NeedsTeXFormatLaTeX2e

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Nem standard módszerek a sztochasztikus analízisben

Írta: **Balka Richárd**

Matematikus szak

2006.

Témavezető: **Prokaj Vilmos** Docens

ELTE TTK Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

1. fejezet

A nem standard analízis alapjai

1.1. Nem standard valós számok (hipervalós számok)

Egy lehetséges konstrukció a következő: Legyen $\mathcal{U}$ nem triviális ultraszűrő $\mathbb{N}$-en, ekkor:

$$^*\mathbb{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}.$$

Ekkor $^*\mathbb{R}$ ekvivalencia-osztályokból áll:

$$(a_n) \equiv_{\mathcal{U}} (b_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \{n \mid a_n = b_n\} \in \mathcal{U}.$$

Könnyű látni, hogy az $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$-en pontonként értelmezett $+$, $\times$, $<$ jól definiált műveletet, illetve relációt határoz meg $^*\mathbb{R}$-en. Ekkor $(^*\mathbb{R}, +, \times, <)$ rendezett testet alkot. Ennek bizonyítása egy szerű, példának nézzük meg az inverz létezését: Ha $x = (a_n)_{\mathcal{U}} \neq 0$, akkor $\{n \mid a_n \neq 0\} \in \mathcal{U}$, ezért legyen $b_n = a_n^{-1}$ ha $n \in \mathcal{U}$ különben pedig 0. Ekkor $y = (b_n)_{\mathcal{U}}$-ra $xy = 1$, $\mathbb{R}$-et pedig a konstans sorozatok ekvivalencia-osztályaival azonosítva részteste $^*\mathbb{R}$-nek, így értelmesek a következő definíciók.

1. Definíció. Legyen $x \in {}^*\mathbb{R}$

(i) x-et végtelenül kicsinek mondjuk, ha $|x| < \varepsilon$ minden $\varepsilon > 0 \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$-re,

(ii) x-et végesnek mondjuk, ha $|x| < r$ valamilyen $r \in \mathbb{R}$-re,

(iii) x végtelen, ha $|x| > r$ minden $r \in \mathbb{R}$-re.

(iv) x és y végtelenül közeliek, jelölése $x \approx y$ ha $x - y$ végtelenül kicsi.

(v) Egy r valós szám monádja: $\operatorname{monad}(r) = \{x \mid x \approx r\}$, az r-hez végtelenül közeli számok halmaza, és ezekkel a jelölésekkel nyilván $\operatorname{monad}(r) = r + \operatorname{monad}(0)$.

2. Definíció. Egy $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz bővítése:

$$^*A := \{((a_1)_{\mathcal{U}}, ..., (a_n)_{\mathcal{U}}) \subset {^*\mathbb{R}^n} \mid (a_1(j), ..., a_n(j)) \subset A\, \mathcal{U} \text{ minden } j\text{-re } \}$$

(könnyű látni hogy a definíció jó, mivel két különböző reprezentáns koordinátánként $\mathcal{U}$-beli halmazon egyezik, így ezek $\mathcal{U}$-beli metszetén egyszerre az összes koordináta megegyezik, így a második feltétel ekvivalens a két reprezentánsra).

3. Definíció. $^*\mathbb{N}$, $^*\mathbb{Z}$ illetve $^*\mathbb{Q}$ elemeit hipertermészetes, hiperegész illetve hiperracionális számoknak hívjuk.

A bővítés tulajdonságai:

(1) Ha $A, B \subset \mathbb{R}^n$ akkor

$$^*(A^c) = (^*A)^c$$

és

$$^*(A \cap B) = {^*A} \cap {^*B}$$

(és persze ebből következik a műveletartás $\cup$-ra és $\setminus$-re is).

(2) Ha π $\mathbb{R}^{n+1}$ vetítése az első n koordinátájára, akkor $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ -re

$$^*(\pi(A)) = \pi(^*A).$$

Bizonyítás. (1)

$$\begin{aligned}(^*A)^c = \{((a_1)_{\mathcal{U}}, ..., (a_n)_{\mathcal{U}}) \mid (a_1(j), ..., a_n(j)) \in A\, \mathcal{U} \text{ m.m. } j\text{-re } \}^c = \\ \{((a_1)_{\mathcal{U}}, ..., (a_n)_{\mathcal{U}}) \mid (a_1(j), ..., a_n(j)) \in A \text{ nem } \mathcal{U} \text{ m.m. } j\text{-re } \} = \\ \{((a_1)_{\mathcal{U}}, ..., (a_n)_{\mathcal{U}}) \mid (a_1(j), ..., a_n(j)) \in A^c\, \mathcal{U} \text{ m.m. } j\text{-re } \} = {^*(A^c)}\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}{^*A} \cap {^*B} = \{((c_1)_{\mathcal{U}}, ..., (c_n)_{\mathcal{U}}) \mid (c_1(j), ..., c_n(j)) \in A \text{ és } \in B\, \mathcal{U} \text{ m.m. j-re } \} = \\ \{((c_1)_U, ..., (c_n)_{\mathcal{U}}) \mid (c_1(j), ..., c_n(j)) \in A \cap B\, \mathcal{U} \text{ m.m. j-re } \} = {^*(A \cap B)},\end{aligned}$$

felhasználva hogy halmaz és komplementere közül pontosan az egyik esik $\mathcal{U}$-ba illetve hogy $\mathcal{U}$ metszetzárt.

(2)

$$\begin{aligned}\pi(^*A) = \{((a_1)_{\mathcal{U}}, ..., (a_n)_{\mathcal{U}}) \mid \exists (a_{n+1})_{\mathcal{U}}\, ((a_1)_{\mathcal{U}}, ..., (a_{n+1})_{\mathcal{U}}) \in {^*A}\} = \\ \{((a_1)_{\mathcal{U}}, ..., (a_n)_{\mathcal{U}}) \mid \exists (a_{n+1})_{\mathcal{U}}\, (a_1(j), ..., a_{n+1}(j)) \in A\, \mathcal{U} \text{ m.m. j-re } \} = \\ \{((a_1)_{\mathcal{U}}, ..., (a_n)_{\mathcal{U}}) \mid (a_1(j), ..., a_{n+1}(j)) \in \pi(A)\, \mathcal{U} \text{ m.m. j-re } \} = {^*\pi(A)}\end{aligned}$$

$\square$

$\mathbb{R}$-en minden R relációt és így minden f függvényt is ki lehet bővíteni $^*\mathbb{R}$-re. Ha $R \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ kétváltozós reláció, akkor definíció szerint:

$$((a_n)_{\mathcal{U}}, (b_n)_{\mathcal{U}}) \in {}^*R \quad \Longleftrightarrow \quad (a_n, b_n) \in R \; \mathcal{U} \text{ m.m. n-re }.$$

f bővítése ebből már adódik, más alakra hozva $^*f((a_n)_{\mathcal{U}}) := (f(a_n))_{\mathcal{U}}$ a definíció. Megfigyelhető továbbá, hogy f és R az $\mathbb{R}$ felett és $^*f$ illetve $^*R$ az $\mathbb{R}$ felett hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek: például ha f injekció akkor $^*f$ is, ha R tranzitív, akkor $^*R$ is. Ez lesz következő tételünk, az átviteli-elv lényege, de először definiálnunk kell formulák kiterjesztését is, formulák felépítése szerinti indukcióval:

4. Definíció. (i) Legyen $(\sigma(1), ..., \sigma(m)) \subseteq \{1, ..., n\}$ és $A \subseteq \mathbb{R}^m$, ekkor az

$$(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}) \in A$$

formula bővítése

$$(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(m)}) \in {}^*A$$

és az

$$f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)}) = (x_{\sigma(k+1)}, ..., x_{\sigma(m)})$$

bővítése

$$^*f(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(k)}) = (X_{\sigma(k+1)}, ..., X_{\sigma(m)}).$$

(ii) Ha $\varphi(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_k)$ (i)-beli formula és $a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}$, akkor $\varphi(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_k)$ bővítése $^*\varphi(X_1, ..., X_n, {}^*a_1, ..., {}^*a_k)$

(iii) $\neg\varphi$ bővítése $\neg{}^*\varphi$, $\varphi \vee \psi$ bővítése $^*\varphi \vee {}^*\psi$ és $\varphi \wedge \psi$-é $^*\varphi \wedge {}^*\psi$

(iv) ha x $\mathbb{R}$ feletti változó, akkor $\exists x\varphi$ bővítése $\exists X{}^*\varphi$.

Most már kimondhatjuk a tételünket:

1. Tétel (Átviteli-elv). *Ha φ olyan $\mathbb{R}$ feletti formula, amiben nincs szabad változó, akkor*

$$\varphi \text{ igaz } \mathbb{R} \text{ felett} \quad \Longleftrightarrow \quad {}^*\varphi \text{ igaz } {}^*\mathbb{R} \text{ felett.}$$

Bizonyítás. Ennél általánosabb állítást igazolunk: Legyen $\varphi(x_1, ..., x_m)$ $\mathbb{R}$ feletti m szabad változós formula, $^*\varphi(X_1, ..., X_m)$ a bővítése, és legyen

$$B := \{\, (x_1, ...x_m) \in \mathbb{R}^m \mid \varphi(x_1, ...x_m) \text{ igaz } \mathbb{R} \text{ felett } \}\, .$$

Ekkor

$$^*B = \{\, (X_1, ..., X_m) \in ({}^*\mathbb{R})^m \mid {}^*\varphi(X_1, ..., X_m) \text{ igaz } {}^*\mathbb{R} \text{ felett } \}\, . \tag{1.1}$$

Ebből már következik a tétel állítása. Legyen ugyanis A az a halmaz, ahol φ igaz, $^*A$ pedig az, ahol $^*\varphi$ igaz. Ekkor A és $^*A$ összetartozó értékei, mivel φ-ben nincs szabad változó, $\mathbb{R}^0$ és $({}^*\mathbb{R})^0$ illetve $\emptyset$ és $\emptyset$. Mivel $^*\emptyset = \emptyset$ és $^*(\mathbb{R}^0) = ({}^*\mathbb{R})^0$ ezért valóban elég az állítást igazolnunk.

Az állítást a formula felépítése szerinti indukcióval igazoljuk:

(i)

$$B = \left\{ (x_1, ...x_n) \mid (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}) \in A \right\}$$

Közvetlenül a definícióból:

$$\begin{aligned} {}^*B = \{ ((x_1)_{\mathcal{U}}, ..., (x_n)_{\mathcal{U}}) \in ({}^*\mathbb{R})^n \mid (x_1(j), ..., x_n(j)) \in B \ \mathcal{U} \text{ m.m. j-re } \} = \\ \left\{ ((x_1)_{\mathcal{U}}, ..., (x_n)_{\mathcal{U}}) \in ({}^*\mathbb{R})^n \mid (x_{\sigma(1)}(j), ..., x_{\sigma(m)}(j)) \in A \ \mathcal{U} \text{ m.m. } j\text{-re } \right\} = \\ \left\{ (X_1, ...X_n) \in ({}^*\mathbb{R})^n \mid (X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(m)}) \in {}^*A \right\} \end{aligned}$$

és

$$B = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R})^n \mid f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)}) = (x_{\sigma(k+1)}, ..., x_{\sigma(m)}) \right\}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} {}^*B = \big\{ ((x_1)_{\mathcal{U}}, ..., (x_n)_{\mathcal{U}}) \in ({}^*\mathbb{R})^n \mid \\ f(x_{\sigma(1)}(j), ..., x_{\sigma(k)}(j)) = (x_{\sigma(k+1)}(j), ..., x_{\sigma(m)}(j)) \ \mathcal{U} \text{ m.m. } j\text{-re } \big\} = \\ \left\{ (X_1, ..., X_n) \in ({}^*\mathbb{R})^n \mid f(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(k)}) = (X_{\sigma(k+1)}, ..., X_{\sigma(m)}) \right\}. \end{aligned}$$

(ii) (i)-nek az első felét kell lemásolni.

(iii) φ igazsághalmazát $I(\varphi)$-vel jelölve

$$I(\neg\varphi) = I(\varphi)^c \quad I(\varphi \vee \psi) = I(\varphi) \cup I(\psi) \text{ és } I(\varphi \wedge \psi) = I(\varphi) \cap I(\psi), \tag{1.2}$$

és így ez következik a bővítés tulajdonságai (1)-ből.

(iv) Feltehetjük, hogy $x = x_n$ és π az első $n - 1$ koordinátára vetítés. Ekkor $I(\exists x\varphi) = \pi(I(\varphi))$, így ez a bővítés tulajdonságai (2)-ből következik.

□

A tétel egyszerű következményei az alábbiak:

(1) A hiperracionálisok sűrűen vannak a hipervalósak között. Legyen

$$\varphi := \forall x \forall y (x < y \quad \rightarrow \quad \exists z (z \in \mathbb{Q} \wedge (x < z < y))).$$

Ez teljesül $\mathbb{R}$ felett, hiszen ott a racionálisok sűrűek, így a bővítése igaz ${}^*\mathbb{R}$ felett, ami épp az állításunkat adja.

(2) Minden $n \in {}^*\mathbb{Z}$-nek van közvetlen megelőzője ill. rákövetkezője. (1)-hez hasonlóan ez is azon múlik, hogy a kijelentést $\mathbb{R}$ felett formalizálhatjuk:

$$\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} \exists z \in \mathbb{Z} ((y_2 > y \rightarrow y_2 \geqslant x) \wedge (z_2 < z \rightarrow z_2 \leq x)).$$

Könnyű belátni továbbá, hogy $(x_n)_{\mathcal{U}} \in {}^*\mathbb{Z}$ megelőzője ill. rákövetkezője $(x_n - 1)_{\mathcal{U}}$ illetve $(x_n + 1)_{\mathcal{U}}$.

A következő tétel segítségével lehet áttérni ${}^*\mathbb{R}$-ről $\mathbb{R}$-re:

2. Tétel (Standard rész). *Ha $x \in {}^*\mathbb{R}$ véges, akkor pontosan egy $r \in \mathbb{R}$ létezik, amire $x \approx r$*

Bizonyítás. Legyen $r := \sup\{a \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} = \sup A$. Ekkor A nem üres, felülről korlátos, és r a legkisebb felső korlátja. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$ valósra $|x - r| < \varepsilon$, egyébként ugyanis $r + \varepsilon \in A$ lenne, ellentmondásban azzal, hogy r felső korlát. □

5. Definíció. Ha x véges hipervalós, akkor az egyértelmű $r \approx x$ valós számot x standard részének nevezzük.

Jelölése: ${}^\circ x = \mathrm{st}(x)$ az x standard része, és ${}^\circ x = \pm\infty$-vel jelöljük, ha x pozitív ill. negatív végtelen.

Ezután az $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot úgy tekintjük, mint $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt, és így a bővítése, ${}^*s = (s_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ egy ${}^*s : {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$ függvény. Az alábbiakban szereplő két tétel jól szemlélteti a nem standard bővítés viselkedését, illetve példa az átviteli-elv alkalmazására is:

3. Tétel. *Legyen (s_n) valós sorozat és s valós szám. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \quad \Longleftrightarrow \quad {}^*s_K \approx s \text{ minden végtelen } K \in {}^*\mathbb{N} \text{ esetén} .$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $s_n \to s$, és rögzítsünk egy végtelen $K \in {}^*\mathbb{N}$-et. Elég igazolni, hogy minden rögzített $\varepsilon > 0$ valósra $|{}^*s_K - s| < \varepsilon$. Ehhez az adott ε-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, hogy a következő teljesül $\mathbb{R}$-ben:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,[n \geq n_0 \to |s_n - s| < \varepsilon]\,.$$

Így ${}^*\mathbb{R}$-ben teljesül az átviteli-elv miatt a következő:

$$\forall N \in {}^*\mathbb{N}\,[N \geq n_0 \to |{}^*s_n - s| < \varepsilon]\,,$$

és így $N = K$-ra valóban $|{}^*s_K - s| < \varepsilon$. A másik irányhoz tegyük fel hogy ${}^*s_K \approx s$ minden végtelen $K \in {}^*\mathbb{N}$-ra. Ekkor minden valós $\varepsilon > 0$-ra

$$\exists K \in {}^*\mathbb{N}\,\forall N \in {}^*\mathbb{N}\,[N \geq K \to |{}^*s_N - s| < \varepsilon]\,.$$

Az átviteli-elv miatt így $\mathbb{R}$ felett:

$$\exists k \in \mathbb{N}\,\forall n \in \mathbb{N}\,[n \geq k \to |s_n - s| < \varepsilon]\,,$$

ami pont azt jelenti, hogy $s_n \to s$. □

A következő tétel előtt megjegyezzük, hogy az (a, b) intervallumon értelmezett valós f függvény ${}^*f$ bővítése a ${}^*(a, b) = \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid a < x < b\}$ intervallumon lesz értelmezve.

4. Tétel. *Legyen $c \in (a, b)$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ és $f : (a, b) \to \mathbb{R}$). Ekkor*

$$f \text{ folytonos } c\text{-ben} \iff {}^*f(z) \approx f(c) \text{ minden } z \approx c,\ z \in {}^*\mathbb{R} \text{ esetén.}\ .$$

Bizonyítás. A bizonyítás hasonló az előzőhöz. Először tegyük fel, hogy f folytonos c-ben, és legyen $z \approx c$ rögzített hipervalós. Megmutatjuk, hogy $|{}^*f(z) - f(c)| < \varepsilon$ minden valós $\varepsilon > 0$-ra. Rögzített $\varepsilon > 0$-hoz létezik $0 < \delta \in \mathbb{R}$, hogy $\mathbb{R}$-ben

$$\forall x[|x - c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon].$$

Az átviteli-elv miatt

$$\forall X[|X - c| < \delta \to |{}^*f(X) - f(c)| < \varepsilon]$$

is igaz ${}^*\mathbb{R}$ felett. Speciálisan $X = z$-vel $|{}^*f(z) - f(c)| < \varepsilon$.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy $|{}^*f(z) - f(c)| \approx 0$ minden $z \approx c$-re ${}^*\mathbb{R}$-ban. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített valós. Ekkor infinitezimális pozitív Y-t véve a következő igaz ${}^*\mathbb{R}$ felett:

$$\exists Y \forall X \left[|X - c| < Y \to |{}^*f(x) - f(c)| < \varepsilon\right].$$

Az átviteli-elv miatt $\mathbb{R}$ felett igaz:

$$\exists y \forall x \left[|x - c| < y \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon\right].$$

δ-t y-nak választva adódik f folytonossága a c helyen. □

Másképp is be lehet vezetni a nem standard számokat, az axiomatikus felépítésben a tulajdonságaival definiáljuk a bővítést, a mi definíciónk pedig csupán egy modell ott. A konstrukciót tetszőleges indexhalmazon adott ultraszűrővel meg lehet csinálni, és a kapott modellek nem feltétlenül lesznek izomorfak.

1.2. A nem standard univerzum

A fent bemutatott bővítési eljárást tetszőleges halmazra, gyűrűre, testre és egyéb struktúrákra is el lehet végezni, nekünk is szükségünk lesz a valós számoknál bővebb osztály bővítésére:

6. Definíció. $\mathbb{R}$ feletti szuperstruktúrának nevezzük, és $\mathbb{V} = \mathbb{V}(\mathbb{R})$-rel jelöljük a következő struktúrát:

$$\begin{aligned} V_0(\mathbb{R}) &= \mathbb{R} \\ V_{n+1}(\mathbb{R}) &= V_n(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}(V_n(\mathbb{R})) \quad \text{ahol } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

és

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}(\mathbb{R}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n(\mathbb{R}).$$

Ezután megkonstruáljuk a ${}^* : \mathbb{V}(\mathbb{R}) \to \mathbb{V}({}^*\mathbb{R})$ bővítést, azaz $\mathcal{M} \in \mathbb{V}$-re konstruálunk ${}^*\mathcal{M}$-et, hogy $\mathcal{M} \subset {}^*\mathcal{M}$ teljesüljön, és ${}^*\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}$ elemeit nevezzük nem standard vagy ideális elemeknek. A leképezés nem lesz szürjektív, erről szól a következő definíció:

7. Definíció. A ${}^*\mathbb{V} := \{x \mid x \in {}^*\mathcal{M},\, \mathcal{M} \in \mathbb{V}\}$ halmazt nevezzük a nem standard univerzumnak, ennek elemeit belső halmazoknak, $\mathbb{V}({}^*\mathbb{R}) \setminus {}^*\mathbb{V}$ elemeit pedig külsőknek.

${}^*\mathbb{V}$ konstrukciójához legyen $\mathbb{V}'_n = \mathbb{V}_n^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} \subset \mathbb{V}' = \cup_n \mathbb{V}'_n$. Egy $i : V' \to {}^*\mathbb{V}$ leképezést definiálunk rekurzióval, amely triviálisan izomorfizmus lesz az $\in$ relációra. Ennek a képtere lesz ${}^*\mathbb{V}$. $V'_0 = {}^*\mathbb{R}$ miatt legyen $i_0 = id_{{}^*\mathbb{R}}$.

Ha $\{i_k \mid k < n\}$ már definiált oly módon, hogy $i_k \subset i_{k+1}$ $(k+1 < n)$, akkor legyen $i_n|_{\mathbb{V}'_{n-1}} = i_{n-1}$.

Ha $x \in \mathbb{V}'_n \setminus \mathbb{V}'_{n-1}$, akkor x tetszőleges (x_k) reprezentánsára

$$\{k \mid x_k \in V_n \setminus V_{n-1}\} \in \mathcal{U}. \tag{1.3}$$

Az ilyen x_k-k nem üresek, és minden elemük $\mathbb{V}_{n-1}$-hez tartozik. Legyen

$$i_n(x) = \{i_{n-1}((y_k)/\mathcal{U}) \mid \{k \mid y_k \in x_k\} \in \mathcal{U}\} \subset \mathbb{V}_{n-1}({}^*\mathbb{R}). \tag{1.4}$$

Mivel $(y_k)/\mathcal{U}$ független x reprezentációjától, így a definíció jó.

5. Tétel (Átviteli-elv 2). *Legyen φ szabad változó nélküli formula (most már az $\in$ relációt is megengedve) $\mathbb{V}$ felett. Ekkor*

$$\varphi \textit{ igaz } \mathbb{V} \textit{ felett} \quad \Longleftrightarrow \quad {}^*\varphi \textit{ igaz } {}^*\mathbb{V} \textit{ felett} .$$

Ennek a bizonyítása is az első átviteli-elvhez hasonlóan történhetne. A tételből könnyen következik külső halmaz létezése, ugyanis eszerint minden korlátos belső halmaznak van legkisebb felső korlátja ${}^*\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{V}$-ben, $\mathbb{N}$-nek azonban nincs (minden végtelen hipervalós felső korlát), tehát külső halmaz. Szintén a legkisebb felső és legnagyobb alsó korlát létezéséből következnek az alábbiak:

1. Következmény. *Legyen $A \subset {}^*\mathbb{R}$ belső halmaz Ekkor*

(1) Ha A tartalmaz tetszőlegesen nagy véges számot, akkor tartalmaz végtelent is.

(2) Ha A-ban minden pozitív végtelen számnál van kisebb pozitív végtelen szám, akkor van benne pozitív véges szám is.

6. Tétel (Belső definíció elve). *Legyen $\varphi(x, x_1, ..., x_n)$ formula $\mathbb{V}$ felett, és $a_1, ..., a_n \in {}^*\mathbb{V}$. Legyen továbbá*

$$B = \{X \in {}^*\mathbb{V} \mid {}^*\varphi(X, a_1, ..., a_n) \textit{ igaz } {}^*\mathbb{V} \textit{ felett} \} .$$

Ekkor B belső halmaz.

Bizonyítás. A

$$\forall x \forall x_1 \ldots \forall x_n\, \exists z\ [x \in z \leftrightarrow \varphi(x, x_1, ..., x_n)]$$

formula igaz $\mathbb{V}$ felett (Mivel rögzített $x_1, ..., x_n$-ekre a formulát kielégítő x-ek benne vannak V_k-ban alkalmas k-ra), így $^*\mathbb{V}$ felett igaz

$$\forall X \forall X_1 ... \forall X_n \, \exists Z \, [X \in Z \leftrightarrow {}^*\varphi(X, X_1, ..., X_n)] \, ,$$

ami $X_i = a_i$-t beírva éppen $B \in {}^*\mathbb{V}$-hoz vezet. $\square$

8. Definíció. Legyenek F_k elemei $\mathbb{V}_k$ véges halmazai. Egy $a \in {}^*\mathbb{V}$-t hipervégesnek mondunk, ha $a \in {}^*F_k$ valamilyen k-ra.

Az átviteli-elv miatt minden a hipervéges halmaznak van egy belső bijekciója $\{0, 1, ..., N\}$-nel ($N \in {}^*\mathbb{N}$), és ez a N egyértelmű.

9. Definíció. Ezt az egyértelműen meghatározott N-et nevezzük a belső számosságának.

1.3. Szaturáltság

A nem standard univerzumunknak (ha megszámlálható ultrahatvánnyal állítjuk elő) lesz még egy fontos tulajdonsága, amit most definiálunk:

10. Definíció. A $^*\mathbb{V}$ nem standard univerzumot $\aleph_1$ szaturáltnak mondjuk, ha tetszőleges nem üres belső halmazokból álló, csökkenő $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sorozatra, $\cap_{m\in\mathbb{N}} A_m \neq \emptyset$.

Ez azért lesz lényeges, mivel $\aleph_1$ szaturáltság esetén belső algebrán értelmezett additív halmazfüggvény σ-additív is, amint azt később látni fogjuk.

7. Tétel. *A megszámlálható ultrahatványként konstruált $^*\mathbb{V}$ nem standard univerzum $\aleph_1$ szaturált.*

Bizonyítás. Ebben a bővítésben minden A_m belső halmaz reprezentálható standard $(X_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ halmaz sorozatokkal. Mivel az A_m halmazok nem üresek és fogyóak, ezért $X_{m,n} \subset X_{m-1,n}$ és $X_{m,n} \neq \emptyset$ teljesül $\mathcal{U}$ majdnem minden n-re.

Ekkor $X_{m,n}$-eket $\mathcal{U}$-kicsi n-ekre megváltoztatva sorban az m-ekre, elérhető, hogy $X_{m,n} \subset X_{m-1,n}$ és $X_{m,n} \neq \emptyset$ legyen minden m-re és n-re. (Az m-edik lépésben az $X_{m,n} \not\subset X_{m-1,n}$ és $X_{m,n} = \emptyset$ halmazokat kell $X_{m-1,n}$-re módosítani). Ekkor vegyünk $x_n \in X_{n,n}$ elemeket, és legyen $y = (x_n)_\mathcal{U}$ Ekkor minden m-re $x_n \in X_{m,n}$ minden $m \geq n$-re, és így $y \in A_m$ minden m-re, tehát $\cap_{m\in\mathbb{N}} A_m \neq \emptyset$. $\square$

1. Megjegyzés. Általában nem lesz minden ultrahatvánnyal konstruált univerzum $\aleph_1$ szaturált, ennek szükséges és elégséges feltétele az, hogy az I indexhalmazon adott $\mathcal{U}$ ultraszűrőre I előáll megszámlálható sok (diszjunkt) $\mathcal{U}$-kicsi halmaz uniójaként.

Bizonyítás. Az elégségesség a fenti átlós kiválasztással bizonyítható, a szükségesség belátásához pedig legyen A_n az az ekvivalenciaosztály, melynek minden koordinátája a $(0, \frac{1}{n})$ nyílt intervallum. Legyen $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, és $(x_i)_{i\in I}$ tetszőleges reprezentánsa, továbbá $B_n = \left\{ i \in I \mid x_i \in (0, \frac{1}{n}) \right\}$ Ekkor $\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$, és $B_n \in \mathcal{U}$ minden n-re, így $I = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n^c$, tehát az I tényleg előáll megszámlálható sok $\mathcal{U}$-kicsi halmaz uniójaként. $\square$

11. Definíció. Az $f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ függvényt belsőnek mondjuk, ha a gráfja belső halmaz. Egy sorozat belső, ha mint függvény az. (Az $\langle x, y\rangle = \{x, \{x, y\}\}$ képlet segítségével rendezett párokat is definiálva $({}^*\mathbb{R})^2 \subset \mathbb{V}({}^*\mathbb{R})$, így értelmes a definíció.)

Az $\aleph_1$ szaturáltsággal ekvivalens az alábbi tulajdonság:

1. Tulajdonság (Megszámlálható teljesség). Ha A belső halmaz, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az A belső részhalmazaiból álló sorozat, akkor ez kibővíthető az A (belső) részhalmazaiból álló $(A_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ belső sorozattá.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a bővítés $\aleph_1$ szaturált. Legyenek B_m elemei azok a belső $(C_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ sorozatok, melyekre $C_n = A_n$ minden $n \leq m$-re. B_m ekkor nem üres, mert a $C_n = A_m$ $n \geq m$ belső bővítés eleme, továbbá B_m-ek a belső definíció elve miatt belsők, így az $\aleph_1$-szaturáltság miatt a közös metszetük nem üres, ami egy kívánt belső bővítés lesz. A másik irányhoz legyen A_n nem üres belső halmazok fogyó sorozata, ezt a megszámlálható teljesség miatt kibővíthetjük $(A_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ belső sorozattá. A $H = \{n \in {}^*\mathbb{N} \mid \cap_{i=1}^n A_n \neq \emptyset\}$ belső halmaz tartalmaz minden $n \in \mathbb{N}$-t, így az 1. Következmény (1) része miatt tartalmaz végtelen $n \in {}^*\mathbb{N}$-t, vagyis $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. □

1.4. Nem standard topológia

Az ultrahatványos technikával tetszőleges topologikus tér is kibővíthető, ilyenekre fogjuk általánosítani a monád fogalmát.

12. Definíció. Legyen (X, τ) topologikus tér.

(i) $a \in X$-re a monádja:

$$\mathrm{monad}(a) = \bigcap_{a\in U\in\tau} {}^*U.$$

(ii) Ha $x \in {}^*X$ akkor $x \in \mathrm{monad}(a)$ jelölése $x \approx a$.

(iii) $x, y \in {}^*X$ esetén $x \approx y$ jelölést használjuk, ha létezik $a \in X$ hogy $x, y \in \mathrm{monad}(a)$.

(iv) $x \in {}^*X$ közel standard, ha $x \approx a$ valamilyen $a \in X$-re.

(v) A közel standard pontok halmazának jelölése az $Y \subset {}^*X$ halmazban $\mathrm{ns}(Y)$.

(vi) $Y \subset {}^*X$standard része:

$$\mathrm{st}(Y) = \{a \in X \mid a \approx x \text{ valamilyen } x \in Y\text{-ra}\}. \tag{1.5}$$

2. Következmény. *Az X topologikus tér akkor és csak akkor Hausdorff, ha minden $a, b \in X$ és $a \neq b$-re* $\mathrm{monad}(a) \cap \mathrm{monad}(b) = \emptyset$.

Így értelmes a következő definíció.

13. Definíció. X Hausdorff térben a következő leképezést nevezzük standard rész leképezésnek:

$$\mathrm{st} : \mathrm{ns}({}^*X) \to X,$$

ahol

$$\mathrm{st}(x) = {}^\circ x = \text{az az egyetlen } a \in X \text{ amire } a \approx x.$$

14. Definíció. Tegyük fel, hogy $Y \subset {}^*X$ ahol X topologikus tér, és $F : {}^*X \to {}^*\mathbb{R}$ belső függvény. Ekkor F-et S-folytonosnak nevezzük Y-on, ha $x, y \in Y$-ra

$$x \approx y \Rightarrow F(x) \approx F(y).$$

Az S-folytonosság és a *-folytonosság nem függ össze: Legyen $X = \mathbb{R}$, $N \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, ekkor $f(x) = Nx$ *-folytonos, de nem S-folytonos, és

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |x| > \frac{1}{N} \\ \frac{1}{N} & \text{ha } |x| \leq \frac{1}{N} \end{cases}$$

S-folytonos, de nem *-folytonos. Az S-folytonosságra az integrálelméletben lesz szükségünk, ekkor bizonyos feltételek mellett F nem standard integrálját az F' valós függvény valós integráljára lehet visszavezetni, ahol $F'({}^\circ x) = {}^\circ F(x)$ minden $x \in {}^*\mathbb{R}$. Most F' jól definiáltsága az S-folytonosság következménye.

2. fejezet

Loeb-mérték elmélet

2.1. A Loeb-mérték

Innentől kezdve csak $\aleph_1$ szaturált bővítésekkel foglalkozunk. A megszámlálható ultrahatvány konstrukcióra, mint láttuk, ez teljesül. Tegyük fel, hogy Ω belső halmaz, $\mathcal{A}$ belső algebra Ω részhalmazaiból, továbbá M belső végesen additív mérték $\mathcal{A}$-n,

$$M : \mathcal{A} \to {}^*[0, \infty).$$

A végesség miatt értelmes a

$${}^\circ M : \mathcal{A} \to [0, \infty)$$

definíció, ahol $({}^\circ M)(A) := {}^\circ(M(A))$, így $(\Omega, \mathcal{A}, {}^\circ M)$ standard végesen additív tér. (σ-additív is, amit mindjárt látni fogunk.) Ezt szeretnénk kiterjeszteni teljes mértéktérré, erről szól a következő tétel.

8. Tétel. *${}^\circ M$ egyértelműen terjeszthető ki σ-additívan a $\sigma(\mathcal{A})$ szigma-algebrára. A mérték teljessé tétele a Loeb-mérték, jelölése M_L és $\sigma(\mathcal{A})$, teljessé tétele a Loeb σ-algebra, jelölése $L(\mathcal{A})$.*

Bizonyítás. Caratheodory tételét szeretnénk alkalmazni, ehhez az kell, hogy ${}^\circ M$ σ-additív legyen $\mathcal{A}$-n. Tegyük fel, hogy $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmazok úgy, hogy

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Az $\aleph_1$ szaturáltság miatt létezik $k \in \mathbb{N}$, hogy

$$A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=1}^{m} A_n$$

Ellenkező esetben ugyanis $B_m := A \setminus \cup_{n=1}^{m} A_n$ definícióval $\{B_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ olyan nem üres belső halmazokból álló csökkenő sorozat lenne, amire $\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ üres. Tehát $A_m = \emptyset$ minden $m > k$-ra, és így

$$^\circ M\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = {}^\circ M\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{m} {}^\circ M(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ M(A_n).$$

□

A Caratheodory-bővítés tulajdonságaiból adódik, hogy a következő tulajdonságok ekvivalensek.

(1) B Loeb-mérhető.

(2) A B halmaz M-közelíthető, azaz minden $\varepsilon > 0$ valóshoz léteznek $A, C \in \mathcal{A}$ halmazok, hogy $A \subseteq B \subseteq C$ és $M(C \setminus A) < \varepsilon$.

(3) B külső és belső Loeb mértéke megegyezik, azaz $\underline{M}(B) = \overline{M}(B)$, ahol

$$\underline{M}(B) = \sup\{{}^\circ M(A) \mid A \subseteq B,\ A \in \mathcal{A}\}$$
$$\overline{M}(B) = \inf\{{}^\circ M(A) \mid A \supseteq B,\ A \in \mathcal{A}\}.$$

1. Példa. (1) Legyen Ω hipervéges halmaz, és $\mathcal{A}$ álljon Ω belső részhalmazaiból. Mivel hipervéges halmaz belső része hipervéges, így értelmes a következő: Ω-n normált számláló mértéknek nevezzük az

$$M(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

mértéket, ahol $\#(A)$ jelöli A belső számosságát.

(2) Legyen $\Omega = {}^*[0,1]$ és $\mathcal{A} = {}^*\mathcal{M}$, ahol $\mathcal{M}$ jelöli $[0,1]$ Lebesgue-mérhető részhalmazainak halmazát. Legyen λ a Lebesgue-mérték $[0,1]$-en, ekkor ${}^*\lambda$ végesen additív, és ${}^*\lambda_L$-et hívjuk az egyenletes Loeb-mértéknek ${}^*[0,1]$-en.

(3) (2)-t általánosítva vegyünk egy $(X, \mathcal{F}, \mu)$ mértékteret, és legyen $\Omega = {}^*X$, $\mathcal{A} = {}^*\mathcal{F}$, $M = {}^*\mu$. Alkalmazva a fenti konstrukciót kapjuk a $({}^*X, L({}^*\mathcal{F}), {}^*\mu_L)$ Loeb-teret.

2.2. Mértékek reprezentációja

Legyen ezentúl (X, τ) Hausdorff topologikus tér. Jelölje $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\tau)$ a Borel-halmazokat, és legyen μ véges Borel-mérték X-en.

15. Definíció. A μ Radon-mérték, ha $\forall B \in \mathcal{B}$

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq B,\ K \text{ kompakt}\}.$$

3. Következmény. *A definíciót a komplementerre alkalmazva, felhasználva, hogy Hausdorff térben a kompaktak zártak, adódik*

$$\mu(B) = \inf \{ \mu(U) \mid U \supseteq B, U \text{ nyílt} \} .$$

Következő tételünk a mérték és a $*$-bővítése közötti kapcsolatot mutatja.

9. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{B}, \mu)$ Radon-mérték az X Hausdorff téren, ahol $\mathcal{B}$ a Borel halmazok σ-algebrája, és jelölje $\mathcal{C}$ a μ-teljessé tételét μ-re nézve. Ekkor*

(i) $C \in \mathcal{C}$ *akkor és csak akkor, ha* $\mathrm{st}^{-1}(C) \in L({}^*\mathcal{B})$, *és*

(ii) $C \in \mathcal{C}$ *esetén* $\mu(C) = ({}^*\mu)_L(\mathrm{st}^{-1}(C))$.

A tételben $({}^*\mu)_L$ $\mathrm{ns}({}^*X)$-re koncentráltsága is el van rejtve.

Bizonyítás. A teljes mérték is Radon, így $C \in \mathcal{C}$-hez vehetünk K_n kompaktakat és U_n nyíltakat, hogy $\mu(U_n \setminus K_n) < \frac{1}{n}$ teljesüljön. Ekkor

$${}^*K_n \subseteq \mathrm{st}^{-1}(K_n) \subseteq \mathrm{st}^{-1}(C) \subseteq \mathrm{st}^{-1}(U_n) \subseteq {}^*U_n.$$

Az utolsó tartalmazás teljesül, mert C minden pontjának U nyílt környezete, így a monádjuk ${}^*U$-ban van, az elsőhöz pedig ezt kell alkalmazni K komplementerére.

${}^*\mu({}^*U_n \setminus {}^*K_n) < \frac{1}{n}$ miatt az $\mathrm{st}^{-1}(C)$ halmaz ${}^*\mu$-approximálható, így $\mathrm{st}^{-1}(C) \in L({}^*\mathcal{B})$ és $\mu(C) = ({}^*\mu)_L(\mathrm{st}^{-1}(C))$.

Megfordítva tegyük fel, hogy $B = \mathrm{st}^{-1}(C) \in L({}^*\mathcal{B})$ és $({}^*\mu)_L(B) = \alpha$. Vegyünk $A \in {}^*\mathcal{B}$-ot úgy, hogy $A \subseteq B$ és ${}^*\mu_L(A) > \alpha - \frac{1}{n}$. Ekkor $F = \mathrm{st}(A)$ zárt, $F \subseteq C$, továbbá $A \subseteq \mathrm{st}^{-1}(F) \subseteq \mathrm{st}^{-1}(C)$. Így

$$\mu(C) \geq \mu(F) = {}^*\mu_L(\mathrm{st}^{-1}(F)) \geq {}^*\mu_L(A) > \alpha - \frac{1}{n}.$$

Ugyanígy C^c-ben is találhatunk ilyen ${F_2}^c$ zártat, amire

$$\mu(F_2) < \alpha + \frac{1}{n}.$$

Így C μ-approximálható, ezért $C \in \mathcal{C}$. □

4. Következmény. *Legyen $C \in \mathcal{C}$. Ekkor ${}^*C \Delta \mathrm{st}^{-1}(C)$ Loeb-nulla halmaz.*

Bizonyítás. Ha K_n és U_n alulról és felülről approximál, akkor ${}^*U_n \setminus {}^*K_n$ lefedi a halmazunkat, így az Loeb-null mértékű. □

10. Tétel (A Lebesgue-mérték reprezentációja). *Legyen $N \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $\Delta t = N^{-1}$ és $\mathbf{T}$ a következő hipervéges halmaz:*

$$\mathbf{T} = \{k\Delta t \mid 0 \leq k < N\}.$$

Jelölje $(\mathbf{T}, L(\mathcal{A}), \nu_L)$ a T számláló mértékéből kapott Loeb teret (ld. 1. példa (1)). Ha

$$\mathcal{M} = \left\{B \subseteq [0,1] \mid \mathrm{st}_{\mathbf{T}}^{-1}(B) \in L(\mathcal{A})\right\} \tag{2.1}$$

$$\lambda(B) = \nu_L(\mathrm{st}_{\mathbf{T}}^{-1}(B)) \quad \textit{ha } B \in \mathcal{M}\textit{, ahol } \mathrm{st}_{\mathbf{T}}^{-1}(B) = \mathrm{st}^{-1}(B) \cap \mathbf{T} \tag{2.2}$$

akkor $([0,1], \mathcal{M}, \lambda)$ a Lebesgue-mérték.

Bizonyítás. $\mathcal{M}$ σ-algebra, és $[a,b] \in \mathcal{M}$, mivel

$$\mathrm{st}_{\mathbf{T}}^{-1}([a,b]) = \cap_{n\in\mathbb{N}} \left({}^*\left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right] \cap \mathbf{T}\right) \tag{2.3}$$

ami belső halmazok megszámlálható metszete, és

$$\lambda[a,b) = \lambda(a,b] = {}^\circ\left(\frac{[Nb] - [Na]}{N}\right) = {}^\circ\left(\frac{Nb - Na}{N}\right) = b - a. \tag{2.4}$$

A (2) előállítás és ν_L teljessége miatt mértékünk teljes, így mértékünk a Lebesgue-mérték kiterjesztése. Már csak azt kell belátnunk, hogy a kiterjesztés nem valódi.Tegyük fel, hogy $\mathrm{st}_{\mathbf{T}}^{-1}(B) \in L(\mathcal{A})$, ekkor $B \in L(\mathcal{B})$-t kell igazolnunk. Ez a 9. Tétel miatt ekvivalens $\mathrm{st}^{-1}(B) \in L({}^*\mathcal{B})$-vel. Legyen $\mathrm{st}_{\mathbf{T}}^{-1}(B) = \mathbf{T}_1 \cup \mathbf{T}_2$, ahol $\nu_L(\mathbf{T}_1) = 0$ és $\mathbf{T}_2 \in \mathcal{A}$. Ekkor

$$\mathrm{st}^{-1}(B) = \cup_{x\in\mathbf{T}_1}[x, x+\Delta t) \bigcup \cup_{x\in\mathbf{T}_2}[x, x+\Delta t) \tag{2.5}$$

miatt a jobb oldal első uniójának egyenletes Loeb-mértéke 0, a második unió pedig félig nyílt intervallumok hipervéges uniója, ami az átviteli-elv miatt ${}^*\mathcal{B}$-beli, így valóban $\mathrm{st}^{-1}(B) \in L({}^*\mathcal{B})$. □

11. Tétel (A Wiener-folyamat konstrukciója). *Legyen $N \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbf{T} = \{i\Delta t \mid i \in \{1..N\}\}$ és $\mathbf{S} = \{i(\Delta t)^{\frac{1}{2}} \mid i \in \{1..N\}\ \}$, Ω legyen a $\mathbf{T} \to \{-1,1\}$ belső leképezések halmaza és $\Delta t = \frac{1}{N}$. $\mathcal{A}$ álljon Ω belső halmazaiból, és ν a számláló mérték: $\nu(A) = \frac{\#(A)}{2^N}$. Legyen $(\Omega, \mathcal{D}, P) = (\Omega, L(\mathcal{A}), \nu_L)$ valószínűségi mértéktér. $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$-n definiáljuk az $X : \mathbf{T}\times\Omega \to \mathbf{S}$ *-véletlen sétát:*

$$X(\underline{t}, \omega) = (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \sum_{0<\underline{s}\leq\underline{t}} \omega_s,$$

ahol $t \in \mathbf{T}$ és $\omega \in \Omega$. Ekkor az X folyamat 1 valószínűséggel S-folytonos, továbbá legyen $B(t,\omega) = {}^\circ X(\underline{t}, \omega)$, ha $\underline{t} \approx t$ és $(t,\omega) \in ([0,1] \times \Omega)$. Ekkor $B(t,\omega)$ Wiener-folyamat $(\Omega, \mathcal{D}, P)$-n.

Bizonyítás. Két definícióval és két lemmával kezdjük a bizonyítást, a második lemma szemléletesen azt mondja, hogy $*$-független változók standardizált végtelen összege normális eloszlású.

16. Definíció. Az $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ mértéktér feletti mérhető $\{x_i\}_{i\in I}$ ${}^*\mathbb{R}$ értékű valószínűségi változók *-függetlenek, ha minden belső $\{x_1, ..., x_m\}$ $(m \in {}^*\mathbb{N})$ átindexelt részhalmazra és belső $(\alpha_1, ..., \alpha_m) \in {}^*\mathbb{R}^m$ esetén

$$\nu(\{\omega \mid x_1(\omega) < \alpha_1, ..., x_m(\omega) < \alpha_m\}) = \prod_{k=1}^{m} \nu(\{\omega \mid x_k(\omega) < \alpha_k\}).$$

17. Definíció. Az $\{x_i\}_{i\in I}$ valószínűségi változók S-függetlenek ha minden véges átindexelt $\{x_1, ..., x_m\}$ ($m \in \mathbb{N}$) és $(\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ esetén

$$\nu(\{\omega \mid x_1(\omega) < \alpha_1, ..., x_m(\omega) < \alpha_m\}) \approx \prod_{k=1}^{m} \nu(\{\omega \mid x_k(\omega) < \alpha_k\}).$$

1. Lemma. *Ha $\{x_i\}_{i\in I}$ S-független valószínűségi változók $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$-n, akkor $\{{}^\circ x_i\}_{i\in I}$-k függetlenek $(\Omega, L(\mathcal{A}), \nu_L)$-n.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $m \in \mathbb{N}$ és $(\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ Ekkor

$$\begin{aligned}
&\nu_L\left(\{\omega \mid {}^\circ x_1(\omega) < \alpha_1, ..., {}^\circ x_m(\omega) < \alpha_m\}\right) = \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} {}^\circ\nu\left(\left\{\omega \mid x_1(\omega) < \alpha_1 - \frac{1}{n}, ..., x_m(\omega) < \alpha_m - \frac{1}{n}\right\}\right) = \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} {}^\circ\left(\prod_{k=1}^{m} \nu\left(\left\{\omega \mid x_k < \alpha_k - \frac{1}{n}\right\}\right)\right) = \\
&\quad = \prod_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} {}^\circ\nu\left(\left\{\omega \mid x_k < \alpha_k - \frac{1}{n}\right\}\right) = \prod_{k=1}^{m} \nu_L\left(\{\omega \mid {}^\circ x_k(\omega) < \alpha_k\}\right).
\end{aligned}$$

□

2. Lemma. *Legyen $\{x_n\}_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ $*$-független, azonos eloszlású valószínűségi változókból álló, közös standard F eloszlásfüggvénnyel rendelkező, 0 várható értékű és 1 szórásnégyzetű sorozat. Ekkor $N \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ és $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ esetén*

$$\nu\left(\left\{\omega \mid \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} x_k(\omega) \le \alpha\right\}\right) \approx {}^*\Psi(\alpha),$$

ahol Ψ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Bizonyítás. Legyen x_n eloszlásfüggvénye F, ${}^\circ x_n$ eloszlásfüggvénye pedig G. Belátjuk, hogy ekkor $G = {}^\circ F$, és így $F = {}^*G$. F jobbról $*$-folytonos és standard, így jobbról folytonos is. Ezért $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$ $\varepsilon > 0$ esetén valós m-ekre

$$G(\alpha) = \nu_L\left(\{\omega \mid {}^\circ x_n(\omega) \le \alpha\}\right) = \lim_{m\to\infty} {}^\circ\nu\left(\left\{\omega \mid x_n(\omega) < \alpha + \frac{1}{m}\right\}\right) =$$

$$\lim_{m\to\infty} {}^{\circ}F\left(\alpha+\frac{1}{m}\right) = {}^{\circ}F\left(\alpha\right).$$

Az előző lemma miatt $\{{}^{\circ}x_n\}_{n\in {}^*\mathbb{N}}$ független rendszer. Később az integrálelméletben látni fogjuk, hogy $E({}^{\circ}x_n) = {}^{\circ}E(x_n) = 0$, és $E({}^{\circ}x_n^2) = {}^{\circ}E(x_n) = 1$. Ekkor a centrális határeloszlás tétel miatt minden $\varepsilon > 0$ és α valóshoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy

$$n > n_0 \Rightarrow \left|\nu_L\left(\left\{\omega \mid \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n} {}^{\circ}x_k(\omega) \le \alpha\right\}\right) - \Psi(\alpha)\right| < \varepsilon.$$

A függetlenség miatt $\sum_{k=0}^{n} {}^{\circ}x_k$ eloszlásfüggvénye G n-edik konvolúció-hatványa, jelölje ezt G_n. Ekkor az előbbi formula új alakja

$$n > n_0 \Rightarrow \left|G_n(\sqrt{n}\alpha) - \Psi(\alpha)\right| < \varepsilon$$

Az átviteli elvet alkalmazva n-re és G-re, felhasználva hogy $\sum_{k=0}^{n} x_k$ eloszlásfüggvénye F_n, minden $N \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $F_N(\sqrt{N}\alpha) \approx \Psi(\alpha)$, azaz

$$\nu\left(\left\{\omega \mid \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N} x_k(\omega) \le \alpha\right\}\right) \approx \Psi(\alpha).$$

Itt Ψ folytonos, mindkét oldal monoton növő, továbbá ${}^{\circ}\alpha = +\infty$ esetén ${}^*\Psi(\alpha) = 1$ és ${}^*\Psi(-\alpha) = 0$, így a fenti képlet igaz ${}^*\Psi$-vel minden $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ esetén is.

$\square$

A tétel bizonyítása. Először belátjuk, hogy X S-folytonos **T**-n. Legyen $m, n \in \mathbb{N}$

$$\Omega_{mn} = \left\{\omega \mid \exists i < n \sup_{i\in[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}]} X(\underline{t},\omega) - \inf_{i\in[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}]} X(\underline{t},\omega) > \frac{1}{m}\right\}.$$

Ekkor

$$\nu(\Omega_{mn}) \leq n\nu\left(\left\{\omega \mid \sup_{i\in[0,\frac{1}{n}]} X(\underline{t},\omega) - \inf_{i\in[0,\frac{1}{n}]} X(\underline{t},\omega) > \frac{1}{m}\right\}\right) \leq$$

$$n\nu\left(\left\{\omega \mid \max_{k\leq\frac{N}{n}}\left|\sum_{i=1}^{k}\omega_{\frac{i}{N}}\right| > \left|\frac{\sqrt{N}}{2m}\right|\right\}\right) \leq$$

$$n\nu\left(\left\{\omega \mid \max_{k\leq\frac{N}{n}}\sum_{i=1}^{k}\omega_{\frac{i}{N}} > \frac{\sqrt{N}}{2m}\right\}\right) + n\nu\left(\left\{\omega \mid \min_{k\leq\frac{N}{n}}\sum_{i=1}^{k}\omega_{\frac{i}{N}} < -\frac{\sqrt{N}}{2m}\right\}\right) \leq$$

$$2n\nu\left(\left\{\omega \mid \sum_{i=1}^{\frac{N}{n}}\omega_{\frac{i}{N}} > \frac{\sqrt{N}}{2m}\right\}\right) + 2n\nu\left(\left\{\omega \mid \sum_{i=1}^{\frac{N}{n}}\omega_{\frac{i}{N}} < -\frac{\sqrt{N}}{2m}\right\}\right) =$$

$$4n\nu\left(\left\{\omega \mid \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{n}}}\sum_{i=1}^{\frac{N}{n}}\omega_{\frac{i}{N}} > -\frac{\sqrt{n}}{2m}\right\}\right) \approx 4n\Psi\left(\frac{\sqrt{n}}{2m}\right)$$

$$\frac{4n}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\sqrt{n}}{2m}}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}dt < 2n\int_{\frac{\sqrt{n}}{2m}}^{\infty} e^{\frac{-t}{2}}dt = 4ne^{-\frac{\sqrt{n}}{4m}}$$

felhasználva az 2.2. Lemmát. Legyen

$$\Omega' = \Omega \setminus \cup_{m=1}^{\infty}\cap_{n=1}^{\infty}\Omega_{mn}.$$

Ekkor

$$P(\Omega') = 1 - \sup_m \inf_n \nu\left(\Omega_{mn}\right) \geq 1 - \sup_m \inf_n 4ne^{-\sqrt{n}/4m} = 1.$$

Ω'-n X S-folytonos lesz: tegyük fel ugyanis, hogy $\underline{s} \approx \underline{t} \in {}^*[0,1]$ és ${}^\circ X(\underline{s},\omega) \neq {}^\circ X(\underline{t},\omega)$ Ekkor $m > 2/|{}^\circ X(\underline{s},\omega) - {}^\circ X(\underline{t},\omega)|$ esetén $\omega \in \Omega_{mn}$ minden n-re, így $\omega \notin \Omega'$, tehát valóban S-folytonos X.

B Wiener-folyamat. (1) A folytonos trajektóriák következnek X S-folytonosságából: Tegyük fel, hogy $\omega \in \Omega'$. $\{n : |\underline{t} - \underline{s}| < \frac{1}{n} \to |X(\underline{t},\omega) - X(\underline{s},\omega)| < \varepsilon/2\}$ belső halmaz, és minden végtelen n-et tartalmaz, így az 1. Következmény (2) pontja miatt tartalmaz véges $n = n_0$-t. Ekkor $|t - s| < \frac{1}{n_0}$ esetén létezik $\underline{t} \approx t$ és $\underline{s} \approx s$, hogy $|\underline{t} - \underline{s}| < \frac{1}{n_0}$, és így $|X(\underline{t},\omega) - X(\underline{s},\omega)| < \varepsilon/2$ amiből $|B(t,\omega) - B(s,\omega)| < \varepsilon$, és így készen vagyunk.

(2) Független növekményűség. Legyenek $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq ... \leq s_n < t_n \in [0,1]$, és $\underline{t}_i \approx t_i$ továbbá $\underline{s}_i \approx s_i$, melyekre fennáll az előző egyenlőtlenség. Ekkor

$$\{X(\underline{t}_1,\circ) - X(\underline{s}_1,\circ), ..., X(\underline{t}_n,\circ) - X(\underline{s}_n,\circ)\}$$

*-független, tehát S-független is. Alkalmazva az 1. Lemmát kapjuk

$$\{B(t_1,\circ) - B(s_1,\circ), ..., B(t_n,\circ) - B(s_n,\circ)\}$$

függetlenségét.

(3) A növekmény eloszlása. $s < t \in [0,1]$ rögzített.

$$P\left(\{\omega \mid B(t,\omega) - B(s,\omega) \leq \alpha\}\right) = P\left(\{\omega \mid {}^{\circ}X(\underline{t},\omega) - {}^{\circ}X(\underline{s},\omega) \leq \alpha\}\right) =$$

$$P\left(\left\{\omega \mid {}^{\circ}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=N\underline{s}}^{N\underline{t}} \omega_{\frac{k}{N}}\right) \leq \alpha\right\}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} {}^{\circ}\nu\left(\left\{\omega \mid \frac{1}{\sqrt{N\underline{t} - N\underline{s}}}\sum_{k=N\underline{s}}^{N\underline{t}} \omega_{\frac{k}{N}} \leq \frac{\alpha + \frac{1}{n}}{\sqrt{\underline{t} - \underline{s}}}\right\}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{st}\left({}^{*}\Psi\left(\frac{\alpha + \frac{1}{n}}{\sqrt{\underline{t} - \underline{s}}}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \Psi\left(\frac{\alpha + \frac{1}{n}}{\sqrt{t - s}}\right) = \Psi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{t - s}}\right)$$

felhasználva az előző lemmát. A számolásból látszik, hogy $B(t,\cdot) - B(s,\cdot)$ 0 várható értékű, $t - s$ szórásnégyzetű valószínűségi változó. □

5. Következmény. *Definiáljuk a $(C([0,1]), \mathcal{E}, P')$ mértékteret a következőképpen :*

$$E \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \{\omega : B(\circ,\omega) \in E\} \in \mathcal{D}$$

és $P'(E) = P(\{\omega : B(\circ,\omega) \in E\})$. Ekkor $\mathcal{E}$ tartalmazza a cilinderhalmazokat és σ-algebra, így a Borel-halmazokat is tartalmazza, vagyis a mértékterünk a Wiener-mérték kiterjesztése.

2.3. Loeb integrálelmélet

Mérhető függvények

18. Definíció. Legyen $(\Omega, L(\mathcal{A}), M_L)$ Loeb mértéktér, akkor az $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt Loeb-mérhetőnek nevezzük, ha f a hagyományos értelemben mérhető, azaz $f^{-1}(B) \in L(\mathcal{A})$ Borel $B \subseteq \mathbb{R}$-ekre.(Nyilván elég $\{c : c \leq r\}$ alakú halmazokra megkövetelni.) Az $F : \Omega \to {}^{*}\mathbb{R}$ belső függvényt $\mathcal{A}$-mérhetőnek mondjuk, ha minden $*$-nyílt $A \subseteq {}^{*}\mathbb{R}$-ra $F^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.

19. Definíció. Az $\mathcal{A}$-mérhető belső $F : \Omega \to {}^{*}\mathbb{R}$ függvény f felemelése, ha $f(\omega) = {}^{\circ}F(\omega)$ M_L-majdnem minden ω-ra.

12. Tétel (Felemelési Tétel). *Az $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ akkor és csak akkor Loeb-mérhető, ha van egy F felemelése. Ha f korlátos (alulról, felülről v. mindkettő) akkor F is választható korlátosnak ugyanazzal a korláttal.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $F : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-mérhető F belső függvény, ekkor ${}^{\circ}F$ függvény Loeb-mérhető, mivel $r \in \mathbb{R}$ esetén

$$\{\omega \in \Omega : {}^{\circ}F(\omega) \leq r\} = \cap_{n\in\mathbb{N}}\{\omega \in \Omega : F(\omega) \leq r + \frac{1}{n}\} \in \sigma(\mathcal{A}) \subseteq L(\mathcal{A}).$$

Ha F az f felemelése, akkor $f = {}^{\circ}F$, és így f Loeb-mérhető. A másik irányhoz tegyük fel, hogy f Loeb-mérhető. Legyen $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a racionálisok felsorolása, és vegyük a

$$B_n = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq q_n\}$$

halmazokat. Válasszunk $n \in \mathbb{N}$-re $A_n \in \mathcal{A}$ halmazokat, hogy $M_L(A_n \Delta B_n) = 0$ és $A_n \subseteq A_m$ ha $q_n \leq q_m$ teljesüljön. Terjesszük ki az $\{A_n\}$ sorozatot belső $(A_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ sorozattá. Ekkor létezik $K \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, hogy minden $m, n \leq K$-ra $q_n \leq q_m$ esetén $A_n \subseteq A_m$, mivel az ilyen tulajdonságú K-k belső halmazt alkotnak az átviteli-elv miatt. Minden véges szám elemük, így kell hogy legyen végtelen elemük is. Rendezhetjük a $(q_n)_{n\leq K}$ hipervéges halmazt, szintén az átviteli-elv miatt: $q_{i_1} < ... < q_{i_K}$. Legyen

$$F(\omega) = \begin{cases} q_{i_j} & \text{ha } \omega \in A_{i_j} \setminus A_{i_{j-1}} \\ q_{i_K} + 1 & \text{ha } \omega \notin A_{i_K} \end{cases}$$

Az $\cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \Delta B_n)$ M_L-nulla halmazon kívül $F(\omega) \leq q_n$ akkor és csak akkor, ha $f(\omega) \leq q_n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, így itt ${}^{\circ}F(\omega) = f(\omega)$. Ha pedig $f \leq k$ akkor $F \wedge k$ is $\leq k$ felemelése f-nek, így a tételt bebizonyítottuk. □

13. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{C}, \mu)$ Radon mértéktér, és legyen $f : X \to \mathbb{R}$ mérhető, ekkor ${}^*f$ felemelése f-nek (${}^*\mu)_L$ szerint) és*

$${}^*f(x) \approx f({}^{\circ}x)$$

$({}^*\mu)_L$ majdnem minden $x \in {}^*X$-re. Tehát egy Loeb-null mértékű halmaztól eltekintve $x_1, x_2 \in {}^*X$ esetén

$$x_1 \approx x_2 \Longrightarrow {}^*f(x_1) \approx {}^*f(x_2).$$

Bizonyítás. Legyen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a racionális végpontú nyílt intervallumok felsorolása. Ha $x \in \mathrm{ns}({}^*X)$ és ${}^*f(x) \not\approx f({}^{\circ}x)$, ekkor valamilyen n-re

$$f({}^{\circ}x) \in U_n \text{ és } {}^*f(x) \notin U_n.$$

Legyen $A_n = f^{-1}(U_n)$. Ekkor erre az x-re $x \in \mathrm{st}^{-1}(A_n) \setminus {}^*A_n = B_n$. A 4. Következmény miatt

$${}^*\mu_L(\mathrm{st}^{-1}(A_n) \setminus {}^*A_n) = 0,$$

Így

$$\{x \in {}^*X : {}^*f(x) \not\approx f({}^{\circ}x)\} \subseteq ({}^*X \setminus \mathrm{ns}({}^*X)) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n,$$

és a jobb oldal ${}^*\mu_L$ 0-mértékű, mivel ilyenek megszámlálható uniója. □

Loeb-integrálás

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, M)$ nem standard mértéktér, $M : \mathcal{A} \to {}^*[0, \infty]$ véges, F $\mathcal{A}$-mérhető és $*$-integrálható, ekkor értelmes $\int F dM$. A következő tétel összeköti ezt a Loeb-mérték szerinti integrálással.

14. Tétel. *Ha F korlátos, belső, mérhető függvény, akkor*

$$^\circ\!\int F dM = \int {}^\circ F dM_L.$$

Bizonyítás. Lépcsős függvényekkel közelítjük F-et. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és válasszuk úgy m-et, hogy $|F(\omega)| \leq m\varepsilon$. Legyen

$$A_k = \{\omega \in \Omega : k\varepsilon \leq F(\omega) \leq (k+1)\varepsilon\}, \quad -m \leq k \leq m,$$

továbbá

$$F_1(\omega) = k\varepsilon \text{ ha } \omega \in A_k$$

$$F_2(\omega) = (k+1)\varepsilon \text{ ha } \omega \in A_k.$$

Így $F_1 \leq F \leq F_2$ és $0 \leq F_2 - F_1 \leq \varepsilon$, tehát

$$\int F_1 dM \leq \int F dM \leq \int F_2 dM.$$

Így

$$a = {}^\circ\!\int F_1 dM \leq {}^\circ\!\int F dM \leq {}^\circ\!\int F_2 dM = b.$$

Ekkor $b - a \leq \varepsilon M(\Omega)$. Hasonlóan ${}^\circ F_1 \leq {}^\circ F \leq {}^\circ F_2$ és

$$a' = \int {}^\circ F_1 dM \leq \int {}^\circ F dM \leq \int {}^\circ F_2 dM = b',$$

továbbá

$${}^\circ\!\int F_2 dM = {}^\circ\!\left(\sum_{-m \leq k \leq m} \varepsilon(k+1) M(A_k) \right) = \sum_{-m \leq k \leq m} \varepsilon(k+1) {}^\circ M(A_k)$$

$$= \sum_{-m \leq k \leq m} \varepsilon(k+1) M_L(A_k) = \int {}^\circ F_2 dM_L$$

és ugyanez F_1-re. Emiatt $a = a'$ és $b = b'$, így a fenti két egyenlőtlenségből

$$\left| {}^\circ\!\int F dM - \int {}^\circ F dM_L \right| \leq b - a \leq \varepsilon M(\Omega),$$

és készen vagyunk. □

6. Következmény. *Ha F korlátos felemelése az f Loeb-mérhető függvénynek, akkor*

$$\int f dM_L = {}^{\circ}\!\int F dM.$$

Általában azonban nem igaz, hogy ${}^{\circ}\!\int F dM = \int {}^{\circ}F dM_L$.

2. Példa. Legyen $\Omega = {}^*[0,1]$, $\Lambda = {}^*\lambda$ a *-Lebesgue mérték, $K = {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ és $F : {}^*[0,1] \to {}^*\mathbb{R}$:

$$F(t) = \begin{cases} K & \text{ha } t \leq \frac{1}{K} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ekkor ${}^{\circ}F \equiv 0$, így $\int {}^{\circ}F d\Lambda_L = 0$, de $\int F d\Lambda = 1$.

7. Következmény. *Minden $\mathcal{A}$-mérhető belső $F \geq 0$ esetén*

$$\int {}^{\circ}F dM_L \leq {}^{\circ}\!\int F dM.$$

Bizonyítás. A Beppo-Levi tételt és az előző tételt felhasználva

$$\int {}^{\circ}F dM_L = \lim_{n\to\infty} \int ({}^{\circ}F \wedge n) dM_L$$

$$= \lim_{n\to\infty} {}^{\circ}\!\int (F \wedge n) dM \leq {}^{\circ}\!\int F dM.$$

□

Az ${}^{\circ}\!\int F dM = \int {}^{\circ}F dM_L$ azonban egy szűkebb osztályra fennáll, ezért vezetjük be a következő definíciót, és erről szól a következő tétel.

20. Definíció. Az $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-mérhető és belső függvényt S-integrálhatónak nevezzük, ha
(1) $\int_\Omega |F| dM$ véges,
(2) Ha $A \in \mathcal{A}$ és $M(A) \approx 0$, akkor $\int_A |F| dM \approx 0$,
és ha M nem véges, akkor még
(3) Ha $A \in \mathcal{A}$ és $F \approx 0$ A-n, akkor $\int_A |F| dM \approx 0$.

15. Tétel. *Legyen $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-mérhető és $F \geq 0$. Ekkor a következők ekvivalensek:*
(1) F S-integrálható.
(2) ${}^{\circ}F$ Loeb-integrálható és

$${}^{\circ}\!\int F dM = \int {}^{\circ}F dM_L.$$

Bizonyítás. $(1) \Rightarrow (2)$: Tegyük fel, hogy F S-integrálható, és legyen:

$$I = \int {}^{\circ}F dM_L.$$

I 7. Következmény miatt véges és a 14. Tételből

$$\int (F \wedge n) dM \leq \int ({}^{\circ}F \wedge n) dM_L + \frac{1}{n} \leq I + \frac{1}{n}$$

véges n-ekre, de az ilyen n-ek belső halmazt alkotnak, ezért az 1. Következmény (1) miatt van végtelen K, hogy

$$\int (F \wedge K) dM \leq I + \frac{1}{K}.$$

Így

$$\int F dM \leq \int_{F>K} F dM + \int (F \wedge K) dM \leq \int_{F>K} F dM + I + \frac{1}{K}.$$

Mivel ${}^{\circ}F(\omega) < \infty$ m.m. (mivel integrálható), ezért $M(\{F > K\}) \approx 0$. F S-integrálhatósága miatt $\int_{\{F>K\}} F dM \approx 0$. Ezért

$${}^{\circ}\!\int F dM \leq I = \int {}^{\circ}F dM_L,$$

amit a 7. Következménnyel kombinálva készen vagyunk.
$(2) \Rightarrow (1)$ Ha $M(A) \approx 0$, akkor

$${}^{\circ}\!\int F dM = {}^{\circ}\!\int_{\Omega \setminus A} F dM + {}^{\circ}\!\int_A F dM \geq {}^{\circ}\!\int_{\Omega \setminus A} F dM \geq \int_{\Omega \setminus A} {}^{\circ}F dM_L = \int {}^{\circ}F dM_L,$$

mivel $M_L(A) = 0$. (2) miatt $=$ áll mindenhol, ezért $\int_A F dM \approx 0$. $\square$

16. Tétel. *Legyen $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ Loeb-mérhető. Ekkor f akkor és csak akkor M_L-integrálható, ha van S-integrálható $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ felemelése.*

Bizonyítás. Az elégségességhez legyen F S-integrálható felemelés, $f = {}^{\circ}F$ m.m., és a 15. Tétel miatt ${}^{\circ}F$-integrálható. Megfordítva legyen f integrálható, ekkor + és - részt véve feltehető, hogy $f \geq 0$, és a 12. Tétel miatt vehető $F \geq 0$ felemelés. Véges n-re a 6. Következményből

$$\int (F \wedge n) dM \leq \int (f \wedge n) dM_L + \frac{1}{n} \leq \int f dM_L + \frac{1}{n},$$

innen az előbb látott módon valamely végtelen K-ra

$$\int (F \wedge K) dM \leq \int f dM_L + \frac{1}{K}.$$

$F \wedge K$ az f felemelése, így

$$^\circ\!\int (F \wedge K) dM \leq \int f dM_L = \int {}^\circ\!(F \wedge K) dM_L.$$

A másik irányú egyenlőtlenség következik a 7. Következményből, és így $F \wedge K$ a 15. Tétel miatt S-integrálható. □

21. Definíció. $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$-ot SL^p-belinek mondjuk, ha $|F|^p$ S-integrálható.

17. Tétel. *Ha M véges, $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ belső, $\mathcal{A}$-mérhető, és $F \in SL^p$ valamely $p \geq 1$-re, akkor F S-integrálható (azaz $F \in SL^1$).*

Bizonyítás. Hölder-egyenlőtlenség $|F|$-re. □

18. Tétel. *Az $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ akkor és csak akkor Lebesgue-integrálható, ha létezik S-integrálható $F : \boldsymbol{T} \to {}^*\mathbb{R}$, hogy*

$$F(\underline{t}) \approx f({}^\circ\underline{t})$$

m.m. $\underline{t} \in \boldsymbol{T}$ esetén. Erre a F-re

$$\int f d\lambda \approx \sum_{\underline{t} \in \boldsymbol{T}} F(\underline{t}) \Delta t.$$

Bizonyítás. Definiáljuk $\overline{f} : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$-t, legyen

$$\overline{f}(\underline{t}) = f({}^\circ\underline{t}).$$

A 10. Tétel miatt f akkor és csak akkor Lebesgue-mérhető, ha $\overline{f}$ Loeb-mérhető, ugyanakkor integrálhatóak, és ha igen, akkor

$$\int f d\lambda = \int \overline{f} d\nu_L.$$

A 16.Tételből $\overline{f}$ akkor és csak akkor Loeb-integrálható, ha van S-integrálható $F : \underline{T} \to {}^*\mathbb{R}$ felemelése. Erre a F-re $F(\underline{t}) \approx \overline{f}(\mathrm{t})$ m.m. $\underline{t} \in \mathbf{T}$-re, és

$$\int \overline{f} d\nu_L \approx \int F d\nu = \sum_{\underline{t} \in \mathbf{T}} F(\underline{t}) \Delta t,$$

így ez a F megfelelő. □

Az Itô-integrálás nem standard leírása

A mérhető függvényekhez hasonlóan a sztochasztikus folyamatok felemelését is definiálhatjuk, és a Wiener-folyamat konstrukciónk segítségével a Wiener-folyamat szerinti integrált is kifejezhetjük nem standard összegként. Ez a formula lesz e rész lényege.

A következőkben legyen $f : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ folyamat, $B(t,\omega)$ pedig a 11. Tételben megismert $(\Omega, \mathcal{D}, P)$ mértéktéren adott Wiener-folyamat. Legyen

$$I(t,\omega) = \int_0^t f(s,\omega) dB(s,\omega),$$

továbbá $X(\underline{t},\omega)$ a 11. Tételben megismert folyamat. Legyen $\Delta X(\underline{t},\omega) = X(\underline{t} + \Delta t, \omega) - X(\underline{t},\omega) = \pm(\Delta t)^{\frac{1}{2}}$.

22. Definíció. Legyen $F : \mathbf{T} \times \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ és $f : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy F az f felemelése, ha majdnem minden ω-ra S-folytonos, és

$$f({}^\circ\underline{t},\omega) = {}^\circ F(\underline{t},\omega)$$

teljesül minden $\underline{t} \in \mathbf{T}$-re. F-et továbbá adaptáltnak nevezzük, ha $F(\underline{t},\cdot)$ mérhető $\mathcal{F}_t = \sigma(\omega(\underline{s}) \mid \underline{s} \leq \underline{t})$-re nézve.

Ezek után megfogalmazzuk a 12. és 18. tételek általánosításait.

19. Tétel. *Ha f adaptált, akkor létezik adaptált felemelése.*

20. Tétel. *Legyen $f(\underline{t},\omega)$ Itô-integrálható és adaptált, és legyen F tetszőleges adaptált felemelése [ami az előző tétel szerint létezik]. Legyen $G : \mathbf{T} \times \Omega \to {}^*\mathbb{R}$*

$$G(\underline{t},\omega) = \sum_{\underline{s}<\underline{t}} F(\underline{s},\omega)\Delta X(\underline{s},\omega).$$

Ekkor G az adaptált felemelése I-nek, azaz majdnem minden ω-ra $G(\underline{t},\omega)$ S-folytonos, és

$$I({}^\circ\underline{t},\omega) = {}^\circ G(\underline{t},\omega)$$

minden $\underline{t} \in \mathbf{T}$-re.

3. fejezet

A Wiener-folyamat lokális idejének belső leírása

23. Definíció. A B Wiener-folyamat lokális ideje

$$s(t,x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I_{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)}(B(s))ds.$$

Legyen továbbá
$Z(t,x) = \{s \le t \mid B(s) = x\} \cup \{0\}$
$I(t,x) = \{I \subseteq [0,t] \mid I\ Z(\infty,x)^c$ összefüggő komponense $\}$
$n(t,x,\delta) = \#\{I \in I(t,x) \mid m(I) > \delta\}$,
ahol m-mel jelöljük a standard Lebesgue-mértéket.

Fejezetünk célja a következő tétel bebizonyítása lesz.

21. Tétel.

$$\lim_{\delta \to 0^+} \delta^{\frac{1}{2}} n(t,x,\delta) = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t,x)$$

1 valószínűséggel minden $s > 0$-ra egyenletesen $(t,x) \in [0,s] \times \mathbb{R}$-en.

Az előző fejezetben látott Wiener-folyamat konstrukciót fogjuk használni most is: $B(t)$ egy Δt lépésközű $(\Delta t)^{\frac{1}{2}}$ lépéshosszúságú véletlen szimmetrikus bolyongás, azonban most a 11. tételtől eltérően a teljes $[0,\infty)$ időhorizonton definiálva, azaz ezentúl $\mathbf{T} = \{i\Delta t \mid i \in {}^*\mathbb{N}\}$, $\mathbf{S} = \{i(\Delta t)^{\frac{1}{2}} \mid i \in {}^*\mathbb{N}\}$. X legyen az előzőekben definiált, $\mathcal{B}$ jelölje az $\mathbb{R}$-beli Borelek halmazát. Ekkor $\mathbf{T}$ és $\mathbf{S}$ belső halmazain ($\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$) értelmezhetjük a $\lambda(A) = \#(A)\Delta t$, illetve $\mu(A) = \#(A)(\Delta t)^{\frac{1}{2}}$ mértékeket, és így kapjuk a $(\mathbf{T}, L(\mathcal{C}), \lambda_L)$ és $(\mathbf{S}, L(\mathcal{D}), \mu_L)$ mértéktereket. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \overline{P})$ a $\{-1,1\}^N$ belső halmazain már látott normalizált számlálómérték, $(\Omega, L(\mathcal{A}), P)$ pedig a hozzá tartozó Loeb-mérték.

24. Definíció. Ha $U \subseteq {}^*\mathbb{R}^n$ belső halmaz, akkor $Y : U \times \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ belső sztochasztikus folyamat, ha minden $u \in U$-ra és $B \in {}^*\mathcal{B}$-re $\{\omega \mid Y(u,\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$.

25. Definíció. Az Y belső sztochasztikus folyamat S-folytonos, ha $Y(\cdot,\omega)$ S-folytonos majdnem biztosan. Ekkor $\mathrm{st}(Y)=y:{}^{\circ}(\mathrm{ns}(U))\to\mathbb{R}$-rel jelöljük a következő függvényt:

$$y({}^{\circ}u,\omega)=\begin{cases}{}^{\circ}Y(u,\omega) & \text{ha } Y(\cdot,\omega) \text{ S-folytonos U-n}\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}$$

Ezzel a definícióval, a 11. Tételben definiált X-szel $B=\mathrm{st}(X)$ Wiener-folyamat.

3.1. A nem standard lokális idő

26. Definíció. X *-lokális ideje az $L:\mathbf{T}\times\mathbf{S}\to{}^*\mathbb{R}$ folyamat:

$$L(\underline{t},\underline{x},\omega)=\frac{1}{2}\sum_{\underline{s}=0}^{\underline{t}-\Delta t}I_{\underline{x}}(X(\underline{s}))(\Delta t)^{\frac{1}{2}},$$

és legyen

$$J(\underline{t},\underline{x},\omega)=\sum_{s=0}^{\underline{t}-\Delta t}I_{(x,\infty)}(X(\underline{s}))\omega_{\underline{s}+\Delta t}(\Delta t)^{\frac{1}{2}}.$$

Következő célunk annak bizonyítása lesz, hogy L S-folytonos folyamat, és $\mathrm{st}(L)(t,x)=s(t,x)$. A most következő lemma Kolmogorov tételének nem standard változata, és a bizonyítása is ugyanúgy menne.

3. Lemma. *Legyenek $b>0$ és $c>1$ valós számok, és Y belső sztochasztikus folyamat $\mathbf{T}\times\mathbf{S}$-en, amire fennáll:*
(1) Minden $\underline{x}\in\mathrm{ns}(\mathbf{S})$-re $Y(\cdot,\underline{x})$ S-folytonos folyamat $\mathbf{T}$-n.
(2) Minden $\underline{t}\in\mathrm{ns}(\mathbf{T})$-re létezik pozitív valós $c(\underline{t})$, hogy $x,x'\in\mathrm{ns}(\mathbf{S})$, és $x\approx x'$-ra

$$\overline{E}(\max_{\underline{s}\leq\underline{t}}|Y(\underline{s},\underline{x})-Y(\underline{s},\underline{x}')|^b)\leq c(\underline{t})|\underline{x}-\underline{x}'|^c.$$

Ekkor Y S-folytonos folyamat $\mathbf{T}\times\mathbf{S}$-n.

4. Lemma. *Léteznek c_1 és c_2 valós konstansok, hogy minden $(\underline{t},\underline{x})\in\mathbf{T}\times\mathbf{S}$-re*
(a) $\overline{P}(X(\underline{t})=\underline{x})\leq c_1(\Delta t)^{\frac{1}{2}}(\underline{t}+\Delta t)^{-\frac{1}{2}}$
(b)$\overline{E}(L(\underline{t},\underline{x})^2)\leq c_2\underline{t}$.

Bizonyítás. (a) A Stirling-formulából $\lim_{n\to\infty}\binom{2n}{n}\frac{\sqrt{n}}{2^{2n}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, és az átviteli elvből nem standard n-ekre $\approx$ áll, így ($\underline{t}=2n\Delta t$, $n\in{}^*\mathbb{N}$)

$$\overline{P}(X(\underline{t})=\underline{x})\leq\overline{P}(X(\underline{t})=0)=\binom{2n}{n}/2^{2n}\leq\frac{c_1}{\sqrt{2n+1}}=c_1(\Delta t)^{\frac{1}{2}}(\underline{t}+\Delta t)^{-\frac{1}{2}}.$$

(b)

$$\overline{E}\left((L(\underline{t},\underline{x}))^2\right)=\frac{1}{4}\overline{E}\left(\left(\sum_{\underline{s}=0}^{\underline{t}-\Delta t} I_{\{\underline{x}\}}\left(X\left(\underline{s}\right)\right)(\Delta t)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right)\leq$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\underline{s}_1=0}^{\underline{t}-\Delta t}\sum_{\underline{s}_2=\underline{s}_1}^{\underline{t}-\Delta t}\overline{E}\left(I_{\{\underline{x}\}}\left(X\left(\underline{s}_1\right)\right)I_{\{0\}}\left(X\left(\underline{s}_2\right)-X\left(\underline{s}_1\right)\right)\Delta t\right)\leq$$

$$\frac{{c_1}^2}{2}\sum_{\underline{s}_1=0}^{\underline{t}-\Delta t}\sum_{\underline{s}_2=\underline{s}_1}^{\underline{t}-\Delta t}\left(\underline{s}_1+\Delta t\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\underline{s}_2-\underline{s}_1+\Delta t\right)^{-\frac{1}{2}}(\Delta t)^2\leq$$

$$\frac{{c_1}^2}{2}\int_0^{\underline{t}}\int_{s_1}^{\underline{t}} {s_1}^{-\frac{1}{2}}\left(s_2-s_1\right)^{-\frac{1}{2}}\,{}^*ds_2{}^*ds_1\leq$$

$$\frac{{c_1}^2}{2}\int_0^{\underline{t}}\int_{s_1}^{\underline{t}+\underline{s}_1} {s_1}^{-\frac{1}{2}}\left(s_2-s_1\right)^{-\frac{1}{2}}\,{}^*ds_2{}^*ds_1=2{c_1}^2\underline{t},$$

ahol ${}^*ds$ a belső Lebesgue-integrál. □

Most kimondjuk a Burkholder-egyenlőtlenséget, melyet többször is alkalmazni fogunk a későbbiekben.

22. Tétel (Burkholder-egyenlőtlenség). *Legyen $p>0$, $(f_n,\mathcal{F}_n)$ martingál és*

$$\langle f,f\rangle_n=\sum_{i=1}^n E\left((f_i-f_{i-1})^2\mid\mathcal{F}_{i-1}\right),$$

ahol $f_0=0$ és $\mathcal{F}_0$ triviális. Ekkor

$$E\left(\max_{i\leq n}|f_i|^p\right)\leq C_pE\left({\langle f,f\rangle_n}^{p/2}+\max_{i\leq n}|f_i-f_{i-1}|^p\right)\tag{3.1}$$

alkalmas C_p konstanssal. Később az ennél gyengébb

$$E\left(|f_n|^p\right)\leq C_pE\left({\langle f,f\rangle_n}^{p/2}+\sum_{i=1}^n|f_i-f_{i-1}|^p\right)\tag{3.2}$$

verziót is használni fogjuk.

Következő tételünkben J S-folytonosságán és a Tanaka-formulán keresztül belátjuk L S-folytonosságát, és $\mathrm{st}(L)=s$-et.

23. Tétel. *(a) J S-folytonos $\mathbf{T}\times\mathbf{S}$-en, és minden $\underline{x}\in ns(\mathbf{S})$-re*

$${}^\circ J(\underline{t},\underline{x})=\int_0^{\underline{t}} I_{({}^\circ\underline{x},\infty)}(B(\underline{s}))dB(s)\text{ minden }\underline{t}\in\mathrm{ns}(\mathbf{T})\text{-re }1\text{ valószínűséggel.}\tag{3.3}$$

(b) Majdnem minden ω-ra:

$$(X(\underline{t})-\underline{x})^+-(-\underline{x})^+\approx J(\underline{t},\underline{x})+L(\underline{t},\underline{x}).\tag{3.4}$$

(c) L S-folytonos $\mathbf{T}\times\mathbf{S}$-en és $st(L)(t,x)=s(t,x)$.

Bizonyítás. (a) $I_{(\underline{x},\infty)}(X(\underline{s}))$ a felemelése $I_{(^\circ\underline{x},\infty)}(B(s))$-nek, mivel $P(^\circ X(\underline{s}) = {^\circ\underline{x}}) = 0$, ha $^\circ\underline{s} > 0$, így a 20. Tétel miatt teljesül (3.3). J S-folytonosságának belátásához a 3. Lemma feltételét látjuk be $b = 4$-gyel és $c = 2$-vel. Rögzítünk $\underline{t} \in \mathrm{ns}(\mathbf{T})$-t és $\underline{x} < \underline{x}',\ \underline{x} \approx \underline{x}'$-t $\mathrm{ns}(\mathbf{S})$-ből. $\{(J(\underline{t},\underline{x}) - J(\underline{t},\underline{x}'), \mathcal{A}_{\underline{t}}) \mid \underline{t} \in \mathbf{T}\}$ belső martingál. Felhasználva a Burkholder-egyenlőtlenség 3.1 verzióját az átviteli-elvvel ötvözve, a második, végtelenül kis tagot a konstansba olvasztva, továbbá a 4. Lemma (a) és (b) részét az első, illetve az utolsó két sorban

$$\overline{E}\left(\max_{\underline{s}\le\underline{t}}\left(J\left(\underline{s},\underline{x}\right) - J\left(\underline{s},\underline{x}'\right)\right)^4\right) \le c\overline{E}\left(\left(\sum_{\underline{s}=0}^{\underline{t}-\Delta t} I_{(\underline{x},\underline{x}']}\left(X\left(\underline{s}\right)\right)\left(\omega_{\underline{s}+\Delta t}\right)^2 \Delta t\right)^2\right) \le$$

$$2c\overline{E}\left(\sum_{\underline{s}_1=0}^{\underline{t}-\Delta t}\sum_{\underline{s}_2=\underline{s}_1}^{\underline{t}-\Delta t} I_{(\underline{x},\underline{x}']}\left(X\left(\underline{s}_1\right)\right) I_{(\underline{x},\underline{x}']}\left(X\left(\underline{s}_2\right)\right)\left(\Delta t\right)^2\right) \le$$

$$2c\overline{E}\left(\sum_{\underline{s}_1=0}^{\underline{t}-\Delta t}\sum_{\underline{s}_2=\underline{s}_1}^{\underline{t}-\Delta t} I_{(\underline{x},\underline{x}']}\left(X\left(\underline{s}_1\right)\right) I_{(\underline{x}-\underline{x}',\underline{x}'-\underline{x})}\left(X\left(\underline{s}_2\right) - X\left(\underline{s}_1\right)\right)\left(\Delta t\right)^2\right) \le$$

$$4cc_1^2\left(\underline{x}' - \underline{x}\right)^2\left(\sum_{\underline{s}_1=0}^{\underline{t}-\Delta t}\sum_{\underline{s}_2=\underline{s}_1}^{\underline{t}-\Delta t}\left(\underline{s}_1 + \Delta t\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\underline{s}_2 - \underline{s}_1 + \Delta t\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\Delta t\right)^2\right) \le$$

$$16cc_1^2\underline{t}\left(\underline{x} - \underline{x}'\right)^2.$$

Ezzel (a) kész.
(b) Legyen $Y(\underline{t},\underline{x}) = (X(\underline{t}) - \underline{x})^+ - (-\underline{x})^+$. Ekkor

$$Y(\underline{t}+\Delta t,\underline{x}) - Y(\underline{t},\underline{x}) = I_{(\underline{x},\infty)}(X(\underline{t}))\omega_{\underline{t}+\Delta t}(\Delta t)^{\frac{1}{2}} + I_{\{\underline{x}\}}(X(\underline{t}))I_1(\omega_{\underline{t}+\Delta t})(\Delta t)^{\frac{1}{2}}.$$

Összegezve

$$Y(\underline{t},\underline{x}) = \sum_{\underline{s}=0}^{\underline{t}-\Delta t} I_{(\underline{x},\infty)}(X(\underline{s}))\omega_{\underline{s}+\Delta t}(\Delta t)^{\frac{1}{2}} + \sum_{\underline{s}=0}^{\underline{t}-\Delta t} I_{\{\underline{x}\}}(X(\underline{s}))I_{\{1\}}(\omega_{\underline{s}+\Delta t})(\Delta t)^{\frac{1}{2}} =$$

$$J(\underline{t},\underline{x}) + L(\underline{t},\underline{x}) + \sum_{\underline{s}=0}^{\underline{t}-\Delta t} I_{\{x\}}(X(\underline{s}))(I_{\{1\}}(\omega_{\underline{s}+\Delta t}) - 1/2)(\Delta t)^{\frac{1}{2}} =$$

$$J(\underline{t},\underline{x}) + L(\underline{t},\underline{x}) + \frac{1}{2}\sum_{\underline{s}=0}^{\underline{t}-\Delta t} I_{\{x\}}(X(\underline{s}))\omega_{\underline{s}+\Delta t}(\Delta t)^{\frac{1}{2}} =$$

$$J(\underline{t},\underline{x}) + L(\underline{t},\underline{x}) + \frac{1}{2}\Big(J(\underline{t},\underline{x} - (\Delta t)^{\frac{1}{2}}) - J(\underline{t},\underline{x})\Big) \approx$$

$$J(\underline{t},\underline{x}) + L(\underline{t},\underline{x}).$$

Ezzel (b) is kész.
(c) X, J S-folytonosságából (b)-t felhasználva adódik L S-folytonossága, és (b)-t átírva

$$(X(\underline{t}) - \underline{x})^+ - (-\underline{x})^+ \approx \int_0^{\underline{t}} I_{(\underline{x},\infty)}(X(\underline{s}))dX(\underline{s}) + L(\underline{t},\underline{x})$$

$(\underline{t},\underline{x}) \in \mathrm{ns}(\mathbf{T}\times\mathbf{S})$ m.m. ω-ra. A standard Tanaka-formulából továbbá

$$(B(t) - x)^+ - (-x)^+ = \int_0^{t} I_{(x,\infty)}(B(s))dB(s) + s(t,x)$$

minden $(t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}$-re m.m. A két formula összevetéséből valóban $\mathrm{st}(L)(t,x) = s(t,x)$ következik, így a tételt beláttuk. □

3.2. A teljes belső jellemzés

27. Definíció. $a(t,x,\delta) = \{s \in \mathbb{R} \mid |s-u| < \delta/2$ valamely $u \in Z(t,x)$-re $\}$
$a'(t,x,\delta) = \cup\{I \mid I \in I(t,x), m(I) \le \delta\}$
Legyen $\underline{x},\underline{x}' \in \mathbf{S}$, $\underline{t},\underline{\delta} \in \mathbf{T}$ és $\underline{\delta} > 0$, ekkor

$$T(0) = \min\{\underline{t} > 0 \mid X(\underline{t}) = 0\}, \text{[a 0 első elérési ideje.]}$$

$$T(\underline{x},\underline{x}') = \min\{\underline{t} > 0 \mid X(\underline{t}) = \underline{x} \text{ vagy } \underline{x}'\}\text{[}\underline{x}\text{ vagy }\underline{x}'\text{ első elérési ideje.]}$$

$$U(\underline{x},\underline{\delta}) = (T(0,\underline{x}) \wedge \underline{\delta})\underline{\delta}^{-\frac{1}{2}}$$

[0 vagy $\underline{x}$ első elérési idejét $\underline{\delta}$-ra csökkentjük, és $\underline{\delta}^{-\frac{1}{2}}$ szorzóval normáljuk.]

$$U'(\underline{x},\underline{\delta}) = T(0,\underline{x})\delta^{-\frac{1}{2}} I_{\{T(0,\underline{x}) \le \underline{\delta}\}}$$

[0 vagy $\underline{x}$ első elérési idejét $\underline{\delta}$-tól levágjuk, és $\underline{\delta}^{-\frac{1}{2}}$ szorzóval normáljuk.]

$$M(\underline{t},\underline{x},\underline{x}',\underline{\delta}) = \sum_{\underline{s}=0}^{\underline{t}-\Delta t} I_{\underline{x}}(X(\underline{s})(U(\underline{x}' - \underline{x},\underline{\delta}) \circ \theta_{\underline{s}}) + I_{\underline{x}'}(X(\underline{s}))(U(\underline{x} - \underline{x}',\underline{\delta}) \circ \theta_{\underline{s}}))$$

[az $\underline{x}$ és $\underline{x}'$ helyeket vesszük, a szomszédosak távolságát $\underline{\delta}$-ra csökkentve
$\underline{\delta}^{-\frac{1}{2}}$-es szorzóval normálva összeadjuk.]

$$M'(\underline{t},\underline{x},\underline{x}',\underline{\delta}) = \sum_{\underline{s}=0}^{\underline{t}-\Delta t} I_{\underline{x}}(X(\underline{s})(U'(\underline{x}' - \underline{x},\underline{\delta}) \circ \theta_{\underline{s}}) + I_{\underline{x}'}(X(\underline{s}))(U'(\underline{x} - \underline{x}',\underline{\delta}) \circ \theta_{\underline{s}}))$$

[az $\underline{x}$ és $\underline{x}'$ helyeket vesszük, a szomszédosak távolságát $\underline{\delta}$-tól levágva $\underline{\delta}^{-\frac{1}{2}}$-es szorzóval normálva összeadjuk.]

$$M''(\underline{t},\underline{x},\underline{\delta}) = \sum_{\underline{s}=0}^{\underline{t}-\Delta t} I_{\underline{x}}(X(\underline{s}))(U'(0,\underline{\delta})\circ\theta_{\underline{s}}),$$

[a szomszédos x-helyek távolságát $\underline{\delta}$-tól levágva $\underline{\delta}^{-\frac{1}{2}}$-es szorzóval normálva összeadjuk.], ahol $\theta_{\underline{s}}$ az $\underline{s}$-sel előre léptető operátor.

5. Lemma. *Legyen* $(t,x,x',\delta) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^2\times(0,\infty)$ $(\underline{t},\underline{x},\underline{x}',\underline{\delta}) \in \mathbf{T}\times\mathbf{S}^2\times\mathbf{T}$ *és* ${}^\circ(\underline{t},\underline{x},\underline{x}',\underline{\delta}) = (t,x,x',\delta)$*, továbbá* $\underline{x}\neq\underline{x}'$*. Ekkor majdnem biztosan*
(a) $|{}^\circ M(\underline{t},\underline{x},\underline{x}',\underline{\delta}) - m(a(t,x,\delta)\cup a(t,x',\delta))\delta^{-\frac{1}{2}}| \leq \delta^{\frac{1}{2}}$
(b) $|{}^\circ M''(\underline{t},\underline{x},\underline{\delta}) - m(a(t,x,\delta))\delta^{-\frac{1}{2}}| \leq \delta^{\frac{1}{2}}$
(c) $m(a(t,x,\delta)\cup a(t,x',\delta))\delta^{-\frac{1}{2}} \leq {}^\circ M'(\underline{t},\underline{x},\underline{x}',\underline{\delta})$.

Bizonyítás. Legyen (t,x,x',δ) rögzített, ekkor 1-valószínűséggel teljesülnek az alábbi feltételek:
(1) B-nek nincs lokális szélsőérték-helye $Z(\infty,x)\cup Z(\infty,x')$-n.
(2) Nincs $I\in I(\infty,x)\cup I(\infty,x')$, melyre $m(I)=\delta$
(3) $B(t)\neq x$ és $B(t)\neq x'$
(4) $\limsup_{s\to\infty} B(s) = +\infty$ és $\liminf_{s\to\infty} B(s) = -\infty$
(5) X S-folytonos $\mathbf{T}$-n.

(3), (4) és (5) nyilvánvaló, az (1)-ben elég csak $Z(\infty,x)$-re szorítkozni, ekkor az esemény felírható $\cup_{p<q\in\mathbb{Q}}\{$ B-nek lokális szélsőértéke x a $[p,q]$ intervallumon $\}$ alakban. Mivel $\max\{|B(t)| \mid p\leq t\leq q\}$ és $\min\{|B(t)| \mid p\leq t\leq q\}$ abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók, ezért a megszámlálható unió minden tagja 0 valószínűségű, így az egész unió is.

(2)-ben szintén elég $I(\infty,x)$-re szorítkozni, ekkor eseményünk ismét felírható megszámlálható unióként: ha

$$A_q = \{\exists I \mid I\in I(\infty,x),\ q\in I \text{ és } m(I)=\delta\},$$

akkor az eseményünk: $\cup_{q\in\mathbb{Q}}A_q$.
Ha az

$$I_q = \begin{cases} I & \text{ahol } I\in I(\infty,x) \text{ és } q\in I \text{ ha } Z(p,x)\neq\emptyset \text{ és } B(p)\neq x \\ \emptyset & \text{ha } Z(p,x)=\emptyset \text{ vagy } B(p)=x \end{cases}$$

jelölést használjuk, akkor a $Z_q = m(I_q)$ valószínűségi változó abszolút folytonos eloszlású, így a megszámlálható unió minden tagja 0 valószínűségű, így az egész unió is.

(a) Legyen $\{\underline{s}<\underline{t} \mid X(\underline{s}) = \underline{x} \text{ vagy } \underline{x}'\} = \{\underline{t}_0,\dots,\underline{t}_{N-1}\}$ és $\underline{t}_N = \min\{\underline{s}\geq\underline{t} \mid X(\underline{s}) = \underline{x} \text{ vagy } \underline{x}'\}$. (4) miatt ${}^\circ\underline{t}_N<\infty$. Legyen

$$A = \cup_{i=0}^{N-1}\left((\underline{t}_i,\underline{t}_i+\delta/2]\cup(\underline{t}_{i+1}-\delta/2,\underline{t}_{i+1}]\right)\cap(\underline{t}_i,\underline{t}_{i+1}]\cap\mathbf{T}.$$

Ekkor

$$\lambda(A)\underline{\delta}^{-\frac{1}{2}} = \sum_{i=0}^{N-1} \left((\underline{t}_{i+1} - \underline{t}_i) \wedge \underline{\delta} \right) \underline{\delta}^{-\frac{1}{2}} = M(\underline{t}, \underline{x}, \underline{x}', \underline{\delta}). \tag{3.5}$$

Ha $\underline{u} \in A \setminus (\underline{t}_N - \underline{\delta}/2, \underline{t}_N]$, akkor $|\underline{u} - \underline{t}_i| \leq \underline{\delta}/2$ valamely $i \leq N-1$-re. Ekkor ${}^\circ X(\underline{t}_i) = B({}^\circ\underline{t}_i) \in \{x, x'\}$ és $|{}^\circ\underline{u} - {}^\circ\underline{t}_i| \leq \delta/2$, így ${}^\circ\underline{u} \in a(t, x, \delta') \cup a(t, x', \delta')$ minden $\delta' > \delta$-ra. Ezért

$${}^\circ M(\underline{t}, \underline{x}, \underline{x}', \underline{\delta}) = {}^\circ(\lambda(A)\underline{\delta}^{-\frac{1}{2}}) \leq \delta^{\frac{1}{2}}/2 + \lambda_L(\mathrm{st}^{-1}(a(t, x, \delta') \cup a(t, x', \delta')))\delta^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\delta^{\frac{1}{2}}/2 + m((a(t, x, \delta') \cup a(t, x', \delta')))\delta^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.6}$$

(Felhasználva a standard és nem standard Lebesgue-mértékek közötti mértéktartást) Felhasználva hogy 1 valószínűséggel

$$m(\{s \mid |s - u| = \delta/2 \text{ valamely } u \in Z(t, x) \cup Z(t, x')\}) = 0,$$

ami következik abból, hogy Fubini-tétellel:
$E(m(Z(t,x))) = E(\int_0^t \chi_{\{B(t)=x\}} dt) = \int_0^t E(\chi_{\{B(t)=x\}}) dt = \int_0^t P(B(t) = x) dt = \int_0^t 0 dt = 0$, és így $m(Z(t,x)) = 0$ 1 valószínűséggel. Így 3.6-ben δ'-t δ-ra cserélhetjük

$${}^\circ M(\underline{t}, \underline{x}, \underline{x}', \underline{\delta}) \leq \delta^{\frac{1}{2}}/2 + m(a(t, x, \delta) \cup a(t, x', \delta))\delta^{-\frac{1}{2}}.$$

A másik irányhoz tegyük fel, hogy ${}^\circ\underline{s} \in (a(t, x, \delta) \cup a(t, x', \delta))$ és $t > {}^\circ\underline{s} > {}^\circ\underline{t}_0 = \inf\{s \mid B(s) \in \{x, x'\}\}$, az utolsó egyenlőségnél felhasználva (1)-et. $|u - {}^\circ\underline{s}| < \delta/2$ valamely $u \in Z(t, x) \cup Z(t, x')$-re, és $u < t$ (3) miatt. Ekkor van $\underline{u} \approx u$, hogy $X(\underline{u}) = \underline{x}$ vagy $\underline{x}'$, mert különben pl. $X(\underline{u}) > \underline{x}$ minden $\underline{u} \approx u$ esetén, azaz minden $\underline{u} \in B(u, \frac{1}{n})$, ahol $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ esetén is. Az ilyen n-ek halmaza azonban belső, ezért 1. Következmény (2) része miatt van benne véges $n \in \mathbb{N}$, és így B-nek lokális minimuma volna u-ban, ellentétben (1)-gyel. Ekkor $|\underline{u} - \underline{s}| < \underline{\delta}/2$, és így $\underline{s} \in A$, majd 3.5-öt is felhasználva

$$m(a(t, x, \delta) \cup a(t, x', \delta))\delta^{-\frac{1}{2}} = \lambda_L(st^{-1}(a(t, x, \delta) \cup a(t, x', \delta)))\delta^{-\frac{1}{2}} \leq$$

$$\delta^{\frac{1}{2}} + \lambda_L(A)\delta^{-\frac{1}{2}} = \delta^{\frac{1}{2}} + {}^\circ M(\underline{t}, \underline{x}, \underline{x}', \underline{\delta}).$$

Ezzel (a)-t beláttuk.
(b) és (c) hasonlóan igazolható az

$$A''(\underline{t}, \underline{x}, \underline{\delta}) = \{\underline{s} \in \mathbf{T} \mid \exists \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in \mathbf{T} : \underline{u}_1 < \underline{t},\ \underline{u}_1 \leq \underline{s} < \underline{u}_2,$$

$$X(\underline{u}_i) = \underline{x}\ i = 1, 2 \text{ és } \underline{u}_2 - \underline{u}_1 \leq \underline{\delta}\}$$

$$A'(\underline{t}, \underline{x}, \underline{x}', \underline{\delta}) = \{\underline{s} \in \mathbf{T} \mid \exists \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in \mathbf{T} : \underline{u}_1 < \underline{t},\ \underline{u}_1 \leq \underline{s} < \underline{u}_2,$$

$$X(\underline{u}_i) = \underline{x} \text{ vagy } \underline{x}'\ i = 1, 2 \text{ és } \underline{u}_2 - \underline{u}_1 \leq \underline{\delta}\}$$

jelölések bevezetésével, és a 3.5-höz analóg képletek felhasználásával. □

28. Definíció. Legyen $\mathbf{T} \ni \underline{\delta} > 0$ és $n \in \mathbb{N}$, továbbá $\underline{x} \in \mathbf{S}$. Legyen

$$p_n(\underline{\delta}) = \overline{E}(((T(0) \wedge \underline{\delta})/\underline{\delta})^n)(\underline{\delta}/\Delta t)^{\frac{1}{2}}$$

$$p'_n(\underline{\delta}) = \overline{E}((T(0)I_{\{T(0)\leq\underline{\delta}\}}/\underline{\delta})^n)(\underline{\delta}/\Delta t)^{\frac{1}{2}},$$

és

$$q(\underline{x},\underline{\delta}) = \begin{cases} \overline{E}(U(\underline{x},\underline{\delta}))(\Delta t)^{-\frac{1}{2}} & \text{ha } \underline{x} \neq 0 \\ \frac{1}{2}p_1(\underline{\delta}) & \text{ha } \underline{x} = 0 \end{cases}$$

$$q'(\underline{x},\underline{\delta}) = \begin{cases} \overline{E}(U'(\underline{x},\underline{\delta}))(\Delta t)^{-\frac{1}{2}} & \text{ha } \underline{x} \neq 0 \\ \frac{1}{2}p'_1(\underline{\delta}) & \text{ha } \underline{x} = 0 \end{cases}$$

Most a diszkrét bolyongásnál megismert kombinatorikus leszámlálás segítségével meghatározzuk az imént definiált várható értékeket.

6. Lemma. *(a) Ha $\underline{\delta} = \gamma\Delta t$, $\gamma \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, akkor*

$$^\circ p_n(\underline{\delta}) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left(n - \frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

és

$$^\circ p'_n(\underline{\delta}) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left(n - \frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

(b) Ha $\underline{x} \in \mathbf{S}$ $\underline{\delta} \in \mathbf{T}$ $\underline{\delta} > 0$ akkor:

$$\frac{p_1(\underline{\delta})}{2} \leq q(\underline{x},\underline{\delta}) \leq \frac{p_1(\underline{\delta})}{2} + \frac{|\underline{x}|}{2\underline{\delta}^{\frac{1}{2}}},$$

és

$$\frac{p'_1(\underline{\delta})}{2} \leq q'(\underline{x},\underline{\delta}) \leq \frac{p'_1(\underline{\delta})}{2} + \frac{|\underline{x}|}{2\underline{\delta}^{\frac{1}{2}}}$$

Bizonyítás. (a) p_n és p'_n S-folytonossága miatt feltehető, hogy $\underline{\delta} = 2\underline{\gamma}\Delta t$, ahol $\gamma \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Ekkor $j \in {}^*\mathbb{N}$-ra a diszkrét leszámolás igaz az átviteli-elv miatt:

$$\overline{P}(T(0) = 2j\Delta t) = \frac{2}{j}\binom{2(j-1)}{j-1}2^{-2j}.$$

Hasonlóan a tükrözési-elvvel:

$$\overline{P}(T(0) > 2\gamma\Delta t) = \overline{P}(X(2\gamma\Delta t) = 0) = \binom{2\gamma}{\gamma} 2^{-2\gamma}.$$

Így

$$p_n(\underline{\delta}) = \sum_{j=1}^{\gamma} \left(\frac{2j\Delta t}{2\gamma\Delta t}\right)^n (2\gamma)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{j}\right) \binom{2(j-1)}{j-1} 2^{-2j} + (2\gamma)^{\frac{1}{2}} \binom{2\gamma}{\gamma} 2^{-2\gamma} =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\sum_{j=1}^{\gamma} \left(\frac{j^{n-1}}{\gamma^{n-\frac{1}{2}}}\right) \binom{2(j-1)}{j-1} 2^{-2j}\right) + (2\gamma)^{\frac{1}{2}} \binom{2\gamma}{\gamma} 2^{-2\gamma} \tag{3.7}$$

A Stirling-formulát az átviteli-elvvel ötvözve

$$2^{-2i}\binom{2i}{i} = (1+\delta_i)(\pi i)^{-\frac{1}{2}},$$

ahol $i \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ és $\delta_i \approx 0$. Így

$$(2\gamma)^{\frac{1}{2}} \binom{2\gamma}{\gamma} 2^{-2\gamma} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (1+\underline{\delta}_\gamma) \approx \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.8}$$

3.7 első tagja $p_n'(\underline{\delta})$, már csak ezt kell kiszámolnunk.

$$p_n'(\underline{\delta}) = 2\sqrt{2}\sum_{j=1}^{\gamma} \left(\frac{j^{n-1}}{\gamma^{n-\frac{1}{2}}}\right) \left(\frac{j^2}{2j(2j-1)}\right) (1+\delta_j)(\pi j)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

$$= (2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\gamma} \left(\frac{j}{\gamma}\right)^{n-3/2} (1+\delta_j')\gamma^{-1},$$

ahol $\delta_j' \approx 0$. Ha $j \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ és ${}^\circ(\sup_{j\in {}^*\mathbb{N}} \delta_j') < \infty$, akkor a 18. tételbeli integrál-előállításból

$$\sum_{j=1}^{\gamma} \left(\frac{j}{\gamma}\right)^{n-\frac{3}{2}} \gamma^{-1} \approx \int_0^1 t^{n-\frac{3}{2}} dt = \left(n - \frac{1}{2}\right)^{-1}, \tag{3.10}$$

továbbá

$${}^\circ\left(\sum_{j=1}^{\gamma} \left(\frac{j}{\gamma}\right)^{n-\frac{3}{2}} \delta_j'\gamma^{-1}\right) \le {}^\circ\left(\left(\sum_{j=1}^{\gamma^{\frac{1}{4}}} \delta_j'\right)\gamma^{-\frac{1}{2}}\right) + {}^\circ\left(\left(\max_{\gamma^{\frac{1}{4}} \le j \le \gamma} \delta_j'\right) \sum_{j=1}^{\gamma} \left(\frac{j}{\gamma}\right)^{n-\frac{3}{2}} \gamma^{-1}\right) \le \tag{3.11}$$

$$^{\circ}\left(\left(\max_{\gamma^{\frac{1}{4}}\leq j\leq\gamma}\delta_j'\gamma^{-\frac{1}{4}}\right)\right)+{}^{\circ}\left(\max_{\gamma^{\frac{1}{4}}\leq j\leq\gamma}\delta_j'\right)\int_0^1 t^{n-\frac{3}{2}}dt=0.$$

Az előzőeket felhasználva tehát

$$^{\circ}p_n'(\underline{\delta})=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left(n-\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

és

$$^{\circ}p_n(\underline{\delta})=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left(n-\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ezzel (a) kész. (b) Elég $q(\underline{x},\underline{\delta})$-ra bizonyítani, $q'(\underline{x},\underline{\delta})$-re ugyanígy megy. $\underline{x}=0$-ra teljesül az egyenlőtlenség, és $q(\underline{x},\underline{\delta})=q(-\underline{x},\underline{\delta})$ miatt feltehető, hogy $\underline{x}>0$.

$$q(\underline{x},\underline{\delta})=\overline{E}(T(0,\underline{x})\wedge\underline{\delta})(\underline{\delta}\Delta t)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$\int_{\{\omega_{\Delta t}=1\}}\left(\left(\Delta t+T\left(-\left(\Delta t\right)^{\frac{1}{2}},\underline{x}-\left(\Delta t\right)^{\frac{1}{2}}\right)\circ\theta_{\Delta t}\right)\wedge\underline{\delta}\right)d\overline{P}\left(\underline{\delta}\Delta t\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$+\int_{\{\omega_{\Delta t}=-1\}}\left(T(0)\wedge\underline{\delta}\right)d\overline{P}\left(\underline{\delta}\Delta t\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

A szimmetria miatt a második tag $\frac{1}{2}p_1(\underline{\delta})$. Az első tag nem csökken, ha $\{\omega_{\Delta t}=-1\}$-en integrálunk, a $\underline{\delta}$-val való levágást elhagyva. Így ezt felülről becsülhetjük a következővel:

$$\frac{1}{2}\overline{E}\left(\Delta t+T\left(-\left(\Delta t\right)^{\frac{1}{2}},\underline{x}-\left(\Delta t\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)\left(\underline{\delta}\Delta t\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\underline{x}}{2\underline{\delta}^{\frac{1}{2}}},$$

és ezzel kész. □

7. Lemma. *Legyenek* $\underline{x}$ *és* $\underline{x}'$ *különböző* **S**-*beliek,* $\underline{t}$ *és* $\underline{\delta}=\gamma\Delta t\leq 1$ *pedig* **T**-*beliek, ahol* $\gamma\in{}^{*}\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$. *Ekkor alkalmas* c_3 *konstanssal*
(a) $\overline{E}((M(\underline{t},\underline{x},\underline{x}',\underline{\delta})-2q(\underline{x}'-\underline{x},\underline{\delta})(L(\underline{t},\underline{x})+L(\underline{t},\underline{x}')))^4)\leq c_3(\underline{t}\vee 1)\underline{\delta}$
(b) $\overline{E}(M''(\underline{t},\underline{x},\underline{\delta})-2p_1(\underline{\delta})L(\underline{t},\underline{x}))^4\leq c_3(\underline{t}\vee 1)\underline{\delta}$
(c) $\overline{E}((M'(\underline{t},\underline{x},\underline{x}',\underline{\delta})-2q'(\underline{x}'-\underline{x},\underline{\delta})(L(\underline{t},\underline{x})+L(\underline{t},\underline{x}'))^+)^4)\leq c_3(\underline{t}\vee 1)\underline{\delta}$.

Bizonyítás. Csak (a)-t igazoljuk, (b) és (c) hasonlóan megy.

$$Y(\underline{t})=M(\underline{t},\underline{x},\underline{x}',\underline{\delta})-2q(\underline{x}'-\underline{x},\underline{\delta})(L(\underline{t},\underline{x})+L(\underline{t},\underline{x}'))=$$

$$= \sum_{\underline{s}=0}^{\underline{t}-\Delta t} (I_{\underline{x}}(X(\underline{s}))(\Delta t)^{\frac{1}{2}}(V(\underline{x}' - \underline{x}, \underline{\delta}) \circ \theta_{\underline{s}}) + I_{\underline{x}'}(X(\underline{s}))(\Delta t)^{-\frac{1}{2}}(V(\underline{x} - \underline{x}', \underline{\delta}) \circ \theta_{\underline{s}})$$

ahol

$$V(\underline{y}, \underline{\delta}) = U(\underline{y}, \underline{\delta})(\Delta t)^{\frac{1}{2}} - q(\underline{y}, \underline{\delta})$$

Legyen $\mathcal{A}_{\underline{t}} = \sigma(X_{\underline{s}}, Y_{\underline{s}} \mid \underline{s} \leq \underline{t})$. Meggondolható, hogy ekkor $\{(Y(\underline{s}), \mathcal{A}_{\underline{s}}) \mid \underline{s} \in \mathbf{T}\}$ belső martingál. Így az átviteli-elvet és a Burkholder-egyenlőtlenség 3.2 verzióját alkalmazhatjuk Y-ra.

$$\overline{E}(Y(\underline{t})^4) \leq C_4 \overline{E}\Bigg(\Big(\sum_{\underline{s}=0}^{\underline{t}-\Delta t} I_{\underline{x}}(X(\underline{s}))\Delta t \overline{E}((V(\underline{x}' - \underline{x}, \underline{\delta}) \circ \theta_s)^2 \mid \mathcal{A}_{\underline{s}}) +$$

$$I_{\underline{x}'}(X(\underline{s}))\Delta t \overline{E}((V(\underline{x} - \underline{x}', \underline{\delta}) \circ \theta_s)^2 \mid \mathcal{A}_{\underline{s}})\Big)^2\Bigg) +$$

$$C_4 \overline{E}\Bigg(\sum_{\underline{s}=0}^{\underline{t}-\Delta t} (I_{\underline{x}}(X(\underline{s}))(\Delta t)^{\frac{1}{2}} V(\underline{x}' - \underline{x}, \underline{\delta}) \circ \theta_{\underline{s}})^4 +$$

$$(I_{\underline{x}'}(X(\underline{s}))(\Delta t)^{\frac{1}{2}} V(\underline{x} - \underline{x}', \underline{\delta}) \circ \theta_{\underline{s}})^4\Bigg)$$

Jelöljük E_1-gyel az első és E_2-vel a második tagot. Ekkor

$$\overline{E}((V(\underline{x}' - \underline{x}, \underline{\delta}) \circ \theta_s)^2 \mid \mathcal{A}_s) = D^2(U(\underline{x}' - \underline{x}))(\Delta t)^{-1} \leq$$

$$\overline{E}((T(0) \wedge \underline{\delta}/\underline{\delta})^2)\underline{\delta}(\Delta t)^{-1} = p_2(\underline{\delta})(\underline{\delta}/\Delta t)^{\frac{1}{2}}.$$

Ebből E_1-et becsülhetjük:

$$E_1 \leq C_4 p_2(\underline{\delta})^2(\underline{\delta}/\Delta t)\Delta t \overline{E}\Bigg(\Big(\sum_{\underline{s}=0}^{\underline{t}-\Delta t} I_{\underline{x}}(X(\underline{s}))(\Delta t)^{\frac{1}{2}} + I_{\underline{x}'}(X(\underline{s}))(\Delta t)^{\frac{1}{2}}\Big)^2\Bigg) \leq$$

$$C_4 p_2(\underline{\delta})^2 \underline{\delta} 8 \overline{E}(L(\underline{t}, \underline{x})^2 + L(\underline{t}, \underline{x}')^2) \leq C_4 p_2(\underline{\delta})^2 \underline{\delta} 16 c_2 \underline{t},$$

a végén felhasználva a 4. lemma (b) részét. ${}^{\circ}p_2(\underline{\delta})$ véges, így E_1 becsülhető felülről $\alpha_1 \underline{t}\underline{\delta}$-val véges α_1-gyel. Továbbá

$$\overline{E}((V(\underline{x}' - \underline{x}, \underline{\delta}) \circ \theta_{\underline{s}})^4 \mid \mathcal{A}_{\underline{s}}) = \overline{E}(V(\underline{x}' - \underline{x}, \underline{\delta})^4) \leq$$

$$\alpha_2 \overline{E}((T(0) \wedge \underline{\delta}/\underline{\delta})^4)\underline{\delta}^2(\Delta t)^{-2} = \alpha_2 p_4(\underline{\delta})(\underline{\delta}/\Delta t)^{3/2}.$$

Így E_2 felülről becsülhető:

$$E_2 \le C_4 \beta p_4(\underline{\delta})(\underline{\delta}/\Delta t)^{3/2}(\Delta t)^{3/2}\overline{E}(2L(\underline{t},\underline{x}) + 2L(\underline{t},\underline{x}')) \le C_4 \beta p_4(\underline{\delta})\underline{\delta}^{3/2} 4\sqrt{c_2}\sqrt{\underline{t}},$$

a végén szintén a 4. lemma (b) részét használva. $\underline{\delta} \le 1$ miatt ${}^{\circ}p_4(\underline{\delta})$ véges, így $E_2 \le \alpha_3 \underline{\delta}(\underline{t} \vee 1)$, E_1 és E_2 becslését összerakva készen vagyunk. □

24. Tétel. *Létezik* $c : \mathbb{R} \times (0,1] \to [0,\infty)$, $c' : \mathbb{R} \times (0,1] \to [0,\infty)$ *továbbá* $c_4 > 0$ *hogy minden* $\delta \in (0,1]$, $x, x' \in \mathbb{R}$*-re és* $t \ge 0$*-ra:*

$$2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \le c(x,\delta) \le 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{|x|}{\delta^{\frac{1}{2}}} \tag{3.12}$$

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \le c'(x,\delta) \le \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{|x|}{\delta^{\frac{1}{2}}} \tag{3.13}$$

$$E\left(\left(m(a(t,x,\delta) \cup a(t,x',\delta))\delta^{-\frac{1}{2}} - c(x'-x,\delta)(s(t,x)+s(t,x'))\right)^4\right) \tag{3.14}$$

$$\le c_4(t \vee 1)\delta$$

$$E\left(\left(m(a(t,x,\delta))\delta^{-\frac{1}{2}} - 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t,x)\right)^4\right) \le c_4(t \vee 1)\delta \tag{3.15}$$

$$E\left(\left(m(a'(t,x,\delta))\delta^{-\frac{1}{2}} - 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t,x)\right)^4\right) \le c_4(t \vee 1)\delta \tag{3.16}$$

$$E\left(\left(\left(m(a'(t,x,\delta) \cup a'(t,x',\delta)\delta^{-\frac{1}{2}} - c'(x'-x,\delta)(s(t,x)+s(t,x'))\right)^+\right)^4\right) \tag{3.17}$$

$$\le c_4\,(t \vee 1)\,\delta$$

Bizonyítás. $x \in [\underline{x} - (\Delta t)^{\frac{1}{2}}, \underline{x})$ és $\delta \in [\underline{\delta} - \Delta t, \underline{\delta})$-re legyen $c(x,\delta) = 2{}^{\circ}q(\underline{x},\underline{\delta})$ és $c'(x,\delta) = 2{}^{\circ}q'(\underline{x},\underline{\delta})$. Ekkor (3.12) és (3.13) következik a 6. Lemma (b) részéből. (3.14) igazolásához válasszuk úgy $(\underline{\delta}, \underline{t}, \underline{x}, \underline{x}') \in \mathbf{T}^2 \times \mathbf{S}^2$-t, hogy ${}^{\circ}(\underline{t}, \underline{x}, \underline{x}') = (t, x, x')$, $\delta \in [\underline{\delta} - \Delta t, \underline{\delta})$ és $x' - x \in [\underline{x}' - \underline{x} - (\Delta t)^{\frac{1}{2}}, \underline{x}' - \underline{x})$ teljesüljön. Ekkor $c(x' - x, \delta) = 2{}^{\circ}q(\underline{x}' - \underline{x}, \underline{\delta})$. Továbbá

$$E\left(\left(m(a(t,x,\delta) \cup a(t,x',\delta))\delta^{-\frac{1}{2}} - c(x'-x,\delta)(s(t,x)+s(t,x'))\right)^4\right) \le$$

$$8E\left(\left(m(a(t,x,\delta) \cup a(t,x',\delta))\delta^{-\frac{1}{2}} - {}^{\circ}M(\underline{t},\underline{x},\underline{x}',\underline{\delta})\right)^4\right) +$$

$$8E\left({}^{\circ}\left(M(\underline{t},\underline{x},\underline{x}',\underline{\delta}) - 2q(\underline{x}'-\underline{x},\underline{\delta})(L(\underline{t},\underline{x}) + L(\underline{t},\underline{x}'))\right)^4\right).$$

Az első tag $8\delta^2$-tel becsülhető a 5. Lemma (a) része szerint, és $E({}^{\circ}|W|) \le {}^{\circ}\overline{E}(|W|)$ miatt a 7. Lemma (a) része felülről becsüli a 2. tagot $c_3(t \vee 1)\delta$-val, így (3.14) kész, mivel $\delta \le 1$. (3.15) adódik (3.14)-ból $x = x'$ választással. (3.16) igazolása:

$$E\left(\left(m(a'(t,x,\delta))\delta^{-\frac{1}{2}} - 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t,x)\right)^4\right) \le$$

$$8E\left(\left(m(a'(t,x,\delta))\delta^{-\frac{1}{2}} - {}^{\circ}M''(t,x,\delta)\right)^4\right)$$

$$+8E\left({}^{\circ}(M''(t,x,\delta) - 2p_1'(\delta)L(\underline{t},\underline{x}))^4\right)$$

Ekkor (3.14) bizonyításával azonosan becsülhetünk felülről, felhasználva az 5. és 7. Lemmák (b) részeit. (3.17)-hoz pedig 5. Lemma (c) részével:

$$E\left(\left((m(a(t,x,\delta) \cup a(t,x',\delta))\delta^{-\frac{1}{2}} - c'(x'-x,\delta)(s(t,x)+s(t,x')))^+\right)^4\right) \le$$

$$E\left({}^{\circ}\left((M'(\underline{t},\underline{x},\underline{x}',\underline{\delta}) - 2q'(\underline{x}'-\underline{x},\underline{\delta})(L(\underline{t},\underline{x}) + L(\underline{t},\underline{x}')))^+\right)^4\right).$$

(3.14)-hoz hasonlóan ezt becsülhetjük felülről az 7. Lemma (c) részéből $c_3(t \vee 1)\delta$-val. $\square$

8. Lemma. *Tegyük fel, hogy* $\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *és* $\{\beta_n \mid \in \mathbb{N}\}$ *0-hoz tartó valós sorozatok, amikre* $\sum_{n=1}^{\infty} {\beta_n}^{2m} {\alpha_n}^{-(m+1)} < \infty$ *valamely* $m \in \mathbb{N}$*-re. Legyen* $t \ge 0$ *rögzített, és*

$$A_n = \{\omega \mid \inf_{u \le t} \sup_{s \in [0,\alpha_n]} |B(u+s) - B(u)| \le \beta_n\}.$$

Ekkor $P(\limsup A_n) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $W_n = \{\frac{j\alpha_n}{2} \mid j \in \mathbb{N}\, j \leq \frac{2t}{\alpha_n} + 1\}$ és $V(\beta) = \inf\{t \mid |B(t)| = \beta\}$. Ekkor

$$P(A_n) \leq P\left(\min_{u \in W_n} \sup_{s \in [0, \frac{\alpha_n}{2})} |B(u+s) - B(u)| \leq 2\beta_n\right) \leq$$

$$\left(\frac{2t}{\alpha_n} + 1\right) P\left(V(3\beta_n) \geq \frac{\alpha_n}{2}\right) \leq$$

$$\left(\frac{2t}{\alpha_n} + 1\right)\left(\frac{2}{\alpha_n}\right)^m E(V(3\beta_n)^m) \leq$$

$$C(m)(3\beta_n)^{2m}(\alpha_n)^{-(m+1)} E(V(1)^m)$$

A 2. egyenlőtlenségnél felhasználtuk a Markov-egyenlőtlenséget, a 3.-nál pedig, hogy $V(\beta)$ és $\beta^2 V(1)$ eloszlása azonos. Így a feltétel miatt $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, amiből a Borel-Cantelli lemmát felhasználva valóban $P(\limsup A_n) = 0$ következik. □

A következőképp fogjuk folytatni a bizonyítást: mivel minden $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$-re

$$m(a(t, x, \delta)) = m(a'(t, x, \delta)) + \delta n(t, x, \delta) + \delta \tag{3.18}$$

így $m(a(t, x, \delta))\delta^{-\frac{1}{2}}$-re illetve $m(a'(t, x, \delta))\delta^{-\frac{1}{2}}$-re fogunk egyenletes konvergenciát belátni, ehhez kell a következő lemma.

9. Lemma. *Legyen* $S_n = \{kn^{-5} \mid k \in \mathbb{Z},\ |k| \leq n^6\}$ *és* $t \geq 0$ *rögzített, továbbá legyen*

$$B_n = \{\omega \mid \sup_{x \in S_n} |m(a(t, x, n^{-8}))/n^{-4} - 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t, x)| \geq n^{-\frac{1}{5}}\}$$

$$\cup\{\omega \mid \sup_{x \in S_n} |m(a(t, x, n^{-8}) \cup a(t, x + n^{-5}, n^{-8}))/n^{-4}$$

$$-c(n^{-5}, n^{-8})(s(t, x) + s(t, x + n^{-5}))| \geq n^{-\frac{1}{5}}\}$$

és

$$C_n = \{\omega \mid \sup_{x \in S_n} |m(a'(t, x, n^{-8}))/n^{-4} - 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t, x)| \geq n^{-\frac{1}{5}}\}$$

$$\cup\{\omega \mid \sup_{x \in S_n} |m(a'(t, x, n^{-8}) \cup a'(t, x + n^{-5}, n^{-8}))/n^{-4}$$

$$-c'(n^{-5}, n^{-8})(s(t, x) + s(t, x + n^{-5}))| \geq n^{-\frac{1}{5}}\}$$

Ekkor $P(\limsup(B_n \cup C_n)) = 0$.

Bizonyítás. A 24. Tétel (3.14) miatt

$$P(B_n) \leq \#(S_n)n^{4/5}\Bigg(\max_{x\in S_n} E\Big((m(a(t,x,n^{-8}))/n^{-4} - 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t,x))^4\Big).$$

$$+\max_{x\in S_n} E\Big(\big(m(a(t,x,n^{-8}) \cup a(t,x+n^{-5},n^{-8}))/n^{-4}$$

$$-c(n^{-5},n^{-8})(s(t,x)+s(t,x+n^{-5})))\big)^4\Big)\Bigg) \leq$$

$$3n^6 n^{\frac{4}{5}}(c_4(t\vee 1)n^{-8} + c_4(t\vee 1)n^{-8}) =$$

$$6c_4(t\vee 1)n^{-\frac{6}{5}}$$

Ahol felhasználtuk a 24. Tétel (3.14) és (3.15) állítását. Ugyanez igazolható $P(C_n)$-re ugyanezen tétel (3.16) és (3.17) állításának felhasználásával. Tehát $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n \cup C_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) < \infty$, így ismét a Borel-Cantelli lemma alkalmazásával $P(\limsup(B_n \cup C_n)) = 0$. □

25. Tétel. *1 valószínűséggel minden $t' > 0$-ra teljesül*

$$\lim_{\delta\to 0^+} \sup_{(t,x)\in[0,t']\times\mathbb{R}} \left| m(a(t,x,\delta))\delta^{-\frac{1}{2}} - 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t,x)\right| = 0.$$

Bizonyítás. $s(t,x) \mid_{[0,t']\times\mathbb{R}}$ egyenletesen folytonos, továbbá $m(a(\cdot,x,\delta))\delta^{-\frac{1}{2}}$ nemcsökkenő, így elég bizonyítanunk, hogy rögzített t-re majdnem biztosan

$$\lim_{\delta\to 0^+} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| m(a(t,x,\delta))\delta^{-\frac{1}{2}} - 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t,x)\right| = 0, \tag{3.19}$$

ugyanis $f(t,x) = 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t,x)$ és $g(t,x,\delta) = m(a(t,x,\delta))\delta^{-\frac{1}{2}}$ továbbá $h(t,x,\delta) = |m(a(t,x,\delta))\delta^{-\frac{1}{2}} - 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t,x)|$ jelölést használva rögzíthetünk $0 = t_1 < .. < t_n = t'$ valósokat, hogy minden $t_i < t < t_{i+1}$-re $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(t,x) - f(t_j,x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ahol $j = i, i+1$. Ekkor a (3.19) szerint elég kis δ-ra $\max_{j=1..n} h(t_j,x,\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ minden x-re. Ekkor $g(t_i,x,\delta) \leq g(t,x,\delta) \leq g(t_{i+1},x,\delta)$-t felhasználva minden x-re

$$\begin{aligned} g(t_i,x,\delta) - f(t_i,x) - |f(t_i,x) - f(t,x)| \leq g(t,x,\delta) - f(t,x,\delta) \leq \\ g(t_{i+1},x,\delta) - f(t_{i+1},x) + |f(t_{i+1},x) - f(t,x)| \end{aligned}$$

vagyis

$$h(t,x,\delta) \leq \max_{j=i,i+1} h(t_j,x,\delta) + \max_{j=i,i+1} |f(t_j,x) - f(t,x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

így $h(t,x,\delta) < \varepsilon$ minden $(t,x) \in [0,t'] \times \mathbb{R}$ és így az erősebb konvergencia is fennáll.

Még tovább egyszerűsítve elegendő belátni, hogy majdnem biztosan

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| m(a(t,x,\delta_n))\delta_n{}^{-\frac{1}{2}} - 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t,x) \right| = 0, \tag{3.20}$$

ahol δ_n monoton fogyóan tart 0-hoz és $\lim_{n\to\infty} \delta_{n+1}/\delta_n = 1$, ugyanis $\delta_{n+1} < \delta < \delta_n$-re

$$(\delta_{n+1}/\delta_n)^{\frac{1}{2}} m(a(t,x,\delta_{n+1}))\delta_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \le m(a(t,x,\delta)\delta^{-\frac{1}{2}} \le (\delta_n/\delta_{n+1})^{\frac{1}{2}} m(a(t,x,\delta_n))\delta_n^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.21}$$

Így ha (3.20) teljesül, akkor (3.21) bal és jobb oldala is x-ben egyenletesen konvergál $4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t,x)$-hez, így $m(a(t,x,\delta)\delta^{-\frac{1}{2}}$ is.

Ekkor az előző jelöléseket használva, legyen $t \ge 0$ rögzített, $\alpha_n = n^{-9}$, $\beta_n = n^{-5}$. Az előző lemmákat használva

$$N = \{\omega \mid \omega \in \limsup(A_n \cup B_n) \text{ vagy } B(\cdot,\omega) \text{ vagy } s(\cdot,\cdot) \text{ nem folytonos } \}$$

jelöléssel $P(N) = 0$. Most rögzített $\omega \in N^c$-ra legyen $M(\omega) \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \ge M$-re teljesüljenek a következők:

(a) $\omega \notin A_n \cup B_n$

(b) $(n-1)^{-9} + n^{-8}/2 \le (n-1)^{-8}/2$

(c) $\sup_{s\le t} |B(s)| < M$.

Ezután elég látni, hogy létezik $\{\varepsilon_n \mid n > M\}$ nullsorozat, hogy

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| m(a(t,x,n^{-8}))/n^{-4} - 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t,x) \right| \le \varepsilon_n. \tag{3.22}$$

Ha $|x| \ge M$ akkor (3.22) teljesül, hiszen ekkor (c) miatt $s(t,x) = m(a(t,x,n^{-8})) = 0$. Feltehetjük tehát, hogy $|x| < M$, és $n > M$-re legyen $x_n = \sup\{y \in S_n \mid y \le x\}$ (x_n létezik és $x_n + n^{-5} \in S_n$ mivel $|x| < M \le n-1$). Rögzített $n > M$-re és $v \in a(t,x,n^{-8})$-re létezik $u \in [0,t]$, hogy $B(u) = x$ és $|u - v| < \frac{n^{-8}}{2}$. Ha $s' = \inf\{s \ge u \mid B(s) = x_{n-1} \text{ vagy } x_{n-1} + (n-1)^{-5}\}$, akkor $s' - u < (n-1)^{-9}$, mivel $x_{n-1} \le B(s) \le x_{n-1} + (n-1)^{-5}$ minden $s \in [u,s']$ és $\omega \notin A_{n-1}$. Továbbá

$$|v - s'| \le |v - u| + |u - s'| < \frac{n^{-8}}{2} + (n-1)^{-9} < \frac{(n-1)^{-8}}{2},$$

és $s' < t + (n-1)^{-9}$, ezért

$$v \in a(t + (n-1)^{-9}), x_{n-1}, (n-1)^{-8}) \cup a(t + (n-1)^{-9}, x_{n-1} + (n-1)^{-5}, (n-1)^{-8}),$$

így

$$a(t,x,n^{-8}) \subseteq a\left(t+(n-1)^{-9}, x_{n-1}, (n-1)^{-8}\right) \tag{3.23}$$

$$\cup a\left(t+(n-1)^{-9}, x_{n-1}+(n-1)^{-5}, (n-1)^{-8}\right).$$

Ha $v \in a(t,x_n,n^{-8}) \cap a(t,x_n+n^{-5},n^{-8})$, akkor léteznek $u_1,u_2 \le t$-k, hogy $B(u_1) = x_n, B(u_2) = x_n + n^{-5}$ és $|u_i - v| < n^{-8}/2$, ahol $i = 1,2$. Ekkor a folytonosság miatt létezik u_0 az $[u_1,u_2]$ vagy $[u_2,u_1]$ intervallumban, hogy $B(u_0) = x$ és $|u_0 - v| < n^{-8}/2$ (Ez az intervallum minden pontjára teljesül). Ezért $v \in a(t,x,n^{-8})$, és így fennáll

$$a(t,x_n,n^{-8}) \cap a(t,x_n+n^{-5},n^{-8}) \subseteq a(t,x,n^{-8}). \tag{3.24}$$

(3.23)-ból:

$$\begin{aligned}m(a(t,x,n^{-8}))/n^{-4} &\le m\left(a\left(t+(n-1)^{-9},x_{n-1},(n-1)^{-8}\right)\cup\right.\\ &\quad \left. a\left(t+(n-1)^{-9},x_{n-1}+(n-1)^{-5},(n-1)^{-8}\right)\right)/(n-1)^{-4} \times n^4/(n-1)^4\\ &\le \left(m\left(a(t,x_{n-1},(n-1)^{-8}) \cup a\left(t,x_{n-1}+(n-1)^{-5},(n-1)^{-8}\right)\right)/(n-1)^{-4} + \right.\\ &\quad \left.((n-1)^{-9}+(n-1^{-8}))/(n-1)^{-4}\right) n^4/(n-1)^{-4}\end{aligned}$$

Mivel $\omega \notin B_{n-1}$,így az előző becslést folytatva

$$\begin{aligned}m(a(t,x_n,n^{-8}))/n^{-4} &\le \left(c((n-1)^{-5},(n-1)^{-8})(s(t,x_{n-1})+s(t,x_{n-1}+(n-1)^{-5}))\right.\\ &\quad \left.+(n-1)^{-5}+2(n-1)^{-4}\right) n^4/(n-1)^4\\ &\le \left(\left(2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}+(n-1)^{-1}\right)\left(s(t,x_{n-1})+s(t,x_{n-1}+(n-1)^{-5})\right)+(n-1)^{-5}+2(n-1)^{-4}\right)\\ &\quad \times n^4/(n-1)^4,\end{aligned}$$

felhasználva az utolsó egyenlőtlenségnél a 24. Tétel (3.12) állítását. Mivel $s(t,\cdot)$ egyenletesen folytonos és korlátos, ezért definiálhatunk az előző egyenlőtlenség miatt $\{\varepsilon'_n \mid n > M\}$ csökkenő, x-től független nullsorozatot, hogy

$$m\left(a\left(t,x,n^{-8}\right)\right)/n^{-4} \le 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t,x) + \varepsilon'_n \tag{3.25}$$

minden valós x-re és $n > M$-re.

A másik irányú egyenlőtlenséghez (3.24)-ot használjuk:

$$\begin{aligned}&m(a(t,x,n^{-8}))/n^{-4} \ge m(a(t,x_n,n^{-8}) \cap a(t,x_n+n^{-5},n^{-8}))/n^{-4} =\\ &(m(a(t,x_n,n^{-8})) + m(a(t,x_n+n^{-5},n^{-8})) - m(a(t,x_n,n^{-8}) \cup a(t,x_n+n^{-5},n^{-8})))/n^{-4}\end{aligned}$$

Felhasználva $\omega \notin B_n$-et majd a 24. Tétel (3.12) állítását:

$$m(a(t, x_n, n^{-8}))/n^{-4} \geq 4 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (s(t, x_n) + s(t, x_n + n^{-5}))$$

$$-c(n^{-5}, n^{-8})(s(t, x_n) + s(t, x_n + n^{-5})) - 3n^{-\frac{1}{5}}$$

$$\geq \left(2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} - n^{-1}\right) (s(t, x_n) + s(t, x_n + n^{-5})) - 3n^{-\frac{1}{5}}$$

Ismét $s(t, \cdot)$ egyenletes folytonossága és korlátossága miatt definiálhatunk $\{\varepsilon''_n \mid n > M\}$ csökkenő, x-től független nullsorozatot, amire

$$m(a(t, x_n, n^{-8}))/n^{-4} \geq 4 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t, x) - \varepsilon''_n \tag{3.26}$$

(3.26)-at és (1.9)-et összerakva a bizonyítás kész. □

26. Tétel. *1 valószínűséggel minden $t' > 0$-ra teljesül:*

$$\lim_{\delta \to 0^+} \sup_{(t,x) \in [0,t'] \times \mathbb{R}} \left| m(a'(t, x, \delta))\delta^{-\frac{1}{2}} - 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t, x) \right| = 0.$$

Bizonyítás. Az előzőekhez hasonlóan elég minden rögzített $t \geq 0$-ra megmutatni, hogy majdnem biztosan

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| m(a'(t, x, \delta_n))\delta_n^{-\frac{1}{2}} - 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t, x) \right| = 0, \tag{3.27}$$

ahol $\{\delta_n\}$ ismét fogyó nullsorozat, amire $\lim_{n\to\infty} \delta_n/\delta_{n+1} = 1$. Most is az S_n,A_n és C_n már ismert jelöléseket fogjuk használni, de most $\alpha_n = \frac{n^{-9}}{2}$ és $\beta_n = n^{-5}$ választással. Ha

$$\varepsilon_n(\omega) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(m(a(t, x, n^{-9}))/n^{-9/2} - 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t, x) \right),$$

akkor az előző két lemmát és tételt felhasználva 1 valószínűségű halmazon teljesülnek az alábbiak:

(a) $\omega \notin \limsup(A_n \cup B_n)$

(b) $B(\cdot, \omega)$ és $s(\cdot, \cdot)$ folytonosak

(c) $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n(\omega) = 0.$

Rögzítsünk ω-t ebből az 1 valószínűségű halmazból, és legyen ekkor $M(\omega) \in \mathbb{N}$ olyan, amire $\sup_{s \le t} |B(s)| < M$ és $\omega \notin A_n \cup B_n$, ha $n \ge M$.

Ha $|x| \ge M$ akkor $s(t,x) = m(a'(t,x,n^{-8}))/n^{-4} = 0$, tehát feltehető hogy $|x| < M$. Legyen $x_n = \max\{y \in S_n \mid y \le x\}$. Rögzítsük $n > M$-et, és tegyük fel, hogy $v \in a'(t,x,n^{-8}) \setminus a(t,x,n^{-9})$. Ekkor léteznek $u_1 < u_2 \le t$-k, hogy $B(u_1) = B(u_2) = x$, $u_2 - u_1 \le n^{-8}$ továbbá $B(s) \ne x$ minden $s \in (u_1, u_2)$-re és $v \in (u_1, u_2)$. Mivel $\omega \notin A_n$, ezért létezik

$$s_1 \in [u_1, u_1 + n^{-9}/2), \tag{3.28}$$

hogy $B(s_1) = x_n$ vagy $x_n + n^{-5}$. Ha $s_2 = \sup\{u \le u_2 \mid B(u) = B(s_1)\}$ akkor minden $u \in [s_2, u_2]$-re $B(u)$ a $B(s_2)(= x_n$ vagy $x_n + n^{-5})$ és a $B(u_2) = x$ értékek között van. $\omega \notin A_n$ és $\sup_{u \in [s_2,u_2]} |B(u) - B(s_2)| \le n^{-5}$-ből következik

$$u_2 - s_2 < n^{-9}/2. \tag{3.29}$$

Továbbá $v \notin a(t,x,n^{-9})$ és 3.28 illetve 3.29 miatt $s_1 < v < s_2$ ahol $B(s_1) = B(s_2) \in \{x_n, x_n + n^{-5}\}$ és $s_2 - s_1 \le u_2 - u_1 \le n^{-8}$. Emiatt a $B(v) = x_n$, $B(v) = x_n + n^{-5}$ illetve $v \in a'(t,x_n,n^{-8}) \cup a'(t,x_n + n^{-5}, n^{-8})$ esetek egyike biztos fennáll, tehát formalizálva

$$a'(t,x,n^{-8}) \setminus a(t,x,n^{-9}) \subseteq a'(t,x_n,n^{-8}) \cup a'(t,x_n+n^{-5},n^{-8}) \cup Z(t,x_n) \cup Z(t,x_n+n^{-5}).$$

Ezt az tartalmazást, $\omega \notin C_n$-t és a 24. Tétel (3.12) állítását használva

$$\begin{aligned} m(a'(t,x,n^{-8}))/n^{-4} \le m(a(t,x,n^{-9}))/n^{-4} + \\ m\left(a'(t,x_n,n^{-8}) \cup a'(t,x_n+n^{-5},n^{-8})\right)/n^{-4} \le \\ n^{-\frac{1}{2}}\left(4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t,x) + \varepsilon_n\right) + c'(n^{-5},n^{-8})(s(t,x_n) + s(t,x_n+n^{-5})) + \\ n^{-\frac{1}{5}} \le n^{-\frac{1}{2}}\left(4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{x' \in \mathbb{R}} s(t,x') + \varepsilon_n\right) + \\ \left(\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} + n^{-1}\right)(s(t,x_n) + s(t,x_n+n^{-5})) + n^{-\frac{1}{5}}. \end{aligned}$$

Így $s(t,\cdot)$ egyenletes folytonossága és korlátossága, valamint az előző egyenlőtlenség miatt definiálhatunk $\{\varepsilon'_n \mid n > M\}$ csökkenő , x-től független nullsorozatot, hogy

$$m(a'(t,x,n^{-8}))/n^{-4} \le 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t,x) + \varepsilon'_n. \tag{3.30}$$

A másik irányú egyenlőtlenséghez tegyük fel, hogy

$$v \in a'(t,x_n,n^{-8}) \cap a'(t,x_n+n^{-5},n^{-8}).$$

Ekkor léteznek $[0.t]$-ben (u_1,u_2) és (u'_1,u'_2) intervallumok, amikre teljesül:

(i) $B(u_1) = B(u_2) = x_n$ és $B(u_1') = B(u_2') = x_n + n^{-5}$,

(ii) $u_2 - u_1 \leq n^{-8}$ és $u_2' - u_1' \leq n^{-8}$,

(iii) $v \in (u_1, u_2) \cap (u_1', u_2')$.

Ha $u_1 < u_1' < u_2 < u_2'$, akkor létezik $s_1 \in [u_1, u_1']$, $s_2 \in [u_1', u_2]$ és $s_3 \in [u_2, u_2']$, amikre $B(s_i) = x$ $i = 1, 2, 3$. Ekkor (iii) miatt $v \in (u_1', u_2) \subseteq [s_1, s_3]$. Ha $v \in [s_1, s_2] \subseteq [u_1, u_2]$, akkor vagy $B(v) = x$, vagy $v \in a'(t, x, n^{-8})$, ugyanis $s_2 - s_1 \leq u_2 - u_1 < n^{-8}$. Ha $v \in [s_2, s_3] \subseteq [u_1', u_2']$, akkor hasonlóan vagy $B(v) = x$, vagy $v \in a'(t, x, n^{-8})$. Tehát formalizálva

$$a'\left(t, x_n, n^{-8}\right) \cap a'\left(t, x_n + n^{-5}, n^{-8}\right) \subseteq a't, x, n^{-8} \cup Z\left(t, x\right),$$

és $\{u_1, u_2, u_1', u_2'\}$ más sorrendje is erre az eredményre vezet. Újra ezt az tartalmazást, $\omega \notin C_n$-t és a 24. Tétel (3.12) állítását használva

$$\begin{aligned} m(a'(t,x,n^{-8}))/n^{-4} \geq m\left(a'(t,x_n,n^{-8}) \cap a'(t,x_n+n^{-5},n^{-8})\right)/n^{-4} = \\ \left(m(a'(t,x_n,n^{-8})) + m(a'(t,x_n+n^{-5},n^{-8}))\right)/n^{-4} - \\ \left(m(a'(t,x_n,n^{-8}) \cup a'(t,x_n+n^{-5},n^{-8}))\right)/n^{-4} \geq \\ \left(\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} - n^{-1}\right)\left(s(t,x_n) + s(t,x_n+n^{-5})\right) - 3n^{-\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

Ismét $s(t, \cdot)$ egyenletes folytonossága és korlátossága miatt definiálhatunk $\{\varepsilon_n'' \mid n > M\}$ csökkenő, x-től független nullsorozatot, amire

$$m(a'(t,x,n^{-8}))/n^{-4} \geq 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s(t,x) - \varepsilon_n'' \tag{3.31}$$

(3.30)-t és (3.31)-at összerakva $\delta_n = n^{-8}$ választással (3.27)-et, és így a tételt is beláttuk. □

Ekkor a kívánt 21. Tétel következik utolsó két tételünkből és a (3.18) formulából.

Irodalomjegyzék

[1] Robert M. Anderson. A non-standard representation for Brownian motion and Itô integration. *Israel J. Math.*, 25(1-2):15–46, 1976.

[2] Nigel Cutland. Loeb measure theory. In *Developments in nonstandard mathematics (Aveiro, 1994)*, volume 336 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 151–177. Longman, Harlow, 1995.

[3] Nigel J. Cutland. *Loeb measures in practice: recent advances*, volume 1751 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[4] C. Ward Henson. Foundations of nonstandard analysis: a gentle introduction to nonstandard extensions. In *Nonstandard analysis (Edinburgh, 1996)*, volume 493 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 1–49. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.

[5] Edwin Perkins. A global intrinsic characterization of Brownian local time. *Ann. Probab.*, 9(5):800–817, 1981.

Tartalomjegyzék