

Körfedések síkon és gömbön

Berta Andrea

matematikus, matematika tanár

Témavezető: *dr. Fejes Tóth Gábor*

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Budapest, 2007.

Tartalomjegyzék

| | |
|--|-----------|
| 1. Bevezetés – körfedések síkon | 1 |
| 2. A gömbfelület legritkább fedései | 4 |
| 2.1. Alsó becslés | 4 |
| 2.2. A gömbfelület legritkább fedése öt és hét körrel | 7 |
| 3. Körfedések gömbön | 14 |
| 3.1. Gömbi kör legritkább fedése három körrel | 14 |
| 3.2. Gömbi kör legritkább fedése hét, nyolc vagy kilenc körrel | 21 |
| 3.2.1. R értékének kiszámítása | 22 |
| 3.2.2. Az $f_{R,r}(\alpha)$ és $F_{R,r}(\alpha)$ függvények bevezetése | 24 |
| 3.2.3. Az $f_{R,r}(\alpha)$ és $F_{R,r}(\alpha)$ függvények vizsgálata | 25 |
| 3.2.4. Topológiai elhelyezkedés | 27 |
| 3.2.5. Az elrendezés egyértelműsége | 30 |
| 4. Matematika szakkör | 39 |

1. fejezet

Bevezetés – körfedések síkon

Mekkora az a legkisebb r_n érték, melyre n darab r_n sugarú körlappal hézagmentesen lefedhető az euklideszi síkon egy egységkörlap?

A századfordulón népszerű vásári játék volt a „Spot-the-spot”, melynek célja, hogy egy anyagdarabra festett kör alakú területet le kell takarni öt kisebb, egyenlő nagyságú körlemezzel, de úgy, hogy semelyik már lerakott körlemezt utólag nem lehet a helyéről elmozdítani. A körlapok méretei úgy vannak meghatározva, hogy csak rengeteg próbálkozással legyen esélye az óvatlan játékosnak megoldani a problémát. Természetesen adódik a kérdés: mekkorának kell lenniük a fedő körlemezeknek ahhoz, hogy hézagmentesen lehessen fedni velük a nagy kört?

A továbbiakban a problémát általánosabban tekintjük: célunk az egységkörlap legritkább fedése n kisebb körlappal. Legyen C_n a fedendő egységkörlap, C_i ($i = 0, \dots, n - 1$) pedig az r_n sugarú fedő körlapok.

Az $n = 1$ és $n = 2$ esetek nyilvánvalóak, $r_1 = r_2 = 1$

Az $n = 3$ és $n = 4$ esetben a C_i ($i = 0, \dots, n - 1$) körlapok mindegyike $1/n$ részét fedi C_n határának, s mindegyik valamely átmérőjének mindkét végpontját-

val illeszkedik bdC_n -re. $r_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $r_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Az $n = 5$ és $n = 6$ esetben elvész az optimális elrendezés forgásszimmetriája, a bizonyítás pedig nehéz. Az $n = 5$ esetre a sejtést Neville [1] fogalmazta meg 1915-ben, majd Bezdek Károly [2] bizonyította 1983-ban. Az $n = 6$ eset bizonyítása is Bezdek Károlytól származik, 1979-ből [3]. Az értékek: $r_5 \approx 0.609382\dots$, $r_6 \approx 0.555905\dots$

Az $n = 7$ eset ismét könnyű. Ha a hét körlap sugara legfeljebb $\frac{1}{2}$, akkor amelyik fedi C_n középpontját, az nem fedhet bdC_n -ből is. A másik hat körlap csak akkor tudja fedni bdC_n -t, ha a sugaruk legalább $\frac{1}{2}$. Ez már egyértelműen meghatározza az $r_7 = \frac{1}{2}$ értéket, valamint az elrendezést is: C_0 koncentrikus C_n -nel, a többi hat pedig forgásszimmetrikusan helyezkedik el, az $n = 3$ és $n = 4$ esetekben látott „átmérős elrendezéssel.”

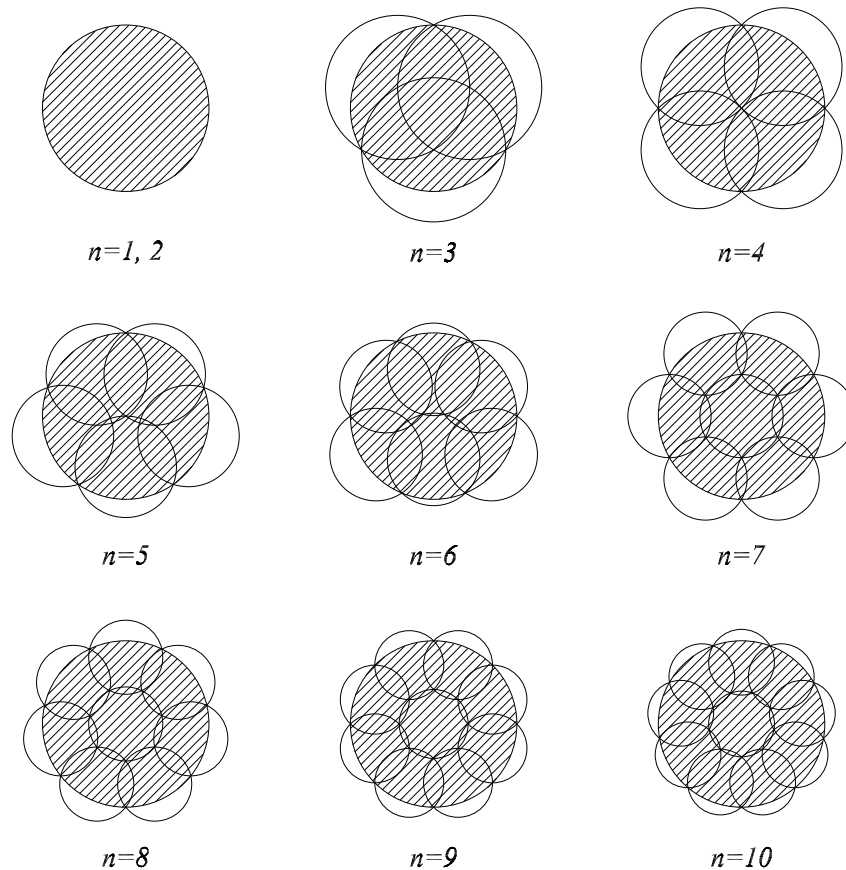
Az $n = 8, 9$ és 10 esetekre Nagy Dénes [4] fogalmazott meg sejtést 1975-ben, miszerint – hasonlóan az $n = 7$ esethez – C_0 teljesen C_n belsejében helyezkedik el, a többi $n - 1$ mindegyike bdC_n pontosan n -edrészét fedi, tehát az elrendezés ismét $(n - 1)$ -szeres forgásszimmetriával rendelkezik. Krotoszyński [5] 1993-ban adott ezekre az esetekre hibás bizonyítást. Az $n = 8$ és $n = 9$ eseteket helyesen Fejes Tóth Gábor [6] igazolta 1996-ban, szintén tőle származik az $n = 10$ eset bizonyítása is. Az $r_n = \frac{1}{1 + 2 \cos \frac{2\pi}{n-i}}$ összefüggés érvényes, az értékek: $r_8 \approx 0.445041\dots$, $r_9 = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414213\dots$ és $r_{10} \approx 0.394930\dots$

Krotoszyński ez előző elrendezést sejtette optimálisnak $n = 11$ esetére is, aminek szintén hibás bizonyása szerepelt a fent említett 1993-as cikkében [5]. Ennél kisebb sugarú körlapokkal Melissen és Schuur [7] 1996-ban talált olyan elrendezést, melyben két körlap fekszik teljesen C_n belsejében, és forgásszimmetria helyett egyetlen tükörtengellyel rendelkezik. Jelenleg a sejtés még áll, bizonyítva nincs. Amennyiben igaz, úgy $r_{11} \approx 0.380006\dots$

Az $n = 12$ esetre szintén Hans és Melissen [7] adott sejtést 1996-ban. Ez az elrendezés 3-szoros forgásszimmetriával rendelkezik, és három körlap fekszik C_n belsejében. Ebben az esetben a fedő körlapok sugara $r = 0.361103\dots$

További sejtések az $n = 20$ esetig bezárólag Zahn-tól származnak [8].

A 4. fejezetben egy középiskolai matematika szakkör tervezete és a megvalósulásáról készült beszámoló olvasható, melyben – többek között – az $n = 1, 2, 3, 4$ és 7 eset bizonyításának részletes leírása is szerepel.



1.1. ábra. Kör legritkább fedése $n \leq 10$ esetén.

Jelen dolgozat további részeiben áttérünk az euklideszi síkról az egységgömbre. Bemutatjuk az eddigi eredményeket, valamint a síkbeli esetek és bizonyításaik felhasználásával új tételeket és egy sejtést fogalmazunk meg, s részben látunk is be.

Ezúton mondok köszönetet Fejes Tóth Gábornak a témáért és a segítségért, valamint Ambrus Andrásnak a szakköri fejezethez nyújtott támogatásért.

2. fejezet

A gömbfelület legritkább fedései

A síkbeli problémával analóg kérdés vizsgálható a sík helyett gömbfelületen is. Ebben a fejezetben először Fejes Tóth László [9], majd Schüttének [10] a gömbfelület gömbi körlapokkal (gömsapkákkal) való fedésére vonatkozó eredményeit tárgyaljuk.

2.1. Alsó becslés

Ebben a részben bebizonyítjuk Fejes Tóth László 1943-ból származó tételét [9], mely az $n = 3, 4, 6$ és 12 esetén a legritkább körfedés problémájának megoldását adja:

2.1. Tétel. *Ha $n \geq 3$ kongruens gömbi körlap lefedi az egységgömböt, akkor a körlapok r sugarára fennáll az*

$$r \geq \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cot \left(\frac{n\pi}{6(n-2)} \right) \right)$$

egyenlőtlenség. Itt egyenlőség csak $n = 3, 4, 6$ és 12 esetén állhat, éspedig akkor,

ha a középpontok egy szabályos háromszög, tetraéder, oktaéder illetve ikozaéder csúcspontjai.

BIZONYÍTÁS. Legyenek S n -elemű pontrendszer az egységgömbön, mely nem fekszik egy félgömbön. Jelölje K az S konvex burkát a térben, és M azt a mozaikot, amely a K lapjainak a gömbre történő centrális vetítésével keletkezik. M -et háromszögmozaiknak tekintjük; az esetleg fellépő több mint három oldalú lapokat egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontjuk.

Legyen r olyan érték, hogy az S pontjai köré írt r sugarú körök a gömböt lefedik. Tekintsük az M mozaik egy l lapját. Legyen C az l köré írt körlap, azaz az a körlap, amely határa az l csúcsain halad át. Mivel S egyetlen pontja sem fekszik K -n kívül, ezért S egyetlen pontja sem feket C belsejében. Ezért C sugara nem lehet kisebb, mint r , különben az S pontjai köré írt körlapok nem fednék le C középpontját.

2.2. Definíció. Ha egy háromszög köré írt kör sugara nem nagyobb egy bizonyos a értéknél, akkor a háromszöget **a -háromszögnek** nevezzük. Egy háromszögmozaikot, melynek minden lapja a -háromszög, **a -mozaiknak** nevezzük.

Beláttuk tehát, hogy ha az S pontjai köré írt r sugarú körlapok lefedik a gömböt, akkor az S -hez tartozó mozaik r -mozaik.

Legyen most $n > 3$, és tekintsük az egységgömbnek n körrel történő legritkább fedését. Legyen r a fedésben szereplő körlapok sugara. Ekkor nyilvánvaló, hogy $r < \frac{\pi}{2}$, és ezért a körlapok középpontjainak S rendszere nem feket egy félgömbön. Az S -hez tartozó M háromszögmozaikra írjuk fel az Euler-féle poliédertételt, tehát

$$\#\{\text{lapok}\} + \#\{\text{csúcsok}\} = \#\{\text{élek}\} - 2.$$

Felhasználva, hogy a mozaiknak n csúcsa van, valamint minden lap háromszöglap, s ezért $2\#\{\text{élek}\} = 3\#\{\text{lapok}\}$, rendezés után azt kapjuk, hogy a háromszögmozaiknak $2n - 4$ lapja van.

Szintén azért, mert M lapjai háromszögek, a területük nem lehet nagyobb az r sugarú körbe írt szabályos háromszög területénél, amit $\Delta(r)$ -rel jelölünk. Mivel a háromszögek összterülete épp az egységgömb felszíne,

$$(2n - 4)\Delta(r) \geq 4\pi. \quad (2.1)$$

Legyen egy r sugarú kör középpontja O , a beírt szabályos háromszög mindhárom szöge α , egyik oldala AB , ennek felezőpontja F . Az AOF derékszögű háromszög átfogója r , az O -nál fekvő szöge $\frac{\pi}{3}$, míg A -nál fekvő szöge $\frac{\alpha}{2}$. Az AOF háromszögben felírva a gömbi cosinustételt a derékszögre:

$$\cos \frac{\pi}{2} = -\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\pi}{3} \cos r.$$

Ebből $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ miatt átrendezéssel az $\alpha = 2\operatorname{arccot}(\sqrt{3} \cos r)$ következik, amiből a

$$\Delta(r) = 6\operatorname{arccot}(\sqrt{3} \cos r) - \pi$$

egyenlőség adódik.

Ezt felhasználva, a 2.1 egyenlőtlenség rendezésével a tételben szereplő

$$r \geq \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cot \left(\frac{n\pi}{6(n-2)} \right) \right)$$

összefüggést kapjuk.

Ez az egyenlőtlenség $n = 3$ esetén is érvényes, és azt a tényt fejezi ki, hogy a gömb nem fedhető le három, félgömbnél kisebb gömbsüveggel. Egyenlőség csak akkor állhat, ha létezik n csúcspontú, kongruens, szabályos háromszöglapokból álló mozaik, ami valóban csak az $n = 3, 4, 6$ és 12 esetben lehetséges, mégpedig a tételben szereplő módon. ■

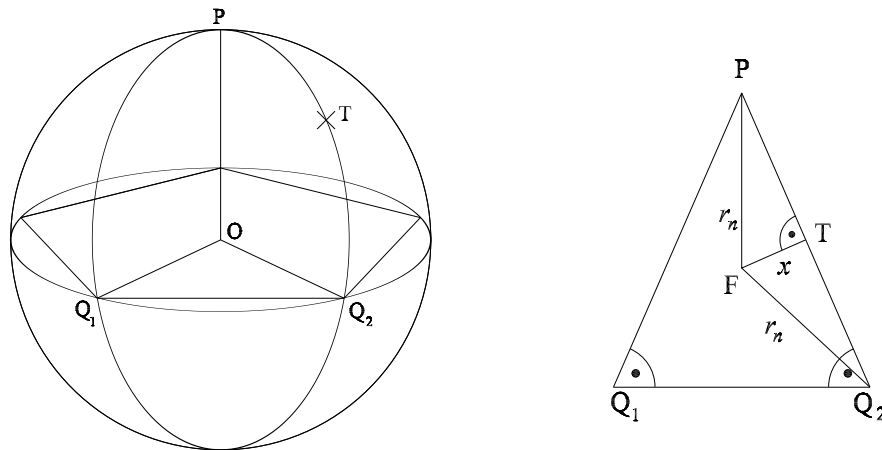
2.2. A gömbfelület legritkább fedése öt és hét körrel

Schütte eredménye az alábbi tétel [10].

2.3. Tétel. *A gömbnek öt és hét körlappal történő legritkább fedésében a körlapok középpontjai egy szabályos kettősgúla csúcaiban helyezkednek el. Jelöljük r_n -nel a megfelelő r értékeket. Ekkor*

$$r_n = \operatorname{arccot} \left(\cos \frac{\pi}{n-2} \right).$$

BIZONYÍTÁS. Az r_n érték meghatározása céljából tekintsünk egy n csúcsú kettősgúlát melyben az egyik $(n-2)$ -élű csúcs legyen P , két szomszédos 4-élű csúcs Q_1 és Q_2 , a kettősgúla köré írt egységgömb középpontja pedig O (ld. 2.1. ábra).



2.1. ábra.

A PQ_1Q_2 gömbi egyenlőszárú háromszög szárszöge és alapja $\frac{2\pi}{n-2}$, alapon fekvő szögei és a szárjai pedig $\frac{\pi}{2}$. Jelölje F az P , Q_1 és Q_2 pontok köré írt r_n sugarú gömbi körlapok közös metszéspontját, T pedig a PQ_2 felezőpontját. Ekkor az $FT = x$ jelölés bevezetésével az FTP derékszögű háromszögben az $FP = r_n$

oldalra felírva a gömbi cosinustételt: $\cos r_n = \cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2}$, azaz

$$\cos r_n = \cos x \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ennek felhasználásával az ugyanezen háromszög x oldalára felírt cosinustételből

$$\cos x = \cos r_n \cos \frac{\pi}{4} + \sin r_n \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{n-2},$$

$$\sqrt{2} \cos r = \cos r \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin r \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{n-2},$$

amiből rendezés után valóban az

$$r_n = \operatorname{arccot} \left(\cos \frac{\pi}{n-2} \right)$$

adódik.

Jelöljük M_n -el az n csúcspontú szabályos kettősgúla mozaikját. Tekintsük az egységgömbnek $n = 5$ illetve 7 körrel történő legritkább fedését. Szerkesszük meg a középpontok által meghatározott háromszögmozaikot. Ez a mozaik $n = 5$ esetén r_5 -mozaik, $n = 7$ esetén r_7 -mozaik. Tételünk bizonyításához elegendő megmutatni, hogy egy n csúcspontú r_n -mozaik $n = 5$ és $n = 7$ esetén M_n -nel azonos.

Nyilvánvaló, hogy $n = 5$ esetén a mozaik csak 3- és 4-élű csúcsokat tartalmaz. bebizonyítjuk, hogy $n = 7$ esetén viszont csak 4- és 5-élű csúcsok léphetnek fel a mozaikban. Ehhez a 3- és 6-élű csúcsokat kell kizárni.

Ha $n > 5$, akkor a gömb lefedhető n darab, $\frac{\pi}{3}$ -nál kisebb sugarú körrel. Ezért az n körrel történő legritkább fedéshez tartozó mozaikban nem léphet fel $(n-1)$ -élű csúcs, ha ugyanis volna, akkor a mozaik csúcsai köré írt körök nem nyúlhatnának bele az $(n-1)$ -élűvel átellenes pont köré írt $\pi - 3r$ sugarú körbe, tehát $r < \frac{\pi}{3}$ miatt maradna fedetlen rész.

Ha egy r -mozaikban fellép egy 3-élű csúcs, akkor az ebben a csúcsban találkozó háromszögek egy új háromszöget alkotnak, melynek oldalai a háromszögegyenlőtlenség miatt $2r$ -nél kisebbek. Ezért ennek a háromszögnek a területe

kisebb, mint a $2r$ oldalhosszúságú szabályos háromszög területe, melyet jelöljünk $T(r)$ -rel. A többi háromszög területe nyilván nem nagyobb, mint az r sugarú körbe írt szabályos háromszög területe, azaz mint $\Delta(r)$.

Ha tehát egy hét csúcspontú r_7 -mozaikban egy háromélű csúcs lenne, akkor – felhasználva, hogy a lapszám $2n - 4$ (ld a 2.1.tétel bizonyítását) – a háromszögek területe legfeljebb $T(r_7) + (2 \cdot 7 - 4 - 3)\Delta(r_7)$. Ennek kiszámításához szükségünk van a $T(r)$ függvényre.

Legyen egy $2r$ oldalhosszúságú szabályos gömbháromszög mindhárom szöge α . A háromszöget bontsuk két derékszögű háromszöggé az egyik magasságával. Ezek egyikében felírva a két ismert oldalra a gömbi sinustételt: $\frac{\sin 2r}{\sin r} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$, melynek átrendezésével, a $\sin 2r = 2 \sin r \cos r$ összefüggés felhasználásával $\alpha = 2 \arcsin\left(\frac{1}{2 \cos r}\right)$ adódik. Ebből

$$T(r) = 6 \arcsin\left(\frac{1}{2 \cos r}\right) - \pi.$$

Ezt felhasználva $T(r_7) + 7\Delta(r_7) < 4\pi$, ami lehetetlen, s így valóban kizártuk a 3- és 6-élű csúcsokat.

Legyen A_i egy n csúcsú háromszögmozaik i -élű csúcsainak száma. Ekkor

$$A_3 + A_4 + \dots = n.$$

Mivel másrészt a lapszám $2n - 4$ (ld a 2.1.tétel bizonyítását), azért a háromszögelés miatt a kétszeres élszám $3(2n - 4)$, tehát

$$3A_3 + 4A_4 + \dots = 6n - 12.$$

Ha $n = 5$, akkor $A_3 + A_4 = 5$, $3A_3 + 4A_4 = 18$, amiből $A_3 = 2$, és $A_4 = 3$.

Ha $n = 7$, akkor $A_3 = A_6 = 0$, tehát $A_4 + A_5 = 7$, $4A_4 + 5A_5 = 30$, amiből $A_4 = 5$, és $A_5 = 2$.

Könnyen látható, hogy ezek a feltételek a kérdéses mozaikok topológiai típusát már egyértelműen meghatározzák, azaz egy 5-csúcsú háromszögmozaik, mely-

nek két 3-élű és három 4-élű csúcsa van, M_5 -tel, egy 7-csúcsú háromszögmozaik, melyenk öt 4-élű és két 5-élű csúcsa van, M_7 -tel izomorf.

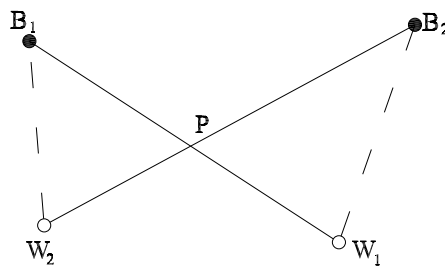
Belátjuk, hogy egy n csúcspontú, M_n -nel topológiailag izomorf r_n -mozaik M_n -nel azonos ($n \geq 5$). Ehhez egy új mozaikot készítünk a következő módon: Az új mozaik csúcsai az eredeti mozaik csúcspontjai (2.3.ábra, fekete pontok), és az eredeti mozaik lapjai köré írt körök középpontjai (2.3.ábra, fehér pontok). Minden egyes fehér pontot összekötünk azzal a három fekete ponttal, amelyek által meghatározott háromszög köré írt körének az adott fehér pont a középpontja. A fekete pontok nincsenek egymással összekötve.

Megmutatjuk, hogy ezáltal valóban mozaikot nyertünk, tehát a megrajzolt élek nem metszhetik egymást.

Tegyük fel, hogy a B_1W_1 és a B_2W_2 élek a P pontban metszik egymást. Itt W_1 és W_2 fehér, B_1 és B_2 fekete pontok (ld. 2.2.ábra). A háromszögmozaikot úgy készítettük, hogy egyetlen csúcspont sem fekehet egy háromszöglap köré írt kör belsejében, ezért $W_1B_1 \leq W_1B_2$ és $W_2B_2 \leq W_2B_1$. Ebből következik, hogy

$$(W_1P + PB_2) + (W_2P + PB_1) \leq W_1B_2 + W_2B_1,$$

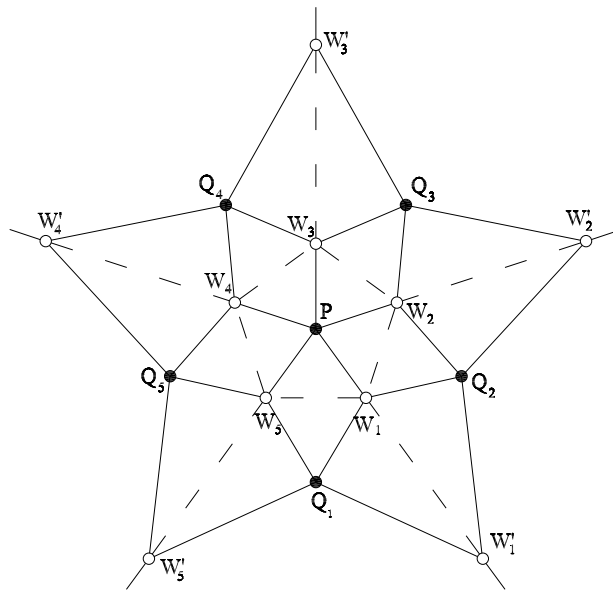
ami csak úgy lehetséges, ha a négy pont kollineáris. Azonban $W_1B_1 \leq W_1B_2$ és $W_2B_2 \leq W_2B_1$ ebben az esetben is csak úgy lehetséges, ha a két élnek nincs közös belső pontja.



2.2. ábra.

Tehát valóban mozaikot kaptunk, amely $3(n - 2)$ számú négyszögből áll. (A négyszögek nem feltétlenül konvexek, és minden négyszögnek megfeleltethető az eredeti mozaiknak pontosan egy éle.) Nyilvánvaló, hogy ha a kiindulásul vett háromszög mozaik r -mozaik volt, akkor az új mozaik minden éle nem nagyobb r -nél.

Készítsük most el ezt a mozaikot egy n -csúcsú kettősgúla mozaikjából kiindulva. Jelölje P illetve P' az $(n - 2)$ élű, Q_1, \dots, Q_{n-2} a 4-élű csúcsokat. Állapodjunk meg a $Q_{n-1} = Q_1$ jelölésben. A PQ_iQ_{i+1} illetve a $P'Q_iQ_{i+1}$ háromszög köré írt kör középpontja legyen W_i illetve W'_i (2.3.ábra). Megmutatjuk, hogy ha a kiindulásul választott háromszögmozaik r_n -mozaik, akkor a $P, P', Q_1, \dots, Q_{n-2}$ pontok egy szabályos kettősgúla csúcsai.



2.3. ábra.

Vezessük be az $\alpha = W_i P W_{i+1} \sphericalangle$, $\alpha' = W_i P' W_{i+1} \sphericalangle$, $\beta_i = W_i Q_i W'_i$, ($i \geq 1$), $W_{n-1} = W_1$, $W'_{n-1} = W'_1$ jelöléseket.

Egy gömbi egyenlő (r_n) szárú háromszög szárszöge legyen x , alapon fekvő szöge α . A háromszöget az alaphoz tartozó magasságával bontjuk két derékszögű háromszöggé. Ezek egyikében felírva a gömbi cosinustételt a derékszögre, rendezés után $\alpha = \operatorname{arccot}(\cos r_n \tan \frac{x}{2})$ adódik. Ezt felhasználva a háromszög területe $t(x) = x + 2\operatorname{arccot}(\cos r_n \tan \frac{x}{2}) - \pi$.

2.4. Lemma. *A $t(x)$ függvény x -nek a $[0; \pi]$ intervallumon konkáv függvénye.*

BIZONYÍTÁS. A $t(x)$ függvény második deriváltja közös nevezőre hozás után

$$\begin{aligned} t''(x) &= \\ &= \frac{(1 + \tan^2 \frac{x}{2})^2 \cos^3 r \tan \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) \cos r (1 + \tan^2 \frac{x}{2} \cos^2 r)}{(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \cos^2 r)^2}. \end{aligned}$$

Ennek nevezője pozitív, így elegendő a számlálójának negativitását látni. A számláló, kiemelés után a következő alakba írható:

$$\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) \cos r \tan \frac{x}{2} \left[\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) \cos^2 r - \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \cos^2 r\right) \right].$$

Mivel $r \leq \frac{\pi}{2}$, és $x \in [0; \pi]$, a kiemelt tényezők mindegyike nemnegatív, (amikor pedig nulla, azok az esetek érdektelenek), így elegendő belátni, hogy

$$\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) \cos^2 r - \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \cos^2 r\right) \leq 0,$$

a zárójelek felbontása és rendezés után

$$\cos^2 r \leq 1,$$

ami minden r értékre igaz, az egyenlőség esete pedig érdektelen. ■

Ha s jelöli a négyszögek területösszegét, akkor

$$s \leq 2 \sum_{i=1}^{n-2} t(\alpha_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-2} t(\alpha'_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-2} t(\beta_i).$$

Mivel $\sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha'_i = 2\pi$, így

$$\sum_{i=1}^{n-2} \beta_i = \frac{1}{2} \left(n2\pi - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha'_i \right) = (n-4)\pi,$$

ezért a Jensen-egyenlőtlenség alapján

$$s \leq 4(n-2)t \left(\frac{2\pi}{n-2} \right) + 2(n-2)t \left(\frac{(n-4)\pi}{n-2} \right). \quad (2.2)$$

Ez pedig éppen az kívánt elrendezéshez tartozó mozaikból készíthető új mozaikban a megfelelő négyszögek területeinek összege, tehát 4π . Másrészt $s = 4\pi$, így a 2.2 egyenlőtlenségben egyenlőségnek kell állnia, ami csak úgy lehetséges, ha a $P, P', Q_1, \dots, Q_{n-2}$ pontok egy szabályos kettősgúla csúcsai. ■

3. fejezet

Körfedések gömbön

3.1. Gömbi kör legritkább fedése három körrel

Legyen r_3 az a legkisebb érték, melyre az egységgömbön adott R sugarú C_0 gömbi körlap lefedhető három r_3 sugarú gömbi körlappal.

3.1. Tétel.

$$0 \leq R \leq \arccos \frac{1}{3} \approx 1,23$$

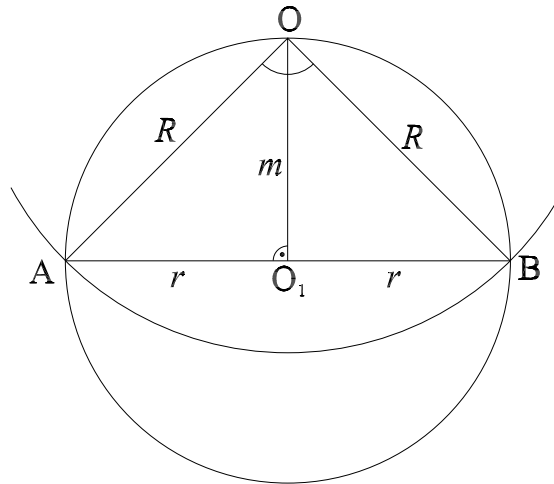
esetén

$$r_3 = \frac{\arccos\left(\frac{3}{2}\cos^2 R - \frac{1}{2}\right)}{2},$$

s ekkor a három fedő körlap mindegyike úgy helyezkedik el, hogy valamely átmérőjének mindkét végpontjával illeszkedik C_0 határára, és a határból lefedett íveik csak végpontjaiknál érintkeznek.

BIZONYÍTÁS. Abból indulunk ki, hogy a három fedő, r sugarú C_1, C_2, C_3 körlapoknak fedniük kell C_0 határát is. Egy C_i ($i = 1, 2, 3$) nyilván akkor tudja a legnagyobb ívet lefedni C_0 határából, ha egy átmérőjének két végpontjával illeszkedik rá. Vegyük azt a legkisebb r értéket, amekkora sugarú 3 körlap még le tudja

fedni C_0 határát. Az előzőek értelmében ehhez az r értékhez úgy jutunk, ha a fedő körlapok átmérőikkel illeszkednek a fedendő körlap határára, és a határból lefedett íveik csak végpontjaiknál érintkeznek egymással. Ha ezzel az elrendezéssel C_0 fedését kapjuk, akkor ezen r értéknél kisebb sugarú körlapokkal nem is lehetséges a fedés r választása miatt, azaz $r = r_3$.



3.1. ábra.

Legyen a C_1 fedő kör középpontja O_1 , C_0 középpontja O , valamint $\text{bd}C_1 \cap \text{bd}C_0 = \{A; B\}$. Ekkor $OA = OB = R$, $AO_1 = BO_1 = r$, továbbá legyen $m = \angle AOB$.

Az elrendezés forgásszimmetriája miatt AOB egyenlő szárú háromszögben $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$. Az AOB háromszög AB oldalára felírva a gömbi cosinustételt $\cos 2r = \cos^2 R + \sin^2 R \cos \frac{2\pi}{3} = \cos^2 R - \frac{1}{2} \sin^2 R = \frac{3}{2} \cos^2 R - \frac{1}{2}$, azaz

$$r = \frac{\arccos\left(\frac{3}{2} \cos^2 R - \frac{1}{2}\right)}{2}. \quad (3.1)$$

Ezzel az elrendezéssel pontosan akkor kapjuk C_0 fedését, ha $m \leq r$.

Ennek vizsgálatához felhasználjuk, hogy $\cos R = \cos r \cos m$, ami az AOO_1 derékszögű háromszög AO oldalára felírt gömbi cosinustétel, felhasználva, hogy

$\cos \frac{\pi}{2} = 0$, valamint

$$\cos^2 r = \frac{3}{4} \cos^2 R + \frac{1}{4}, \quad (3.2)$$

amit a fentebbi $\cos 2r = \frac{3}{2} \cos^2 R - \frac{1}{2}$ összefüggés $\frac{\cos 2r + 1}{2} = \cos^2 r$ azonosságba való helyettesítésével kapunk.

Mivel $m \leq r \Leftrightarrow \cos m \geq \cos r$, evvel $\cos r \neq 0$ miatt (ld. 3.2 formula) ekvivalens a $\cos r \cos m \geq \cos^2 r$ egyenlőtlenség.

Innen az előzőek felhasználásával

$$\cos R \geq \cos^2 r = \frac{3}{4} \cos^2 R + \frac{1}{4},$$

tehát $\cos R \geq \frac{3}{4} \cos^2 R + \frac{1}{4}$, $0 \geq 3 \cos^2 R - 4 \cos R + 1$, ami $\frac{1}{3} \leq \cos R \leq 1$ -et jelenti. Vagyis

$$m \leq r \Leftrightarrow 0 \leq R \leq \arccos \frac{1}{3} \approx 1, 23.$$

Ezzel a tételt beláttuk. ■

3.2. Megjegyzés. Az $R = 0$ eset érdektelen, az $R = \arccos \frac{1}{3}$ eset pedig - mivel így minden egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül - épp azt jelenti, hogy R ezen értéke mellett lesz C_1 , C_2 és C_3 körlapoknak egyetlen közös pontja, C_0 középpontja.

3.3. Tétel.

$$R > \arccos \frac{1}{3}$$

esetén

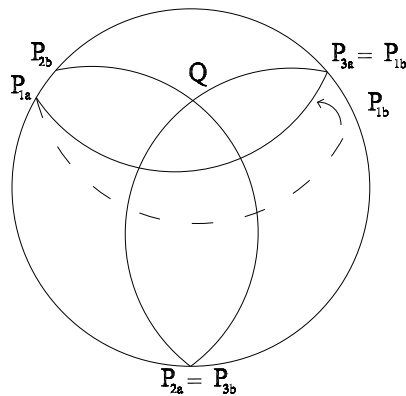
$$r_3 = \arctan \frac{2(1 - \cos R)}{\sin R},$$

s ekkor a három fedő C_i ($i = 1, 2, 3$) körlap azonos, $\frac{2\pi \sin R}{3}$ hosszú ívet fed le $\text{bd}C_0$ -ból, és $C_1 \cap C_2 \cap C_3 = O_0$, azaz C_0 középpontja.

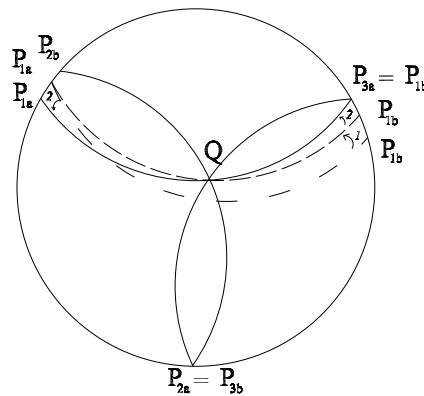
BIZONYÍTÁS. Először azt látjuk be, hogy a tételben leírt elrendezés az optimális, valóban ebből kapjuk r_3 értékét. Legyenek C_1 , C_2 , C_3 r sugarú körlapok, melyekkel fedjük C_0 -t. Feltehető, hogy $\text{bd}C_i \cap \text{bd}C_j$ ($\forall i, j = 1, 2, 3$) egyik pontja

C_0 belsejében, másik pontja pedig C_0 határán, vagy rajta kívül helyezkedik el. Ez utóbbiak közül – melyekre a továbbiakban többször „a három kérdéses metszéspont” terminológiával fogunk hivatkozni – feltehető, hogy legalább az egyik metszéspont C_0 határára esik, ellenkező esetben R -nél nagyobb sugarú körlap is fedhető volna a C_i körlapokkal. Jelölje bdC_0 bdC_i -vel vett metszéspontjait P_{ia} és P_{ib} . Ekkor – a 3.2. ábra jelöléseit használva – a P_{1a} pont körül forgatva a $P_{1a}P_{1b}$ ívhez tartozó C_1 körlapot, annak határa

1. eset: először eléri a P_{3a} pontot (ld. 3.2. ábra). Ekkor tehát már két metszéspont is C_0 határára esik, valamint C_i $i = 1, 2, 3$ körlapok közös része egy nemnulla területű tartomány.
2. eset: először eléri a Q pontot. Ekkor C_1 -t tovább forgatjuk a Q pont körül, míg a határa el nem éri a P_{3a} pontot. Ekkor a 3.2/b ábrán látható helyzetbe jutottunk, tehát ez esetben is két metszéspont esik C_0 határára, de a három fedendő kör metszete egyetlen Q pont.



3.2. ábra.



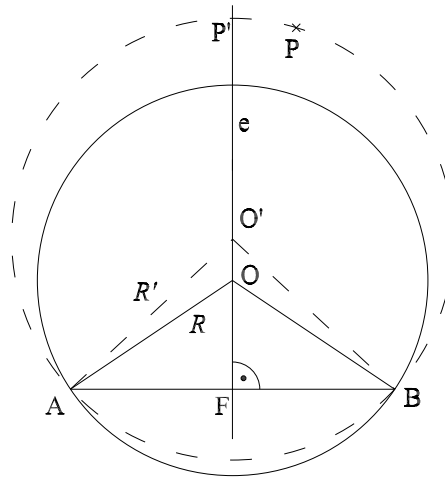
3.2./b ábra.

Mindkét esetben a C_i ($i = 1, 2, 3$) körlapok továbbra is fedik C_0 -t.

3.4. Lemma. Egy C gömbi körlap egy húrja legyen AB , középpontja O , egy, a körlapon kívül fekvő pontot jelölje P . Tekintsük azt az A , B és P pontok köré írt

C' gömbi körlapot, mely tartalmazza O -t. A C' körlap középpontját jelölje O' , sugarát pedig R' . Ekkor $R' > R$.

BIZONYÍTÁS. (LEMMA) Legyen az AB felezőpontja F , felező merőleges főköre pedig e . Mivel két kör vagy egyeiesik, vagy legfeljebb két közös pontjuk lehet, és $bdC \cap bdC' = \{A, B\}$, ezért $P' = e \cap bdC'$ is kívül esik a C' körlapon.



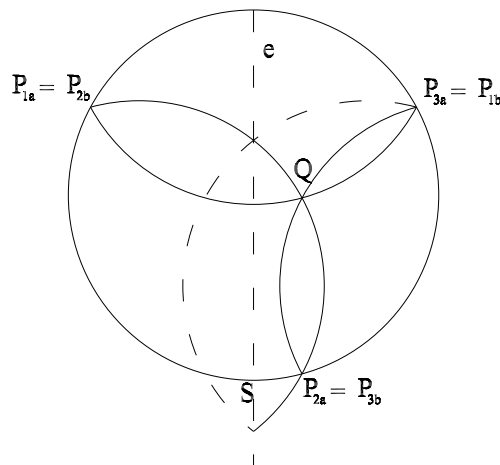
3.3. ábra.

Ha O' közelebb esne az AB szakaszhoz O -nál, akkor $OB \sphericalangle > O'B \sphericalangle$ miatt $R = OB > O'B = R'$ volna, ami $R' = P'O' > P'O > R$ miatt lehetetlen. Tehát O' az O -nál távolabb esik az AB szakasztól, így $OB \sphericalangle < O'B \sphericalangle$ miatt $R = OB < O'B = R'$ (ld. 3.3. ábra), ami bizonyítandó volt. ■

A 3.4. lemmát alkalmazva mind a két esetben azt kapjuk, hogy rögzített r mellett R értéke növelhető lenne, vagyis ezek közül egyik sem a keresett, optimális elrendezés. R értéke növelhető addig, hogy a harmadik, eddig C_0 -on kívülre eső metszéspont is bdC_0 -ra essen. Az optimális elrendezésben tehát a három kérdéses metszéspont mindegyike C_0 határán van. Ekkor ismét két eset lehetséges:

1. eset. Ha a $C_1 \cap C_2 \cap C_3$ egy nemnulla felületű tartomány, úgy választunk ki egy olyan C_i -t, melynek $P_{ia}P_{ib}$ húrja rövidebb, mint az átmérője, s a P_{ia} -ból induló átmérőt tartalmazza C_0 . (Ilyen van, hiszen másként a 3.1. tétel miatt $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ nem fedné C_0 középpontját.) Forgassuk C_i -t P_{ia} -ból "kifele", azaz úgy, hogy $O_0P_{ia}O_i \triangleleft$ növekedjen. Ekkor $P_{ia}P_{ib}$ húr hossza is nő, vagyis az P_{ib} pont a bdC_0 köríven $P_{(i+1)b}$ pont felé mozdul el. Ezzel mindenképpen a fentebb tárgyalt két eset valamelyikéhez jutunk (3.2. és 3.2./b ábrák). A 3.4. lemmát alkalmazhatjuk ismét, tehát ennél jobb elrendezés is van.

2. eset. Ha $C_1 \cap C_2 \cap C_3 =$ egyetlen Q pont, akkor már csak azt kell belátnunk, hogy $Q = O_0$, és a három O_0 -tól különböző, C_0 határán fekvő $C_i \cap C_j$, $(i, j = 1, 2, 3)$ alakú metszéspontok egy O_0 középpontú szabályos háromszög csúcsaiban helyezkednek el. Ehhez elegendő belátni, hogy bármely két metszéspont szakaszfelező merőleges főkörívére illeszkedik a harmadik metszéspont. (Ezen metszéspontok a korábbi jelöléseket használva $P_{1a} = P_{2b}$, $P_{2a} = P_{3b}$, $P_{3a} = P_{1b}$.)

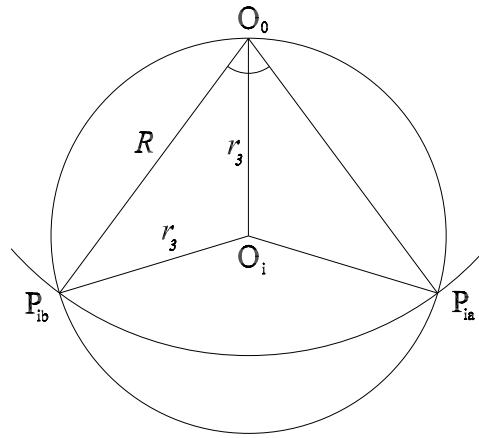


3.4. ábra.

Ennek belátásához legyen C_1 körlaphoz tartozó $P_{1a}P_{1b}$ húr felező merőleges főköre e . Legyen $e \cap bdC_0 = S$. Tegyük fel, hogy P_{2a} a C_0 határán S és P_{1b} közé esik. Így Q pont e -hez képest azonos félgömbön fekszik a P_{2a} és P_{1b} pontokkal.

Tükrözzük e -re C_2 -t, legyen a tükörkép C'_2 . (A 3.4. ábrán szagatottal jelzett ív.) Mivel $C_1 \cup C_2$ fedi az e és bdC_0 által határolt, Q -t nem tartalmazó félkörlapot, $C_1 \cup C_2 \cup C'_2$ fedi C_0 -t. bdC_2 és bdC'_2 két metszéspontja illeszkedik e -re, az egyik C_0 -belsejébe, a másik pedig C_0 -on kívülre esik. Ekkor a 3.4. lemmát alkalmazhatjuk ismét, ezzel belátva, hogy létezik jobb elrendezés. Az eljárásból látszik az is, hogy hogyan érhető el, hogy a kérdéses három metszéspont közül kettőnek felező merőleges főkörére illeszkedjen a harmadik metszéspont.

Ezzel igazoltuk, hogy az optimális elrendezés valóban a tételben megfogalmazott. Most már számolhatjuk r_3 értékét R függvényében.



3.5. ábra.

Az elrendezés forgásszimmetriája miatt $P_{ib}O_0P_{ia}$ egyenlő szárú háromszögben $P_{ib}O_0P_{ia} \leq \frac{2\pi}{3}$. A $P_{ib}O_0O_i$ háromszög $P_{ib}O_i$ oldalára felírva a gömbi cosinustételt:

$$\cos r_3 = \cos r_3 \cos R + \sin r_3 \sin R \cos \frac{\pi}{3} = \cos r_3 \cos R + \frac{1}{2} \sin r_3 \sin R,$$

ahonnan rendezés után a

$$\frac{2(1 - \cos R)}{\sin R} = \tan r_3$$

összefüggés adódik. ■

3.5. Megjegyzés. Ha $R = \pi - r_3$, vagyis az R sugarú gömbi körlap által a gömbfelületből szabadon hagyott rész éppen egy r_3 sugarú körlap, akkor ezt a részt egy ilyennel fedve a teljes gömbfelület négy gömbi körlappal való legritkább fedését kapjuk. Itt az $r_3 = r$ sugár az imént igazolt 3.3. tétel szerint kielégíti az alábbi egyenletet:

$$\frac{2(1 - \cos(\pi - r))}{\sin(\pi - r)} = \tan r,$$

ami rendezés után a

$$3 \cos^2 r + 2 \cos r - 1 = 0$$

alakot ölti. Ennek az egyenletnek a két gyöke a $\cos r = -1$, és a $\cos r = \frac{1}{3}$. Az előbbi érdektelen, az utóbbiból pedig az $r = \arccos \frac{1}{3}$ adódik. Ez az eredmény a 2.1. tétel $n = 4$ esete.

3.2. Gömbi kör legritkább fedése hét, nyolc vagy kilenc körrel

A számolások megkönnyítése érdekében ebben a fejezetben „fordítva” szemléljük az alapproblémát, azaz r -et tekintjük adottnak. Az alábbiakban egy sejtést fogalmazunk meg, melynek bizonyításában bizonyos részek nincsenek precízen belátva, csak numerikus számolás adja az eredményeket.

3.6. Sejtés. Legyen $R_n(r)$ az a legnagyobb érték, melyre az egységgömbön n darab, adott r sugarú gömbi körlappal lefedhető egy $R_n(r)$ sugarú gömbi körlap. $n = 7, 8$ és 9 esetén az r bizonyos értékei mellett csakis úgy érhető el egy O_n középpontú $R_n(r)$ sugarú C_n gömbi körlap fedése, hogy a C_0 fedő körlap a fedendővel koncentrikusan, a többi C_i ($i = 1, \dots, n - 1$) fedő körlap középpontja pedig egy szabályos $(n - 1)$ -szög csúcaiban helyezkedik el oly módon, hogy $\text{bd}C_i \cap \text{bd}C_j, \forall i, j = 1, \dots, n - 1$ alakú pont illeszkedik C_0 vagy C_n hatá-

rára. Ekkor érvényes az

$$R_n(r) = r + 2 \arccos \frac{\cos r}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta \sin^2 r}}$$

összefüggés.

Bár azt nem tudjuk pontosan, hogy (n -től függően) legfeljebb mekkora r értékig igaz a sejtés, adunk rá egy alsó becslést. Ezekben az esetekben megpróbáljuk igazolni is sejtésünket.

A bizonyítás gondolatmenete azonos azzal, amit Fejes Tóth Gábor alkalmazott a síkbeli egységkörlap nyolc, kilenc és tíz körlappal való fedésének bizonyításánál.

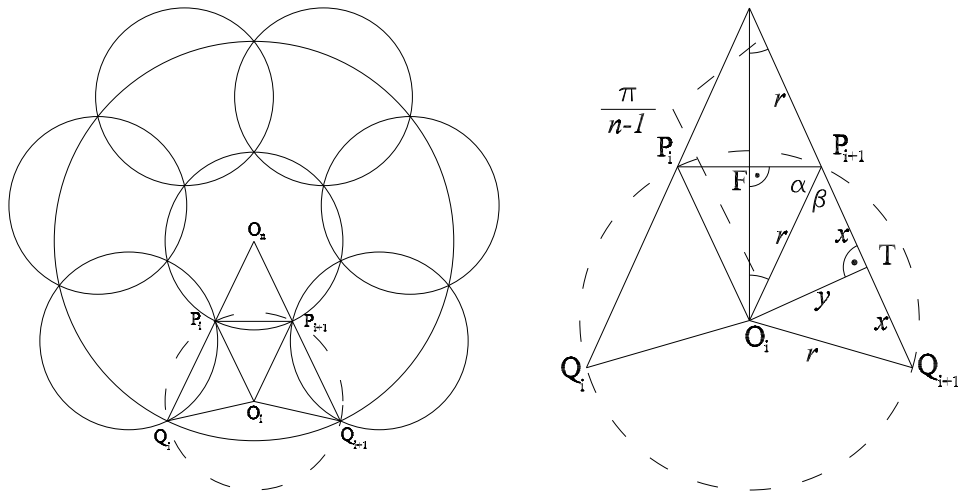
BIZONYÍTÁS. Először kiszámoljuk, hogy mekkora az a legnagyobb R érték, melyre adott n db r sugarú gömbi körlap a 3.6. sejtés szerinti elrendezésben lefed R sugarú gömbi körlapot. A későbbiekben belátjuk, hogy ekkora körlap fedése egyértelmű, ezért $R = R_n(r)$

3.2.1. R értékének kiszámítása

Legyen a C_n gömbi körlap középpontja O , sugara R . Legyen C_n fedve a C'_i, O'_i , ($i = 0, \dots, n-1$) középpontú, r sugarú gömbi körlapokkal úgy, ahogyan az a 3.6. Sejtésben szerepel. Ezek közül C_n belsejében C'_0 fekszen, így $O'_0 = O$. Legyenek továbbá P'_1, \dots, P'_{n-1} a bdC_0 körnek bdC'_i körökkel, Q'_1, \dots, Q'_{n-1} pedig a bdC_n körnek bdC'_i körökkel vett metszéspontjai pozitív körüljárási irányban, és legyen $P'_n = P'_1, Q'_n = Q'_1$. A C'_i körlap határán a $P'_i, P'_{i+1}, Q'_{i+1}, Q'_i$ pontok helyezkednek el. Legyenek F a $P'_i P'_{i+1}$ szakasz, T pedig a $P'_{i+1} Q'_{i+1}$ szakasz felezőpontja, $\alpha = \angle FP'_{i+1} O'_i$, $\beta = \angle O'_i P'_{i+1} T$ (ld. 3.6. ábra).

Gömbi cosinustétel a derékszögre az $FO'_i P'_{i+1}$ háromszögben:

$$\cos \pi = -\cos \frac{\pi}{n-1} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{n-1} \sin \alpha \cos r, \text{ ahonnan}$$



3.6. ábra.

$\alpha = \operatorname{arccot} \left(\cos r \tan \frac{\pi}{n-1} \right)$, amiből

$$\beta = \pi - 2 \operatorname{arccot} \left(\cos r \tan \frac{\pi}{n-1} \right)$$

3.7. Megjegyzés. Esetünkben $\beta \leq \frac{\pi}{2}$, hiszen ellenkező esetben $\alpha < \frac{\pi}{4}$ volna, ekkor viszont az $FO'_i P'_{i+1}$ háromszögben α -ra felírva a gömbi cosinustételt $\frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{n-1}} < \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\pi}{n-1}} = \cos FO'_i$ adódik, ami $n \geq 5$ esetén lehetetlen.

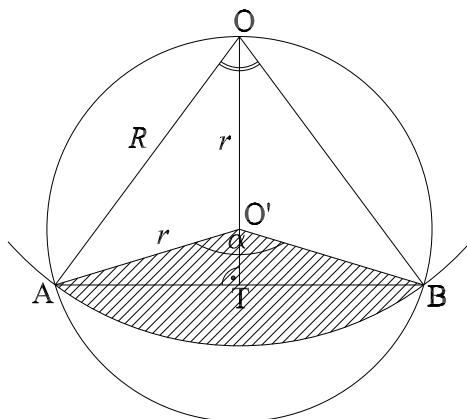
Gömbi cosinustétel $P'_{i+1} TO'_i$ háromszögben az r oldalra: $\cos r = \cos x \cos y$, és sinustétel ugyanitt $\frac{\sin r}{\sin \pi} = \frac{\sin y}{\sin \beta}$, melyekből $\cos x = \frac{\cos r}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta \sin^2 r}}$.

Míndezek alapján $R = r + 2x$ miatt

$$R = r + 2 \arccos \frac{\cos r}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta \sin^2 r}}. \tag{3.3}$$

3.2.2. Az $f_{R,r}(\alpha)$ és $F_{R,r}(\alpha)$ függvények bevezetése

Legyen C egy R sugarú O középpontú gömbi körlap, C' pedig egy r sugarú O' középpontú gömbi körlap úgy, hogy $bdC \cap bdC' = \{A, B\}$. Legyen továbbá az AB szakasz felezőpontja T , $\alpha = \angle AO'B$ (ld. 3.7. ábra).



3.7. ábra.

Vezessük be az $\alpha \in [0, \pi]$ intervallumon értelmezett $f_{R,r}(\alpha)$ és $F_{R,r}(\alpha)$ függvényeket a következőképp:

$$f_{R,r}(\alpha) = \angle AOB$$

$F_{R,r}(\alpha) = C$ -ből az $AO'B$ szögtartomány által kimetszett tartomány területe.

A gömbi sinustételt felírva az $O'TB$ és az OBT derékszögű háromszögekben: $\frac{\sin BT}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \sin r$ valamint $\frac{\sin BT}{\sin \frac{f_{R,r}(\alpha)}{2}} = \sin R$, ahonnan

$$f_{R,r}(\alpha) = 2 \arcsin \left(\frac{\sin r}{\sin R} \sin \frac{\alpha}{2} \right). \quad (3.4)$$

Egy gömbi egyenlő szárú háromszög területe a 2.4. lemmát megelőzők szerint $T = \alpha + 2 \arccot(\cos R \tan \frac{\alpha}{2}) - \pi$, ahol α a háromszög szárszöge, R pedig a

szárainak hossza.

Az $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ valós függvény grafikonját a $[\cos R, 1]$ intervallumon x tengely körül körbeforgatva a keletkező forgástest felszíne éppen az R sugarú gömbi körlap területe, ami így a formulából $T_o = 2\pi(1 - \cos R)$ -nek adódik. Ennek felhasználásával az R sugarú gömbi körlap $f_{R,r}(\alpha)$ szögű körcikkének területe $T_{körcikk} = f_{R,r}(\alpha)(1 - \cos R)$. A fentiek alapján:

$$\begin{aligned} F_{R,r}(\alpha) &= T_{\text{AOB körcikk}} - T_{\text{AO}\Delta} + T_{\text{AO}'\text{B}\Delta} = \\ &= f_{R,r}(\alpha)(1 - \cos R) - f_{R,r}(\alpha) - 2\text{arccot}\left(\tan\frac{f_{R,r}(\alpha)}{2}\cos R\right) + \\ &\quad + x + 2\text{arccot}\left(\tan\frac{\alpha}{2}\cos r\right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.2.3. Az $f_{R,r}(\alpha)$ és $F_{R,r}(\alpha)$ függvények vizsgálata

A 3.4 deriválásával

$$f'_{R,r}(\alpha) = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\frac{\sin^2 R}{\sin^2 r} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}} \quad f''_{R,r}(\alpha) = -\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\sin^2 R}{\sin^2 r} - 1\right)}{2\sqrt{\frac{\sin^2 R}{\sin^2 r} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}}, \quad (3.6)$$

ahonnan a geometriai megfontolásokból adódó $0 \leq R \leq \pi$ figyelembevételével $f_{R,r}(\alpha)$ a $[0, \pi]$ intervallumon konkáv pontosan akkor, ha $\sin R > \sin r$, s ekkor $f_{R,r}(\alpha)$ egyúttal szigorúan monoton nő.

Szükségünk van $F_{R,r}$ konkávitására is, ahol R a r függvényében adott 3.3 szerint. A 3.5-ben $f_{R,r}$ behelyettesítésével, deriválás és némi rendezés után kapjuk, hogy

$$F'_{R,r}(\alpha) = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\sin^3 r \cos R \sin^2\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\sin^2 R - \sin^2\frac{\alpha}{2}} \sin^2 r (1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} \sin^2 r - \cos r)}{(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} \sin^2 r) \sqrt{\sin^2 R - \sin^2\frac{\alpha}{2}} \sin^2 r},$$

valamint a $H_1 = \sqrt{\sin^2 R - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 r}$ és $H_2 = \sin \frac{\alpha}{2} \sin^2 r \cos \frac{\alpha}{2}$ jelölések bevezetésével:

$$\begin{aligned}
F''_{R,r}(\alpha) &= \\
&= \frac{\cos R \sin^3 r \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin^3 \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 r - \cos r) H_2}{H_1} - H_1 H_2}{(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 r) H_1} + \\
&\quad + \frac{\left(\cos \frac{\alpha}{2} \sin^3 r \cos R \sin^2 \frac{\alpha}{2} + H_1 (1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 r - \cos r) \right) H_2}{(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 r)^2 H_1} + \\
&\quad + \frac{\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} \sin^3 r \cos R \sin^2 \frac{\alpha}{2} + H_1 (1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 r - \cos r) \right) H_2}{(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 r) H_1^3}. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Az $F''_{R,r}(\alpha)$ 3.7 alatti alakjában a három tag közös nevezője

$$\left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 r\right)^2 \sqrt{\sin^2 R - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 r}^3, \quad (3.8)$$

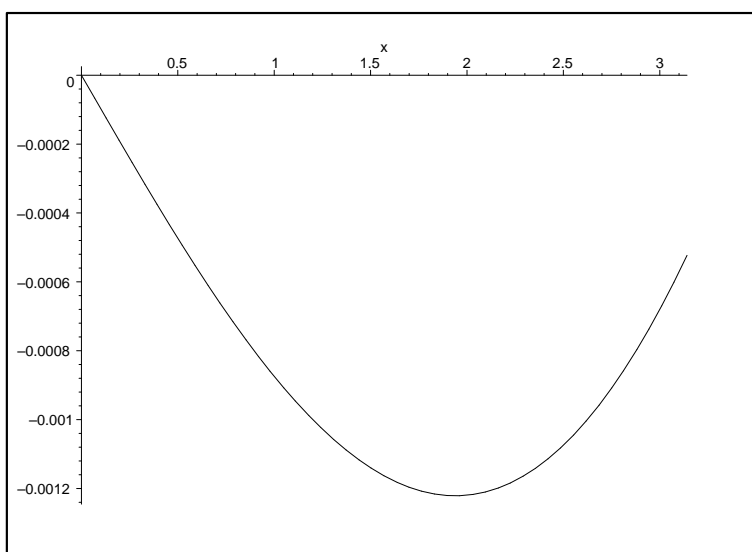
amivel a számláló, a megfelelő átalakítások és a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ azonosság többszöri alkalmazása után:

$$\begin{aligned}
&\cos R \sin^3 r \sin \frac{\alpha}{2} \left[\sin^4 \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{2} \sin^2 R \sin^2 r + \sin^2 r - \frac{1}{2} \sin^4 r \right) - \right. \\
&\quad \left. - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(\frac{3}{2} \sin^2 R + \frac{1}{2} \sin^2 r \right) + \sin^2 R \right] - \\
&\quad - \sin \frac{\alpha}{2} \sin^2 r \cos \frac{\alpha}{2} \cos r \left(\sqrt{\sin^2 R - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 r} \right)^3 \quad (3.9)
\end{aligned}$$

alakba írható.

A 3.8 nevező minden (R, r) párra pozitív, hiszen $\sin R > \sin r$ miatt $(0 <) \sin r < 1$, (azaz $(0 <) r < \frac{\pi}{2}$) így a szorzat első tényezője pozitív, míg $\frac{\sin R}{\sin r} > 1 \geq \sin \frac{\alpha}{2}$ miatt $\sin R > \sin \frac{\alpha}{2} \sin r$, ezért a második tényező is pozitív. Elegendő tehát $F_{R,r}(\alpha)$ konkáv voltaához a 3.9 számláló előjelét vizsgálnunk. A számláló negatív voltának igazolása azonban nem könnyű feladat, precíz bizonyítás jelenleg nem áll rendelkezésünkre, holott a függvény numerikus vizsgálata

meszszemenően alátámasztja azt. Látni fogjuk, hogy a 3.6. sejtés precíz bizonyítása csupán $F_{R,r}$ konkávitásán múlik. Léteznek precíz numerikus módszerek, melyek segítségével korrekt módon igazolható a számláló nempozitivitása, azonban ilyen vizsgálatot nem állt módunkban elvégezni; ugyanakkor az sem lehetetlen, hogy pusztán elméleti megfontolások segítségével, kellően aprólékos kézi számításokkal is bizonyítható. Illusztrációként áll itt az alábbi grafikon, mely az $n = 8$, $r = 0.2$ értékek mellett a kérdéses számlálót ábrázolja $x = \alpha$ függvényében.



3.2.4. Topológiai elhelyezkedés

Ebben a részben azt látjuk be, hogy a legritkább fedés eléréséhez a fedő körlapok topológiai elhelyezkedése olyan, mint az a 3.6. Sejtésben meg van fogalmazva.

Legyen R az az érték, melyre az R sugarú C_n gömbi körlap a C'_0, \dots, C'_{n-1} r sugarú gömbi körlapok által van fedve úgy, ahogyan az a 3.6. Sejtésben szerepel.

R értékét r és n függvényében a 3.3 formula adja meg. C_n középpontja O , C'_i ($i = 0, \dots, n-1$) középpontja O'_i . Legyenek C_0, \dots, C_{n-1} C_n -t fedő r sugarú gömbi körlapok O_0, \dots, O_{n-1} középpontokkal.

3.8. Lemma. C_0, \dots, C_{n-1} körlapok közül pontosan egy teljesen C_n belsejében helyezkedik el, míg a többi $n-1$ körlapból semelyik háromnak nincsen közös pontja.

BIZONYÍTÁS. Amennyiben $2r \leq R$, akkor $R \leq R_n(r)$ miatt mondhatjuk, hogy a C_0, \dots, C_{n-1} körlapok közül legalább egy teljesen C_n belsejében helyezkedik el, máskülönben nem tudnánk fedni C_n középpontját.

$$2r \leq R \Leftrightarrow r \leq R - r = 2x \Leftrightarrow \cos \frac{r}{2} \geq \cos x = \frac{\cos r}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta \sin^2 r}}$$

$$\sqrt{\sin^2 r + \cos^2 r - \sin^2 \beta \sin^2 r} \geq \frac{\cos r}{\cos \frac{r}{2}}$$

$$\sqrt{\tan^2 r \cos^2 \beta + 1} \geq \frac{1}{\cos \frac{r}{2}}$$

↑

$$\tan^2 r \cos^2 \beta + 1 \geq \frac{1}{\cos^2 \frac{r}{2}}$$

$$\cos^2 \beta \geq \frac{\tan^2 \frac{r}{2}}{\tan^2 r},$$

amiből $\beta \leq \frac{\pi}{2}$ és $r < \frac{\pi}{2}$ miatt

$$\cos \beta \geq \frac{\tan \frac{r}{2}}{\tan r}.$$

Felhasználva a $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ azonosságot

$$\cos \beta \geq \frac{\tan \frac{r}{2} (1 - \tan^2 \frac{r}{2})}{2 \tan \frac{r}{2}},$$

azaz elegendő volna belátni, hogy

$$\tan^2 \frac{r}{2} - 1 + 2 \cos \beta \geq 0. \quad (3.10)$$

Könnyen látható, hogy a bal oldali függvény $r = 0$ -ban $n = 7$ esetén 0, $n = 8$ és $n = 9$ esetén pozitív, míg r szerint deriválva a

$$\tan \frac{r}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{r}{2} \right) + \frac{4 \sin \left(2 \operatorname{arccot} \left(\cos r \tan \frac{\pi}{n-1} \right) \right) \sin r \tan \frac{\pi}{n-1}}{1 + \cos^2 r \tan^2 \frac{\pi}{n-1}} \quad (3.11)$$

kifejezést kapjuk. Ebben $\forall n$ -re az első tag $\forall r$ -re pozitív, valamint a második tag utolsó két tényezője, és a nevező is. $n \geq 7$ esetén

$$\begin{aligned} 0 < \tan \frac{\pi}{n-1} &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 < \cos r \tan \frac{\pi}{n-1} &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2\pi}{3} &\leq 2 \operatorname{arccot} \left(\cos r \tan \frac{\pi}{n-1} \right) < \pi. \end{aligned}$$

Tehát $n \geq 7$ esetén 3.11 \forall értelmezett r értékre pozitív, következésképp 3.10 egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezés monoton nő, s mivel $r = 0$ -ban nemnegatív értéket vesz fel, az egyenlőtlenség ezen esetekben teljesül.

Ezzel beláttuk, hogy a C_0, \dots, C_{n-1} körlapok közül legalább egy teljesen C_n belsejében helyezkedik el.

Legyen a fent említett kör C_0 . A következőkben azt látjuk be, hogy több ilyen kör nem lehet. Tudjuk $f_{R,r}(\alpha)$ növekvő volta miatt, hogy egy C_i által $\operatorname{bd}C_n$ -ből kimetszett ívhez tartozó, O csúcsú középponti szög legfeljebb $2 \arcsin \left(\frac{\sin r}{\sin R} \right)$. Hasonlóan látható, hogy C_0, \dots, C_{n-1} közül ha valamely háromnak van közös pontja, akkor ők lefedhetőek egy $2r$ sugarú, valamely közös pont középpontú körrel, így ezek együtt egy legfeljebb $2 \arcsin \left(\frac{\sin 2r}{\sin R} \right)$ nagyságú O csúcsú középponti szöget határoznak meg. A 3.3 összefüggés felhasználásával numerikus számolás útján meghatározhatóak azon r értékek, melyekre

$$(n-2)2 \arcsin \left(\frac{\sin r}{\sin R} \right) < 2\pi$$

és a

$$2 \arcsin \left(\frac{\sin 2r}{\sin R} \right) + (n-4)2 \arcsin \left(\frac{\sin r}{\sin R} \right) < 2\pi$$

egyszerre teljesül. Ekkor ha az elrendezés különbözne a 3.8. lemmában leírtaktól, akkor a C_i körlapok nem fednék bdC_n -t, ami nem fordulhat elő. Mind a három ($n = 7, n = 8, n = 9$) vizsgált esetben ez utóbbi feltétel bizonyult szigorúbbnak, s ha r eleget tesz ezeknek, úgy a $\sin R > \sin r$ is teljesül. A legnagyobb ilyen (n -től is függő) r értéket jelöljük r_k -nel. Ekkor a megfelelő r_k értékek:

$$n = 7 \text{ esetén } 0,6249 < r_k < 0,625$$

$$n = 8 \text{ esetén } 0,4514 < r_k < 0,4515$$

$$n = 9 \text{ esetén } 0,1562 < r_k < 0,1563$$

Így megfelelő körlapszám esetén minden $r \leq r_k$ érték mellett teljesül a 3.8. lemma állítása. ■

3.2.5. Az elrendezés egyértelműsége

Tekintsük a $C_i, i = 0, \dots, n-1$ rendszer Dirichlet cellafelbotnását. Jelölje D_i a C_i Dirichlet cellájának C_n -re való megszorítását. A 3.8. lemma miatt minden cellacsúcsnál három (megszorított) Dirichlet cella találkozik. D_0 egy $(n-1)$ -szög, míg $D_i, i = 1, \dots, n-1$ határa három egyenes szakasz, és bdC_n egy íve.

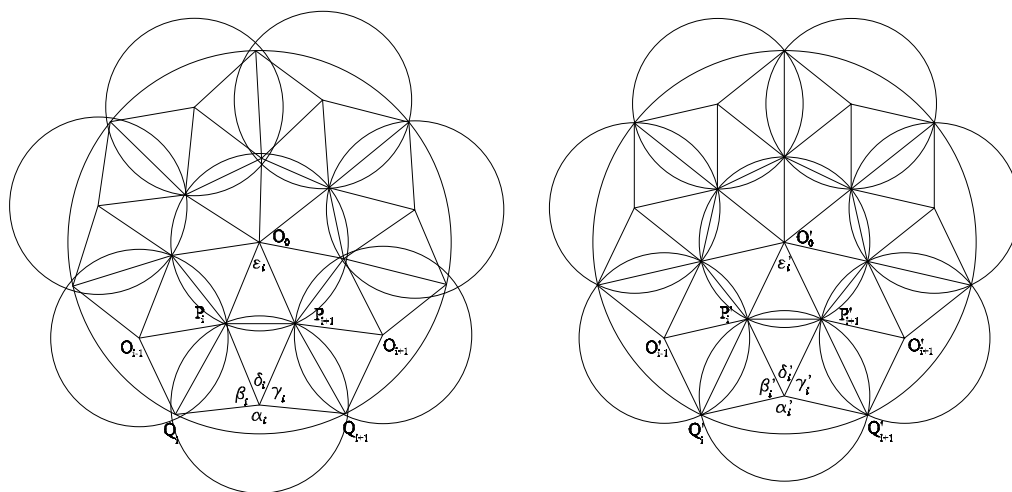
A D_0 cella csúcsai pozitív körüljárási irányban legyenek P_1, \dots, P_{n-1} , a bdC_n -en lévő cellacsúcsok pedig Q_1, \dots, Q_{n-1} . A számozást válasszuk úgy (ld. 3.8 ábra), hogy a D_0 cellától különböző D_i cella csúcsai pozitív körüljárási irányban rendre $Q_i, Q_{i+1}, P_{i+1}, P_i$ legyenek. További jelölések:

$$\alpha_i = Q_i O_i Q_{i+1} \triangleleft, \quad \beta_i = P_i O_i Q_i \triangleleft, \quad \gamma_i = P_{i+1} O_i Q_{i+1} \triangleleft,$$

$$\delta_i = P_i O_i P_{i+1} \triangleleft, \quad \varepsilon_i = P_i O_0 P_{i+1} \triangleleft.$$

Ugyanezeket a jelöléseket alkalmazzuk $'$ -vel ellátva a $C'_i, i = 0, \dots, n-1$ körrendszerre, mely a 3.6. Sejtésben megfogalmazott módon helyezkedik el.

Ekkor persze $\alpha'_i = \alpha'_j, \beta'_i = \beta'_j, \gamma'_i = \gamma'_j, \delta'_i = \delta'_j$, és $\varepsilon'_i = \varepsilon'_j$, valamint $\beta'_i = \gamma'_i$ és $\delta'_i = \varepsilon'_i = \frac{\pi}{n-1} \quad \forall i, j = 1, \dots, n-1$



3.8. ábra.

A későbbiekben szükségünk lesz α'_i pontos értékére is. Ennek kiszámításához tekintsük a 3.6. ábrát. Ezen $\alpha'_i = \angle Q_i O_i Q_{i+1} = 2 \left(\pi - 2 \angle T O_i P_{i+1} - \frac{\pi}{n-1} \right)$. A $Q_i O_i Q_{i+1}$ háromszögben a derékszögre felírva a gömbi cosinustételt, rendezés után a $\angle T O_i P_{i+1} = \text{arccot}(\tan \beta \cos r)$ adódik, ahonnan

$$\alpha'_i = 2 \left(\frac{(n-2)\pi}{n-1} - 2 \text{arccot}(\tan \beta \cos r) \right). \quad (3.12)$$

Feltehető, hogy $\alpha_i \leq \pi$, ellenkező esetben a C_i körlapot tükrözve a $Q_i Q_{i+1}$ húrra, továbbra is C_n egy fedését kapjuk.

Vezessük be a következő jelöléseket: $T_i = \triangle P_i O_0 P_{i+1}$, $\tilde{T}_i = \triangle P_i O_i P_{i+1}$, $T_i^- = \triangle P_i O_i Q_i$, $T_i^+ = \triangle P_{i+1} O_i Q_{i+1}$, R_i pedig az $O_i Q_i$, és az $O_i Q_{i+1}$ szakaszok, valamint a C_n körlap határának $Q_i Q_{i+1}$ íve által határolt tartomány ($i = 1, \dots, n-1$). A továbbiakban ezen tartományok területeinek nagyságát fogjuk becsülni, és megmutatjuk, hogy az összterület kisebb, mint C_n területe, kivéve, ha a C_i körök elrendezése azonos azzal, ami sejtünk, vagyis C'_i körendszer elrendezésével.

Nyilván a T_i és \tilde{T}_i háromszögek egybevágóak, így

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i = 2\pi = \sum_{i=1}^{n-1} \delta'_i = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon'_i \quad (3.13)$$

amivel

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\beta_i + \gamma_i) = (n-1)2\pi - \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i + \delta_i) = (n-2)2\pi - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i, \quad (3.14)$$

és

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\beta'_i + \gamma'_i) = (n-1)2\pi - \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'_i + \delta'_i) = (n-2)2\pi - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i. \quad (3.15)$$

Az $f_{R,r}(\alpha)$ függvény konkávitása miatt alkalmazható a Jensen egyenlőtlenség:

$$2\pi = \sum_{i=1}^{n-1} Q_i O Q_{i+1} \sphericalangle \leq \sum_{i=1}^{n-1} f_{R,r}(\alpha_i) \leq (n-1) f_{R,r} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i}{n-1} \right).$$

Ezen egyenlőtlenség átrendezésével és annak felhasználásával, hogy az $f_{R,r}(\alpha)$ függvény geometriai jelentése miatt $f_{R,r}(\alpha'_i) = \frac{2\pi}{n-1}$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \geq (n-1) f_{R,r}^{-1} \left(\frac{2\pi}{n-1} \right) = (n-1) \alpha'_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i. \quad (3.16)$$

Bevezetjük a $t(x)$ területfüggvényt, és a $g(x)$ függvényt, mely az x szárszögű r szárú gömbi egyenlő szárú hátomszög területe. Ekkor, mint azt a 2.4. lemmát megelőzően láttuk, $g(x) = x + 2 \operatorname{arccot}(\cos r \tan \frac{x}{2}) - \pi$, amiről ugyanott be-láttuk, hogy a $[0; \pi]$ intervallumon konkáv. Ezek alapján a Jensen egyenlőtlenség többszöri felhasználásával:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (t(T_i) + t(\tilde{T}_i)) \leq \sum_{i=1}^{n-1} 2g(\varepsilon_i) \leq (n-1) 2g \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i}{n-1} \right), \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} (t(T_i^-) + t(T_i^+)) &\leq \sum_{i=1}^{n-1} (g(\beta_i) + g(\gamma_i)) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} 2g\left(\frac{\beta_i + \gamma_i}{2}\right) \leq 2(n-1)g\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} (\beta_i + \gamma_i)}{2(n-1)}\right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

valamint az $F_{R,r}(\alpha)$ függvény definíciójából:

$$\sum_{i=1}^{n-1} t(R_i) \leq \sum_{i=1}^{n-1} F_{R,r}(\alpha_i) \leq (n-1)F_{R,r}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i}{n-1}\right). \quad (3.19)$$

A továbbiakban becsljük a fenti területösszegeket.

A 3.13 összefüggésből a 3.17 tovább becsülhető:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (t(T_i) + t(\tilde{T}_i)) \leq (n-1)2g\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i}{n-1}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} 2g(\varepsilon'_i) = \sum_{i=1}^{n-1} (t(T'_i) + t(\tilde{T}'_i)). \quad (3.20)$$

A 3.18 és 3.19 becsléséhez legyen $\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{n-1}$. Ekkor 3.14 átrendezésével:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} (\beta_i + \gamma_i)}{n-1} = \frac{2(n-2)\pi}{n-1} - \alpha.$$

Ezek alapján a 3.18 és 3.19 egyenlőtlenségek összeadásával a

$$\sum_{i=1}^{n-1} (t(T_i^-) + t(T_i^+) + t(R_i)) \leq (n-1) \left(2g\left(\frac{(n-2)\pi}{n-1} - \frac{\alpha}{2}\right) + F_{R,r}(\alpha) \right) \quad (3.21)$$

összefüggéshez jutunk.

3.9. Lemma. A $[0; \pi]$ intervallumon a

$$\begin{aligned} g^*(\alpha) &= g\left(\frac{(n-2)\pi}{n-1} - \frac{\alpha}{2}\right) = \\ &= \left(\frac{(n-2)\pi}{n-1} - \frac{\alpha}{2}\right) + 2\operatorname{arccot}\left(\cos r \tan\left(\frac{(n-2)\pi}{2(n-1)} - \frac{\alpha}{4}\right)\right) - \pi \end{aligned}$$

kifejezés α -nak konkáv függvénye minden $r \leq \frac{\pi}{2}$, és $n \geq 3$ esetén.

BIZONYÍTÁS. Vezessük be az $A = \frac{2(n-2)\pi}{n-1}$ jelölést. Ekkor a vizsgált függvény:

$$\left(\frac{A-\alpha}{2}\right) + 2\operatorname{arccot}\left(\cos r \tan\left(\frac{A-\alpha}{4}\right)\right) - \pi.$$

A függvény második deriváltja közös nevezőre hozás után

$$\frac{\tan\left(\frac{A-\alpha}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(1+\tan^2\left(\frac{A-\alpha}{4}\right)\right)\cos r\left(1+\cos^2 r \tan^2\left(\frac{A-\alpha}{4}\right)\right)}{\left(1+\cos^2 r \tan^2\left(\frac{A-\alpha}{4}\right)\right)^2} - \frac{\left(1+\tan^2\left(\frac{A-\alpha}{4}\right)\right)^2 \cos^3 r \tan\left(\frac{A-\alpha}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)}{\left(1+\cos^2 r \tan^2\left(\frac{A-\alpha}{4}\right)\right)^2}.$$

Ebben a közös nevező pozitív, így elegendő a számlálók különbségének negatívitását látni. Ez kiemelés után a következő alakba írható:

$$-\frac{1}{4}\tan\left(\frac{A-\alpha}{4}\right)\left(1+\tan^2\left(\frac{A-\alpha}{4}\right)\right)\cos r * \left[\left(1+\tan^2\left(\frac{A-\alpha}{4}\right)\cos^2 r\right) - \left(1+\tan^2\left(\frac{A-\alpha}{4}\right)\right)\cos^2 r\right].$$

Zárójelfelbontás után látható a szorzat utolsó tényezőjéről, hogy azonos az $1 - \cos^2 r$ kifejezéssel, ami r minden értékére nemnegatív, ha pedig nulla, az az eset érdektelen. Hasonlóan $r \leq \frac{\pi}{2}$ miatt a $\cos r$ is pozitív. Elég tehát belátni, hogy

$$\tan\left(\frac{A-\alpha}{4}\right) \geq 0.$$

Az A és α lehetséges értékeire vonatkozó korlátok miatt a fenti egyenlőtlenség ekvivalens azzal, hogy

$$0 \leq \frac{A-\alpha}{4} \leq \frac{\pi}{2},$$

ami rendezés, és A értékének behelyettesítése után a

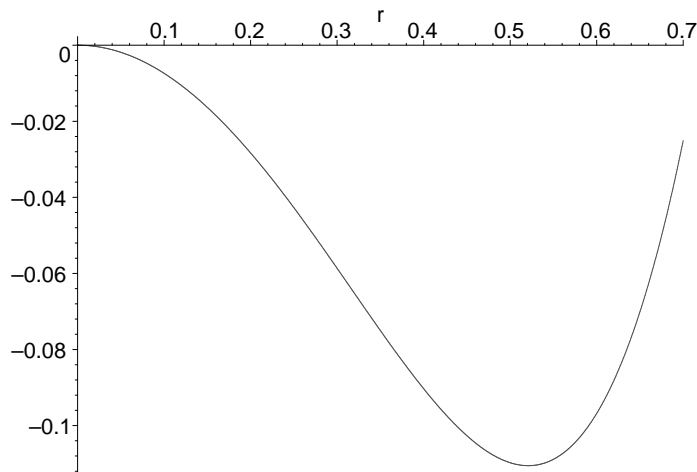
$$-\frac{1}{n-1}2\pi \leq \alpha \leq \frac{n-2}{n-1}2\pi$$

alakot ölti. Ez minden n -re tartalmazza a vizsgált $[0; \pi]$ intervallumot, és egyenlőség is csak a felső határon áll fenn az $n = 3$ esetben. ■

Mivel konkáv függvények összege is konkáv, a 3.21 egyenlőtlenség jobb oldalán álló

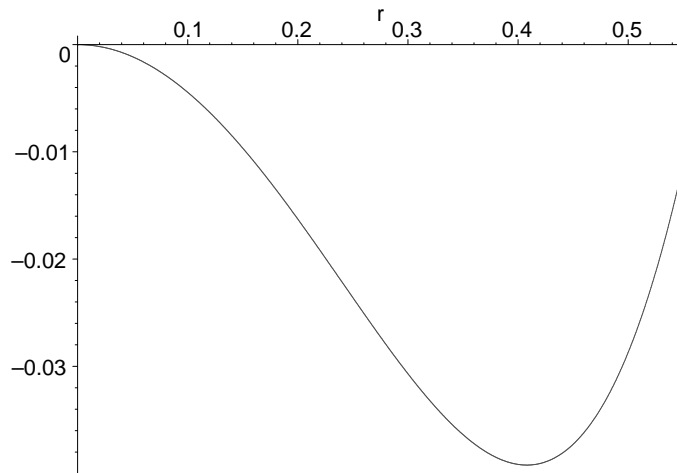
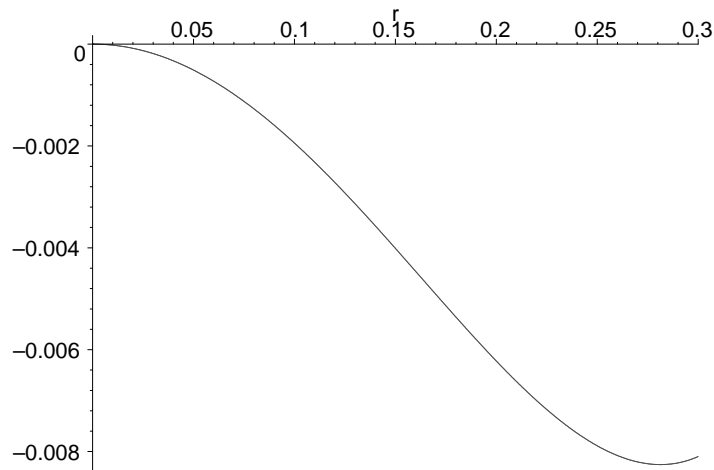
$$(n-1)(2g^*(\alpha) + F_{R,r}(\alpha))$$

függvény is konkáv $\alpha \in [0; \pi]$ esetén, rögzített $0 < r \leq \frac{\pi}{2}$ mellett. A továbbiakban fel fogjuk használni, hogy a fenti függvény csökken az $[\alpha'_i; \pi]$ intervallumon. Mivel konkáv, ez pontosan akkor teljesül, ha a függvény az intervallum bal szélén csökken, azaz deriváltja $\alpha'_i = \alpha'_i(r) = 2 \left(\frac{(n-2)\pi}{n-1} - 2\operatorname{arccot}(\tan \beta \cos r) \right)$ -ben negatív. A képletek összetettsége miatt nehézkes szép becslést adni a deriváltra, azonban numerikus számítások alapján bizonyosan állíthatjuk, hogy a függvény ténylegesen csökken a kívánt intervallumon. Az alábbi ábrák a függvény deriváltjának értékét mutatják $\alpha'_i(r)$ -ben rendre az $n = 7, 8, 9$ esetekben, figyelembe véve, hogy $n = 7$ esetén $r \leq r_k(7) < 0,625$, $n = 8$ esetén $r \leq r_k(8) < 0,4515$, $n = 9$ esetén pedig $r \leq r_k(9) < 1563$ sugarakra célunk igazolni a sejtést.



3.9. ábra. $n = 7$

Az $n = 7, 8$ esetben a $g^*(\alpha) = g \left(\frac{(n-2)\pi}{n-1} - \frac{\alpha}{2} \right)$ függvény is csökken a szóban forgó intervallumon, $n = 9$ -re azonban már nem. Ennek igazolásához legyen $G(y) = \arctan y + \operatorname{arccot}(y \cos r)$. Az $y = \tan \left(\frac{2(n-2)\pi - (n-1)\alpha}{4(n-1)} \right)$ helyettesítés

3.10. ábra. $n = 8$ 3.11. ábra. $n = 9$

mellett $g^*(\alpha)$ pontosan akkor csökken, ha $G(y)$ nő. $G'(y) = \frac{1}{1+y^2} - \frac{\cos r}{1+y^2 \cos^2 r} \geq 0$ pontosan akkor, ha $(1 - \cos r)(1 - y^2 \cos r) \geq 0$, ami $y^2 \leq \frac{1}{\cos r}$ esetén áll fenn.

Visszaírva α -ra azt kapjuk, hogy $g^*(\alpha)$ csökken, ha

$$\frac{2(n-2)\pi}{n-1} - 4 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\cos r}}\right) \leq \alpha \leq \frac{2(n-2)\pi}{n-1} + 4 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\cos r}}\right),$$

amiből csak az alsó korlát jelent tényleges feltételt. Ezek szerint $g^*(\alpha)$ akkor csökken az $[\alpha'_i; \pi]$ intervallumon, ha

$$\frac{2(n-2)\pi}{n-1} - 4 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\cos r}}\right) \leq \alpha'_i = \frac{2(n-2)\pi}{n-1} - 4 \operatorname{arccot}(\tan \beta \cos r),$$

azaz $\operatorname{arccot}(\tan \beta \cos r) \leq \operatorname{arccot}(\sqrt{\cos r})$, ahol $\beta = \pi - 2 \operatorname{arccot}(\cos r \tan \frac{\pi}{n-1})$ volt. Mivel $\tan \frac{\pi}{n-1} < 1$, $\tan \beta > 0$, ezért $\cot \beta \leq \sqrt{r}$ igazolandó. Elemi számolások után ez az

$$1 - \cos^2 r \tan^2 \frac{\pi}{n-1} \leq 2 \cos^{\frac{3}{2}} r \tan \frac{\pi}{n-1}$$

egyenlőtlenségre vezethető vissza. A $t = \tan \frac{\pi}{n-1}$ jelölés bevezetésével ez a

$$\sqrt{\cos r}^4 t^2 + 2\sqrt{\cos r}^3 t - 1 \geq 0$$

egyenlőtlenséggel ekvivalens. Vizsgáljuk a $p(c) = c^4 t^2 + 2c^3 t - 1$ polinomot, figyelembe véve, hogy $\cos r$ az $r \in [0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon szigorúan monoton. A $p(c)$ polinom $p'(c) = 4c^3 t^2 + 6c^2 t$ deriváltjának a $(0; 1)$ intervallumon nincsen gyöke, ezért ha $p(c)$ előjele azonos valami $[a; b]$ intervallum két végpontjában, akkor minden közbülső helyen is ugyan olyan előjelű. Ha $n = 7, 8$, akkor $p(\sqrt{\cos 0}) = p(1) > 0$, és $p(\sqrt{\cos r_k(n)}) > 0$ szintén fennáll, $n = 9$ -re $p(c)$ viszont negatív az egész $(0; 1]$ intervallumon. Ebből a $g^*(\alpha)$ -ra vonatkozó állítás következik.

A $2g^*(\alpha) + F_{R,r}(\alpha)$ csökkenését felhasználva, valamint $\alpha'_i \leq \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i}{n-1} = \alpha$ (a 3.16 átrendezéséből) miatt, a 3.21 egyenlőtlenségben tovább növelünk, ha α helyébe α'_i -t írjuk, ugyanakkor a 3.15 átrendezésével kapjuk, hogy

$$\frac{2(n-2)\pi}{n-1} - \alpha'_i = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (\beta'_i + \gamma'_i)}{n-1} = \beta'_i + \gamma'_i.$$

Mindezt a 3.21 egyenlőtlenséggel összevetve, a $\beta'_i = \gamma'_i$ felhasználásával:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} (t(T_i^-) + t(T_i^+) + t(R_i)) &\leq (n-1) \left(2g \left(\frac{\beta'_i + \gamma'_i}{2} \right) + F_{R,r}(\alpha') \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} 2g \left(\frac{\beta'_i + \gamma'_i}{2} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} F_{R,r}(\alpha'_i) = \sum_{i=1}^{n-1} (g(\beta'_i) + g(\gamma'_i)) + \sum_{i=1}^{n-1} F_{R,r}(\alpha'_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (t(T_i'^-) + t(T_i'^+) + t(R'_i)). \end{aligned}$$

Ezt összeadva a 3.20 egyenlőtlenséggel azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} t(C_n) &= \sum_{i=1}^{n-1} (t(T_i) + t(\tilde{T}_i) + t(T_i^-) + t(T_i^+) + t(R_i)) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} (t(T'_i) + t(\tilde{T}'_i) + t(T_i'^-) + t(T_i'^+) + t(R'_i)) = t(C_n). \end{aligned}$$

Egyenlőség pontosan akkor áll, ha a 3.17, 3.18 és 3.19 egyenlőtlenségek mindegyike egyenlőséggel teljesül, ami csak úgy lehet, ha a C_0, \dots, C_{n-1} és a C'_0, \dots, C'_{n-1} körendszerek elrendezése azonos.

Ezzel – eltekintve az $F_{R,r}$ függvény konkáv voltától – a sejtést igazoltuk. ■

4. fejezet

Matematika szakkör

Ebben a részben egy gimnáziumi matematika szakköri foglalkozás vázlata és tapasztalatai szerepelnek, melyben feldolgozzuk a téma euklideszi síkra vonatkozó bizonyos részeit, valamint kitekintünk a négyzetnek egységkörökkel való fedésére is. A téma megértéséhez szükséges ismeretek szerepelnek a középiskolai követelmények között. A szakköri foglalkozás megvalósult néhány középiskolás diák közreműködésével.

1) Óratervezet:

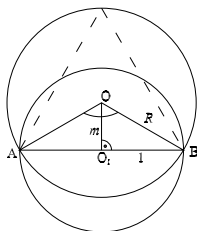
| Feladatok, megoldások | Megjegyzések |
|---|--|
| <p>1) Rövid bevezetés a témáról, motiváció. Rövid ismertető a játék lényegéről, mely az 1. fejezet elején olvasható részletesen.</p> <p>Megemlítendő, hogy „pongyolák” leszünk, és a továbbiakban <i>kör</i> alatt mindig <i>zárt körlapot</i>, <i>kör határán</i>, vagy <i>körvonalon</i>, pedig a megfelelő <i>zárt körlap határát</i> értjük.</p> | <p>Fontosnak tartom, hogy a diákok tudják, miért fejlődött ki a matematika egy-egy ága, vagy hogy mire jó.</p> <p>Ideális esetben ez őket is motiválhatja.</p> |

| | |
|---|--|
| <p><i>Jelölések:</i> Ha n körrel fedünk, akkor legyenek C_1, \dots, C_n a fedő egységkörök, K a lefedhető kör, sugarának legnagyobb lehetséges értéke R_n.</p> | |
| <p>2) Kör fedése egy körrel <i>Legfeljebb mekkora sugarú kör fedhető le egyetlen egységkörrel?</i> Nyilvánvaló. $R_1 = 1$</p> | <p>Várhatóan azonnal rávágják a helyes megoldást.</p> |
| <p>3) Kör fedése két körrel <i>Legfeljebb mekkora sugarú kör fedhető le két egységkörrel?</i> Ha mindkét fedő kör kevesebb mint a felét fedi K határából, akkor nem fedhetik az egészet, így legalább az egyik – mondjuk C_1 – fedi K határának két átellenes pontját. Ekkor azonban $R_2 \leq 1$. Egységkör pedig fedhető egységkörrel, így $R_2 = 1$.</p> | <p>Remélhetőleg még erre is rájönnek hamar, ha hirtelen nem is tudják igazolni sejtésüket. Ha nincs ötlet a bizonyításra, segítek: próbálják először K határát lefedni.</p> |
| <p>4) Kör fedése három körrel <i>Legfeljebb mekkora sugarú kör fedhető le három egységkörrel?</i> Az előzőhöz hasonló okoskodással kapjuk, hogy legalább az egyik fedő körnek – mondjuk C_1-nek – fednie kell K határának legalább $\frac{1}{3}$ részét. Ha K ezen ívhez tartozó húrja nem átmérője C_1-nek, úgy C_1-gyel K határának $\frac{1}{3}$-nál nagyobb hányada is fedhető volna. Ugyanígy C_2-vel és C_3-mal is, tehát a határ bizonyos részeit több rétegben is fedhetnénk, ami „fölsleges pazarlás”-nak tűnik. Valóban, ha K akkora,</p> | <p>Frontális munka</p> <p>Érzékelhetően nehezebb feladat az előző, bevezető jellegű feladatoknál. Együtt oldjuk meg. A táblai munkát végzem én, rajzolok, segítő kérdéseket teszek fel.</p> <p>Ha maguktól nem sejtik meg, hogy az „átmérős elrendezéssel” érdemes</p> |

hogy C_1 , C_2 és C_3 is pontosan $\frac{1}{3}$ részét fedik K határának, s ezen körök úgy helyezkednek el, hogy az általuk K határából kimetszett húrok az egységköröknek átmérői, akkor nem tudjuk másként elhelyezni a C_i köröket (mivel az átmérő egy kör leghosszabb húrja).

Az ennél az elrendezésnél adódó körnél nagyobb K kört tehát biztosan nem tudunk fedni. De valóban fedést kaptunk-e ezzel?

Szimmetria megfontolásokból elég azt kiszámítani, hogy K középpontja fedve van-e.



$O_1OB \sphericalangle = 60^\circ$, $m = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, tehát valóban fedés.

Innen $R = R_3$, $\sin 60^\circ = \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

próbálkozni, segítek azzal, hogy megfordítom a problémát: adott R sugarú kört próbáljunk meg lefedni három, minél kisebb körrel. Így jobban látszik, hogy ha átmérővel illesztjük a köröket a R sugarúhoz, úgy tudjuk a legkisebb körökkel való fedést elérni. (Ha az tényleg fedés.)

Eleve vizsgálhattuk volna a problémát ezzel a megfordított szemlélettel. Azért nem tettük ezt, mert úgy valószínűleg nem jött volna elő e „szemléletmegfordítás” célszerűsége, holott hasznos, ha a diákok megtanulnak ugyanarra a problémára több különbözőféleképp tekinteni.

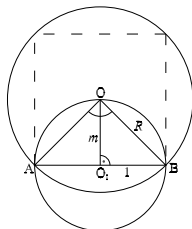
5) Kör fedése négy körrel

Legfeljebb mekkora sugarú kör fedhető le négy egységkörrel?

Az előző esethez hasonlóan az „átmérős elrendezés” működik itt is. A C_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) körök megfelelő átmérői ez esetben négyzetet alkotnak.

Egyéni munka

Ha látom, hogy nem tudnak elindulni, javaslom, hogy nézzenek vissza az $n=3$ esetre, nem lehet-e valami hasonlót csinálni. De



$\angle O_iOB = 45^\circ, m = \cot 45^\circ = 1 \leq R$, tehát valóban fedés $\Rightarrow R = R_4$. Pithagorasz tétel: $1^2 + 1^2 = R_4^2 \Rightarrow R_4 = \sqrt{2}$.

Az elrendezés érdekessége, hogy ebben az esetben a C_i körök (mint körlapok) közös metszete nem egy tartomány, mindössze egyetlen pont, a K kör középpontja.

6) Kör fedése öt/hat körrel

Legfeljebb mekkora sugarú kör fedhető le öt/hat egységkörrel?

Nagyon nehéz feladatok. Az $n = 5$ esetet megsejtette Nevill 1915-ben, majd Bezdek Károly bizonyította jóval később, 1983-ban.

Az $n = 6$ esetet is Bezdek K. bizonyította, 1979-ben.

Ezek érdekessége, hogy míg egész eddig mindegyik megoldás rendelkezett forgásszimmetriával, erre a két esetre ez nem igaz, bár tengelyesen szimmetrikus mindkét eset.

Közelítő értékek:

$$R_5 \approx 1,641,$$

$$R_6 \approx 1,799$$

bízom benne, hogy menni fog nekik egyedül is.

Esetleg megkérek valakit, hogy a táblánál mondja el a megoldást.

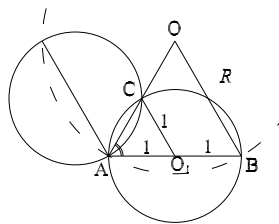
Azok számára, akik érdeklődnek a matematika iránt, érdekes lehet, hogy bár az iskolai matematikában tipikusan nem találkozunk magyar emberről elnevezett tétellel, a magyarok sem tétlenkednek. Ráadásul sokan azt gondolják, hogy amit a matematikában meg lehet oldani, azt már rég megoldották. Ezzel szembeállítható, hogy Bezdek bizonyításai néhány évtizeden belüliek.

7) Kör fedése hét körrel

Legfeljebb mekkora sugarú kör fedhető le hét egységkörrel?

Ha megpróbáljuk az előzőekkel megoldani a problémát, hamar rájövünk (egy $\frac{360^\circ}{7}$ szárszögű, 2 egység alapú egyenlő szárú háromszög magassága > 1), hogy a szokásos ötletünk nem működik, ugyanis a C_i körök nem érnek be a középpontig, tehát az eddigiekkel ellentétben nem kapunk fedést.

Próbálván ragaszkodni a forgásszimmetrikus elrendezésekhez, könnyen jön az ötlet, hogy rakjunk egy egységkört teljesen a fedendő belsejébe. Ekkor a határt hat körrel kell lefednünk. Próbálkozzunk a szokásos átmérős elrendezéssel. Az előzőekhez hasonló számítással egy $R = 2$ sugarú kört kapunk. Kérdés, hogy azt a területet, amit a hat, határt fedő kör kihagy, a hetedik - koncentrikusan elhelyezve a fedendő körrel - fed-e.



Az $OAB\triangle$ szabályos volta miatt $\angle CAO_i = 60^\circ$, és alapon fekvő szöge az ACO_i egyenlő szárú háromszögnek, vagyis az $ACO_i\triangle$ is

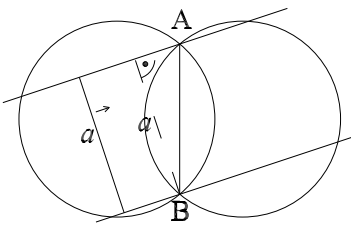
Egyéni/csoport munka

Buzdítom őket, hogy ha elakadnak, próbáljanak meg közösen ötletelni, hiszen már két fej is több mint egy.

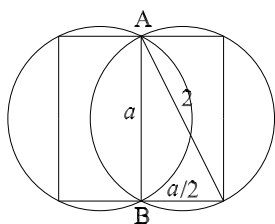
Ha nagyon nem tudnak mit kezdeni a feladattal, de azt már látják, hogy a szokásos átmérős módszerrel nem megy, javaslok nekik, hogy próbáljanak meg intuitíve lerajzolni egy fedést, hátha pont megtalálják a megfelelő elrendezést, akkor „már csak” bizonyítani kell.

Célszerű lehet azt is hangsúlyozni, hogy először ragaszkodjanak a forgásszimmetriához. Ebből talán rájön valaki, hogy érdemes egy kört belülré rakni, ha addig ez az ötlet nem merült volna fel.

| | |
|--|---|
| <p>szabályos $\Rightarrow AC = 1, AO = R = 2 \Rightarrow CO = 1 \Rightarrow$ valóban fedés.</p> <p>De honnan tudjuk, hogy nem lehet ennél nagyobb kört is fedni, vagyis hogy $R_7 = 2$? Mivel 2 egység sugarú kör fedése már megoldott, $R_7 \geq 2$ mondható biztosan. Mivel egységkörökkel fedünk, ezért amelyik C_i kör fed a fedendő kör középpontját, az nem tud fedni a határból is, hiszen legfeljebb belülről érinthet. Az $R = 2$ esetben a határt fedő körök átmérőikkel, azaz leghosszabb húrjaikkal illeszkednek a határra és mind a hat pontosan a határ 1/6-od részét fedik. Így $R > 2$ esetén a határból mindegyikük 1/6-odnál kisebb részt tudna fedni, ami a kör teljes fedése esetén lehetetlen.</p> | |
| <p>8) Kör fedése nyolc/kilenc/tíz körrel <i>Legfeljebb mekkora sugarú kör fedhető le nyolc/kilenc/tíz egységkörrel?</i></p> <p>Nyolc, kilenc és tíz kör esetén egy kör esik a fedendő kör belsejébe, a többi - bár nem átmérővel illeszkedően - forgásszimmetrikusan helyezkedik el.</p> <p>Ezek bizonyítása bonyolult, az $n = 8$ és $n = 9$ eseteket Fejes Tóth Gábor oldotta meg (1996), az $n = 10$ eset még későbbi.</p> <p>Közelítő értékek:</p> $R_8 \approx 2,247, \quad R_9 \approx 2,4142,$ $R_{10} \approx 2,532.$ | <p>Csak érdekesség, mint az $n = 5$ és $n = 6$ esetben.</p> |

| | |
|---|--|
| <p>9) Négyzet fedése egy körrel <i>Legfeljebb mekkora oldalú négyzet fedhető le egyetlen egységkörrel?</i> Nyilvánvaló. $a^2 + a^2 = 4 \Rightarrow a = \sqrt{2}$.</p> | <p>Feltehetőleg azonnal mondják a helyes megoldást.</p> |
| <p>9) Négyzet fedése két körrel <i>Legfeljebb mekkora oldalú négyzet fedhető le két egységkörrel?</i> Ha van jobb, mint az egy körrel fedés, akkor a két kör középpontjait kicsit távolítanunk kell egymástól. Rögzítsük így a köröket, próbáljuk meg először a négyzet két párhuzamos oldalegyenesét a lehető legjobban elhelyezni. Majd a végén megpróbáljuk megmondani, mennyire húzzuk szét a köröket. Ha nem akarjuk, hogy egy körrel is fedhető legyen a négyzet, akkor „bele kell lógni” mindkét körbe, tehát a párhuzamos oldalaknak szelniük kell a körök közös húrvát (melynek végpontjai: A, B). A két oldalegyenes távolsága $\leq AB$, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha A és B illeszkednek az oldalegyenesekre, és azok merőlegesek AB-re. (Ha nem merőlegesek, akkor egy a befogójú, AB átfogójú derékszögű háromszögünk van.)</p>  <p>Most már olyan négyzetet keresünk, melynek</p> | <p>Valószínűleg azonnal úgy próbálják majd a négyzetet fedni, hogy a körök középpontjait összekötő szakasz párhuzamos a négyzet megfelelő oldalaival. Ez esetben hagyom, míg így kigondoljuk, hogy mi lehet a legjobb, majd csak aztán vetem föl ezt a problémát, hogy ne szakítsam rosszkor félbe a gondolatmenetüket.</p> <p>A „ferde sáv” esetén direkt nem az A vagy a B pontból indulva rajzolom fel az a oldalhosszt (a párhuzamos egyenesek távolságát), remélvén, hogy meglátják így is, amit kell.</p> |

oldalhossza a mindenkori AB távolság. A párhuzamos egyeneseknek a körök uniójába eső szakasza (egyenesenként) ha hosszabb AB-nél, akkor a körök közelebb tolhatóak egymáshoz, amivel AB távolság nő, ha pedig rövidebb, akkor a négyzet „kilóg”, így az a legjobb, ha ez a két hossz egyenlő, vagyis a négyzet minden csúcsa illeszkedik a megfelelő körvonalra.



$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

9) Négyzet fedése négy körrel

Legfeljebb mekkora oldalú négyzet fedhető le négy egységkörrel?

Mivel – akárcsak az előbbieken – egy fedés lefedi a határt is, próbáljuk meg egy körrel fedni a lehető leghosszabb részt egy négyzet határából. Ha a négyzet oldala a kör egy átlója, akkor egy 2 hosszú részt fedtünk, így egy 2 egység oldalú négyzet fedését állíthatjuk elő. Van -e jobb? Némi rajzolgatás után sejthető, hogy van.

Az imént egyik kör sem tartalmazta a négyzet egyetlen csúcsát sem. Ha a négyzet egyik csúcsát az egyik kör középpontjába helyezzük, úgy a körrel ismét egy két egység hosszú részt

Rokon feladat az előzőekhez abból a szempontból, hogy itt is azt érdemes vizsgálni, hogy egy körrel hogyan fedhető le a lehető legnagyobb rész a határból, ahogyan ezt – bár csak közvetve – tettük korábban is. Itt is forgásszimmetrikus elrendezés az optimális.

fedtünk. De ez itt javítható. A négyzet csúcsa és a körrel való két metszéspontja meghatároz egy derékszögű háromszöget. Mivel az átfogó nem átmérője a körnek, a háromszög „beljebb tolható” a körbe úgy, hogy az átfogójának legalább az egyik végpontja nincs a kör határán. Ekkor az ehhez a végponthoz tartozó befogót meg lehet hosszabbítani a kör határáig, így a kör 2 egységnél hosszabb darabot fed le a négyzet határából. Ez megtehető egészen addig, míg a derékszögű csúcs nem ütközik a kör határába, s ezzel egyidejűleg az átfogó átmérő lesz. (Ld. Thalész tétel megfordítása). Most már egy 2 egységnyi átfogójú derékszögű háromszög befogói hosszának összegét kell maximalizálnunk.

Mit sejtünk? Hogy az egyenlő szárú derékszögű háromszög a megoldás. (Ebből már látható a négyzet fedésének legjobb konstrukciója is.)

Ha a derékszögű háromszög rövidebbik befogója x , akkor a maximalizálandó függvény az $x + \sqrt{4 - x^2}$.

Sejtjük, hogy az egyenlő szárú eset adja a maximumot, tehát a maximum értéke $2\sqrt{2}$. Be kell látnunk, hogy $x + \sqrt{4 - x^2} \leq 2\sqrt{2}$, azaz $\sqrt{4 - x^2} \leq 2\sqrt{2} - x$. Mivel x a rövidebbik befogó, mindkét oldal nemnegatív, tehát ekvivalens átalakítás, ha négyzetre emelünk. Ezt elvégezve némi rendezés és egy nevezetes azonosság felismerése után $(x - \sqrt{2})^2 \geq 0$ adódik,

A függvény maximalizálására kézenfekvő módszer a deriválás. Mégsem ezt választottuk, mert majd csak 12. évfolyamon tanulnak deriválni, most még nincs birtokukban ez az eszköz.

Ha nem jönnek rá maguktól, én kérdezek rá: hogy tudtuk volna ezt a feladatot minden számolás nélkül megoldani, ha megsejtjük a helyes elrendezést? Gondoljunk vissza korábbi eredményeinkre. Ez épp a „kör fedése négy körrel” című 4. számú feladatunkból következik. Ha az optimális elrendezéshez tartozó négyzetbe írt kört tekintjük, az éppen az említett feladat megoldása. Tehát ha tudnánk nagyobb négyzetet fedni, mint a megsejtett, akkor annak beírható körét is tudnánk fedni 4 db

| | |
|--|---|
| <p>ami minden x értékre teljesül. Ezzel beláttuk, hogy úgy tudunk egy négyzet határából legtöbbet fedni egy egységkörrel, ha a határaik metszéspontjai egyenlőszárú derékszögű háromszöget határoznak meg. Ebből már adódik a legnagyobb fedhető négyzet oldalának hossza, ami az optimális x érték kétszerese, vagyis $a = 2\sqrt{2}$.</p> | <p>egységkörrel, ami ellentmond a 4. feladatban bizonyítottaknak.</p> |
|--|---|

2) A foglalkozás leírása

A fenti óratervezet alapján megtartott foglalkozáson részt vett a budapesti József Attila gimnázium hat tizenegyedikes, matematika tagozatos diákja. A diákok keresztnevei és idei félévi jegyeik:

Adrienn *jó*, Eszter *jeles*, Kriszti *jeles*, Csaba *közepes*, István *jeles* és Koppány *közepes*.

1) Rövid bevezetés a témáról, motiváció.

A diákok érdeklődésének felkeltésére, valamint azért, hogy jobban részeseinek érezzék magukat a témának, a kiindulási játékot a kezükbe adtam: rajzlapból kivágott 2 db nagyobb, és 10 db kisebb körlap, tehát két teljes garnitúra. A diákok ülésrend szerint spontán két, háromfős csoportban helyezkedtek el, és együtt próbálták meg a problémát megoldani.

Az egyik csoportnak - Eszter, Kriszti és Koppány - először majdnem sikerült a fedés, utána korrigáltak az elrendezésen, majd kérésemre megpróbálták újra, ekkor már sikerrel jártak.

A másik csoport - Adrienn, Csaba és István - először szintén nem járt sikerrel, de ők tényleg újramegérték. Másodszorra István instrukciókkal segítette Adrienn a kirakásban, Csaba néma szemlélő maradt. Beszélgetés részlet:

István: „Azt rakd kicsit kijebb!”

Adrienn: „De akkor nem ér be középre.”

István: „Nem baj, azt majd később.”

Adrienn hozzám intézett kérdése: „Meg lehet csinálni?” Kaptam az alkalmon, és igenlő válaszom után elmondtam, hogy pont ilyesmiket fogunk vizsgálni ma.

2) Kör fedése egy körrel.

Várakozásomnak megfelelően nem volt probléma.

3) Kör fedése két körrel.

A diákok automatikusan a mezükbe vették a rajzlap-körlapokat, azzal próbálták meg segíteni szemléletüket. Valóban hamar rájött mindenki, hogy az előzőnél nem lehet jobban. István indoklása szerint ha jobban széthúzzuk a két kört és úgy van középen a fedendő kör, akkor az átmérő maximum a két metszéspont távolsága lehet, ami kisebb 2-nél, ha meg nem középen van a fedendő, akkor átmehetünk a két fedő kör valamelyikébe, de akkor sem lehet a sugár nagyobb 1-nél, mert „kilógna”.

Más indoklás nem született kérdésemre sem. Próbáltam rávezetni őket a tervezetben vázoltakra, mivel a későbbiekben is azt a gondolatot szeretnénk használni. Hiába segítettem, nem tudtak azzal a gondolattal mit kezdeni, hogy a határt is le kell fednünk, de erre is csak a két kör áll rendelkezésünkre. Mikor elkezdtem mondani a gondolatmenet lényegét, azonnal láttam, hogy érti mindenki, szinte végig sem kellett volna mondanom, bár nem voltam meggyőződve róla, hogy hasonló esetben maguktól is eszükbe jutna.

4) Kör fedése három körrel.

Az előbbiekhez hasonlóan most is az elején használt körlapokat vették elő. Mind a két csoport arra a következtetésre jutott, hogy egy forgásszimmetrikus elrendezés lesz a nyerő, valamint hogy túl közel sem érdemes tolni a köröket egymáshoz, mert akkor lehet, hogy növelni lehet a fedhető kör sugarát, ha kicsit távolítjuk őket, de nagyon széthúzni sem jó, mert akkor a körök metszéspontjai „nagyon benyúlnak”, és csak elég kicsi kört lehet fedni, a nagyobb kilógna.

– Ezt most ki kéne számolni?!? - tette fel a kérdést Eszter bizonytalanul. Első ránézésre nem nagyon hitte, hogy ezzel meg tud birkózni, ami valószínűleg abból adódott, hogy még nem tudták pontosan megmondani, meddig is érdemes szét-húzni a három kört.

– Hogyan bizonyítottuk az előbb, hogy két körrel is csak egységkört tudunk fedni?

– Ja, akkor most is kell legalább a harmadát fedni. - hangzott a válasz kérdésemre K.K.-tól. Mivel továbbra is tétováztak, láttam, hogy még mindig nem tudják, merre tovább, a tervezet szerint megfordítottam a problémát, rajzoltam egy kört a táblára, majd megvastagítottam rajta a terület harmadrészét.

– Legyen adva a fedendő kör. Hogyan helyezzek el egy minél kisebb kört úgy, hogy a megvastagított részt lefedje?

– Legyen az az átmérő! - vágta rá Kriszti mosolyogva.

– És a másik kettővel mi legyen?

– Hát azt ugyan úgy - tette hozzá István azonnal.

Megbeszéltük, hogy nem tudunk nagyobbat fedni, ha ez egyáltalán fedés. Innen Adrienn mondta, hogy azt elég megnézni, hogy a középpont fedve van-e, majd István javaslatára a 2 egység oldalú szabályos háromszög magasságának $\frac{1}{3}$ -át számítottuk ki – lévén a szabályos háromszög megfelelő nevezetes pontjai egybeesnek – és állapítottuk meg róla, hogy valóban kisebb 1-nél. Innen a fedendő kör sugarát sem Pithagoras tétellel, hanem az előző érték kétszereseként számítottuk.

5) Kör fedése négy körrel.

Ismét a legelején használt körlapok kerültek előtérbe, és azonnal az átmérős elrendezéssel próbálkozott mindkét csoport. Az Adrienn, Csaba és István féle csoport félbehajtogatta a kisebb körlapokat, hogy könnyebben tudják az átmérők végpontjait egymáshoz illeszteni. Az előzőek alapján azonnal meg tudták mondani, hogy ennél jobbat biztosan nem tudunk csinálni, és hogy nyilvánvalóan valóban fedést kaptunk. A sugár kiszámítása természetesen nem okozott gondot.

6) Kör fedése öt/hat körrel.

Mikor mondtam nekik, hogy bizonyítható, de nagyon nehéz, hogy az R_5 sugarú kör fedésére egyetlen jó elrendezés létezik, és ez az, amit ők is megtaláltak végül – akkora köröket vágtam, hogy a maximálisan fedhetőnél csak egy egész kicsivel legyen kisebb a fedendő kör sugara – többen elmosolyodtak.

Adrienn mondta, hogy érti, hogy átmérőkkel rakni körbe mind az öt kört nem jó, mert valószínűleg nem érnének be középre, de miért nem jó az, ha kiindulunk mégis ebből, és addig toljuk be egyszerre mind az öt kört, míg be nem érünk a közepére is, és akkor fedést kapunk. István szinte a szavamba vágva segített elmondani neki, hogy jó az is, de lehet nagyobb kört is fedni annál, ami úgy jönne ki. Hozzátettem, hogy a rajzlapból kivágott kört sem lehet úgy fedni, mert akkor a fedendő kör kilóg a fedő körök metszésponjainál, más elrendezéssel mégis megoldható, hisz ők is megcsinálták.

7) Kör fedése hét körrel.

Az Eszter, Kriszti és Koppány féle csoport tagjai – tanulva az eddigiekből – elkezdtek rajzolgatni a füzetükbe az átmérős elhelyezést, bár gyanússá vált nekik, hogy nem lesz ez így jó, mert nem lesz fedés. Mindeközben a másik csoport ismételten a körlapokhoz nyúlt – kettőt kértek kölcsön a másik csoporttól, mivel nekik csak öt darab volt – és tulajdonképpen azonnal eljutottak a helyes megoldásig, bár indokolni nem tudták azonnal. Közben az előzőek kiszámolták, hogy az ötletükkel valóban nem kapnak fedést. Ezt követően probléma nélkül kiszámoltuk közösen, hogy a helyes elrendezéssel mekkora kört fedünk, ha valóban fedés. Adrienn jegyezte meg, hogy mivel a hat külső kör átmérővel illeszkedik, tényleg nem lehet nagyobbat fedni. Sajnálatomra még ekkor sem vetette fel senki magától, hogy esetleg meg kéne nézni, tényleg fedést kaptunk-e.

Miután erre felhívtam a figyelmet, István azonnal mondta, hogy elég volna két szomszédos, a középsőtől különböző fedő kör metszéspontjairól megállapítani, hogy legalább 1 egység távolságra vannak egymástól. Önállóan nem tudtak érdemben nekikezdeni. (A továbbiakban a tervezetben ennél a feladatnál látható ábra jelöléseit használom.) Kérdésemre, hogy mit tudunk az AOB háromszögről, többen válaszolták egyszerre, hogy egyenlő szárú, az „És még?” kérdésre érke-

zett a „szabályos” válasz is. Ekkor behúztam az O_iC sugarat, majd kérdőn néztem rájuk: „Ezt most miért csináltam?” Pár másodpercig néma csend támadt, melyet István tört meg azzal, hogy az ACO_i háromszög is szabályos. Kérésemre meg is indokolta. A „most szóljon, aki nem érti” felszólításra senki nem mozdult, pedig ha ilyen van, szoktak.

Ez után még megbeszéltük, hogy most már látjuk, hogy tényleg kell egy körnek a fedendőn belül lennie, mert amelyik kör a középpontot fedi, az nem érhet ki a szélére, lévén a fedendő kör sugara legalább 2 egység.

8) Kör fedése nyolc-tizenkét körrel.

Amikor elmondtam nekik, hogy milyen eredmények vannak, és hogy ezek elég nehezek, néhányuk arcán valami szörnyülködésfélét véltem felfedezni. Azt hiszem, sokuk számára nehéznek tűnt az $n = 7$ eset is, bár végül mindenki megértett minden lépést.

9) Négyzet fedése egy körrel.

Valóban nem volt probléma, az oldalhosszt is azonnal mondták.

10) Négyzet fedése két körrel.

István azonnal a kezébe vett az eddig is használt körlapok közül kettőt, és próbálta elképzelni a lehetséges megoldást. Közben valaki mástól a „Lehet nagyobbat fedni? Kört nem lehetett.” megjegyzés érkezett. Erre az feleltem: pont erre keressük a választ. Most már nem ezt tenném, inkább azt mondanám: jó kérdés, hogy van-e köze a kettőnek egymáshoz, és ha igen, mi. Ezen aztán el is gondolkodhatnánk együtt. Jó ugyanis látni azt, hogy amekkora oldalú négyzetet tudunk fedni, akkora átmérőjű kört is, erre megfelelő a négyzet beírható köre. Bár ez a jelen probléma megoldását közvetlenül nem segíti, hisz ez az észrevétel visszafele nem igaz, de a geometriai szemléletüket fejleszti.

Csaba azt sérelmezte, hogy ha 2 egység hosszú négyzetet próbál rajzolni két széthúzott körre úgy, hogy két szemközti oldal két átmérőre illeszkedik, akkor ki-lóg a négyzet több helyen is, nem kapunk fedést. Valószínűleg az eddigi logikát

próbálta meg folytatni, és a négyzet oldalára a kör átmérőjét illesztette, de ez esetben nem járt sikerrel.

A többiek arra hamar rájöttek, hogy ha túlzottan széthúzzuk a két kört, akkor a metszéspontok távolsága túl kicsi lesz, így túl nagy négyzet nem fér be. Adrienn javasolta, hogy akkor toljuk minél összebb őket. István tette hozzá, hogy ha meg túl közel vannak a körök, akkor kilóghat a négyzet. (Feltéve, ha akkora négyzetet veszek, melynek oldalhossza a körök metszéspontjainak távolsága.) Csak nagyon nehezen jöttünk rá közösen, hogy mi tűnik a legjobb megoldásnak. Ekkor feltettem a kérdést, hogy miért így kerestük a megfelelő négyzetet, nem lehet, hogy „ferdén” jobb megoldáshoz jutnánk? Néhány arcra az „úúúú, tényleg” kifejezés ült ki, de érdemben senki nem tudott jó ötlettel szolgálni, annál tovább nem jutottunk, hogy ilyen esetben is ki lehet tolni a négyzet oldalait a körök metszéspontjaiig. A két ferde vonal távolságát és a körök metszéspontjainak távolságát szemléltettem a táblai ábrán. „Hogy viszonyul ez a kettő egymáshoz?” - tettem fel a kérdést. István válszolta meg a kérdést indokolva is észrevételét. De szemlátomást nem értették miért kérdeztem ezt, hiába érdeklődtem. Aztán mikor elkezdtem mondani és mutogatni, hogy kezdjül el forgatni a sávot, világossá vált mindenki számára.

Ekkor összefoglaltam, hogy jelen pillanatban hol is tartunk a probléma megoldásában. Koppány kérdezte, hogy ez miért jobb, mintha csak az egy körbe írt négyzetet vesszük. Valószínűleg ismét eszébe jutott, hogy a kör fedése két körrel nem adott jobb megoldást, mint az egy körrel való fedés. Kissé meglepődtem a kérdésemre, de javasoltam, hogy számoljuk ki, és meglátjuk, hogy jobbat kaptunk-e. Ezt követően a négyzet oldalhosszának meghatározása már rutinszerűen ment mindenkinek. Rámutattam, hogy közvetlenül is látható, hogy nagyobb négyzetet fedünk így, mint egy körrel, mivel abban az esetben a körbe írt négyzet oldalainak aránya 1:1, míg korábban megállapítottuk, hogy itt a négyzet fele esik az egyik körbe, így egy egységkörbe írt 2:1 oldalarányú téglalappal van dolgunk, amiről látszik, hogy keskenyebb és *magasabb*, mint az ugyanazon körbe írt négyzet.

11) Négyzet fedése négy körrel.

Az Adrienn, Csaba és István összetételű csoport azonnal kézbe vette az átmérő-nél meghajtott körlapjaikat, ezeket átmérőiknél egymáshoz illesztették, majd nagy bizonyossággal állították, hogy a két egység oldalú négyzet a helyes megoldás, mutatva a padon az elrendezésüket. Éppen kezdtem kérdezni a másik csoporttól, hogy ők mit szólnak ehhez, és a táblára rajzoltam a helyesnek vélt megoldást, mikor Adrienn és István szinte egymás szavába vágva hozzátették, hogy ez az elrendezés két egységnél hosszabb oldalú négyzetet is fed valójában, csak másként kell nézni. Azt is azonnal mondták, hogy nincs gond, ez tényleg fedés.

Honnan tudjuk, hogy nincs jobb? - tettem, fel a kérdést, mire Adrienn nagyon értetlenül nézett rám. Az előzőek alapján nem gondolom, hogy eddig sem értette az eddigi erőfeszítéseinket annak bizonyítására, hogy megtaláltuk az optimális elrendezést. Mindinkább annak tudom be, hogy pénteken volt a foglalkozás, és már korábban is tapasztaltam, hogy ő péntekre általában kissé elfárad, többször veszti el a fonalat egy-egy pillanatra mint máskor, aztán hamar rájön, és nevet is magán. Ezt támasztja alá az is, hogy elkezdtem mondani neki, hogy az előbb is azt hitte, hogy a két egység oldalú a legnagyobb négyzet, amit fedhetünk, aztán mégsem, szemmel láthatóan az első fél mondatom után rájött, hogy mi a probléma.

Eszter és Kriszti azzal az indoklással álltak elő, hogy a négyzet mindkét átlója úgy van fedve, hogy két, egymást kívülről érintő kör átmérői illeszkednek az átlóra – tehát az átlók hossza négy egység – így ha hosszabb átlót akarunk, a szóban forgó két kört távolítanunk kéne egymástól. Ekkor azonban az átló egy része fedetlenül maradna, aminek fedését csak egy harmadik körnek a négyzet középpontja felé való közelítésével tudnánk megoldani, ami a másik átló rövidülését vonná maga után, ami négyzet esetében lehetetlen. Őszintén szólva egy pillanatig nem egészen értettem a gondolatmenetet, többek között vélhetőleg azért is, mert már nagyon készültem a tervezetben szereplő bizonyításra, számítottam rá, hogy az nem lesz könnyű. Az lett a vége, hogy már mindenki értette, hogy miről van szó, és a többiek is csatlakoztak a magyarázókhöz, mire végre megértettem én is. Meglepett, ugyanakkor nagyon örültem, hogy egy gyökeresen más indoklást találtak az optimalitásra.

Ennek ellenére nekirugaszkodtunk a tervezetben vázolt gondolatmenetnek is, két okból. Egyrészt mert meg szerettem volna nekik mutatni, hogy mit lehet kezdeni egy szélsőérték problémával – megsejteni a szélsőértéket, majd egy egyenlőtlenség belátásával bizonyítani – ezzel egy általános módszert adva a kezükbe. Másrészt rá akartam mutatni, hogy egy függvény szélsőérték helyét (és értékét) meghatározni nem mindig könnyű dolog, de a geometriai szemlélet sokszor segít, de ha nem, akkor meg lesz erre más módszerünk, a deriválás. Majd ha megtanulunk deriválni, emlékezzenek erre a feladatra, elő fogjuk venni.

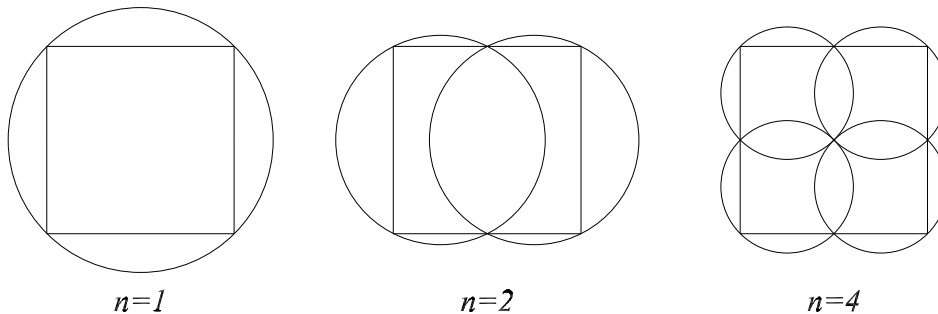
Ennek a bizonyításnak a gondolatmenetét elkezdtem vázolni, de azon a ponton elakadtunk, ahol már egy 2 egység átfogójú derékszögű háromszög befogói hosszának összegét kell maximalizálnunk. Miután javasoltam, hogy nevezzük a rövidebb befogót x -nek, többen is kezdték diktálni a $x + \sqrt{4 - x^2}$ kifejezést. István említette, hogy nézzük ezt, mint egy függvényt, és akkor annak kellene a maximuma, de hogy ezt hogyan határozzuk meg, arra nem volt ötlete. Eszter rámutatott, hogy azért is valószínű, hogy tényleg az a jó amit szeretnénk, mert a derékszögű csúcsot mozgatva a köríven, a helyzet szimmetrikus az egyenlő szárú esetre. Hiába tettem fel a „nem tudnánk egy egyenlőtlenséget felírni, abból kiindulva, hogy sejtjük a maximumot?” kérdést, nem jutottunk előrébb. Ezért némi magyarázat közepette magam írtam fel, majd megkérdeztem, hogy értik-e. Mindenki bólogatott. Eszter javasolta, hogy ábrázoljuk a függvényt. Kérdésekre, hogy ő tudná-e ábrázolni, csak mosolygott. Ez nála nemleges választ jelent. Mondtam, hogy próbáljunk esetleg algebrailag hozzálátni, mire szintén Eszter mondta, hogy vigyük át az x -et a jobb oldalra, és akkor két külön függvényként fogjuk fel, amit egyenként ábrázolhatunk. (Ezek szerint az eredetileg az egyenlőtlenség jobb oldalán álló konstanst önmagában nem tekintette függvénynek, de erre nem akartam kitérni.) Ez rámutatott arra is, hogy nem a gyökös kifejezés ábrázolásában látta a nehézséget eredetileg, hanem valószínűleg abban, hogy két függvény (az x és a $\sqrt{4 - x^2}$) összegéről van szó. Tovább faggatván kiderült, hogy a $\sqrt{4 - x^2}$ -et így sem tudja ábrázolni, majd gyorsan hozzátettem, hogy ez így hirtelen nekem sem menne, keressünk más módszert. Ekkor már jött

a négyzetreemelés ötlete, ahonnan könnyedén igazoltuk az egyenlőtlenséget.

Amikor megkérdeztem, hogy hogyan tudtuk volna minden számolás nélkül, pusztán az előzőek felhasználásával megindokolni, hogy miért a megsejtett a legnagyobb fedhető négyzet, Adrienn azonnal azt kérdezte, hogy miért nem jó az ő indoklásuk, abban nincs számolás. Még mikor segítettem, hogy próbálják meg használni a korábban bizonyítottakat, konkrétan a kör fedésének esetét, így sem érkezett ötlet. Ekkor a négyzet fedésének táblán lévő ábrájából mindent letöröltem a négyzet belsejéből – hogy ne legyenek „zavaró” vonalak – és így tettem fel a kérdést: mi köze a kör és a négyzet négy körrel való fedésének egymáshoz. Ekkor Kriszti említette a beírható kört, majd arra a kérdésemre is válaszolt, hogy ezek alapján miért biztos, hogy nem tudunk ennél nagyobb négyzetet fedni.

Az óra végén röviden összefoglaltam, hogy mit végeztünk a foglalkozáson, valamint mindenkinek kiosztottam nyomtatott formában a 1.1 és a 4.1 ábrákat.

A korábban említett hibáktól eltekintve úgy gondolom, eredményes volt a foglalkozás, a diákok egyéniségüknek megfelelően vették ki részüket az óra menetéből, mindenki végig figyelt, és képességeihez mérten dolgozott.



4.1. ábra. Négyzet legritkább fedése $n = 1, 2, 4$ esetén.

Irodalomjegyzék

- [1] E.H. Neville, *On the solutions of numerical functional equations, illustrated by an account of a popular puzzle and its solution*, Proc. London Math. Soc. (2) **14** (1915) 308-326.
- [2] Bezdek K., *Über einige Kreisüberdeckungen*, Beiträge Algebra Geom. **14** (1983) 7-13.
- [3] Bezdek K., *Körök optimális fedései*, Ph.D. tézis, Budapest (1979)
- [4] Nagy D., *fedések és alkalmazásaik*, M.Sc. tézis, Budapest (1975)
- [5] S. Krotoszyński, *Covering a disk with smaller disks*, Studia Sci. Math. Hungar. **28** (1993) 277-283.
- [6] G. Fejes Tóth, *Covering a circle by eight, nine, or ten congruent circles*, Combinatorial and Computational Geometry, Jacob E. Goodman, János Pach and Emo Welzl eds., Mathematical Sciences Research Institute Publications, Cambridge University Press (2005) 359-374.
- [7] H. Melissen, *Packing and Covering with Circles*, Ph.D. tézis (1997) Utrecht University
- [8] C. T. Zahn, *Black box maximization of circular coverage*, J. Res. Nat. Bur. Standards **66B** (1962) 181-216.

- [9] Fejes Tóth L., *Egy gömbfelület befedése egybevágó gömbsüvegekkel*, Mat. Fiz. Lapok **50** (1943) 40-46.
- [10] K. Schütte, *Überdeckungen der Kugel mit höchstens acht Kreisen*, Math. Ann. **129** (1955) 181-186.