# Mennyi a kicsi ha a tér nagy?

# Nullahalmazok Banach-terekben

Szakdolgozat

írta

Csörnyei Marianna

Matematikus hallgató

ELTE

Témavezető: Petruska György

1999.

## 1. Bevezetés

Banach-tereken értelmezett mértéken mindig a tér Borel-halmazain definiált $\sigma$-véges mértéket értünk.

Egy Banach-téren nincs egyetlen kitüntetett mérték, mint például a véges dimenziós euklídeszi terekben, sokan sok különböző mértéket vezettek be és vizsgáltak. Fontos, és sokszor nagyon nehéz probléma ezen mértékek egymáshoz való viszonyának megértése.

Gyakran nem maguk a mértékek, hanem a mértékek szerinti nullahalmazok kerülnek előtérbe. A nullahalmazok fogalma általában egyszerűbb: már a valós számokon értelmezett Lebesgue-mérték esetén is, a 0-mértékű halmazok definíciója (lefedhetőek tetszőlegesen kis összhosszúságú intervallum-rendszerrel) sokkal könnyebb a Lebesgue-mértékénél, amelyből származnak.

Hasonló a helyzet a végtelen dimenziós Banach-terekben is: itt is mértékek nélkül definiálhatjuk, mit értünk 0-mértékű halmazokon. Azonban itt a probléma a véges dimenziós esetnél sokkal mélyebb: nemcsak hogy nem tudunk, de gyakran nem is lehet olyan mértéket definiálni, amely szerint nullahalmazaink pontosan a 0-mértékűek.

A legalapvetőbb kívánság egy nullahalmaz-fogalommal szemben az, hogy $\sigma$-ideál és eltolásinvariáns legyen. Azonban a végtelen dimenziós terek nagyon "nagyok", és ez általában azt eredményezi, hogy van kontinuum sok páronként diszjunkt halmaz, melyek nem 0-mértékűek, így hozzájuk mérték nem létezhet!

Ezt a nehézséget kétféleképpen lehet áthidalni:

(i) a véges dimenziós terek nullahalmazait nem úgy karakterizáljuk, hogy Lebesgue-mérték szerinti 0-mértékűek, hanem valamely más tulajdonságuk alapján, majd ezt általánosítjuk Banach-terekre – ez történik a Haar-nulla és az Aronszajn-nulla halmazok esetében;

(ii) nem egyetlen mértéket, hanem egy nagyobb mértékosztályt adunk meg, és nullahalmaznak hívjuk azokat a halmazokat, amelyek valamennyi mérték szerint 0-mértékűek – ld. Gauss-mértékek illetve kocka-mértékek.

Sokáig fontos megoldatlan probléma volt a legfontosabb nullahalmaz-fogalmak (Haar-, Gauss-, kocka-, illetve Aronszajn-nulla) egymáshoz való viszonya. 1978-ban R.R. Phelps bebizonyította, hogy minden Haar-nulla halmaz Gauss-nulla és nem minden Gauss-nulla halmaz Haar-nulla, valamint hogy az Aronszajn-nulla halmazok Gauss-nullák. Az, hogy minden Aronszajn-nulla halmaz kocka-nulla, triviális.

A dolgozat fő eredménye a 4.2. és a 6.1. tétel (minden Gauss-nulla halmaz kocka-nulla illetve minden kocka-nulla halmaz Aronszajn-nulla), vagyis annak bizonyítása, hogy a Gauss-, kocka- és Aronszajn-nulla halmazok valójában ugyanazok!

$$\begin{array}{ccc} H & \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} & G \\ & & \Uparrow \\ K & \Leftarrow & A \end{array} \qquad \text{helyett} \qquad \begin{array}{ccc} H & \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} & G \\ \not\Uparrow\Downarrow & & \Updownarrow \\ K & \Leftrightarrow & A \end{array}$$

A 4.2. és 6.1. tételek bizonyításának részletes leírása megtalálható a hamarosan megjelenő [7] cikkben és [9], [15] könyvekben is – sőt, a dolgozatban említett valamennyi tétel és még rengeteg érdekes eredmény megtalálható lesz a [2] könyv 8. fejezetében és D. függelékében, amennyiben a szerzők művüket valaha is befejezettnek tekintik és megjelentetik.

A 2. fejezetben összefoglaljuk a Banach-terekben értelmezett mértékekkel kapcsolatos legalapvetőbb tudnivalókat, a 3., 4. és 5. fejezetben bemutatjuk a Haar-, Gauss- és kocka-, valamint az Aronszajn-nulla halmazok illetve mértékek legfontosabb tulajdonságait. A 6. fejezet tartalmazza annak bizonyítását, hogy minden kocka-nulla halmaz Aronszajn-nulla, végül a 7. fejezetben megpróbáljuk néhány példával illusztrálni, a nullahalmazok mennyire másképp viselkednek Banach-térben, mint ahogy megszoktuk a véges dimenziós esetben.

## 2. Mértékekről általában

Ebben a fejezetben "mérték" alatt mindig a tér Borel-halmazain értelmezett **valószínűségi mértéket** fogunk érteni.

Egy $\mu$ mérték *reguláris*, ha minden $B$ Borel-halmazra

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) :\ K \subset B \,\text{kompakt}\} = \inf\{\mu(G) :\ G \supset B\ \text{ nyílt}\}.$$

Egy teret *Radon-térnek* nevezünk, ha rajta minden mérték reguláris.

**2.1. Tétel.** Minden lengyel tér (speciálisan minden szeparábilis Banach-tér) Radon.

**Bizonyítás.** Legyen $\mu$ egy tetszőleges mérték, és $B$ egy tetszőleges Borel-halmaz. Először megmutatjuk, hogy van olyan $F$ zárt és $G$ nyílt halmaz, amelyre $F \subset B \subset G$, és

$$\mu(G \setminus F) < \varepsilon. \tag{1}$$

Világos, hogy az ilyen tulajdonságú Borel-halmazok $\sigma$-algebrát alkotnak, ezért elég megmutatni, hogy a zárt halmazok rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal.

Legyen tehát $B$ zárt. Ekkor a $G_n \stackrel{\text{def}}{=} \{x : \operatorname{dist}(x, B) < \frac{1}{n}\}$ fogyó nyílt halmazokra $B = \bigcap_n G_n$, ezért elég nagy $n$-re $\mu(G_n \setminus B) < \varepsilon$. Ekkor $G = G_n$ és $F = B$ választással valóban teljesül (1).

Már csak azt kell bebizonyítani, hogy minden $F$ zárt halmaz tartalmaz $K$ kompaktot, amelyre $\mu(F \setminus K) < \varepsilon$. Mivel a tér szeparábilis, ezért $F$ lefedhető megszámlálható sok $\frac{1}{n}$ sugarú zárt gömbbel, ezek között van véges sok, melyek uniója legalább $\mu(F) - \frac{\varepsilon}{2^n}$ mértékű halmazban metszi $F$-et, mondjuk $F_n$-ben. A $K \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_n F_n$ halmaz zárt és teljesen korlátos, így kompakt, és valóban teljesül rá $\mu(F \setminus K) < \varepsilon$. ∎

A $\mu_n$ mértékek *gyengén konvergálnak $\mu$-höz*, ha minden folytonos korlátos függvényre $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$, azaz ha $\mu_n \to \mu$ a folytonos korlátos függvények duális terében a $w^*$ topológia szerint.

Könnyen látható, hogy ugyanezt a topológiát indukálja az alábbi, úgynevezett *Lévy-metrika*, és ezzel a metrikával a mértékek tere teljes:

$$\rho(\mu, \nu) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\varepsilon : \forall A,\ \mu(A) \le \nu(A_\varepsilon) + \varepsilon,\ \nu(A) \le \mu(A_\varepsilon) + \varepsilon\},$$

ahol $A_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{x : \operatorname{dist}(x, A) < \varepsilon\}$.

A valószínűségi mértékek egy $H$ részhalmazát *feszesnek* hívjuk, ha minden $\varepsilon$-ra van olyan $K$ kompakt halmaz, amelyre $\mu(K) > 1 - \varepsilon$ minden $\mu \in H$-ra.

Mivel egy lengyel térben minden mérték reguláris, ezért az 1 elemű halmazok feszesek. Prohorovtól származik a következő, sokkal mélyebb tétel (lsd. pl. [3]):

**2.2. Tétel.** A valószínűségi mértékek egy $H$ részhalmaza pontosan akkor relatív kompakt a gyenge konvergencia topológiában, ha feszes.

**Bizonyítás.** Legyen $\mu_n$ egy feszes sorozat, azt kell bebizonyítanunk, hogy van gyengén konvergens részsorozata. Válasszunk $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ kompakt halmazokat, amelyekre

$\mu_n(K_m) \geq 1 - \frac{1}{2^m}$ teljesül minden $n, m$-re. Mivel $C(K_m)^*$ egységgömbje $w^*$-kompakt, ezért (átlós eljárás segítségével) található olyan $\mu_{n_i}$ részsorozat, amelyre $\mu_{n_i|K_m} \to \nu_m$ $C(K_m)^*$-ban az $w^*$-topológia szerint. Nyilván $||\mu_{n_i|K_m} - \mu_{n_i|K_l}|| \leq \frac{1}{2^m}$ minden $m < l$-re és $i$-re, így teljesül $||\nu_m - \nu_l|| \leq \frac{1}{2^n}$, vagyis $\nu_n \to \nu$ valamely $\nu$ mértékre. Ekkor persze $\mu_{n_i} \to \nu$.

A másik irány bizonyítása analóg a 2.1. Tétel bizonyításával, csak azt kell megmutatnunk, hogy ha $H$ relatív kompakt, akkor a teret lefedve megszámlálható sok $\frac{1}{n}$ sugarú zárt gömbbel, mondjuk $B_1, B_2, \ldots$-al, kiválasztható közülük véges sok, melyek uniója legalább $1 - \frac{\varepsilon}{2^n}$ minden $H$-beli $\mu$ mérték szerint.

Tegyük fel, hogy ez nem teljesül, azaz minden $j$-re van $\mu_j \in H$, amelyre $\mu_j(\bigcup_{i=1}^{j} B_i) < 1 - \frac{\varepsilon}{2^n}$. Mivel $H$ relatív kompakt, ezért feltehető, hogy $\mu_j \to \mu$. A $\mu$ mérték reguláris, vagyis van olyan $K$ kompakt halmaz, amire $\mu(K) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^n}$, és $K$-t lefedi véges sok $B_i$ gömb uniója, ami ellentmondás. ■

Egy mértéket mindig tekinthetünk egy $X$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének. Egy, a valós számokon és általában az $\mathbf{R}^n$-en értelmezett valószínűségi változó karakterisztikus függvénye az $e^{i\langle x,X\rangle}$ függvény várható értéke, azaz

$$\phi_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\langle x,y\rangle} d\mu_X(y),$$

ahol $\mu_X$ az $X$ eloszlásfüggvénye; ez a függvény a valószínűségi változót egyértelműen meghatározza.

Ezzel analóg módon definiálhatjuk a végtelen dimenziós euklídeszi-téren, azaz a szeparábilis $\mathcal{H}$ Hilbert-téren definiált mértékek (valószínűségi változók) *karakterisztikus függvényét*:

$$\phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{H}} e^{i\langle x,y\rangle} d\mu(y).$$

S. Bochner és A. Hinchin híres tétele szerint (lsd. [8]) minden olyan $\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ függvény karakterisztikus függvénye egy $X$ valószínűségi változónak, amely pozitív definit, folytonos a 0-ban, és amelyre teljesül $\phi(0) = 1$.

Ezt az eredményt Hilbert-terekre R.A. Milnos és V.V. Sazonov ([12] és [16]) általánosította. A tétel kimondásához először szükségünk van néhány definícióra.

Egy Hilbert-téren értelmezett $A$ korlátos lineáris operátor *Hilbert-Schmidt operátor*, ha

$$||A||_2 \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\sum_i ||Ae_i||^2\Big)^{1/2}$$

értéke véges, ahol $\{e_i\}$ a Hilbert-tér egy ortonormált bázisa. Az $A$ operátor *nyom-osztályú operátor*, ha két Hilbert-Schmidt operátor szorzata. Bebizonyítható, hogy az utóbbi definíció ekvivalens azzal, hogy $||A||_1$ véges, ahol

$$||A||_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \langle |A|e_i, e_i\rangle,$$

$$|A| \stackrel{\text{def}}{=} (A^*A)^{1/2}.$$

$||A||_2$ és $||A||_1$ értéke nem függ a bázis megválasztásától.

**2.3. Tétel.** Egy $\phi : \mathcal{H} \to \mathbf{C}$ függvény pontosan akkor karakterisztikus függvénye egy, a Hilbert-téren értelmezett mértéknek, ha

(i) pozitív definit;

(ii) $\phi(0) = 1$;

(iii) minden $\varepsilon > 0$-ra van olyan $T_\varepsilon$ nemnegatív nyom-osztályú operátor, hogy $\langle T_\varepsilon y, y\rangle \leq 1$ esetén teljesül $\mathrm{Re}(\phi(0) - \phi(y)) < \varepsilon$.

## 3. Haar-mérték és Haar-nulla halmazok

Ismert, hogy minden lokálisan kompakt, szeparábilis teljes Abel-csoporton létezik egy eltolásinvariáns (nem feltétlenül valószínűségi) mérték, az úgynevezett Haar-mérték. Azonban a szeparábilis Banach-terek nem lokálisan kompaktak, és bebizonyítható, hogy eltolásinvariáns mérték nincsen rajtuk. Ennek ellenére, a Haar-nulla halmaz fogalma (tehát azok a halmazok, amelyek Haar-mértéke 0) kiterjed Banach-terekre is. Az alábbi definíció, és a fejezet valamennyi tétele J.P.R. Christensen-től származik ([6]).

**Definíció.** Egy szeparábilis teljes Abel-csoport $B$ Borel-részhalmaza *Haar-nulla*, ha van olyan $\mu$ valószínűségi Borel-mérték a csoporton, amely szerint $B$ minden eltoltja 0-mértékű.

(Világos, hogy a definícióban valójában nincs szükség arra a feltételre, hogy a keresett mérték egy valószínűségi mérték, mert minden $\sigma$-véges mértékhez választhatunk egy abszolút folytonos valószínűségi mértéket.)

Megmutatjuk, hogy lokálisan kompakt esetben, tehát amikor a csoporton van Haar-mérték, a Haar-nulla halmazok valóban megegyeznek a 0-mértékű halmazokkal. Nem lokálisan kompakt esetben azonban annak a bizonyítása sem világos, hogy a Haar-nulla halmazok $\sigma$-ideált alkotnak. Ehhez szükségünk lesz a valószínűségi mértékek konvolúciójának fogalmára. Két valószínűségi mérték, $\mu$ és $\nu$ konvolúciója az a $\mu * \nu$ mérték, amelyre

$$\int_G \int_G f(x+y)d\mu(x)d\nu(y) = \int_G f(x)d(\mu * \nu)(x)$$

teljesül minden folytonos korlátos $f$ függvényre, azaz

$$(\mu * \nu)(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_G \nu(A-x)d\mu(x).$$

Könnyen látható, hogy $\mu * \nu$ is valószínűségi mérték, és $\mu * \nu = \nu * \mu$.

**3.1. Tétel.** Ha $G$ lokálisan kompakt, akkor egy $B$ Borel-halmaz pontosan akkor Haar-nulla, ha Haar-mértéke 0.

**Bizonyítás.** Ha $B$ Haar-mértéke 0, akkor az eltolás-invariancia miatt $B$ minden eltoltjának is 0 a Haar-mértéke, vagyis a keresett mértéknek választhatjuk a Haar-mértéket.

Megfordítva, ha valamely $\mu$ mértékre $\mu(B+x) = 0$ minden $x$-re, akkor a Fubini-tétel alapján

$$0 = \int \int \chi_B(x+y)d\mu(x)dh(y) = h(B),$$

ahol $h$ jelöli a Haar-mértéket. ■

**3.2. Tétel.** A Haar-nulla halmazok $\sigma$-ideált alkotnak.

**Bizonyítás.** Az, hogy egy Haar-nulla halmaz részhalmaza is Haar-nulla, triviális, azt kell megmutatnunk, hogy megszámlálható sok Haar-nulla halmaz uniója is Haar-nulla.

Könnyen látható, hogy két Haar-nulla halmaz uniója Haar-nulla, mert ha $B_1$ minden eltoltja 0-mértékű $\mu$ szerint és $B_2$ minden eltoltja 0-mértékű $\nu$ szerint, akkor $B_1 \cup B_2$ minden eltoltja 0-mértékű $\mu * \nu$ szerint. A megszámlálható unió bizonyításához azonban végtelen sok mérték konvolúciójára van szükségünk.

Tudjuk, hogy a valószínűségi mértékek tere a $\rho$ Lévy-metrikával teljes metrikus tér. Legyenek $A_1, A_2, \ldots$ Haar-nulla halmazok, válasszunk minden $n$-re egy $\mu_n$ valószínűségi mértéket, amelyre

(i) $\mu_n(A_n + x) = 0$ minden $x \in G$-re, és

(ii) $\rho(\mu_n, \delta) < \frac{1}{2^n}$ a $\delta$ (0-tartójú) Dirac-mértékre.

Ilyet könnyű konstruálni, mert ha egy halmaz minden eltoltja 0-mértékű valamely $\mu$ valószínűségi mérték szerint, akkor ugyanez teljesül $\mu$ minden eltoltjára, valamint minden olyan mértékre, amely abszolút folytonos $\mu$-re nézve, speciálisan a

$$\nu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu((A+x) \cap B)}{\mu(B)}$$

alakú mértékekre is, ahol $B$ egy rögzített, pozitív $\mu$-mértékű Borel-halmaz. Ez alapján tudunk olyan mértéket konstruálni, amelyre teljesül (i), és a 0 egy kis környezetébe van koncentrálva, így teljesül rá (ii) is.

A konvolúció definíciójából világos, hogy tetszőleges $\nu_1, \nu_2, \mu$ mértékekre

$$\rho(\nu_1 * \mu, \nu_2 * \mu) \leq \rho(\nu_1, \nu_2),$$

és tetszőleges $\mu$ mértékre

$$\mu * \delta = \mu,$$

így

$$\rho(\mu_1 * \mu_2 * \ldots * \mu_n,\ \mu_1 * \mu_2 * \ldots * \mu_{n-1}) \leq \frac{1}{2^n},$$

vagyis a tér teljessége miatt létezik $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{\infty} * \mu_k$. Mivel a konvolúció a távolságokat nem növeli, ezért $\nu_n \to \nu$ esetén tetszőleges $\nu_0$ mértékre $\nu_n * \nu_0 \to \nu * \nu_0$, ebből azonnal adódik $\mu = \mu_n * (\prod_{k \neq n} * \mu_k)$, amiből következik $\mu \ll \mu_n$ minden $n$-re. Így $\mu(A_n + x) = 0$ minden $n$-re és $x$-re, ezzel az állítást bebizonyítottuk. ■

A következő tételek fontos példákat mutatnak Haar-nulla halmazokra végtelen dimenziós szeparábilis Banach-terekben.

**3.3. Tétel.** Végtelen dimenziós szeparábilis Banach-térben minden kompakt halmaz Haar-nulla.

**3.4. Tétel.** Végtelen dimenziós nem reflexív szeparábilis Banach-térben minden gyengén kompakt halmaz Haar-nulla.

Mindkét tétel bizonyítása a véges dimenziós térben jól ismert Steinhaus-tétel végtelen dimenziós kiterjesztésén alapszik:

**3.5. Tétel.** Ha $A$ nem Haar-nulla halmaz, akkor $A - A$ tartalmazza a 0 egy környezetét.

**A 3.5. Tétel bizonyítása.** Bebizonyítjuk, hogy az

$$\{x : A \cap (A + x) \text{ nem Haar-nulla}\}$$

halmaz tartalmaz 0-környezetet.

Indirekt módon tegyük fel, hogy van egy olyan $x_n$ sorozat, amelyre $||x_n|| < \frac{1}{2^n}$ és $A \cap (A + x_n)$ Haar-nulla. Mivel a Haar-nulla halmazok $\sigma$-ideált alkotnak, ezért így $\bigcup_n A \cap (A + x_n)$ is Haar-nulla, vagyis $B \overset{\text{def}}{=} A \setminus \bigcup_n (A \cap (A + x_n))$ nem Haar-nulla. A $B$ halmaz definíciójából következik, hogy

$$B \cap (B + x_n) = \emptyset \ \forall n. \tag{2}$$

Legyen $C \overset{\text{def}}{=} \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ a Cantor-csoport, és egy $c = (c_1, c_2, \ldots) \in C$ pontra legyen $\phi(c) \overset{\text{def}}{=} \sum_n c_n x_n$. Ez egy folytonos leképezés $C$-ből a Banach-térbe. Legyen a Cantor-csoporton a Haar-mérték $h$, és tekintsük a $\mu \overset{\text{def}}{=} h \circ \phi^{-1}$ mértéket a Banach-téren.

Mivel $B$ nem Haar-nulla, ezért valamely $y$-ra $\mu(B+y) \neq 0$, azaz $B^* \overset{\text{def}}{=} \phi^{-1}(B+y)$ Haar-mértéke pozitív. De ekkor $B^* - B^*$ tartalmazza a 0 egy környezetét $C$-ben, speciálisan tartalmaz egy olyan pontot, amelynek csak egyetlen koordinátája 1-es, mondjuk az $n$-edik. Ez azt jelenti, hogy $x_n \in B - B$, ami ellentmond (2)-nek. ■

**3.3. és 3.4. Tételek bizonyítása.** Ha $K$ egy kompakt halmaz, akkor $K - K$ is kompakt (például mert $K \times K$ folytonos képe), és egy kompakt halmaz nem tartalmazhat 0-környezetet, mert egy 0-környezetben van nem torlódó sorozat. Ugyanígy, ha $K$ gyengén kompakt, akkor $K - K$ is gyengén kompakt, és nem reflexív Banach térben egy gyengén kompakt halmaz nem tartalmazhat gömböt. ■

## 4. Gauss-mérték és Gauss-nulla halmazok

A Banach-tereken értelmezett mértékek közül talán a legtöbbet vizsgált mértékek a Gauss-mértékek, vagy másnéven normális eloszlások.

Először összefoglaljuk a véges dimenziós Gauss-mértékek legfontosabb tulajdonságait. A valós számokon értelmezett

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

sűrűségfüggvénnyel megadott valószínűségi változót *standard Gauss* vagy *standard normális* valószínűségi változónak hívjuk. A *standard $n$-dimenziós Gauss-mérték* $n$ db standard Gauss-mérték szorzata $\mathbf{R}^n$-en. Egy $\mathbf{R}^n$-en értelmezett $Y$ valószínűségi változó *Gauss*, ha felírható

$$Y = AX + m$$

alakban, ahol $X$ a standard $n$-dimenziós Gauss-mérték, $A$ egy $k \times n$-es mátrix, és $m \in \mathbf{R}^k$. Ekkor $m$ az $Y$ valószínűségi változó várható értéke, és $S \overset{\text{def}}{=} AA^T$ az $Y$ kovariancia mátrixa.

Bebizonyítható, hogy $Y$-t $m$ és $S$ már egyértelműen meghatározza, és karakterisztikus függvénye

$$\phi_Y(x) = e^{i\langle x,m\rangle - \langle Sx,x\rangle/2}.$$

Ha $S$ invertálható, akkor $Y$-nak létezik sűrűségfüggvénye, és ez

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\det(S)}e^{-\langle S^{-1}(x-m),x-m\rangle/2}.$$

Ekkor $Y$-t *nemelfajuló* Gauss-mértéknek hívjuk.

Bebizonyítható, hogy $\mathbf{R}^n$-en egy mérték pontosan akkor Gauss, ha minden 1-dimenziós vetülete Gauss. Ez alapján a Gauss-mérték definíciója általánosítható Banach-terekre is:

**Definíció.** Egy $\mu$ valószínűségi mérték egy szeparábilis Banach-téren *Gauss-mérték*, ha a duális tér minden $x^*$ elemére a

$$\mu_{x^*}(A) \overset{\text{def}}{=} \mu\{y : \langle x^*, y\rangle \in A\} \quad (A \subset \mathbf{R})$$

egyenlőséggel definiált mérték 1-dimenziós Gauss-mérték. Ha minden $x^* \neq 0$-ra $\mu_{x^*}$ nemelfajuló, akkor $\mu$-t *nemelfajuló Gauss-mértéknek* hívjuk.

Banach-terekben a legelőször vizsgált és egyik legfontosabb Gauss-mérték az úgynevezett *Wiener-mérték* $C([0,1])$-en: az a (létező és egyértelmű) $w$ mérték, melyre

(i) minden rögzített $0 \leq t \leq 1$-re $f(t)$ $(f \in C([0,1]))$ egy 0 várható értékű, $\sqrt{t}$ szórású Gauss-valószínűségi változó;

(ii) minden rögzített $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n \leq 1$-re az $f(t_{k+1}) - f(t_k)$ valószínűségi változók függetlenek.

Ekkor persze $f(0) = 0$ és ezért $w$ elfajuló, de már nemelfajuló Gauss-mértéket kapunk az $\{f : f(0) = 0\}$ altéren.

A Wiener-mérték egy explicit megadása megtalálható pl. [3]-ban.

Hilbert-téren a Gauss-mértékeket megadhatjuk a karakterisztikus függvényükkel:

**4.1. Tétel.** Egy $\mathcal{H}$ Hilbert-téren a $\mu$ mérték pontosan akkor Gauss, ha van olyan $x_0 \in \mathcal{H}$ és $S$ nemnegatív nyom-osztályú operátor, amelyre

$$\int_{\mathcal{H}} e^{i\langle x,y\rangle} d\mu(y) = e^{i\langle x,x_0\rangle - \langle Sx,x\rangle/2}. \tag{3}$$

A $\mu$ mérték pontosan akkor nemelfajuló, ha $\ker(S) = \{0\}$.

**Bizonyítás.** Az egyik irány triviális: ha $\mu$-re teljesül (3), és $\mu_x$ jelöli $\langle x, \cdot\rangle$ eloszlását, akkor $\mu_x$ karakterisztikus függvénye

$$\int_{\mathbf{R}} e^{its} d\mu_x(t) = \int_{\mathcal{H}} e^{is\langle x,y\rangle} d\mu(y) = e^{is\langle x,x_0\rangle - s^2\langle Sx,x\rangle/2},$$

ami (rögzített $x$-re) valóban 1-dimenziós Gauss-mérték karakterisztikus függvénye.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mu$ Gauss-mérték. Ekkor minden $\mu_x$ mérték Gauss, tehát

$$\phi(x) = \int_{\mathcal{H}} e^{i\langle x,y\rangle} d\mu(y) = e^{im_x - \sigma_x^2/2},$$

ahol

$$m_x = \textstyle\int_{\mathcal{H}} \langle x,y\rangle d\mu(y) \quad \text{és} \quad \sigma_x^2 = \textstyle\int_{\mathcal{H}} (\langle x,y\rangle - m_x)^2 d\mu(y).$$

Ekkor

$$m_x = \lim_{r\to\infty} \int_{||y||\leq r} \langle x,y\rangle d\mu(y),$$

és a konvergencia lokálisan egyenletes, így az $x \to m_x$ leképezés folytonos. Ebből már következik, hogy $m_x = \langle x, x_0\rangle$ valamely $x_0 \in \mathcal{H}$-ra.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $x_0 = 0$ (ez csak a $\mu$ mérték eltolását jelenti). Ekkor

$$\sigma_x^2 = \int_{\mathcal{H}} \langle x,y\rangle^2 d\mu(y),$$

így $\sigma_x^2 = \langle Sx, x\rangle$ valamely $S$ pozitív lineáris operátorra, vagyis $\phi(x) = e^{-\langle Sx,x\rangle/2}$, csak azt kell bebizonyítani, hogy $S$ valóban egy nyom-osztályú operátor.

A 2.3. Tétel alapján van olyan $T$ nemnegatív nyom-osztályú operátor, amelyre $\langle Tx, x\rangle \leq 1$ esetén $1 - e^{-\langle Sx,x\rangle/2} \geq 1/2$, így $\langle Sx, x\rangle \leq \log 4$. Azt is feltehetjük, hogy $T$ és $S$ magja megegyezik. Ekkor $S \leq \log 4 \cdot T$, és mivel $T$ nyom-osztályú, ezért $||S||_1 \leq \log 4||T||_1$ miatt $S$ is biztosan nyom-osztályú.

Végül, $\mu$ pontosan akkor nemelfajuló, ha minden $x$-re $\sigma_x \neq 0$, azaz ha minden $0 \neq x$-re $\langle Sx, x\rangle > 0$. Ez ekvivalens azzal, hogy $\ker(S) = \{0\}$. ■

A 2.3. Tételből következik, hogy minden $x_0$-ra és $S$-re létezik (pontosan egy) Gauss-mérték, amelyre teljesül (3).

A 4.1. Tétel fontos következménye, hogy Hilbert-térben egy Gauss-mérték mindig független 1-dimenziós Gauss-mértékek illetve Dirac-mértékek szorzata. Valóban, válaszszunk egy $\{e_n\}$ ortonormált bázist $S$ sajátvektoraiból (ilyet lehet, mert minden nyom-osztályú, sőt minden Hilbert-Schmidt operátor kompakt), és legyenek a hozzájuk tartozó sajátértékek $\lambda_n \geq 0$. Ekkor $||S||_1 = \sum_n \lambda_n < \infty$, és az $a_n = \langle x, e_n\rangle$, $\alpha_n = \langle x_0, e_n\rangle$ jelölésekkel

$$\phi(x) = \prod e^{i\alpha_n a_n - \lambda_n a_n^2/2}.$$

Általában, tetszőleges szeparábilis Banach-térben a nem-elfajuló Gauss-mértékek létezése sem világos. Azonban egy Hilbert-téren értelmezett Gauss-mértékből könnyen konstruálhatunk Gauss-mértéket tetszőleges Banach-térben:

Legyen $\mathcal{B}$ egy Banach-tér, és $T$ egy folytonos lineáris leképezés $\mathcal{H}$-ból $\mathcal{B}$-be. Ekkor a Hilbert-téren értelmezett bármely $\mu$ Gauss-mértékre $\nu \stackrel{\text{def}}{=} \mu \circ T^{-1}$ Gauss-mérték $\mathcal{B}$-n, és ha $\mu$ nemelfajuló volt és $T$ képe sűrű $\mathcal{B}$-ben, akkor $\nu$ is nemelfajuló. Ha $\mathcal{B}$ szeparábilis, akkor valóban létezik olyan $T : \mathcal{H} \to \mathcal{B}$ folytonos lineáris leképezés, amelynek a képe sűrű.

Hasonló módon lehet definiálni más mértékeket is szeparábilis Banach-térben:

**Definíció.** A $\mathcal{B}$ szeparábilis Banach-téren $\mu$ *kocka-mérték*, ha egy $a + \sum_k X_k e_k$ alakú valószínűségi változó eloszlása, ahol $a, e_1, e_2, \ldots \in \mathcal{B}$, $\sum_k ||e_k|| < \infty$, és $X_1, X_2, \ldots$ független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók $[0, 1]$-en. A $\mu$ kocka-mérték *nemelfajuló*, ha az $e_1, e_2, \ldots$ vektorok által feszített altér sűrű $\mathcal{B}$-ben.

Világos, hogy a kocka-mértékek pontosan azok a mértékek, amelyek megkaphatók a $\mathcal{Q} = [0,1]^{\mathbf{N}}$ Hilbert-kockán értelmezett $\lambda$ standard Lebesgue-mértékből $\lambda \circ T^{-1}$ alakban, ahol $q = (q_1, q_2, \dots) \in \mathcal{Q}$-ra $T(q) \stackrel{\text{def}}{=} a + \sum_k q_k e_k$.

Végtelen sok mérték szorzatának (speciálisan a fenti $\mathcal{Q}$ Hilbert-kockán értelmezett $\lambda$ Lebesgue-mértéknek) a viselkedése eltér a véges dimenziós esetben megszokottól. Például, az $(\frac{1}{2}, 1]^{\mathbf{N}}$ kockának kontinuum sok diszjunkt eltoltja van $\mathcal{Q}$-ban, így nyilván 0-mértékű (ami persze a $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = 0$ egyenlőségből is azonnal látszik). Általában pedig a $\prod_{n=1}^{\infty} [\varepsilon_n, 1]$ kocka mértéke $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_n)$, vagyis ez a mérték pontosan akkor pozitív, ha $\sum_n \varepsilon_n < \infty$.

Egy Banach-téren sok nemelfajuló Gauss- és kocka-mérték van, nincs közöttük egyetlen kitüntetett. Sőt, az előbbi észrevétel alapján könnyen megadható kontinuum sok diszjunkt tartójú kocka- illetve Gauss-mérték. Ezért különösen fontosak azok a halmazok, amelyek *minden* nemelfajuló Gauss- vagy kocka-mérték szerint 0-mértékűek:

**Definíció.** Egy $A$ halmazt *Gauss-nullának* nevezünk, ha minden nem-elfajuló Gauss-mérték szerint 0-mértékű. Ugyanígy, $A$ *kocka-nulla*, ha minden nemelfajuló kocka-mérték szerint 0-mértékű.

Nyilvánvaló, hogy a kocka-nulla és a Gauss-nulla halmazok is $\sigma$-ideált alkotnak.

A Gauss-nulla halmazokat R.R. Phelps vezette be, a kocka-nulla halmazokat először P. Mankiewicz használta, akkor még explicit definíció nélkül (lsd. [13] és [10]).

Bebizonyítjuk, hogy minden Gauss-nulla halmaz kocka-nulla. A bizonyításnak az a "lényege", hogy ha a Hilbert-kocka egy kis rész-kockája pozitív mértékű valamely $\mu$ valószínűségi mérték szerint, és $A$ egy pozitív Lebesgue-mértékű részhalmaz, akkor $A$ pozitív mértékű $\mu$ valamely eltoltja szerint is. Precízebben:

**Lemma.** Legyenek $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ pozitív valós számok, melyekre $\sum_n \varepsilon_n < \infty$ és $0 < \varepsilon_n < 1$ minden $n$-re. Legyen $A \subset \prod_{n=1}^{\infty} [\varepsilon_n, 1]$ egy pozitív Lebesgue-mértékű részhalmaza $[0,1]^{\mathbf{N}}$-nek, és legyen $\mu$ egy olyan mérték $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$-en, amelyre teljesül $\mu(\prod_{n=1}^{\infty} [0, \varepsilon_n]) > 0$. Ekkor van olyan $\underline{t} \in [0,1]^{\mathbf{N}}$, hogy a $\mu_{\underline{t}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(X + \underline{t})$ mértékre $\mu_{\underline{t}}(A) > 0$.

**Bizonyítás.** A Fubini-tételt alkalmazzuk:

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]^{\mathbf{N}}} \mu_{\underline{t}}(A)\,d\lambda(\underline{t}) &\geq \int_{[0,1]^{\mathbf{N}}} \int_{[0,1]^{\mathbf{N}}} \chi_{A-\underline{t}}(\underline{u})\,d\mu(\underline{u})\,d\lambda(\underline{t}) \\
&= \int_{[0,1]^{\mathbf{N}}} \int_{[0,1]^{\mathbf{N}}} \chi_{A-\underline{t}}(\underline{u})\,d\lambda(\underline{t})\,d\mu(\underline{u}) \\
&= \int_{[0,1]^{\mathbf{N}}} \int_{[0,1]^{\mathbf{N}}} \chi_{A-\underline{u}}(\underline{t})\,d\lambda(\underline{t})\,d\mu(\underline{u}) \\
&= \int_{[0,1]^{\mathbf{N}}} \lambda((A-\underline{u}) \cap [0,1]^{\mathbf{N}})\,d\mu(\underline{u}) \\
&\geq \int_{\prod [0,\varepsilon_n]} \lambda((A-\underline{u}) \cap [0,1]^{\mathbf{N}})\,d\mu(\underline{u}) \\
&= \mu(\prod [0,\varepsilon_n])\lambda(A) > 0,
\end{aligned}$$

így valóban van olyan $\underline{t}$, amelyre $\mu_{\underline{t}}(A) > 0$. ■

**4.2. Tétel.** Minden Gauss-nulla halmaz kocka-nulla.

**Bizonyítás.** Ha $A$ nem kocka-nulla, akkor van olyan kocka-mérték, amely szerint nem 0-mértékű, így valamilyen $T : \mathcal{Q} \to \mathcal{B}$-re $\lambda(T^{-1}A) > 0$. Feltehető, hogy $A \subset \prod_n [\varepsilon_n, 1]$ valamely, a Lemma feltételeit kielégítő $\varepsilon_n$ sorozatra. Tekintsünk $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$-en egy $\prod_n X_n$ valószínűségi változót, ahol $X_1, X_2, \ldots$ független, 0 várható értékű 1-dimenziós Gauss-változók olyan kicsi szórással, hogy $\prod_n [0, \varepsilon_n]$ mérteke pozitív legyen. A Lemmát alkalmazva $T^{-1}A$ mértéke pozitív a $\underline{t} + \prod X_n$ valószínűségi változó $\mu$ eloszlása szerint valamilyen $\underline{t}$-re, így a $\mu \circ T^{-1}$ Gauss-mérték szerint $A$ nem 0-mértékű a Banach-térben. ■

A következő tétel a 3.3. Tétellel együtt a Gauss-nulla és kocka-nulla halmazok kapcsolatát mutatja a Haar-nulla halmazok $\sigma$-ideáljával.

**4.3. Tétel.** Minden Gauss-nulla halmaz Haar-nulla, és nem minden kompakt halmaz kocka-nulla.

**Bizonyítás.** Mindkét állítás triviális. Ha $A$ Gauss-nulla, akkor nyilván tetszőleges $\mu$ nemelfajuló Gauss-mértékre $\mu(A+x) = 0$. Másrészt, egy nemelfajuló kocka-mérték tartója $\mathcal{Q}$ folytonos képe, így kompakt, és nyilván nem kocka-nulla. ■

## 5. Aronszajn-nulla halmazok

**Definíció.** Legyenek $e_1, e_2 \ldots$ egy $\mathcal{B}$ szeparábilis Banach-tér elemei. Legyen

$$\mathcal{A}(e_1, e_2, \ldots)$$

azon $\mathcal{B}$-beli $B$ Borel-halmazok osztálya, amelyek felbonthatók megszámlálható sok Borel-halmaz uniójára úgy, hogy az $n$-edik halmaz uniója 0-mértékű az $e_n$ irányú egyeneseken, azaz $B = \bigcup_n B_n$, $\lambda\{t \in \mathbf{R} : a + te_n \in B_n\} = 0$ minden $a$-ra.

Egy $B$ Borel-halmazt *Aronszajn-nullának* nevezünk, ha $B \in \mathcal{A}(e_1, e_2, \ldots)$ minden olyan $e_1, e_2, \ldots$ sorozatra, amely által kifeszített altér sűrű.

Könnyen látható (Fubini-tétel segítségével), hogy $\mathbf{R}^n$-ben az Aronszajn-nulla halmazok megegyeznek a (Lebesgue) 0-mértékű halmazokkal. Valóban, egy 0-mértékű halmaz a síkon m.m. vízszintes egyenesen 0-mértékű, és m.m. vízszintes egyenest elhagyva a maradék halmaz persze m.m. függőleges egyenesen 0-mértékű lesz. Ezzel analóg módon bizonyíthatunk magasabb dimenziókban, valamint vízszintes-függőleges helyett más irányú egyenesekre is. (Az pedig, hogy minden Aronszajn-nulla halmaz Lebesgue-nulla, triviális.)

A Lebesgue-nulla halmazokkal való ekvivalencia az eddig bevezetett nullahalmaz-fogalmakra (Haar-nulla, Gauss-nulla, kocka-nulla) már a definícióból triviálisan következett.

Az összes nullahalmaz-fogalom közül az Aronszajn-nulla halmazok fogalma a legkevésbé természetes. Az Aronszajn-nulla halmazokat N. Aronszajn vezette be, bebizonyítva, hogy Banach-téren egy Lipschitz függvény nem-differenciálhatósági pontjai mindig Aronszajn-nulla halmazt alkotnak (lsd. [1]).

Vegyük észre, hogy a definícióban a $B_n$ halmazok Borel tulajdonsága nagyon fontos. Ha ezt nem tennénk fel, akkor az egész tér Aronszajn-nulla lenne. Már Sierpiński felbontotta a síkot (kontinuum-hipotézis felhasználásával) két részre úgy, hogy az egyik minden vízszintes, a másik minden függőleges egyenesen 0-mértékű.

Hasonló felbontás lehetséges végtelen dimenziós szeparábilis $\mathcal{B}$ Banach-térben is, sőt, kontinuum-hipotézis nélkül, csak a kiválasztási axióma felhasználásával ([4]):
Legyen $e_1, e_2, ...$ egy tetszőleges sorozat, melyre $e_n \notin \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_{n-1})$. Az

$$F = \mathcal{B}/\operatorname{span}(e_1, e_2, \ldots)$$

faktortér minden eleméből válasszunk ki egy-egy reprezentáns pontot, legyen az így kapott (persze nem Borel) halmaz $D$, és legyen $B_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} D + \mathrm{span}(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$. Ekkor valóban $\mathcal{B} = \bigcup_n B_n$, és minden $e_n$ irányú egyenes legfeljebb 1 pontban metszi $B_n$-et.

Emiatt már annak a bizonyítása sem triviális (persze nem is nehéz), hogy ha egy $B$ Borel-halmazra és $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektorokra $B$ minden eltoltja 0 Lebesgue-mértékű halmazban metszi a $\mathrm{span}(e_1, \ldots, e_n)$ teret, akkor $B \in \mathcal{A}(e_1, \ldots, e_n)$. A 6. fejezetben látni fogjuk, hogy ennél sokkal több is igaz: tetszőleges $B$ Borel-halmazra a

$$\phi(x) = \lambda_n((B + x) \cap \mathrm{span}(e_1, \ldots, e_n))$$

függvény Borel-mérhető. Ekkor, $B_i$-nek választva $B$ azon pontjait, amelyeken keresztül az $e_i$ irányú egyenesek 0-mértékű halmazban metszik $B$-t, a kapott $B_i$ halmazok Borelek. Persze $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$.

Fubini tételéből azonnal következik, hogy minden Aronszajn-nulla halmaz kocka-nulla. R.R. Phelps bizonyította a következőt ([13]):

**5.1. Tétel.** Minden Aronszajn-nulla halmaz Gauss-nulla.

A bizonyítás alapja a következő tétel:

**5.2. Tétel.** Van olyan $T : \mathcal{B} \to \mathcal{H}$ folytonos lineáris injektív leképezést, amelyre $T\mathcal{B}$ sűrű $\mathcal{H}$-ban, és tetszőleges $B \in \mathcal{B}$ Borel- halmazra $TB$ Borel.

**Az 5.2. Tétel bizonyítása.** Minden szeparábilis Banach-tér tekinthető $C[0,1]$ egy alterének, ezért elég megmutatni, hogy a $C[0,1] \subset L_2(0,1)$ természetes beágyazásnál minden Borel-halmaz képe Borel, utána választhatjuk $\mathcal{H}$-nak $\mathcal{B}$ lezártját $L_2$-ben.

Ehhez elég bebizonyítani, hogy $C[0,1]$ egységgömbje Borel $L_2$-ben. Legyen $\mathcal{I}$ a racionális intervallumok halmaza $[0,1]$-en, és legyen $\mathcal{I}_m$ azon racionális intervallum-párok halmaza, amelyek hossza is és távolsága is kisebb $1/m$-nél. Ekkor

$$M \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \{f \in L_2 : \int_I |f| \leq |I|\}$$

egy zárt halmaz $L_2$-ben, megmutatjuk, hogy $C[0,1]$ egységgömbje ennek és az

$$N \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcap_n \bigcup_m \bigcap_{(I,J) \in \mathcal{I}_m} \{f \in L_2 : |\frac{1}{|I|} \int_I f - \frac{1}{|J|} \int_J f| < 1/n\}$$

Borel-halmaznak a metszete.

Az, hogy mindkét halmaz tartalmazza $C[0,1]$ egységgömbjét, triviális. Másrészt tudjuk, hogy $\lim_{I\to x}\frac{1}{|I|}\int_I f = f(x)$ egy teljes mértékű halmazon. Így ha egy $f$ függvény eleme $N$-nek, akkor egyenletesen folytonos egy teljes mértékű halmazon, azaz m.m. megegyezik egy $C[0,1]$-beli függvénnyel. Ezek után $f \in M$ biztosítja, hogy benne van az egységgömbben. ■

**Az 5.1. Tétel bizonyítása.** Legyen $A$ egy Aronszajn-nulla halmaz, $\mu$ egy nemelfajuló Gauss-mérték, és válasszunk egy $T : \mathcal{B} \to \mathcal{H}$ leképezést, amely kielégíti az 5.2. Tétel feltételeit.

Ekkor $\nu \stackrel{\text{def}}{=} \mu \circ T^{-1}$ egy nemelfajuló Gauss-mérték $\mathcal{H}$-n, legyen $e_1, e_2, \ldots$ egy ortonormált bázis a $\nu$-höz tartozó nyom-osztályú operátor sajátértékeiből. Tudjuk, hogy $A$ felírható $\bigcup_n A_n$ alakban, ahol $A_n$ 0 Lebesgue-mértékű minden $T^{-1}e_n$ irányú egyenesen, és $\nu$ 1-dimenziós nemelfajuló $\nu_n$ Gauss-mértékek szorzata. Ekkor $TA_n$ 0-mértékű minden $e_n$ irányú egyenesen, így $\nu_n(x + TA_n) = 0$ minden $x$-re. Fubini tétele alapján $\nu(TA_n) = 0$, ez teljesül minden $n$-re, tehát $0 = \nu(TA) = \mu(A)$. ■

A Banach-terek elméletében, különösen a Banach-tereken értelmezett mértékek differenciálásakor fontos szerepet játszanak az úgynevezett *Radon-Nikodým-tulajdonságú*, vagy röviden *RNP* terek. A Radon-Nikodým-tulajdonságnak számos ekvivalens definíciója ismert – az ekvivalencia bizonyítása általában nem triviális. Ezek azok a terek, ahol a mértékek differenciálhatóak, érvényes a valós esetben jól ismert Radon-Nikodým-tétel. Számunkra most a következő tulajdonságuk (vagy ha úgy tetszik, definíciójuk) miatt érdekesek:

**Definíció.** Egy $\mathcal{B}$ Banach-tér *RNP*, ha minden $f : [0,1] \to \mathcal{B}$ abszolút folytonos függvény m.m. differenciálható.

Bebizonyítható, hogy $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$, sőt minden olyan tér, amely szeparábilis és konjugált (pl. a szeparábilis reflexív terek), *RNP*.

Legtöbbször azonban nem a $[0,1]$ intervallumon, hanem egy Banach-téren szeretnénk deriválni:

**Definíció.** Egy $\mathcal{B}$ Banach-térből egy másik Banach-térbe képező $f$ függvény *Gâteaux-differenciálható* az $x_0$ pontban, ha van a terek között olyan korlátos lineáris $T$ operátor, amellyel minden $u \in \mathcal{B}$-re teljesül

$$Tu = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t}.$$

Azaz, egy függvény pontosan akkor Gâteaux-differenciálható, ha minden egyenesen külön-külön differenciálható, és ezek a deriváltak együtt egy korlátos lineáris leképezését alkotják az irányoknak.

A definíció gyengébb, mint a véges dimenziós esetben megszokott derivált-fogalom, mert most nem követeljük meg, hogy a különböző irányokban a limesz egyenletes legyen. Például, a síkon értelmezett

$$f(0,0) = 0; \quad f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^6 + y^2}, \quad \text{ha } (x,y) \neq (0,0)$$

függvény nem folytonos a 0-ban, és ott mégis Gâteaux-differenciálható!

Megmutatjuk, hogy egy szeparábilis Banach-térből egy *RNP* térbe képező Lipschitz-leképezés minden pontban Gâteaux-differenciálható, kivéve egy Aronszajn-nulla halmaz pontjaiban. Ehhez szükségünk lesz a következő Lemmára:

**Lemma.** Legyen $\mathcal{B}$ szeparábilis Banach-tér, és $f$ Lipschitz-leképezés $\mathcal{B}$ egy nyílt részhalmazából egy *RNP* térbe. Legyen $G$ sűrű additív részcsoport $\mathbf{R}^n$-ben, és tegyük fel, hogy valamely $x_0$-ra és minden $u \in G$-re létezik

$$D(x_0)u \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t},$$

és ez $u$-nak additív függvénye. Ekkor $f$ Gâteaux-differenciálható $x_0$-ban.

**Bizonyítás.** A $h_t(u) = (f(x_0 + tu) - f(x_0))/t$ függvények egyenlő mértékben folytonosak, sőt Lipschitzek, ugyanazzal a Lipschitz-konstanssal, mint $f$. Így $D(x_0)u$ létezik minden $u \in \mathrm{cl}\,(G) = \mathcal{B}$-re, és nyilván additív függvénye $u$-nak. Ebből már következik, hogy $D(x_0)$ lineáris operátor, és az is könnyen látható, hogy korlátos, $f$ Lipschitz-konstansa egy megfelelő korlát. ∎

Szükségünk lesz a következő definícióra:

Egy $A \in \mathcal{B}$ halmaz *porózus az $x \in A$ pontban*, ha van olyan $r_1, r_2, \ldots$ 0-hoz tartó sorozat, $0 < c < 1$ valós szám és léteznek $A$-tól diszjunkt $cr_1, cr_2, \ldots$ sugarú $B_1, B_2, \ldots$

gömbök, melyek rendre benne vannak az $x$ pont $r_1, r_2, \dots$ sugarú környezetében. Az $A$ halmazt *porózusnak* hívjuk, ha minden pontjában porózus, végül $A$ *$\sigma$-porózus halmaz*, ha megszámlálható sok porózus halmaz uniója.

Lebesgue sűrűségi tételéből azonnal következik, hogy $\mathbf{R}^n$-ben minden porózus halmaz, és így minden $\sigma$-porózus halmaz is 0-mértékű.

A most következő tételt N. Aronszajn bizonyította először, az itt látható bizonyítás D. Preiss-tól és L. Zajíček-től származik:

**5.3. Tétel.** Legyen $\mathcal{C}$ Radon-Nikodým tulajdonságú Banach-tér, és $f$ Lipschitz-leképezés $\mathbf{R}^n$ egy $U$ nyílt részhalmazából $\mathcal{C}$-be. Ekkor $f$ az $U$ minden pontjában Gâteaux-differenciálható, kivéve egy Aronszajn-nulla halmaz pontjaiban.

**Bizonyítás.** Nyilvánvalóan feltehető, hogy $f$ értelmezve van egész $\mathbf{R}^n$-en. A *RNP* definíciójából következik, hogy az iránymenti deriváltak m.m. léteznek, így a fenti Lemma alapján csak azt kell bebizonyítani, hogy rögzített $u \neq 0$ és $v \neq 0$ vektorok esetén azon $x$-ek halmaza, melyekre nem létezik $D(x)(u+v)$, vagy pedig létezik, de nem egyenlő a $D(x)u + D(x)v$ összeggel, nullmértékű. Ennél többet fogunk bizonyítani: megmutatjuk, hogy ez a halmaz mindig $\sigma$-porózus.

Jelöljük $A(k,y,z)$-vel azon $x$-ek halmazát, amelyekre

(i)
$$\frac{||f(x+tu) - f(x) - ty||}{|t|} \leq 1/k \quad \forall\, 0 < |t| \leq 1/k;$$

(ii)
$$\frac{||f(x+tv) - f(x) - tz||}{|t|} \leq 1/k \quad \forall\, 0 < |t| \leq 1/k;$$

(iii)
$$\limsup_{s \to 0} \frac{||f(x+s(u+v)) - f(x) - s(y+z)||}{|s|} > 3/k.$$

Elég bebizonyítani, hogy $A(k,y,z)$ porózus minden $y, z$-re és $k$ egészre.

Legyen $f$ Lipschitz-konstansa $L$. Minden $x \in A(k,y,z)$-hez válasszunk olyan $s$ és $w$ számokat, amelyre $0 < |s| < 1/k$, $||f(x+s(u+v)) - f(x) - s(y+z)|| > 3|s|/k$, és

$||w|| < |s|/2kL$. Ekkor

$$\begin{aligned} &||f(x+su+w+sv) - f(x+su+w) - sz|| \\ \geq &||f(x+su+sv) - f(x+su) - sz|| - 2L||w|| \\ \geq &||f(x+su+sv) - f(x) - s(y+z)|| - 2L||w|| - |s|/k > |s|/k, \end{aligned}$$

így $x+su+w$ nem eleme $A(k,y,z)$-nek. Ez azt jelenti, hogy az $x+su$ középpontú, $|s|/2kL$ sugarú gömb diszjunkt $A(k,y,z)$-től. ∎

Ebből már gyorsan következik az alábbi tétel:

**5.4. Tétel.** Legyen $\mathcal{B}$ szeparábilis Banach-tér, és $\mathcal{C}$ *RNP*. Ekkor egy $f : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ Lipschitz-függvény egy Aronszajn-nulla halmaz kivételével mindenütt Gâteaux-differenciálható.

**Bizonyítás.** A fenti Lemma fontos következménye, hogy azon pontok, ahol $f$ differenciálható, mindig Borel-halmazt alkotnak. Megint feltehető, hogy $f$ az egész $\mathcal{B}$ téren értelmezve van.

Legyenek $x_1, x_2, \ldots$ lineárisan független vektorok, melyek sűrű alteret feszítenek $\mathcal{B}$-ben, és legyen $V_n \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Jelöljük $D_n$-el azon $x$-ek halmazát, ahol $f$-nek létezik az $u$ irányú deriváltja minden $u \in V_n$-re, és ez $u$-nak lineáris függvénye. A Lemma alapján $f$ a $\bigcap_n D_n$ halmaz minden pontjában Gâteaux-differenciálható, azt kell megmutatnunk, hogy $\mathcal{B} \setminus (\bigcap_n D_n) \in \mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots)$.

Az 5.3. Tétel alapján minden rögzített $y$-ra $\big((\mathcal{B} \setminus D_n) + y\big) \cap V_n$ 0-mértékű a $V_n$ euklídeszi térben, és $\mathcal{B} \setminus D_n$ Borel, így $\mathcal{B} \setminus D_n \in \mathcal{A}(x_1, \ldots, x_n)$. ∎

## 6. Minden kocka-nulla halmaz Aronszajn-nulla

A dolgozat fő eredménye az alábbi, korábban nem ismert tétel:

**6.1. Tétel.** Szeparábilis Banach-térben minden kocka-nulla halmaz Aronszajn-nulla.

Vizsgáljuk először a szeparábilis Hilbert-terek speciális esetét. Ehhez bevezetünk néhány jelölést.

**Jelölések.**

Legyen $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér.

(i) rögzítsünk egy $e_1, e_2, \ldots$ ortonormált bázist, és egy $x \in \mathcal{H}$ pontra legyen $x^{(i)}$ az $x$ $i$-edik koordinátája. Legyen $I_1, I_2, \ldots$ a valós racionális zárt intervallumok egy felsorolása, és egy rögzített $\underline{s} \stackrel{\text{def}}{=} (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ sorozatra legyen

$$C_{\underline{s}} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{H} :\ x^{(i)} \in I_{s_i}\ \ i = 1, 2, \ldots k\}.$$

(ii) Egy rögzített $B \subset \mathcal{H}$ Borel-halmazra és $x \in \mathcal{H}$-ra legyen

$$T_B^{\underline{s}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{(r_1, r_2, \ldots, r_k) \in \mathbf{R}^k : x + r_1 e_1 + r_2 e_2 + \ldots + r_k e_k \in B \cap C_{\underline{s}}\}.$$

(iii) Könnyen látható, hogy ekkor $T_B^{\underline{s}}(x)$ egy Borel-halmaz $\mathbf{R}^k$-ban, jelöljük a mértékét $f_B^{\underline{s}}(x)$-el:

$$f_B^{\underline{s}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(T_B^{\underline{s}}(x)).$$

(iv) Minden $B$ Borel-halmazra, $\underline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ sorozatra és $c$ nemnegatív számra definiáljuk a $B^{\underline{s}\,c}$ halmazt a következőképpen: ha $s = \emptyset$, akkor legyen $B^{\emptyset c} \stackrel{\text{def}}{=} B$. Legyen $B^{s_1 c}$ azon $B$-beli pontok halmaza, amelyeken keresztülmenő $e_1$ irányú egyenes $I_{s_1}$-ben levő részén a $B$ halmaz nagy, azaz

$$B^{s_1 c} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in B :\ f_B^{s_1}(x) \geq c|I_{s_1}|\}.$$

Ugyanígy, ha $B^{\underline{s}^*c}$-t már definiáltuk az $\underline{s}^* = (s_1, s_2, \ldots, s_{k-1})$ sorozatra, akkor legyen $B^{\underline{s}\,c}$ azon $B^{\underline{s}^*c}$-beli pontok halmaza, melyeken keresztülmenő $e_1, e_2, \ldots, e_k$ által feszített $k$-dimenziós altér megfelelő téglájában $B^{\underline{s}^*c}$ nagy, vagyis

$$B^{\underline{s}\,c} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in B^{\underline{s}^*c} :\ f^{\underline{s}}_{B^{\underline{s}^*c}}(x) \geq c \prod_{i=1}^{k} |I_{s_i}|\}.$$

Bebizonyítjuk, hogy ha $B$ zárt, akkor a $B^{\underline{s}\,c}$ halmazok is zártak, és ha $B$ Borel, akkor a $B^{\underline{s}\,c}$ halmazok is Borelek.

Legyen először $B$ zárt, megmutatjuk, hogy ekkor az $\{x :\ f_B^{\underline{s}}(x) \geq c\}$ nívóhalmazok is zártak. Ehhez az kell, hogy $x_n \to x$, $f_B^{\underline{s}}(x_n) \geq c$ esetén $f_B^{\underline{s}}(x) \geq c$ legyen.

Ha valamely $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ sorozatra $x_n^{(i)} + r_i \in I_{s_i}$, akkor $r_i$ eleme az $I_{s_i} - x_n^{(i)}$ intervallumnak. Mivel $x_n \to x$, ezért $x_n^{(i)} \to x^{(i)}$, vagyis elég nagy $n$-re $T_n \stackrel{\text{def}}{=} T_B^{\underline{s}}(x_n)$ benne van $\mathbf{R}^k$ egy rögzített téglájában. Mivel $\lambda(T_n) \geq c$, ezért $\lambda(\limsup T_n) \geq c$, azaz elég megmutatni, hogy $(r_1, r_2, \ldots, r_k) \in \limsup T_n$ esetén $x + r_1 e_1 + r_2 e_2 + \ldots + r_k e_k \in B \cap C_{\underline{s}}$. Ez $B$ zártságából azonnal következik.

Ezzel $\{x : f_B^{\underline{s}}(x) \geq c\}$ zártságát bebizonyítottuk, így a $B^{\underline{s}\,c}$ halmazok is zártak.

Ha $B$ nem zárt, csak Borel, az $f_B^{\underline{s}}(x)$ függvény akkor is biztosan Borel-mérhető, mivel $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ illetve $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ esetén az $f_{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n}^{\underline{s}}$ illetve $f_{\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n}^{\underline{s}}$ függvény az $f_{B_n}^{\underline{s}}$ (Borel-mérhető) függvények pontonkénti határértéke. Így a $B^{\underline{s}\,c}$ halmazok valóban Borelek.

A definícióból világos, hogy $B_1 \subset B_2$ és $c \geq d$ esetén $B_1^{\underline{s}\,c} \subset B_2^{\underline{s}\,d}$. Továbbá, könnyen látható, hogy $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ növő sorozat, $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ és $c > d$ esetén

$$B^{\underline{s}\,c} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^{\underline{s}\,d}$$

teljesül minden $\underline{s}$-re, és $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ csökkenő sorozat, $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ esetén

$$B^{\underline{s}c} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^{\underline{s}\,c}.$$

Ezen előkészületek után rátérhetünk a tétel bizonyítására. Legyen először $B \subset \mathcal{H}$ egy Borel-halmaz, amelyre $B \notin \mathcal{A}(e_1, e_2 \ldots)$. Megmutatjuk, hogy ekkor $B$ nem kocka-nulla.

Mivel $B \notin \mathcal{A}(e_1)$, ezért a "legtöbb" $e_1$ irányú egyenesen $B$ pozitív mértékű. Egy pozitív mértékű halmaz m.m. pontja Lebesgue-sűrűségi pont, vagyis tetszőleges $c < 1$-re az $e_1$ irányú egyeneseken $B$ m.m. pontjához választható egy rövid racionális $I$ intervallum, amelyet $B$ legalább $c|I|$ mértékű halmazban metsz. Precízebben: tetszőleges $\varepsilon, c > 0$-ra

$$B \setminus \Big( \bigcup_{\sigma:\, |I_\sigma| < \varepsilon} B^{\sigma\,c} \Big) \in \mathcal{A}(e_1).$$

Az is könnyen látható (Fubini-tétel segítségével), hogy tetszőleges $\underline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ sorozat, $\varepsilon > 0$ és $1 > c > d > 0$ számok esetén, minden $B$ Borel-halmazra teljesül

$$B^{\underline{s}\,c} \setminus \Big( \bigcup_{\sigma:\, |I_\sigma| < \varepsilon} B^{(\underline{s},\sigma)d} \Big) \in \mathcal{A}(e_{k+1}). \tag{4}$$

Rögzítsünk egy $c_1$-et és egy $\varepsilon_1$-et. Ekkor tehát

$$B \setminus \Big( \bigcup_{\sigma:\,|I_\sigma|<\varepsilon_1} B^{\sigma\, c_1} \Big) \in \mathcal{A}(e_1),$$

így mivel $B \notin \mathcal{A}(e_1, e_2, \ldots)$, ezért biztosan van olyan $\sigma = s_1$, amelyre $|I_{s_1}| < \varepsilon_1$, és

$$B^{s_1 c_1} \notin \mathcal{A}(e_1, e_2, \ldots).$$

Ezek után ugyanígy egy tetszőleges $c_2 < c_1$ konstanst és egy $\varepsilon_2$-t választva (4) alapján van egy olyan $\sigma = s_2$, amelyre

$$B^{(s_1 s_2) c_2} \notin \mathcal{A}(e_1 e_2 \ldots),$$

és így tovább, egy tetszőleges $c_1 > c_2 > \ldots$, és $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ sorozathoz gyárthatunk egy $B \supset B^{s_1 c_1} \supset B^{(s_1 s_2) c_2} \supset \ldots$ halmaz-sorozatot. Legyen ezen halmazok metszete $B^*$.

Jelöljük a $\prod_{n=1}^{\infty} I_{s_n}$ kockát $C$-vel. A $B^* \subset C$ halmazunknak megvan az a kellemes tulajdonsága, hogy bármely pontján keresztül húzott $e_1$ irányú egyenes legalább $c_1 |I_{s_1}|$ (lineáris) mértékű halmazban metszi $C$-t, bármelyik pontján keresztülfektetett $e_1, e_2$ irányú síkmetszete legalább $c_2 |I_{s_1}||I_{s_2}|$ mértékű, stb. Abban reménykedhetnénk, hogy ekkor $B^*$ mértéke a $C$ kockában a megfelelő kocka-mérték szerint legalább $\lim c_n$. Ez esetben csak egy konvergens $c_n \to c > 0$ sorozatot kell választanunk, és készen vagyunk.

De sajnos vannak mindenféle problémák. A $B^*$ metszet akár üres is lehet, és akkor hiába a fenti "kellemes" tulajdonság. Semmi sem garantálja továbbá, hogy a $\prod_{n=1}^{\infty} I_{s_n}$ "kocka" valóban a Hilbert-térben van, ahhoz nekünk konvergens négyzetösszegek kellenének. Végül, de nem utolsó sorban: ha ezekkel nincs gond, akkor sem biztos, hogy $B^*$ mértéke legalább $\lim c_n$; lehet akár 0 is, gondoljunk az $\{x \in \mathcal{H} : \text{csak véges sok } x^{(i)} \text{ nem } 0\}$ halmazra. Ez minden pontján keresztül a teljes egyenest, síkot, stb. tartalmazza, mégis 0-mértékű, hiszen megszámlálható sok véges dimenziós altér uniója!

Annál meglepőbb és fontosabb a következő észrevétel:

**Lemma.** Ha $B^* \neq \emptyset$ és zárt, továbbá $\varepsilon_n < 1/2^n$, akkor a $\prod_{n=1}^{\infty} I_{s_n}$ kocka benne van a Hilbert-térben, és $B^*$ mértéke a kockában legalább $\lim c_n$.

**Bizonyítás.** Az, hogy a kocka benne van a térben, triviális, mert van legalább egy pontja ($B^* \neq \emptyset$ miatt), az élei pedig konvergens négyzetösszegűek.

Jelöljük az $e_1$ irányú egyenesre való vetítést $P_1$-el, az $e_1, e_2$ által meghatározott síkra való vetítést $P_2$-vel, stb, és legyen

$$B_n^* \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{H} :\, \exists y \in B^*,\, P_n(x) = P_n(y)\}.$$

Ekkor $B_n^*$ kocka-mértéke nyilván legalább $c_n$, és $B^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^*$ (mert $B^*$ zárt), tehát $B^*$ mértéke valóban legalább $\lim c_n$. ■

Már csak az a kérdés, hogyan lehet a Lemma feltételeit biztosítani. Az $\varepsilon_n < 1/2^n$ nem probléma, $\varepsilon_n$ értékét tetszőlegesen választottuk. A metszet nemüressége és zártsága sokkal nehezebb ügy.

Ha $B$ kompakt halmaz volt, akkor a metszet biztosan nemüres és zárt, hiszen ekkor kompakt halmazokat metszünk össze. Vagyis ha találnánk $B$-ben egy kompakt $K$ részhalmazt, amelyre $K \notin \mathcal{A}(e_1, e_2, \ldots)$, akkor készen lennénk. Sajnos ilyen kompakt részhalmaz nem biztos, hogy létezik.

Ha $B$ nem kompakt, de zárt, akkor legalább azt tudjuk, hogy a metszet zárt lesz, csak hát lehet, hogy üres. Ez esetben csináljuk a következőt:

Tudjuk, hogy minden $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ sorozatra és $0 < \varepsilon$, $0 < d < c < 1$-re teljesül (4). Ezért biztosan létezik egy olyan $x_0 \in B$, amelyre

$$x_0 \notin B^{\underline{s}\,c} \setminus \Big( \bigcup_{\sigma:\, |I_\sigma| < \varepsilon} B^{(\underline{s},\sigma)d} \Big) \tag{5}$$

teljesül minden $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ sorozatra és minden $0 < \varepsilon$, $0 < d < c < 1$ racionális számra, hiszen ez csak megszámlálható sok halmaz. Válasszunk tehát egy pozitív határértékű $c_1 > c_2 > \ldots$ racionális sorozatot, $\varepsilon_n < 1/2^n$ racionális számokat, és az első lépésben válasszunk olyan $s_1$-et, amelyre $|I_{s_1}| < \varepsilon_1$ és $x_0 \in B^{s_1 c_1}$ (ilyen $s_1$ (5) miatt biztosan létezik). A következő lépésben válasszunk olyan $s_2$-t, amelyre $|I_{s_2}| < \varepsilon_2$ és $x_0 \in B^{(s_1 s_2) c_2}$, stb., végül $B^*$-ban benne lesz az $x_0$, és készen is vagyunk.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy ha $B \notin \mathcal{A}(e_1, e_2 \ldots)$ és zárt, akkor nem kocka-nulla, de hátra van még a tetszőleges Borel-halmaz esete. Az a célunk, hogy egy Borel-halmazt zárt halmazokból "építsünk fel".

Ez valóban lehetséges, az úgynevezett *Szuszlin-operáció* segítségével. Ismert eredmény a leíró halmazelméletben, hogy minden $B$ Borel-halmaz felírható

$$B = \bigcup_{\underline{n}} \bigcap_{k} F_{n_1 n_2 \ldots n_k} \tag{6}$$

alakban, ahol

(i) minden $F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ halmaz zárt;

(ii) $F_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset F_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}}$;

(iii) $F_{n_1 n_2 \ldots n_k} \subset F_{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}(n_k+1)}$;

(iv) a $B_{n_1 n_2 \ldots n_k} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\underline{m}} \bigcap_l F_{n_1 n_2 \ldots n_k m_1 m_2 \ldots m_l}$ halmazok Borelek.

Ezek után válasszunk egy $x_0$-t, amelyre

$$x_0 \notin B^{\underline{s}\, c}_{n_1 n_2 \ldots n_k} \setminus \Big( \bigcup_{\sigma : |I_\sigma| < \varepsilon} B^{(\underline{s},\sigma) d}_{n_1 n_2 \ldots n_k} \Big)$$

minden $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$-ra, $n_1, n_2, \ldots, n_k$-ra és minden $0 < \varepsilon$, $0 < d < c < 1$ racionális számra. Válasszunk egy $1 > c_0 > c_1 > c_2 > \ldots > c > 0$ racionális sorozatot. Ekkor:

$$x_0 \in B = \bigcup_{n_1} B_{n_1} \Longrightarrow \exists n_1 : x_0 \in B_{n_1} = B^{\emptyset\, c_0}_{n_1}$$

$$x_0 \notin B^{\emptyset, c_0}_{n_1} \setminus \bigcup\nolimits_{s_1 : |I_{s_1}| < 1/2} B^{s_1\, c_1}_{n_1} \Longrightarrow \exists s_1 : |I_{s_1}| < 1/2 \text{ és } x_0 \in B^{s_1\, c_1}_{n_1}$$

$$B_{n_1 n_2} \nearrow B_{n_1} \Longrightarrow B^{s_1\, c_1}_{n_1} \subset \bigcup_{n_2} B^{s_1\, c_2}_{n_1 n_2} \Longrightarrow \exists n_2 : x_0 \in B^{s_1\, c_2}_{n_1 n_2}$$

$$x_0 \notin B^{s_1\, c_2}_{n_1 n_2} \setminus \bigcup\nolimits_{s_2 : |I_{s_2}| < 1/4} B^{s_1 s_2\, c_3}_{n_1 n_2} \Longrightarrow \exists s_2 : |I_{s_2}| < 1/4 \text{ és } x_0 \in B^{s_1 s_2\, c_3}_{n_1 n_2}$$

$$B_{n_1 n_2 n_3} \nearrow B_{n_1 n_2} \Longrightarrow B^{s_1 s_2\, c_3}_{n_1 n_2} \subset \bigcup_{n_3} B^{s_1 s_2\, c_4}_{n_1 n_2 n_3} \Longrightarrow \exists n_3 : x_0 \in B^{s_1 s_2\, c_4}_{n_1 n_2 n_3}$$

Ezt így folytatva

$$x_0 \in \bigcap_k B^{s_1 s_2 \ldots s_k\, c}_{n_1 n_2 \ldots n_k},$$

és nyilván

$$\bigcap_k B^{s_1 s_2 \ldots s_k\, c}_{n_1 n_2 \ldots n_k} \subset \bigcap_k F^{s_1 s_2 \ldots s_k\, c}_{n_1 n_2 \ldots n_k} \subset F,$$

ahol

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_k F_{n_1 n_2 \ldots n_k}. \tag{7}$$

(6) és (7) alapján $F \subset B$, és $F_{n_1} \supset F_{n_1 n_2} \supset \ldots$ miatt

$$\bigcap_k F^{\underline{s}\, c} = \bigcap_k \Big( \bigcap_l F_{n_1 n_2 \ldots n_l} \Big)^{\underline{s}\, c} = \bigcap_k \bigcap_l F^{\underline{s}\, c}_{n_1 n_2 \ldots n_l} \ni x_0,$$

vagyis $A$ egy $F$ zárt részhalmazára találtunk egy nemüres zárt $F^* \overset{\text{def}}{=} \cap F^{\underline{s}\,c}$ halmazt.

Ezzel az állítást tetszőleges $B \notin \mathcal{A}(e_1, e_2, \ldots)$ Borel-halmazra bebizonyítottuk.

A további nehézségek ($e_1, e_2, \ldots$ sorozat helyett tetszőleges olyan $x_1, x_2, \ldots$ sorozat, amely sűrű alteret feszít, illetve Hilbert-tér helyett Banach-tér) már csak technikaiak.

Legyen $\mathcal{B}$ egy tetszőleges szeparábilis Banach-tér. Közismert a következő Lemma:

**Lemma.** Minden $x_1, x_2, \ldots \in \mathcal{B}$ sorozathoz, amelyre $\operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots)$ sűrű $\mathcal{B}$-ben, található olyan $e_1, e_2, \ldots \in \mathcal{B}$, $e_1^*, e_2^*, \ldots \in \mathcal{B}^*$ ortogonális rendszer (azaz $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$), amelyre $\bigcap_{i=1}^{\infty} \ker e_i^* = \{0\}$, és az $e_1, e_2, \ldots$ vektorok ugyanazt az alteret feszítik, mint $x_1, x_2, \ldots$.

Ekkor nyilván $B \in \mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots) \iff B \in \mathcal{A}(e_1, e_2, \ldots)$, és az egész bizonyítás megismételhető, csak az "$x$ $i$-edik koordinátája" helyett mindenütt $\langle e_i^*, x \rangle$-et kell mondanunk (lsd. [7]).

## 7. Eltérő viselkedés a véges dimenziós esettel szemben

A 0-mértékű halmazok egy fontos (és triviális) tulajdonsága $\mathbf{R}^n$-ben, hogy a Lipschitz-leképezések megőrzik őket, azaz 0-mértékű halmaz Lipschitz-képe 0-mértékű. Ugyanez nem igaz a végtelen dimenziós Hilbert-térben. V.I. Bogachev-től származik a következő tétel ([5]):

**7.1. Tétel.** Legyen a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér egységgömbje $B$. Ekkor megadható olyan $A \subset B$ halmaz, amely nem Gauss-nulla, de a képe egy alkalmas $f : B \to \mathcal{H}$ bi-Lipschitz-leképezésnél Aronszajn-nulla. Sőt, megadható olyan $A$ és $f$, amelyre $f(A)$ minden egyenest legfeljebb 3 pontban metsz.

**Bizonyítás.** Legyenek $S_1$ és $S_2$ olyan pozitív és nyom-osztályú operátorok $\mathcal{H}$-n, melyekre $S_1\mathcal{H} \cap S_2\mathcal{H} = \{0\}$, és a képük sűrű. Válasszunk egy $\{e_n\}$ ortonormált bázist $S_1$ sajátértékeiből, legyen $S_1 e_n = \lambda_n e_n$.

Tekintsük az $S = S_1^3$-höz tartozó $\mu$ Gauss-mértéket. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha $\lambda_n \to 0$ elég gyorsan, akkor az $S_1\mathcal{H}$ képhalmaz tartója lesz $\mu$-nek, és minden 0-körüli $B_0$ gömbre $\mu(S_1\mathcal{H} \cap B_0) > 0$.

Legyen $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + ||x||^2 S_2 x$. Ez $C^1$ (sőt $C^\infty$), vagyis Lipschitz-tulajdonságú a $B_0$ gömbökön, és 0-ban a deriváltja az identitás. Ekkor az inverz-leképezés tétel miatt bi-Lipschitz-tulajdonságú egy kis 0-körüli környezetben.

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy $f(S_1\mathcal{H})$ minden egyenest legfeljebb 3 pontban metsz. Tegyük fel, hogy valamely $x, y, z \in S_1\mathcal{H}$ pontokra és $t \neq 0$-ra $f(x) - f(y) = t(f(y) - f(z))$, és $x \neq y$. Mivel $S_1\mathcal{H} \cap S_2\mathcal{H} = \{0\}$, ezért ekkor

$$x - y = t(y - z) \quad \text{és} \quad ||x||^2 S_2 x - ||y||^2 S_2 y = t(||y||^2 S_2 y - ||z||^2 S_2 z).$$

Ebből $S_2$ injektivitása alapján

$$t^2(||x||^2 x - ||y||^2 y) = t^3 ||y||^2 y - ||(t+1)y - x||^2((t+1)y - x),$$

ami egy nem-triviális másodfokú egyenlete $t$-nek, mert $||(t+1)y - x||^2$ kifejtésekor a harmadfokú tag kiesik, és a 0 nem gyöke. Vagyis legfeljebb egy megoldása lehet a $t = -1$-en kívül. $\blacksquare$

A fenti jelenség nemcsak az Aronszajn-nulla halmazokkal hanem a Haar-nulla halmazokkal is előfordul. E. Matoušková egy, a közelmúltban bebizonyított tétele alapján a Haar-nulla halmazok sem invariánsak a bi-Lipschitz homeomorfizmusokra.

Talán ennél is meglepőbb a következő, D. Preiss-tól és J. Tišer-től származó tétel ([14]), amely azt mutatja, hogy egy végtelen dimenziós Banach-térben a $\sigma$-porózus halmazok lehetnek nagyon nagyok:

**7.2. Tétel.** Minden szeparábilis végtelen dimenziós $\mathcal{B}$ Banach-tér felbontható egy Aronszajn-nulla és egy $\sigma$-porózus halmaz uniójára.

**Bizonyítás.** Normalizáljuk a tér minden egyenesén a Lebesgue-mértéket $\mathcal{B}$ normája szerint, és legyen $\{x_n\}$ egy rögzített sűrű sorozat. Válasszunk egy $\{z_n\}$ sorozatot, amelyre $||x_n - z_n|| \leq 11/2$, és $d(z_n, \mathrm{span}(z_1, \ldots, z_{n-1})) > 5$. Ekkor a $z_n$ pontok körüli 6 sugarú gömbök uniója lefedi a teret, jelöljük a $z_n$ pontok körüli 1 sugarú gömbök unióját $G$-vel.

Rögzítsünk egy $l$ egyenest, és minden olyan $z_n$ pontra, amelyre $d(z_n, l) < 1$, válasszunk egy $w_n$ pontot $l$-en, amelyre $||z_n - w_n|| < 1$. Könnyen ellenőrizhető, hogy bármely két $w_i$ pont távolsága legalább 3, és bármely $i < j < k$-ra $w_k$ távolsága a $[w_i, w_j]$ szakasztól legalább $||w_i - w_j||$. Ebből indukcióval következik, hogy a $w_i$ pontok tetszőleges $n$ elemű részhalmazának az átmérője legalább $2^{n-1}$.

Ekkor az $l$ egyenes bármely két $x, y$ pontjára, melyek távolsága nagyobb, mint 1, pontosabban $2^{m-1} < ||x-y|| \leq 2^m$ valamely pozitív egész $m$-re, az $[x, y]$ szakasz legfeljebb $m+1$ db $G$-beli gömböt metszhet. Ezért a metszet Lebesgue-mértéke legfeljebb $2(m+1) \leq \frac{m+1}{2^{m-2}}||y-x||$. Tehát minden $k \geq 1$-re van olyan $s_k$ pozitív szám, hogy a tér bármely $t \geq s_k$ hosszúságú szakasza legfeljebb $\frac{1}{2^k}t$ mértékű halmazban metszi $G$-t.

Ezek után legyen $G_k = \frac{1}{2^k s_k}G$, ekkor a $t \leq \frac{1}{2^k}$ hosszúságú szakaszok legfeljebb $\frac{t}{2^k}$ mértékű halmazban metszik $G_k$-t, így biztosan 0 mértékű halmazban metszik $\limsup G_k$-t. Másrészt, $\limsup G_k$ komplementere $\sigma$-porózus, hiszen a $z_n$ középpontú 6 sugarú gömbök a teret lefedték. ■

## Hivatkozások


[1] N. Aronszajn: Differentiability of Lipschitz mappings between Banach spaces, Studia Math., 57:147-190, 1976.

[2] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss: Geometric Nonlinear Functional Analysis, előkészületben

[3] P. Billingsley: Convergence on Probability Measures, Wiley, 1968.

[4] V.I. Bogachev: Negligible sets in locally convex spaces, Mat. Zametki, 36:51-64, 1984. (oroszul)

[5] V.I. Bogachev: Some results on differentiable measures, Math. USSR-Sb., 55:335-349, 1986.

[6] J.P.R. Christensen: On sets of Haar measure zero in Abelian Polish groups, Israel J. Math., 13:255-260, 1972.

[7] M. Csörnyei: Aronszajn null and Gaussian null sets coincide, Israel J. Math., 1998.

[8] A. Hinchin: Correlation theory of stationary random processes, Uspehi. Mat. Nank., 42-51, 1938. (oroszul)

[9] W.B. Johnson and J. Lindenstrauss: Handbook on the Geometry of Banach spaces, előkészületben

[10] P. Mankiewicz: On the differentiability of Lipschitz mappings in Fréchet spaces, Studia Math., 45:15-29, 1973.

[11] E. Matoušková: Lipschitz images of Haar null sets, előkészületben

[12] R.A. Milnos: Generalized random processes, Trudy Mosk. Mat. Ob., 8:497-518, 1959. (oroszul)

[13] R.R. Phelps: Gaussian null sets and differentiability of Lipschitz maps on Banach spaces, Pacific J. Math., 77:523-531, 1978.

[14] D. Preiss and J. Tišer: Two unexpected examples concerning differentiability of Lipschits functions on Banach spaces, GAFA Israel Seminar 92-94, 219-238. Birkhäuser, 1995. (edited by V.D. Milman and J. Lindenstrauss)

[15] D. Renfro: A study of porous and $\sigma$-porous sets, előkészületben

[16] V.V. Sazonov: A remark on characteristic functionals, Teor. Ver. i ee Prim., 3:201-203, 1958. (oroszul)