. Forgassuk most el az A_1A_4 egyenest A_1 körül pozitív irányba. Legyen az első pont, amit elérünk B_1. Ez a pont a fentiek szerint az A_4A_3O háromszögben van. Forgassuk most el az A_1B_1 egyenest a B_1 pont körül negatív irányba és legyen az első pont, amit elérünk B_2. Az előbbiek szerint ez a fenti két háromszög valamelyikében kell, hogy legyen, azaz B_1B_2 az $\overline{A_3A_4}$-t és az $\overline{A_1A_2}$-t metszi, így az $A_1A_4B_1B_2$ négyszög konvex lesz és a B_1B_2 egyenes elválasztja a többi ponttól.

3.2. eset: Nincs üres háromszög. Ekkor a négy háromszög közül egyben van két pont a többiben egy. Legyen ekkor a B_1 és B_2 pont az A_1OA_2 háromszögben, B_3 az A_1OA_3 háromszögben, B_4 az A_2OA_3 háromszögben és B_4 az A_3OA_4 háromszögben.

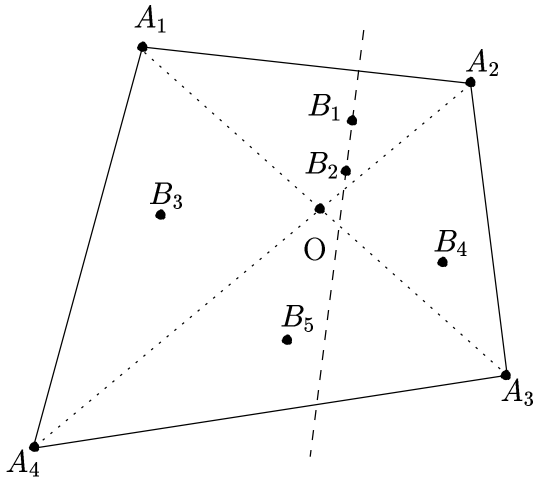
3.2.1. eset: B_1B_2 nem metszi $\overline{A_1A_2}$-t. Ekkor csak $\overline{A_3A_2}$-t és $\overline{A_1A_4}$-t metszheti. Tegyük fel, hogy B_4 és B_3 B_1B_2-nek az A_1-gyel ellentétes oldalán vannak. Ekkor az $A_1B_1B_2A_2$ négyszög konvex lesz és a B_1B_2 egyenes elválasztja a többi ponttól. Ha mondjuk B_3 az egyenes másik oldalán van, akkor B_1-t lecseréljük B_3-ra és ugyanaz elmondható, hasonlóan B_4-t B_2-re cseréljük.



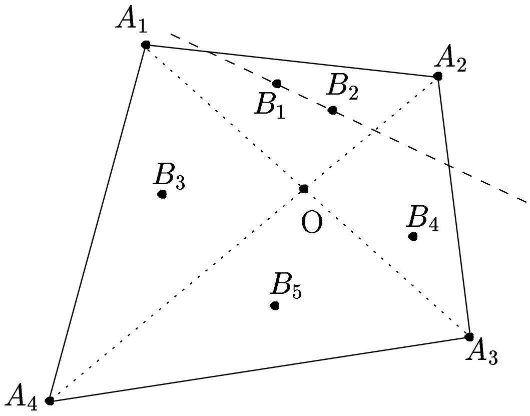
3.12. ábra. 3.2.1. eset

3.2.2. eset: B_1B_2 elmetszi $\overline{A_1A_2}$-t. A továbbiakban feltesszük, hogy B_1 van közelebb az A_1A_2 egyeneshez.

3.2.2.1. eset: B_1B_2 még $\overline{A_3A_4}$-t metszi el. Feltehető, hogy B_1B_2 nem metsz bele az A_1OA_4 háromszög belsejébe. Most az $A_1B_1B_2B_3$ négyszög konvex lesz, és az A_2A_4 átló elválasztja a többi ponttól. Ez nyilvánvalóan konvex négyszög. Az is látható, hogy a másik négyszög az $A_2B_4B_5A_4$ lesz.



3.13. ábra. 3.2.2.1. eset

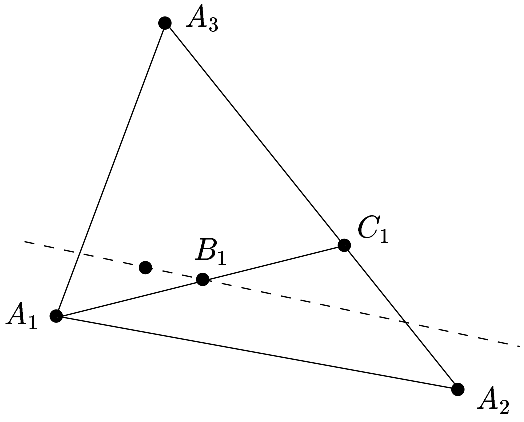


3.14. ábra. 3.2.2.2. eset

3.2.2.2. eset: B_1B_2 még $\overline{A_1A_4}$-t, vagy $\overline{A_3A_2}$-t metszi el. Feltehető, hogy $\overline{A_3A_2}$-t. Ebben az esetben az $A_1B_1B_2B_3$ négyszög konvex lesz, mert A_1 csúcsa volt már az egész ponthalmaznak is, B_3-t az A_1A_3 egyenes választja el a többitől, míg B_1-t és B_2-t a B_1B_2 egyenes.

A_1 és B_3 nem lehet az egyenes különböző partján, mert az esetben teljesülne, hogy $B_3 \in A_1A_2O_\triangle \cup A_2A_3O_\triangle$, de nem ez az igazság. A fenti konvex négyszöget pedig az A_2A_4 átló választja el a többitől.

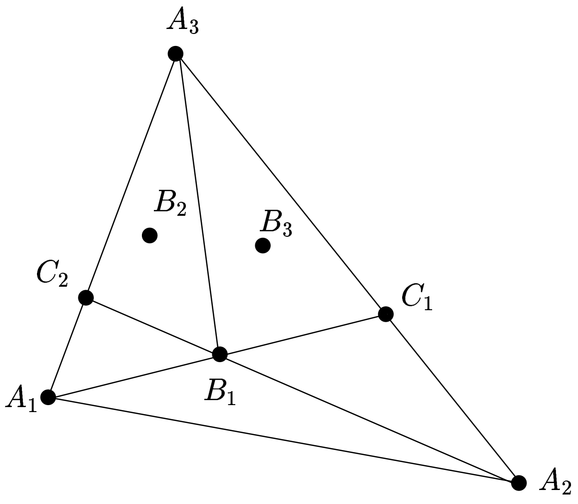
4. eset: A konvex burok háromszög. Ekkor a háromszög csúcsai A_1, A_2, A_3, a többi hat pont pedig $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$. Forgassuk el most az A_1A_2 egyenest A_1 körül pozitív irányba. Legyen az első pont melyet elérünk B_1, továbbá $C_1 = A_1B_1 \cap A_2A_3$. Most forgassuk el az A_1B_1 egyenest B_1 körül negatív irányba.



3.15. ábra.

Ha most egy B_2 pontot előbb érünk el, mint A_2-t, akkor az $A_1B_2B_1A_2$ négyszög konvex lesz és a B_1B_2 egyenes elválasztja a többi ponttól. Ezért feltehető, hogy először A_2-t érjük el és csak aztán egy B_2-t. Az is feltehető, hogy az $A_1B_1A_3$ háromszög nem üres, mert ebben ez esetben az $A_1B_1B_2A_3$ konvex négyszög vágható le a B_1B_2 egyenessel. Legyen $C_2 = B_1A_2 \cap A_1A_3$. Ha a $B_1A_3C_1$ háromszög üres lenne, akkor forgassuk el a B_1A_3 egyenest B_1 körül pozitív irányba és legyen az első elért pont B_3. Most az $A_2B_1B_3A_3$ konvex négyszög vágható le a B_1B_3 egyenessel. Tehát a helyzet a következő:

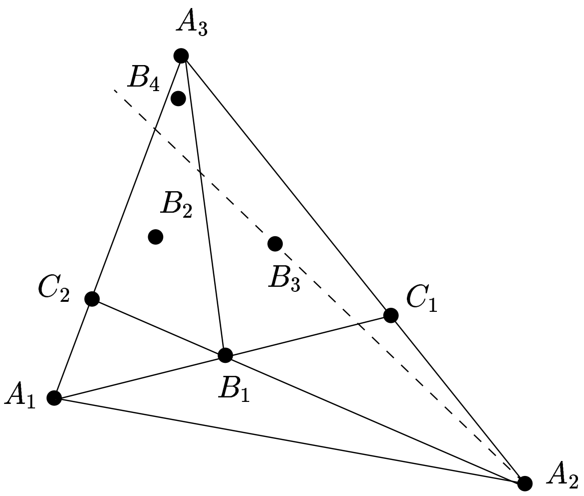
A maradék 3 pont az $A_3B_1C_2$ és az $A_3B_1C_1$ háromszögben van. A dolog szimmetriája miatt két eset van. Vagy mindhárom pont ugyanabban a háromszögben van, vagy az egyikben egy és a másikban kettő.



3.16. ábra. 4. eset

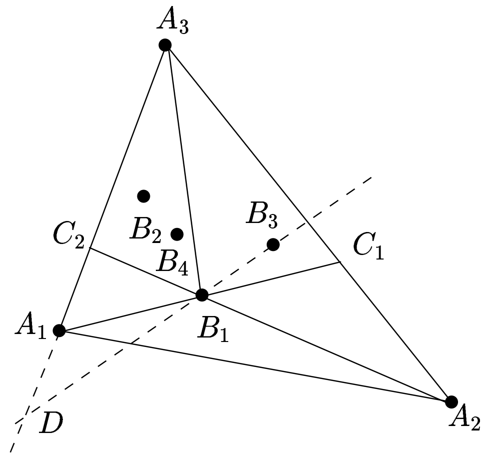
4.1. eset: Mindhárom pont ugyanabban a háromszögben van, mondjuk az $A_3B_1C_2$-ben. Most az $A_3B_1C_1$ háromszögben, csak a B_3 pont van.

4.1.1. eset: Van pont az A_2B_3 egyenes A_3-mal megegyező oldalán. Forgassukel az A_3B_3 egyenest B_3 körül pozitív irányba. Legyen az első pont,amit elérünk B_4. Ekkor a fenti feltétel szerint az $A_3B_4B_3A_2$ négyszög konvex lesz és a B_4B_3 egyenes elválasztja a többi ponttól.



3.17. ábra. 4.1.1. eset

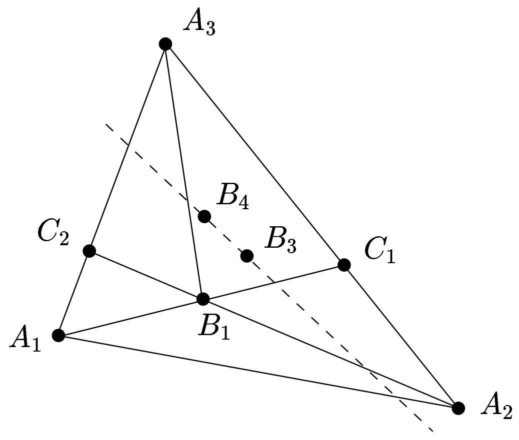
4.1.2. eset: Nincs pont a az A_2B_3 egyenes A_3 felőli oldalán. Feltevésünk szerint az A_1A_3 és a B_1B_3 egyenesek nem párhuzamosak. Legyen a metszéspontjuk D. Ekkor forgassuk el a B_1B_3 egyenest D körül pozitív irányba és legyen az első pont, amit elérünk B_4. Ekkor az $A_2B_3B_4B_1$ négyszög konvex lesz, ugyanis B_4 nem lehet sem az A_2B_1 egyenes A_1 felőli oldalán, sem az A_2B_3 egyenes A_3 felőli oldalán. És a DB_4 egyenes szeparálja a többi ponttól



3.18. ábra. 4.1.2. eset

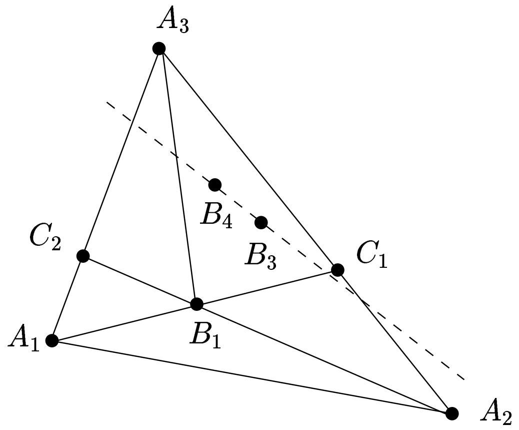
4.2. eset: Az egyik háromszögben két pont van, a másikban egy. Tegyük fel, hogy az $A_3B_1C_1$ háromszögben van összesen két pont B_3 és B_4.

4.2.1 eset: A B_3B_4 egyenes nem metszi az $\overline{A_2A_3}$ oldalt. Most a többi ponttól el lehet választani az $A_3B_4B_3A_2$ konvex négyszöget az A_3B_1 egyenessel.



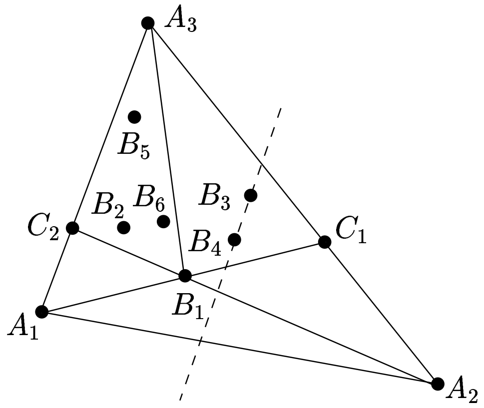
3.19. ábra. 4.2.1. eset

4.2.2. eset: A B_3B_4 egyenes $\overline{A_2A_3}$-t és $\overline{B_1A_3}$-t metszi el. Ekkor le lehet vágni a $B_1B_3B_4A_2$ konvex négyszöget az A_3B_1 egyenessel. Ez valóban konvex négyszög, mert A_2 és A_3 az egész pontrendszernek is csúcsa volt, míg a másik két pontot éppen egyenesük választja el a A_2-től és A_3-tól.



3.20. ábra. 4.2.2. eset

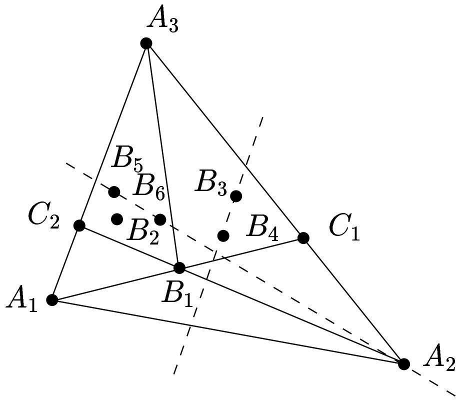
4.2.3. eset: A B_3B_4 egyenes $\overline{A_2A_3}$-t és $\overline{A_2B_1}$-t metszi. Nézzük most a maradék négy pontot: A_1-t, B_2-t, B_5-t és B_6-t. Ha ezek konvex négyszöget alkotnak, akkor ezt a négyszöget az A_3B_1 egyenes elválasztja a többitől. Ezért feltehető, hogy B_2 benne van az $A_1B_5B_6$ háromszögben. Itt most B_2 nem az a B_2 pont, melyet korábban kijelöltük. Vagyis az általánosság megszorítása nélkül feltehtjük, hogy a helyzet a következő:



3.21. ábra. 4.2.3. eset

Most már csak 3 eset van hátra. A B_3B_4 egyenesen B_3 válassza el B_4-et az A_2A_3 egyenestől. A B_5B_6 egyenesen B_5 válassza el B_6-ot az $\overline{A_1A_3}$ szakasztól, ha $B_5B_6 \cap \overline{A_1A_3} \neq \emptyset$, egyébként pedig az $\overline{A_2A_3}$ szakasztól.

4.2.3.1. eset: B_3 és B_4 is B_5B_6-nak A_3-mal megegyező oldalán vannak. Ekkor három lehetőség maradt annak megfelelően, hogy a B_5B_6 egyenes melyik két oldalt metszi el.

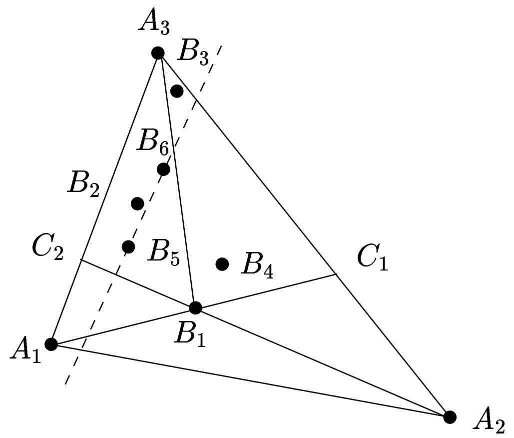


3.22. ábra. 4.2.3.1. eset

- $\overline{A_1A_3}$ oldalt metszi. Ekkor az $A_3B_5B_4B_3$ és az $A_1B_2B_6B_1$ négyszögek konvexek lesznek és a B_5B_4 egyenes elválasztja ezeket.
- $\overline{A_1A_3}$ oldalt nem metszi. Ekkor az $A_2B_1B_6B_5$ konvex négyszög lesz és a maradék öt pont a B_5B_6 egyenes túlsó oldalán van.

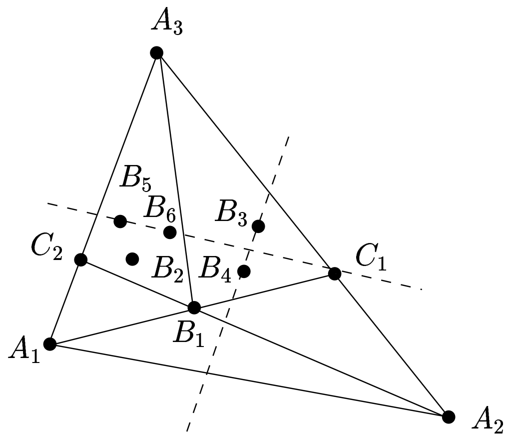
4.2.3.2. eset: B_3 és B_4 a B_5B_6 ellentétes oldalán vannak. Mondjuk B_3 van A_3 oldalán. Ekkor ha B_5B_6 az

- $\overline{A_1A_3}$ oldalt nem metszi, akkor az $A_3B_3B_5B_2$ négyszög konvex lesz. Most vagy $A_1B_6B_4B_1$ konvex és azt A_1B_6 szeparálja $A_3B_3B_5B_2$-tôl, vagy $A_2B_4B_6B_1$ konvex és azt B_5B_6 szeparálja $A_3B_3B_5B_2$-tôl.



3.23. ábra. 4.2.3.2. eset

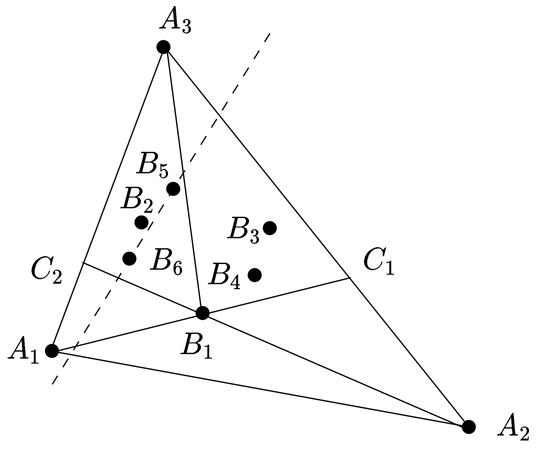
- $\overline{A_1A_3}$ oldalt elmetszi, akkor az $A_3B_5B_6B_3$ és $A_1B_2B_4B_1$ négyszög konvex lesz és a B_5B_6 egyenes leválasztja.



3.24. ábra. 4.2.3.2. eset

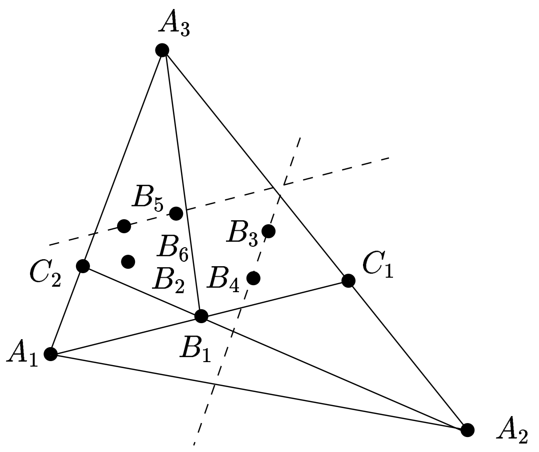
4.2.3.3. eset: B_3 és B_4 is B_5B_6-nak A_3-mal ellentétes oldalán van. Ebben az esetben még van némi bonyodalom. Ha ugyanis az $A_3B_6B_2B_5$ négyszög nem lenne konvex, az csak úgy lehetne, hogy B_2B_5 nem metszi el $\overline{A_1A_3}$-t, azaz az $A_1B_2B_5A_3$ konvex négyszöget alkot. Ez nem lenne más, mint az, hogy az A_1A_3 egyenest kezdenénk el forgatni A_1 körül, megtalálnánk B_5 pontot, aztán a B_5A_1-t kezdenénk el forgatni, és még A_3 előtt elérnénk egy másik pontot, azaz egy korábbi esetben lennénk. Tehát ekkor készen vagyunk. Ezért feltehető, hogy az $A_3B_6B_2B_5$ négyszög konvex. Most két lehetőség van.

- B_5B_6 egyenes az $\overline{A_1A_3}$ oldalt nem metszi. Ekkor az $A_3B_5B_2A_1$ négyszög konvex lesz és a B_5B_6 egyenes elválasztja a többi ponttól.



3.25. ábra. 4.2.3.3. eset

- B_5B_6 egyenes az $\overline{A_1A_3}$ oldalt elmetszi. Ekkor $A_3B_6B_2B_5$ konvex négyszöget az A_1B_6 egyenes biztosan elválasztja a másik 5 ponttól. Ugyanis ekkor az A_1B_6-nak B_1, A_2, A_1 a négyszöggel ellentétes oldalára esik eleve. Viszont az egyenes azon oldala, melyben A_3 van nem tartalmazhatja B_3-t és B_4-t, mert ezek a $B_1C_1A_3$ háromszögben vannak, de a félsíknak az ide eső része benne van B_5B_6 egyenes A_3 felőli félsíkjának, amiben nincs benne B_3, B_4.



3.26. ábra. 4.2.3.3. eset

Bármilyen hihetetlen az esetek elfogytak és mivel minden esetben találtunk két diszjunkt, konvex négyszöget, azért az állítást beláttuk.

Térjünk vissza a tétel bizonyítására. Pontszámra vonatkozó teljes indukciót alkalmazunk. Az $1 \leq n \leq 4$ esetén található benne 0 darab üres, konvex négyszög. A korábbiakból azt is tudjuk, hogy ha $5 \leq n \leq 8$, akkor n általános helyzetű pont között mindig található egy üres, konvex négyszög. Az előbb azt láttuk be, hogy 9 pont között mindig van két diszjunkt, üres négyszög. Így az indukció kezdőlépésével készen vagyunk, elég az $n \geq 10$ esettel foglalkozni. Indexeljük a pontokat x-koordináta szerint növekvő sorrendben. Tehát a halmazunk $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. Most az előbb belátott állítás szerint, $\{P_1, P_2, \dots, P_9\}$ halmazban van két diszjunkt, konvex négyszög, az indukciós feltevés szerint a többi pont között pedig van $\lfloor \frac{2(n-9)}{9} \rfloor = \lfloor \frac{2n}{9} \rfloor - 2$ darab diszjunkt, konvex négyszög. Így összesen a kívánt számú konvex négyszöget találtunk.

□

Megjegyzés: A két korlátból azonnal következik, hogy 3 konvex, diszjunkt, üres négyszög kiválasztásához legalább 14 pont kell, de ennyi elég is, továbbá négy négyszögre ugyanez a korlát 18 pont. Az első kérdéses eset az öt négyszögé. Ekkor ugyanis azt tudjuk, hogy van 21 pont a síkon, melyek között nincs öt diszjunkt, konvex négyszög, és azt tudjuk, hogy bármely 23 pont között mindig van öt. Kérdés van-e mindig 22 pont között.

Irodalomjegyzék

[1] BÁRÁNY I., FÜREDI Z.: *Empty simplices in Euclidean space*, Canadian Math. Bull. **30** (1987) 436-445.

[2] ERDŐS P., SZEKERES GY.: *A combinatorial problem in geometry*, Compositio Math. **2** (1935), 463-470.

[3] ERDŐS P., SZEKERES GY.: *On some extremum problems in elementary geometry*, Ann. Univ. Sci. Budapest **3/4** (1960/61), 53-62.

[4] HARBORTH, H.: *Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen*, Elem. Math **33** (1978), 116-118 oldal

[5] HORTON, J. D.: *Sets with no empty 7-gons*, Canadian Math. Bull. **26** (1983), 482-484.

[6] KATCHALSKI, M., MEIR, A.: *On empty triangles determined by* n *points in the plane*, Acta Math. Hung. **51** (1988), 323-328.

[7] TÓTH G., VALTR, P.: *Note on the Erdôs-Szekeres theorem*, Discrete Comput. Geom. **19** (1998), 457-459.

[8] VALTR, P.: *On the minimum number of empty polygons in planar point sets*, Studia Sci. Math. Hungar. **30** (1995), 155-163.