Morin-leképezések vizsgálata

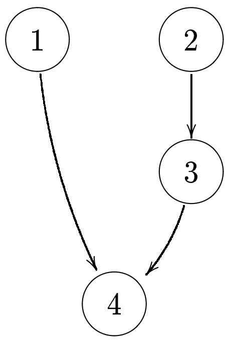
Csorba Péter

Témavezető: Szűcs András
docens

ELTE TTK
2000.

Tartalomjegyzék

A fejezetek egymásra épülését a következő ábra mutatja:



Bevezetés

A differenciáltopológia a sima sokaságok osztályozásával foglalkozik, illetve sima sokaságok közötti leképezéseket vizsgál. A sima leképezések lokális osztályozását célozza meg a *lokális szingularitáselmélet*, amely elsősorban Mather nevéhez füződik. Az elmélet (mely az analízisbeli problémát algebraira redukálja) meglehetősen pontos leírását adja a leképezések lokális viselkedésének: szingularitásaikat (az értelmezési tartomány azon pontjait, ahol a Jacobi-mátrix nem maximális rangú) típusuk szerint jól körülhatárolt halmazokba sorolja, melyekről bebizonyítja, hogy jól kezelhető struktúrával rendelkeznek (a szakdolgozatban ezek sokaságok lesznek (ld. az 1.6. lemmát)). Ezen eredmények alkotják a *globális szingularitáselmélet* bázisát, mely a topológiának viszonylag fiatal, fejlődésének elején lévő területe. A globális szingularitáselmélet alapvető problémafelvetései a következők: Mi mondható el a szinguláris halmaz, illetve annak bizonyos típusú szingularitásokból álló részhalmazainak topológiájáról? Rögzített sokaságok között milyen szingularitásokkal bíró leképezések lehetségesek, illetve egy ilyen leképezés létezése esetén mi mondható el a sokaságok topológiájáról?

Az előbbieknek megfelelően a szakdolgozatban a Morin-leképezésekkel foglalkozunk (ld. az 1.4. definíciót). Az ezekre vonatkozó eredmények az 1. és 4. fejezetben találhatóak. Az 1. fejezetben igazoljuk Fukuda [F] és Saeki [S] szinguláris halmazok Euler-karakterisztikájára vonatkozó formuláját (1.18. tétel) Morse-elméleti eszközökkel [B], [M]. A 4. fejezetben található eredmények [SS] tulajdonképpen az $\mathbb{R}^p$ képsokaságra vonatkozó eredmények [KS] általánosításai, felhasználva a majdnem paralelizálhatóság fogalmát és Hirsch [Hi] elméletét. Az itt szereplő tételek bizonyításához eredetileg Eccles eredményét (3.16. tétel) használták fel, amely helyett mi Koschorke [Ko] 3.13. tételét használjuk, ami egy kicsit egyszerűbbé is teszi a bizonyításokat. Ezek az eredmények – melyek összekapcsolódnak páratlan Hopf-invariáns létezésének problémájával [A], és kobordizmus csoportokkal [W] – a 3. fejezetbe kerültek. A 2. fejezetben az immerziók többszörös pontjaira vonatkozó formula [He] szerepel, melyre néhány egyszerű következmény igazolásához van szükségünk.

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Szűcs Andrásnak a rengeteg hasznos tanácsért és észrevételért.

1. A Morin-szingularitások

A fejezet elején áttekintünk néhány definíciót és tételt a Morin-szingularitásokkal kapcsolatban. Legyenek M^n és N^p n-, illetve p-dimenziós sokaságok és $f : M^n \to N^p$ sima leképezés. Jelölje $\Sigma^i(f)$ azon $x \in M$ pontok halmazát, melyekben a lineáris érintőleképezés rangja $\min\{n, p\} - i$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$.

1.1. Tétel. *Ha f stabil leképezés (ld. a 4.4. definíciót), akkor $\Sigma^i(f)$ részsokaság, és $n - \dim \Sigma^i(f) = i(|p-n|+i)$.*

1.2. Definíció. *Ha $i, j \in \mathbb{N}$ és f stabil, akkor legyen $\Sigma^{i,j}(f) := \Sigma^j(f|_{\Sigma^i(f)})$. Mivel $C^\infty(M, N)$ egy nyílt, sűrű részhalmazából vett f-ekre ez ismét részsokaság, így indukcióval definiálható minden indexhalmazra:*

$$\Sigma^{i_1,\dots,i_k,i_{k+1}}(f) := \Sigma^{i_{k+1}}\Big(f|_{\Sigma^{i_1,\dots,i_k}(f)}\Big).$$

A definíció miatt nyilván $M \supset \Sigma^{i_1}(f) \supset \Sigma^{i_1,i_2}(f) \supset \dots$.

1.3. Állítás. *$n \geq i_1 \geq i_2 \geq \dots$, illetve a nem ilyen sorozatokra $\Sigma^{i_1,\dots,i_k}(f) = \emptyset$.*

Bizonyítás: Nyilván, ha A részsokaság, akkor $\ker\left(f|_A\right)'(x) = \ker f'(x) \cap T_x A$, amiből az állítás formálisan következik. □

Az is könnyen látható, hogy az indexsorozat végén található 0-k egy kivételével mindig elhagyhatóak a megfelelő halmaz megváltozása nélkül.

A továbbiakban az $i_1 = 1$ és $n \geqslant p$ esettel – a Morin-szingularitásokkal – fogunk foglalkozni.

1.4. Definíció. *Legyen $n \geqslant p$. Az $A_k(f) := \Sigma^{\overbrace{1,\dots,1}^{k},0}(f)$ $(k \geqslant 1)$ alakú halmazokat (amelyek persze csak akkor definiáltak, ha f stabil) Morin-szingularitásoknak nevezzük. Ezenkívül $q \in M$ hajtás, csúcs vagy fecskefarok szingularitású, ha q rendre A_1, A_2 vagy A_3 típusú Morin-szingularitás. Az $f : M^n \to N^p$ Morin-leképezés, ha f-nek csak Morin-szingularitása van. Az f szingularitásainak a halmazát $S(f)$-el jelöljük, azaz*

$$S(f) = \{\overline{x} \in M | \mathrm{rank} f'(\overline{x}) < p\}.$$

Ha n és p adottak, akkor bármely $i_1, \dots, i_k, 0$ alakú indexsorozathoz hozzárendelhető véges sok ún. *normálforma*, amelyek valamennyien $(\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^p, \mathbf{0})$ típusú sima leképezések (leképezés-csírák) azzal a tulajdonsággal, hogy ha f stabil és $x \in \Sigma^{i_1,\dots,i_k,0}(f)$, akkor alkalmas $(U; \varphi)$ és $(V; \psi)$ M-, illetve N-beli x-, illetve $f(x)$ középpontú (azaz $\varphi(x) = \mathbf{0}$ és $\psi(f(x)) = \mathbf{0}$) térképek esetén a $\psi \circ (f|_U) \circ \varphi^{-1}$ leképezés ezen normálformák valamelyikével egyezik meg (illetve eleme a megfelelő függvénycsírának).

1.5. Tétel (Morin). *Ha $n \geqslant p$, f stabil és $q \in A_k(f) \subset M$, akkor léteznek olyan $(U; x_1, x_2, \dots, x_n)$ és $(V; y_1, y_2, \dots, y_p)$ M-, illetve N-beli q-, illetve $f(q)$ középpontú lokális koordináta-rendszerek, melyekben felírva f a következő alakú:*

$$\begin{aligned} y_i \circ f &= x_i \quad (1 \leqslant i \leqslant p-1) \\ y_p \circ f &= x_p^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_p^{k-i} \pm x_{p+1}^2 \pm \ldots \pm x_n^2 \end{aligned}$$

1.6. Lemma. *Legyen $f : M^n \to N^p$ Morin-leképezés. Ekkor a következők teljesülnek:*

(1) $A_k(f)$ és $\overline{A_k(f)}$ $p-k$-dimenziós részsokaságok.

(2) $\overline{A_k(f)} = \bigcup\limits_{i \geqslant k} A_i(f)$.

(3) Az f megszorítása az $A_k(f)$ részsokaságra immerzió: $f\big|_{A_k(f)} : A_k(f) \looparrowright N$

*(4) Ha $q \in A_{k+1}(f)$, akkor rank $\left(d\left(f\big|_{\overline{A_k(f)}} \right)_q : T_q\left(\overline{A_k(f)}\right) \to T_{f(q)}N \right) = $
$= p-k-1$.*

(5) Ha $q \in A_{k+1}(f)$, akkor $df_q\left(T_q\left(\overline{A_k(f)}\right)\right) = df_q\left(T_q\left(A_{k+1}(f)\right)\right)$.

Bizonyítás: Tekintsük f-et lokális alakban egy $A_k(f)$ pont körül, így

$$f' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & g_2 & \dots & g_{p-1} & g_p & \pm 2x_{p+1} & \dots & \pm 2x_n \end{pmatrix}, \text{ ahol}$$

$g_j = \partial_j \left(x_p^{k+1} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} x_i x_p^{k-i} \right)$. Rank$f' \geq p-1$ és pontosan akkor áll fenn az egyenlőség, ha $g_p = x_{p+1} = \ldots = x_n = 0$ teljesül. Tehát $\Sigma^1(f) = S(f) = = \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, g_p = x_{p+1} = \ldots = x_n = 0\} = \{(x_1, \dots, x_p) \,|\, g_p = 0\}$. Így $\Sigma^1(f)$ megegyezik a $\Sigma^1(f\big|_{\mathbb{R}^p})$-vel, ahol $\mathbb{R}^p = \{x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0\}$. Egy $\overline{x} \in \Sigma^1(f\big|_{\mathbb{R}^p})$ pontban $(f\big|_{\mathbb{R}^p})'$ mag iránya x_p. Az $f\big|_{\Sigma^1(f)}$ leképezés pontosan akkor nem maximális rangú, ha grad$(g_p) \perp (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^p$, azaz ha $\partial_p g_p = 0$. Így

$$\Sigma^{1,1}(f) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^p \,|\, g_p(\overline{x}) = \partial_p g_p(\overline{x}) = 0\}.$$

Hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$\Sigma^{\overbrace{1,\dots,1}^{l}}(f) = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{R}^p \,|\, g_p(\overline{x}) = \partial_p g_p(\overline{x}) = \ldots = \overbrace{\partial_p \ldots \partial_p}^{l-1} g_p(\overline{x}) = 0 \right\}.$$

Mivel g_p k-ad fokú polinomja x_p-nek $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ együtthatókkal), így $\overbrace{\partial_p \ldots \partial_p}^{k} g_p(\overline{x}) = (k+1)! \neq 0$, míg $\overbrace{\partial_p \ldots \partial_p}^{l<k} g_p(0, \ldots, 0) = 0$. Ezzel igazoltuk, ha $x \in A_k(f)$ akkor $x \in \Sigma^{\overbrace{1,\dots,1}^{k},0}(f)$, míg fordítva ha $x \in \Sigma^{\overbrace{1,\dots,1}^{k},0}(f)$, akkor Morin-tétele szerint feltehető, hogy f lokálisan a fenti alakú, azaz, hogy $x \in A_k(f)$. Az eddigiek szerint tehát $A_k(f) = \Sigma^{\overbrace{1,\dots,1}^{k},0}(f)$, így (1), (3), (4) és (5) valóban teljesül. (2) abból következik, hogy a fenti alakban $A_l(f) =$
$= \left\{ \overline{x} \in \mathbb{R}^p \,|\, g_p(\overline{x}) = \partial_p g_p(\overline{x}) = \ldots = \overbrace{\partial_p \ldots \partial_p}^{l-1} g_p(\overline{x}) = 0 \text{ és } \overbrace{\partial_p \ldots \partial_p}^{l} g_p(\overline{x}) \neq 0 \right\} =$
$= \Sigma^{\overbrace{1,\dots,1}^{l},0}(f)$, tehát ennek topologikus lezártja $\overline{A_l(f)} = \overline{\Sigma^{1,\ldots,1,0}(f)} =$
$= \left\{ \overline{x} \in \mathbb{R}^p \,|\, g_p(\overline{x}) = \partial_p g_p(\overline{x}) = \cdots = \overbrace{\partial_p \ldots \partial_p}^{l-1} g_p(\overline{x}) = 0 \right\}$, ami nyilván azonos az $\bigcup_{i \geqslant k} A_i(f) = \bigcup_{i \geqslant k} \Sigma^{\overbrace{1,\dots,1}^{i},0}(f)$. Ezzel a lemmát igazoltuk. □

a. A Fukuda-formula

1.7. Lemma (Mather). *Legyen C^k k-dimenziós sokaság beágyazva $\mathbb{R}^n$-be. Ekkor majdnem minden $L \in \mathbb{RP}^{n-1}$ egyenesre a $\pi_L\big|_C : C \to L$ Morse-függvény, ahol $\pi_L : \mathbb{R}^n \to L$ az L egyenesre való merőleges vetítés.*

Bizonyítás: Legyen $P_0 \in C$ körül egy koordinátarendszer C-n $(u_1, \ldots, u_k)$. A beágyazás pedig $x(u_1, \ldots, u_k) = (x_1(u_1, \ldots, u_k), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_k))$. Legyen $P_0 = (0, \ldots, 0)$ egy környezetén adott $w_1(u_1, \ldots, u_k), \ldots, w_{n-k}(u_1, \ldots, u_k)$ ortonormált normálmezők. Ekkor az M sokaság egy E csőszerű-környezetének a beágyazását kapjuk $\mathbb{R}^n$-be a következőképpen:

$$(u_1, \ldots, u_k, t_1, \ldots, t_{n-k}) \mapsto \left(x(u_1, \ldots, u_k) + \sum_{\alpha=1}^{n-k} t_\alpha w_\alpha(u_1, \ldots, u_k) \right)$$

Nekünk most E-nek egy Gauss-szerű leképezésére lesz szükségünk:

$$e : (u_1, \dots, u_k, t_1, \dots, t_{n-k}) \mapsto \sum_{\alpha=1}^{n-k} t_\alpha w_\alpha(u_1, \dots, u_k)$$

Ekkor: $\frac{\partial e}{\partial u_i} = \sum_{\alpha=1}^{n-k} t_\alpha \frac{\partial w_\alpha}{\partial u_i}$, és $\frac{\partial e}{\partial t_\beta} = w_\beta$. Így az e érintő leképezése a $\frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_k}$, $w_1, \dots, w_{n-k}$ bázisban:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

ahol D az n–$k \times n$–k-as egységmátrix, C az n–$k \times k$-as null-mátrix, A egy $k \times k$-as, B pedig egy $k \times n-k$-as mátrix, ahol $A_{i,j} = \left\langle \sum_{\alpha=1}^{n-k} t_\alpha \frac{\partial w_\alpha}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle$, és $B_{i,j} = \left\langle \sum_{\alpha=1}^{n-k} t_\alpha \frac{\partial w_\alpha}{\partial u_i}, w_j \right\rangle$. Azonban $0 = \left\langle w_\alpha, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial u_i} \left\langle w_\alpha, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial w_\alpha}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle + \left\langle w_\alpha, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle$, tehát $\left\langle \sum_{\alpha=1}^{n-k} t_\alpha \frac{\partial w_\alpha}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle = -\left\langle \sum_{\alpha=1}^{n-k} t_\alpha w_\alpha, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle$, rögzített t_α, w_α-k esetén teljesül még, hogy: $\left\langle \sum_{\alpha=1}^{n-k} t_\alpha w_\alpha, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle = \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \left\langle \sum_{\alpha=1}^{n-k} t_\alpha w_\alpha, x \right\rangle$.
Legyen L egy rögzített egyenes, és M erre való vetítésének P_0 egy kritikus pontja. Ekkor megfelelő $t_1, \dots, t_{n-k}$-ra L irányvektora $\sum_{\alpha=1}^{n-k} t_\alpha w_\alpha(0, \dots, 0)$ lesz. Tehát az L egyenesre való vetítésnek P_0 pontosan akkor nem elfajuló kritikus pontja, ha $\det(A) \neq 0$, ami ekvivalens azzal, hogy $\det\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \neq 0$. Ez utóbbi determináns nem nulla volta egy $Q(u_1, \dots, u_k, t_1, \dots, t_{n-k})$ pontban azt jelenti, hogy e-nek Q reguláris pontja, és ekkor $Q_c(u_1, \dots, u_k, ct_1, \dots, ct_{n-k})$ $c \in \mathbb{R} \setminus 0$ is reguláris pontja e-nek. Tehát ha egy pont reguláris érték (és nem az origó $\mathbb{R}^n$-ben), akkor a pontot az origóval összekötő egyenes minden origótól különböző pontja is reguláris értéke e-nek, és ez fordítva is nyilván igaz (azaz ha nem reguláris érték, akkor az egyenes pontjai sem azok). A Sard-lemma szerint e reguláris értékeinek halmaza nyílt, sűrű. Az eddigiek szerint tehát az egységgömbnek ($S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$) is nyílt, sűrű részét adják az e reguláris értékei. Ezzel a lemmát igazoltuk, mivel egy reguláris érték által kijelölt egyenesre való vetítés Morse. □

1.8. Definíció. *Egy $f : N \to \mathbb{R}$ Morse-függvény esetén jelölje $c(f)$ a kritikus pontok halmazát.*

1.9. Lemma. *Legyen $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ Morin-leképezés, M zárt n-dimenziós sokaság, $n \geqslant p$, ekkor majdnem minden $L \in \mathbb{RP}^{p-1}$ egyenesre a következők teljesülnek:*

(1) $c\left(\pi_L \circ f\big|_{\overline{A_k(f)}}\right) \cap \overline{A_{k+2}(f)} = \emptyset.$

(2) Ha $q \in A_{k+1}(f)$, akkor q pontosan akkor kritikus pontja $\pi_L \circ f\big|_{A_{k+1}(f)}$-nek, ha q kritikus pontja $\pi_L \circ f\big|_{\overline{A_k(f)}}$-nak.

(3) Ha $q \in A_{k+1}(f)$, akkor q pontosan akkor nem elfajuló kritikus pontja $\pi_L \circ f\big|_{A_{k+1}(f)}$-nek, ha nem elfajuló kritikus pontja $\pi_L \circ f\big|_{\overline{A_k(f)}}$-nak.

(4) Minden $q \in A_p(f)$ esetén q nem elfajuló kritikus pontja $\pi_L \circ f\big|_{\overline{A_{p-1}(f)}}$-nak.

Bizonyítás: Legyen $q \in \overline{A_{k+2}(f)}$. Ekkor q pontosan akkor kritikus pontja $\pi_L \circ f\big|_{\overline{A_k(f)}}$-nak, ha $df_q\left(T_q\left(\overline{A_k(f)}\right)\right) \subset \pi_L^{-1}(0)$, ahol $0 \in T_{f(q)}\mathbb{R}^p$, amit most minden q-ra ugyanazzal az $\mathbb{R}^p$-vel azonosítunk. Azonban tudjuk, hogy $\dim df_q\left(T_q\left(\overline{A_k(f)}\right)\right) = \dim \overline{A_k(f)} - 1 = p - k - 1$. Ha van egy $p-k-1$ dimenziós alterünk $\mathbb{R}^p$-ben, akkor az erre merőleges altér $p-(p-k-1) = k+1$ dimenziós lesz. Így adott q-ra a rossz egyenesek (azok az $L \in \mathbb{RP}^{p-1}$ egyenesek, melyekre történő vetítés során q kritikus pont lenne) benne vannak egy $k+1$ dimenziós altérben, tehát projektív dimenziójuk k. Ezek a rossz egyenesek kijelölnek $\overline{A_{k+2}(f)} \times \mathbb{RP}^{p-1}$-ben egy $(p-k-2)+k = p-2$ dimenziós részsokaságot. Az $\overline{A_{k+2}(f)} \times \mathbb{RP}^{p-1} \to \mathbb{RP}^{p-1}$ projekciónál a rossz egyenesek $p-2$-dimenziós képe adja az összes rossz egyenest. Mivel $\dim \mathbb{RP}^{p-1} = p-1$, így majdnem minden $L \in \mathbb{RP}^{p-1}$-ra minden $q \in \overline{A_{k+2}(f)}$ esetén $df_q\left(T_q\left(\overline{A_k(f)}\right)\right) \not\subset \pi_L^{-1}(0)$, azaz q nem kritikus pontja $\pi_L \circ f\big|_{\overline{A_k(f)}}$-nak. Ezzel (1)-et igazoltuk.

Legyen $q \in A_{k+1}(f)$. Tudjuk, hogy $df_q\left(T_q\left(\overline{A_k(f)}\right)\right) = df_q\left(T_q\left(A_{k+1}(f)\right)\right)$. Amint már láttuk az (1) bizonyításánál q pontosan akkor kritikus pontja $\pi_L \circ f\big|_{A_{k+1}(f)}$-nak, ha $df_q\left(T_q\left(A_{k+1}(f)\right)\right) \subset \pi_L^{-1}(0)$, ami ekvivalens azzal, hogy $df_q\left(T_q\left(\overline{A_k(f)}\right)\right) \subset \pi_L^{-1}(0)$, azaz, hogy q kritikus pontja $\pi_L \circ f\big|_{\overline{A_k(f)}}$-nak. Ezzel (2)-t igazoltuk.

Legyen $q \in A_{k+1}(f)$. Ekkor léteznek lokális térképek $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ q és $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ $f(q)$ körül, melyekre:

$$y_i \circ f = x_i \quad (1 \leqslant i \leqslant p-1), \quad y_p \circ f = x_p^{k+2} + \sum_{i=1}^{k} x_i x_p^{k-i+1} \pm x_{p+1}^2 \pm \ldots \pm x_n^2.$$

Láttuk, hogy ekkor

$$A_{k+1}(f) = \left\{ (x_1, \ldots, x_p) | g_p(\overline{x}) = \partial_p g_p(\overline{x}) = \ldots = \overbrace{\partial_p \ldots \partial_p}^{k} g_p(\overline{x}) = 0 \right\},$$

most a $\overbrace{\partial_p \dots \partial_p}^{k+1} g_p(\overline{x}) = (k+2)! \neq 0$ feltétel teljesül.

$$\overline{A_k(f)} = \left\{ (x_1, \dots, x_p) \,|\, g_p(\overline{x}) = \partial_p g_p(\overline{x}) = \dots = \overbrace{\partial_p \dots \partial_p}^{k-1} g_p(\overline{x}) = 0 \right\}, \text{ ahol}$$

$g_p = \partial_p \left(x_p^{k+2} + \sum_{i=1}^{k} x_i x_p^{k-i+1} \right)$. A megfelelő parciális deriválások elvégzése után látható, hogy $(x_{k+1}, \dots, x_{p-1})$ koordinátázza $A_{k+1}(f)$-et (a q pont egy környezetében), és

$$y_i \circ f|_{A_{k+1}(f)} = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad 1 \leqslant i \leqslant k \text{ vagy } i = p \\ x_i & \text{ha} \quad k+1 \leqslant i \leqslant p-1 \end{cases}$$

Míg $(x_{k+1}, \dots, x_p)$ koordinátázza $\overline{A_k(f)}$-et (a q pont egy környezetében), és

$$y_i \circ f|_{\overline{A_k(f)}} = \begin{cases} a_i x_p^{i+1} & \text{ha} \quad 1 \leqslant i \leqslant k \\ x_i & \text{ha} \quad k+1 \leqslant i \leqslant p-1 \\ a_p x_p^{k+2} & \text{ha} \quad i = p \end{cases}, \text{ ahol}$$

$a_1 = \frac{-(k+1)(k+2)}{2}, a_2 = -ka_1 - \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$, stb., és $a_p = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k$. Az $y_1, \dots, y_p$ koordinátarendszer nem azonos $\mathbb{R}^p$ standard koordinátarendszerével $(z_1, \dots, z_p)$, amiben a π_L vetítést végezzük. Ekkor léteznek olyan g_i függvények, hogy $z_i = g_i(y_1, \dots, y_p)$. Az $\overline{A_k(f)}$ pontjaiban így $z_i = g_i\left(a_1 x_p^2, \dots, x_{p-1}, a_p x_p^{k+2}\right)$. Legyen az L egyenes egy egységvektora $(l_1, \dots, l_p)$. Ekkor egy $(z_1, \dots, z_p)$ pont L egyenesre való vetülete $\pi_L(z_1, \dots, z_p) = (l_1 z_1 + \dots + l_p z_p)$. Ezekből adódik:

$$\left(f|_{\overline{A_k(f)}}\right)' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 2a_1 x_p^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & (k+1)a_k x_p^k \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (k+2)a_p x_p^{k+1} \end{pmatrix}, \; g' = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1 & \cdots & \partial_p g_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 g_1 & \cdots & \partial_p g_1 \end{pmatrix},$$

és $\pi_L{}' = (l_1, \dots, l_p)$. [Az $\left(f|_{A_{k+1}(f)}\right)'$ ugyan ez a mátrix az utolsó oszlop nélkül.] A kompozíciót deriválva:

$$\frac{\partial\left(\pi_L \circ f|_{\overline{A_k(f)}}\right)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{p} l_j \partial_i g_j, \text{ ami formálisan azonos } \frac{\partial\left(\pi_L \circ f|_{A_{k+1}(f)}\right)}{\partial x_i}\text{-gyel,}$$

$k+1 \le i \le p-1$ esetén, míg $i = p$-re:

$$\frac{\partial\left(\pi_L \circ f|_{\overline{A_k(f)}}\right)}{\partial x_p} =$$
$$=\left\langle \left(2a_1x_p^2, \dots, (k+1)a_kx_p^k, 0, \dots, 0, (k+2)a_px_p^{k+1}\right), \left(\sum_{j=1}^{p} l_j\partial_1 g_j, \dots, \sum_{j=1}^{p} l_j\partial_p g_j\right)\right\rangle$$

A második parciális deriváltak $k+1 \le i, j \le p-1$ esetén:

$$\frac{\partial^2\left(\pi_L \circ f|_{\overline{A_k(f)}}\right)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{\alpha=1}^{p} l_\alpha \partial_j \partial_i g_\alpha,$$

ami formálisan azonos

$$\frac{\partial^2\left(\pi_L \circ f|_{A_{k+1}(f)}\right)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{\alpha=1}^{p} l_\alpha \partial_j \partial_i g_\alpha\text{-gyel,}$$

és $q \in A_{k+1}(f)$ pontjaiban $x_p(q) = 0$ miatt valóban egyenlőek. Míg $k+1 \le$ $\le i \le p-1$ esetén:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\left(\pi_L \circ f|_{\overline{A_k(f)}}\right)}{\partial x_i \partial x_p} = \ &\Big\langle \left(2a_1x_p^2, \dots, (k+1)a_kx_p^k, 0, \dots, 0, (k+2)a_px_p^{k+1}\right), \\ &\left(\sum_{j=1}^{p} l_j\partial_1\partial_i g_j, \dots, \sum_{j=1}^{p} l_j\partial_p\partial_i g_j\right)\Big\rangle,\end{aligned}$$

ami $q \in A_{k+1}(f)$ pontjaiban $x_p(q) = 0$ miatt 0. Végül:

$$\frac{\partial^2\left(\pi_L \circ f|_{\overline{A_k(f)}}\right)}{\partial x_p^2} = 2a_1 \sum_{\alpha=1}^{p} l_\alpha \partial_1 g_\alpha = -(k+1)(k+2)\sum_{\alpha=1}^{p} l_\alpha \partial_1 g_\alpha.$$

Legyen $\mathrm{Hes}(g)(*)$ a g függvény Hesse-mátrixa a $*$ pontban. Az eddigiek szerint:

$$\mathrm{Hes}\left(\pi_L \circ f|_{\overline{A_k(f)}}\right)(q) = \begin{pmatrix} \mathrm{Hes}\left(\pi_L \circ f|_{A_{k+1}(f)}\right)(q) & 0 \\ 0 & -(k+1)(k+2)\cos(\theta) \end{pmatrix},$$

ahol $\theta = \theta(L, q)$ az L és a $\partial_1 g(f(q))$ által bezárt szöget jelöli. Azaz $q \in A_{k+1}(f)$ pontosan akkor nem elfajuló kritikus pontja $\pi_L \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$-nek, ha nem elfajuló kritikus pontja $\pi_L \circ f|_{A_{k+1}(f)}$-nek és $\cos(\theta(L,q)) \neq 0$. Azonban

$$\dim\{(L,q) \in \mathbb{RP}^{p-1} \times A_{k+1}(f) \mid q \text{ kritikus pontja } \pi_L \circ f|_{A_{k+1}(f)}\text{-nek és } \cos(\theta(L,q)) = 0\} = p-2,$$

mivel $\dim\left(\mathbb{RP}^{p-1} \times A_{k+1}(f)\right) = (p-1) + (p-k-1)$, és a fenti halmaz $(p-$ $-k)$ egyenlettel definiált: $\dfrac{\partial\left(\pi_L \circ f\big|_{A_{k+1}(f)}\right)}{\partial x_i} = 0$ ha $i = k+1, \ldots, p-1$ és $\cos(\theta(L,q)) = 0$. Ezzel igazoltuk (3)-at.
Az előbbiekhez hasonlóan most $\mathrm{Hes}\left(\pi_L \circ f\big|_{\overline{A_{p-1}(f)}}\right)$ 1×1-es mátrix, tehát $q \in A_p(f)$ pontosan akkor lesz nem elfajuló kritikus pontja $\pi_L \circ f\big|_{\overline{A_{p-1}(f)}}$-nek, ha $\cos(\theta(L,q)) \neq 0$. Azonban $A_p(f)$ 0-dimenziós, véges sok pontból áll, vagyis véges sok egyenes kivételével ez teljesül. Ezzel igazoltuk (4)-t. $\square$

1.10. Tétel (Fukuda). *Legyen $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ Morin-leképezés, M zárt n-dimenziós sokaság, $n \geqslant p$, ekkor a következő összefüggés érvényes:*

$$\chi(M) \equiv \sum_{k=1}^{p} \chi\left(\overline{A_k(f)}\right) \pmod 2.$$

Bizonyítás: Tudjuk, hogy létezik olyan $L \in \mathbb{RP}^{p-1}$ egyenes, hogy $\pi_L \circ f$, $\pi_L \circ f\big|_{A_k(f)}$ és $\pi_L \circ f\big|_{\overline{A_k(f)}}$, $k = 1, \ldots, p$ Morse-függvények, és az 1.9. lemma állításai (1)-(4) is teljesülnek. Tudjuk, hogy ha g egy Morse-függvény az M zárt sokaságon, akkor

$$\chi(M) \equiv \#c(g) \pmod 2, \text{ ahol}$$

$\#c(g)$ a g kritikus pontjainak száma. Így adódik:

$$\chi(M) \equiv \#c(\pi_L \circ f) \pmod 2$$

$$\chi\left(\overline{A_k(f)}\right) \equiv \#c\left(\pi_L \circ f\big|_{\overline{A_k(f)}}\right) \pmod 2$$

Tudjuk, hogy $\pi_L \circ f$ kritikus pontjai csak $\overline{A_1(f)}$-on lehetnek, azonban $\overline{A_1(f)} =$ $= A_1(f) \cup \overline{A_2(f)}$. Az 1.9. lemma (1) bizonyításával megegyező módon igazolható, hogy $\mathbb{RP}^{p-1}$ majdnem minden egyenesére a kompozíciónak nincs kritikus pontja $\overline{A_2(f)}$-en, azaz feltehető, hogy erre az L egyenesre sincsen, amiből adódik:

$$\#c(\pi_L \circ f) = \#c\left(\pi_L \circ f\big|_{A_1(f)}\right).$$

Másrészt az 1.9. lemma szerint:

$$\#c\left(\pi_L \circ f\big|_{\overline{A_k(f)}}\right) = \#c\left(\pi_L \circ f\big|_{A_k(f)}\right) + \#c\left(\pi_L \circ f\big|_{A_{k+1}(f)}\right).$$

Mivel az 1.9. lemma szerint $A_p(f)$ (amely izolált pontokból áll) minden pontja kritikus, így:

$$\chi\left(\overline{A_p(f)}\right) = \chi(A_p(f)) = \#A_p(f) = \#c\left(\pi_L \circ f\big|_{A_p(f)}\right).$$

Ezen egyenletekből adódik, hogy

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{p} \chi\Big(\overline{A_k(f)}\Big) \equiv \sum_{k=1}^{p} \#c\left(\pi_L \circ f\big|_{\overline{A_k(f)}}\right) = \#c\left(\pi_L \circ f\big|_{A_1(f)}\right) + \\
&+\#c\left(\pi_L \circ f\big|_{A_2(f)}\right) + \#c\left(\pi_L \circ f\big|_{A_2(f)}\right) + \#c\left(\pi_L \circ f\big|_{A_3(f)}\right) + \ldots + \\
&+\#c\left(\pi_L \circ f\big|_{A_{p-1}(f)}\right) + \#c\left(\pi_L \circ f\big|_{A_p(f)}\right) + \#c\left(\pi_L \circ f\big|_{A_p(f)}\right) \equiv \\
&\equiv \#c\left(\pi_L \circ f\big|_{A_1(f)}\right) \equiv \chi(M) \pmod 2,
\end{aligned}$$

amit bizonyítani kellett. □

1.11. Következmény. *Legyen $f : M^n \to N^p$ Morin-leképezés, M zárt n-dimenziós sokaság, $n \geqslant p$, N majdnem paralelizálható p-dimenziós, sokaság. Tegyük fel még, hogy f nem szürjektív, vagy N nyílt. Ekkor a következő összefüggés érvényes:*

$$\chi(M) \equiv \sum_{k=1}^{p} \chi\Big(\overline{A_k(f)}\Big) \pmod 2.$$

Bizonyítás: Ha N nyílt, akkor mivel $f(M)$ kompakt, nem lehet f szürjektív. Legyen $* \in N \setminus f(M)$ tetszőleges pont, és mivel N majdnem paralelizálható, így Hirsch tétele miatt létezik egy $g : N \setminus * \looparrowright \mathbb{R}^p$ immerzió. Ezzel adódik egy $f \circ g : M^n \to \mathbb{R}^p$ Morin-leképezés. Az f és $f \circ g$ szinguláris halmazai nyilván megegyeznek, azaz Fukuda tételéből ($f \circ g$-re) adódik az állítás. □

Az N^p-sokaság elegendően nagy l esetén (pl. $l = 2p$) beágyazható $\mathbb{R}^l$-be. A következő tételekben az $f : M^n \to N^p$ Morin-leképezésekről tehát feltehető, hogy $N^p \subset \mathbb{R}^l$-be képeznek.

1.12. Lemma. *Legyen $f : M^n \to N^p$ Morin-leképezés, M zárt n-dimenziós sokaság, $n \geqslant p$. Ekkor majdnem minden $L \in \mathbb{RP}^{l-1}$-re a $\phi_L = \pi_L\big|_N : N \to L$ olyan Morse-függvény, amelynek kritikus pontjai nincsenek az $f(S(f))$ sokaságon. ($\pi_L : \mathbb{R}^l \to L$ az L egyenesre való merőleges vetítés.)*

Bizonyítás: Korábban már láttuk, hogy majdnem minden $L \in \mathbb{RP}^{l-1}$-re a ϕ_L Morse-függvény. Legyen $q \in f(S(f))$. Ekkor q pontosan akkor kritikus pontja ϕ_L-nek, ha $T_qN \subset \pi_L^{-1}(0)$. Ha van egy p dimenziós alterünk $\mathbb{R}^l$-ben, akkor az erre merőleges altér $l-p$ dimenziós lesz. Így adott q-ra a rossz egyenesek (azok az $L \in \mathbb{RP}^{l-1}$ egyenesek, melyekre történő vetítés során q kritikus pont lenne) benne vannak egy $l-p$ dimenziós altérben, tehát projektív dimenziójuk $l-p-1$. Tudjuk, hogy $\dim S(f) = p-1$. Ezzel a rossz egyenesek kijelöltek $f(S(f)) \times \mathbb{RP}^{l-1}$-ben egy legfeljebb $(p-1)+(l-p-1) = l-2$ dimenziós részt. Az $f(S(f)) \times \mathbb{RP}^{p-1} \to \mathbb{RP}^{p-1}$ projekciónál a rossz egyenesek legfeljebb $l-2$-dimenziós képe adja az összes rossz egyenest. Mivel

$\dim\mathbb{RP}^{l-1} = l-1$, így majdnem minden $L \in \mathbb{RP}^{l-1}$-re minden $q \in f(S(f))$ esetén $T_qN \not\subset \pi_L^{-1}(0)$, azaz q nem kritikus pontja ϕ_L-nek. Ezzel a lemmát igazoltuk. $\square$

1.13. Lemma. *Legyen $f : M^n \to N^p$ Morin-leképezés, M zárt n-dimenziós sokaság, $n \geqslant p$, ekkor majdnem minden $L \in \mathbb{RP}^{l-1}$ egyenesre a következők teljesülnek:*

(1) $c\left(\pi_L \circ f|_{\overline{A_k(f)}}\right) \cap \overline{A_{k+2}(f)} = \emptyset$.

(2) Ha $q \in A_{k+1}(f)$, akkor q pontosan akkor kritikus pontja $\pi_L \circ f\big|_{A_{k+1}(f)}$-nek, ha q kritikus pontja $\pi_L \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$-nak.

(3) Ha $q \in A_{k+1}(f)$, akkor q pontosan akkor nem elfajuló kritikus pontja $\pi_L \circ f\big|_{A_{k+1}(f)}$-nek, ha nem elfajuló kritikus pontja $\pi_L \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$-nak.

(4) Minden $q \in A_p(f)$ esetén q nem elfajuló kritikus pontja $\pi_L \circ f|_{\overline{A_{p-1}(f)}}$-nak.

Bizonyítás: Ugyan úgy történik, mint az 1.9. lemma bizonyítása, csak óvatosabban kell a dimenziókat számolni, például a (3) bizonyítása során szükségünk van a következőre:

$$\dim\big\{(L,q) \in \mathbb{RP}^{l-1} \times A_{k+1}(f) \quad | \quad q \text{ kritikus pontja } \pi_L \circ f\big|_{A_{k+1}(f)}\text{-nek} \\ \text{és } \cos(\theta(L,q)) = 0\big\} \leq l-2,$$

ahol $\theta = \theta(L,q)$ az L és a $\partial_1 g(f(q))$ (nem null-vektor) által bezárt szöget jelöli. Mivel $\partial_1 g(f(q)) \notin df_q(T_q(A_{k+1}(f)))$, így

$$\dim\Big\{(L,q) \in \mathbb{RP}^{l-1} \times A_{k+1}(f) : q \text{ kritikus pontja } \pi_L \circ f\big|_{A_{k+1}(f)}\text{-nek és} \\ \cos(\theta(L,q)) = 0\big\} \leq (p-k-1) + \dim\big\{L \in \mathbb{RP}^{l-1} : L \subset \pi_V^{-1}(0), L \perp L'\big\}$$

ahol V egy $(p-k-1)$-dimenziós altér $\mathbb{R}^l$-ben, π_V az erre való vetítés, L' pedig egy olyan egyenes, hogy $L' \not\subset V$. Így a kérdéses dimenzió kisebb, vagy egyenlő, mint $(p-k-1) + l - (p-k-1) - 1 - 1 = l-2$. $\square$

1.14. Definíció (Bott). *Legyen $g\colon M \to \mathbb{R}$ sima leképezés. Azt mondjuk, hogy g Bott-Morse-függvény, ha minden kritikus pontja g-nek benne van egy olyan részsokaságban, melynek minden pontja kritikus.*

1.15. Tétel (Bott). *Legyen $g\colon M \to \mathbb{R}$ egy Bott-Morse-függvény, M zárt sokaság. Legyenek $F_1, F_2, \ldots, F_r$ a g kritikus részsokaságai. Jelölje λ_i az F_i részsokaság indexét (a normál irányban a kvadratikus alakban a negatív előjelű tagok száma). Ekkor*

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{\lambda_i} \chi(F_i)$$

Bizonyítás: Legyen $\tilde{g}$ a g olyan approximációja, mely az F_i sokaságok egy csőszerű környezetén kívül megegyezik g-vel, és minden i-re a $\tilde{g}\big|_{F_i}$ Morse-függvény ($\tilde{g}$-nak kritikus pontja csak az F_i sokaságokon lesz). Ekkor nyilván teljesül, hogy ha $q \in c(\tilde{g})$ és $q \in F_i$, akkor

$$\operatorname{Index}(\tilde{g}, q) = \lambda_i + \operatorname{Index}\left(\tilde{g}\big|_{F_i}, q\right).$$

ahol $\operatorname{Index}(f, x)$ jelöli az x kritikus pont indexét a f Morse-függvényre nézve. Tudjuk, hogy

$$\chi(M) = \#c_+(\tilde{g}) - \#c_-(\tilde{g}) \text{ és}$$

$$\chi(F_i) = \#c_+\left(\tilde{g}\big|_{F_i}\right) - \#c_-\left(\tilde{g}\big|_{F_i}\right), \text{ ahol}$$

$\#c_+(f)$ (illetve $\#c_-(f)$) jelöli az f páros (ill. páratlan) indexű kritikus pontjainak a számát. Mivel a $\tilde{g}$ kritikus pontjai csak az F_i sokaságokon vannak, így ezen egyenletekből adódik, hogy

$$\begin{aligned}\chi(M) = \#c_+(\tilde{g}) - \#c_-(\tilde{g}) = \sum_{i=1}^{r} \#\{q \in c_+(\tilde{g}) \mid q \in F_i\} - \\ - \sum_{i=1}^{r} \#\{q \in c_-(\tilde{g}) \mid q \in F_i\} = \\ = \sum_{i=1}^{r}\left[(-1)^{\lambda_i}\#c_+\left(\tilde{g}\big|_{F_i}\right) - (-1)^{\lambda_i}\#c_-\left(\tilde{g}\big|_{F_i}\right)\right] = \sum_{i=1}^{r}(-1)^{\lambda_i}\chi(F_i),\end{aligned}$$

amit bizonyítani kellett. □

1.16. Lemma. *Legyen $f : M^n \to N^p$ sima leképezés, ahol M zárt összefüggő sokaság, N összefüggő sokaság. Legyen $a, b \in N$ két reguláris értéke f-nek. Ekkor*

$$\chi(M_a) \equiv \chi(M_b) \pmod 2,$$

ahol $M_a = f^{-1}(a)$, $M_b = f^{-1}(b)$.

Bizonyítás: Legyen $\alpha : N \times [0,1] \to N$ izotópia, mely az a-t b-be 'viszi'. ($\alpha(a,0) = a$, és $\alpha(a,1) = b$) Így adódik egy $\alpha \circ \left(f \times id_{[0,1]}\right) : M \times [0,1] \to N$ homotópia. Feltehető, hogy a reguláris értéke $\alpha \circ \left(f \times id_{[0,1]}\right)$-nek is. Ekkor $\left(\alpha \circ \left(f \times id_{[0,1]}\right)\right)^{-1}(a)$ egy olyan sokaság lesz, melynek pereme $M_a \cup M_b$. Tehát M_a és M_b kobordánsak, amiből a lemma adódik. □

1.17. Megjegyzés. Ha N nyílt, akkor létezik $a \in N$, hogy $a \notin f(M)$, (persze ekkor a reguláris értéke f-nek) és így minden $b \in N$ reguláris értékre $\chi(M_b) \equiv 0 \pmod 2$ teljesül.

1.18. Tétel. *Legyen $f : M^n \to N^p$ Morin-leképezés, M zárt n-dimenziós sokaság, N összefüggő p-dimenziós sokaság, $n \geqslant p$, ekkor a következő összefüggés érvényes:*

$$\chi(M) \equiv \sum_{k=1}^{p} \chi\left(\overline{A_k(f)}\right) + \chi_f \cdot \chi(N) \pmod 2,$$

ahol χ_f egy reguláris fibrum Euler-karakterisztikája mod 2, és itt $\chi_f \cdot \chi(N)$-et 0-nak tekintjük, ha N nem kompakt.

Bizonyítás: Az 1.10. tétel bizonyításához hasonlóan most is létezik egy olyan $L \in \mathbb{RP}^{l-1}$ egyenes, hogy $\pi_L \circ f$, $\pi_L \circ f\big|_{A_k(f)}$ és $\pi_L \circ f\big|_{\overline{A_k(f)}}$, $k = 1, \ldots, p$ Bott-Morse-függvények, és az előbbi lemmák (1.12, 1.13) állításai is teljesülnek. Azonban most a $\phi_L = \pi_L\big|_N : N \to L$-nek is lesznek kritikus pontjai, jelölje ezeket $c_1, \ldots, c_s \in N$ ($c_i \notin f(S(f))$). Az 1.10. tétel bizonyításához hasonlóan most az adódik, hogy

$$\sum_{k=1}^{p} \chi\left(\overline{A_k(f)}\right) \equiv \#c\left(\pi_L \circ f\big|_{A_1(f)}\right) \pmod 2, \text{ és}$$

$$\chi(M) \equiv \#c\left(\pi_L \circ f\big|_{A_1(f)}\right) + \sum_{i=1}^{s} \chi\left(f^{-1}(c_i)\right) \pmod 2.$$

Tudjuk, hogy $\chi(f^{-1}(c_i)) \equiv \chi_f \pmod 2$, és mivel $\#c(\phi_L) = s$, így $s \equiv \chi(N) \pmod 2$, ha N zárt, míg a nyílt esetben az előbbi megjegyzés szerint $\chi_f \equiv 0 \pmod 2$, azaz ekkor tekinthetjük $\chi_f \cdot \chi(N)$-et 0-nak. Ezen egyenletekből a tétel nyilvánvalóan adódik. □

1.19. Következmény. *Legyen $f : M^n \to N^p$ Morin-leképezés, M zárt n-dimenziós sokaság, N összefüggő p-dimenziós sokaság, $n \geqslant p$, ekkor a következő összefüggések érvényesek:*

(1) Ha n páros és p páratlan, akkor

$$\chi(M) \equiv \chi\left(\overline{A_1(f)}\right) + \chi\left(\overline{A_3(f)}\right) \pmod 2.$$

(2) Ha n páratlan és p páros, akkor

$$\chi\left(\overline{A_2(f)}\right) \equiv 0 \pmod 2.$$

(3) Ha n és p páratlan, akkor

$$\sum_{i=1}^{\frac{p+1}{2}} \chi\left(\overline{A_{2i-1}(f)}\right) \equiv 0 \pmod 2.$$

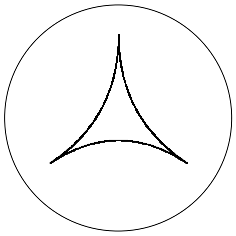
(4) Ha n és p páros, akkor

$$\chi(M) \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p}{2}} \chi\left(\overline{A_{2i}(f)}\right) + \chi_f \cdot \chi(N) \pmod 2.$$

ahol χ_f *egy reguláris fibrum Euler-karakterisztikája mod 2, és itt* $\chi_f \cdot \chi(N)$*-et* 0*-nak tekintjük, ha* N *nem kompakt.*

Bizonyítás: Nyilvánvaló következménye annak, hogy minden páratlan dimenziós sokaság Euler-karakterisztikája 0, és hogy ha $n-p$ páratlan, akkor $k \geqslant 4$ esetén $\chi\left(\overline{A_k(f)}\right) \equiv 0 \pmod 2$, mivel $\overline{A_k(f)}$ nullkobordáns [C]. $\square$

Most mutatunk egy példát, melyben a Fukuda-formula (1.18. tétel) jobb oldalán álló $\sum_{k=1}^{p} \chi\left(\overline{A_k(f)}\right)$ és $\chi_f \cdot \chi(N)$ kifejezések mindegyike páratlan. Legyen $g : \mathbb{CP}^2 \to D^2$ (D^2 a 2-dimenziós körlemez) olyan Morin-leképezés, amelynek pontosan 3 csúcs szingularitású pontja van, és egy reguláris fibrum diffeomorf a 2-dimenziós gömbbel, vagy a tórusszal [K], és létezik egy sima $s : D^2 \to \mathbb{CP}^2$ leképezés, melyre $s \circ g = \mathrm{id}$ és $s(\mathrm{int} D^2) \cap S(g) = \emptyset$. Legyen $D' \subset D^2$ egy kisebb körlemez, melynek belseje tartalmazza $S(g)$-nek a ∂D^2-től különböző részét. A



$g\big|_{g^{-1}(\partial D')} : g^{-1}\left(\partial D'\right) \to \partial D'$ leképezést fogjuk módosítani. Kivágjuk $s(D')$ egy kis csőszerű környezetét, és ennek pereme mentén $B \times D'$-t ragasztjuk be, ahol B a Möbius-szalag. Így egy $g_1 : M' \to D'$ leképezés adódik. Azonban $g_1\big|_{g_1^{-1}(\partial D')}$ egy triviális $\mathbb{RP}^2$-nyaláb $\partial D'$ felett. A $\pi : \mathbb{RP}^2 \times B \to B$ projekciót ragasszuk g_1-hez a pereme mentén. Az eredmény egy $f : M \to \mathbb{RP}^2 (= D' \cup B)$ leképezés, melyre nyilván $\sum \chi\left(\overline{A_k(f)}\right)$ és $\chi_f \cdot \chi(N)$ nem nulla (mod 2 sem).

b. Egész értékű formula

A következőkben látni fogjuk, hogy a Fukuda-formula miért nem lehet egész értékű, azaz, hogy miért lehet csak paritást hordozó formulát találni. Legyen $f : M^n \to N^p$ Morin-leképezés csak hajtás szingularitással. Ekkor tudjuk, hogy $q \in A_1(f)$ esetén léteznek lokális térképek $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ q és $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ $f(q)$ körül, melyekre:

$$y_i \circ f = x_i \quad (1 \leqslant i \leqslant p-1)$$
$$y_p \circ f = x_p^2 + \ldots + x_{p+\lambda-1}^2 - x_{p+\lambda}^2 - \ldots - x_n^2$$

valamilyen λ-ra $(0 \leqslant \lambda \leqslant n-p+1)$. Ha $n-p+1$ páros, akkor $n-p+1-\lambda \equiv \lambda$ (mod 2), és így az $y_p \circ f$ Morse-függvény indexének a paritása nem függ a koordináták választásától. Így az $A_1^+(f) = \{q \in A_1(f) : \text{Index}(q) = \text{páros}\}$, és $A_1^-(f) = \{q \in A_1(f) : \text{Index }(q) = \text{páratlan}\}$ jól definiált.

1.20. Lemma. *Legyen $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ Morin-leképezés csak hajtás szingularitásokkal, M zárt n-dimenziós sokaság, $n \geqslant p$ és $n-p+1$ páros. Az eddigiek szerint majdnem minden $L \in \mathbb{RP}^{p-1}$ egyenesre $\pi_L \circ f$ és $\pi_L \circ f\big|_{A_1(f)}$ Morse-függvények, amelyeknek kritikus pontja csak $A_1(f)$-en lehet. Ekkor:*

$$\mathit{Index}(\pi_L \circ f, q) \equiv \mathit{Index}\left(\pi_L \circ f\big|_{A_1(f)}, q\right) \quad (\text{mod } 2) \text{ } \mathit{ha} \text{ } q \in A_1^+(f),$$

$$\mathit{Index}(\pi_L \circ f, q) \equiv 1 + \mathit{Index}\left(\pi_L \circ f\big|_{A_1(f)}, q\right) \quad (\text{mod } 2) \text{ } \mathit{ha} \text{ } q \in A_1^-(f),$$

ahol $Index(g, x)$ jelöli az x kritikus pont indexét a g Morse-függvényre nézve.

Bizonyítás: Amint már láttuk lokálisan $x_1, \dots, x_{p-1}$ koordinátázza $A_1(f)$-et. $q \in A_1(f)$ esetén $T_{f(q)}f\,(A_1(f)) \perp L$, vagyis $\pi_L \circ f\big|_{A_1(f)} = h\,(x_1, \dots, x_{p-1})$ alkalmas h függvényre. Megfelelő koordinátarendszerben h négyzetösszeggé transzformálódik, indexe legyen a. Így $\pi_L \circ f$ indexe q-ban $a + \lambda$ vagy $a +$ $+ (n-p-\lambda+1)$, amik most (mivel $n-p+1$ páros) mod 2 azonosak, vagyis valóban csak λ-val különböznek (mod 2). λ paritása pedig valóban csak attól függ, hogy $q \in A_1^-(f)$ vagy $q \in A_1^+(f)$. □

1.21. Tétel. *Legyen $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ Morin-leképezés csak hajtás szingularitásokkal, M zárt n-dimenziós sokaság, $n \geqslant p$ és $n-p+1$ páros. Ekkor a következő összefüggés érvényes:*

$$\chi(M) = \chi\big(A_1^+(f)\big) - \chi\big(A_1^-(f)\big)\,.$$

Bizonyítás: Az eddigiek szerint létezik olyan $L \in \mathbb{RP}^{p-1}$ egyenes, hogy $\pi_L \circ f$ és $\pi_L \circ f\big|_{A_1(f)}$ Morse-függvények, amelyeknek kritikus pontja csak $A_1(f)$-en lehet. Tudjuk, hogy ha g egy Morse-függvény az M zárt sokaságon, akkor

$$\chi(M) = \#c_+(g) - \#c_-(g), \text{ ahol}$$

$\#c_+(g)$ (illetve $\#c_-(g)$) jelöli a g páros (ill. páratlan) indexű kritikus pontjainak a számát. Így az 1.20. lemma szerint:

$$\#c_+ (\pi_L \circ f) = \#c_+ \left(\pi_L \circ f\big|_{A_1^+(f)}\right) + \#c_- \left(\pi_L \circ f\big|_{A_1^-(f)}\right),$$

$$\#c_- (\pi_L \circ f) = \#c_- \left(\pi_L \circ f\big|_{A_1^+(f)}\right) + \#c_+ \left(\pi_L \circ f\big|_{A_1^-(f)}\right).$$

Tehát azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\chi(M) &= \#c_+ (\pi_L \circ f) - \#c_- (\pi_L \circ f) = \\ &= \left(\#c_+ \left(\pi_L \circ f\big|_{A_1^+(f)}\right) + \#c_- \left(\pi_L \circ f\big|_{A_1^-(f)}\right)\right) - \\ &\quad - \left(\#c_- \left(\pi_L \circ f\big|_{A_1^+(f)}\right) + \#c_+ \left(\pi_L \circ f\big|_{A_1^-(f)}\right)\right) = \\ &= \chi\big(A_1^+(f)\big) - \chi\big(A_1^-(f)\big),\end{aligned}$$

amit bizonyítani kellett. □

A korábbiaknak megfelelően a következő tételekben az $f : M^n \to N^p$ Morin-leképezésekről feltehető, hogy $N^p \subset \mathbb{R}^l$-be képeznek.

1.22. Lemma. *Legyen $f : M^n \to N^p$ Morin-leképezés csak hajtás szingularitásokkal, M zárt n-dimenziós sokaság, N összefüggő p-dimenziós sokaság, $n \geqslant p$ és $n-p+1$ páros. Ekkor:*

$$\mathit{Index}(\pi_L \circ f, q) \equiv \mathit{Index}\left(\pi_L \circ f\big|_{A_1(f)}, q\right) \pmod 2 \ \text{ha } q \in A_1^+(f),$$

$$\mathit{Index}(\pi_L \circ f, q) \equiv 1 + \mathit{Index}\left(\pi_L \circ f\big|_{A_1(f)}, q\right) \pmod 2 \ \text{ha } q \in A_1^-(f),$$

Bizonyítás: Az 1.20. lemma bizonyításához hasonlóan igazolható. □

1.23. Tétel. *Legyen $f : M^n \to N^p$ Morin-leképezés csak hajtás szingularitásokkal, M zárt n-dimenziós sokaság, N összefüggő p-dimenziós sokaság, $n \geqslant p$ és $n-p+1$ páros. Ekkor a következő összefüggés érvényes:*

$$\chi(M) = \chi\big(A_1^+(f)\big) - \chi\big(A_1^-(f)\big).$$

Bizonyítás: Az eddigiek szerint létezik olyan $L \in \mathbb{RP}^{l-1}$ egyenes, hogy $\pi_L \circ f$ és $\pi_L \circ f\big|_{A_1(f)}$ Bott-Morse-függvények. Azonban most a $\phi_L = \pi_L\big|_N : N \to L$-nek is lesznek kritikus pontjai, jelölje ezeket $c_1, \dots, c_s \in N$ ($c_i \notin f(S(f))$). Az 1.18. tétel bizonyításához hasonlóan most az adódik, hogy

$$\chi(M) = \#c_+ (\pi_L \circ f) - \#c_- (\pi_L \circ f) + \sum_{i=1}^{s} \pm\chi\big(f^{-1}(c_i)\big).$$

Azonban most $f^{-1}(c_i)$ $(n-p)$-dimenziós, ami most páratlan, tehát Euler-karakterisztikája 0. Így az 1.22. lemma szerint:

$$\#c_+\left(\pi_L \circ f\right) = \#c_+\left(\pi_L \circ f\big|_{A_1^+(f)}\right) + \#c_-\left(\pi_L \circ f\big|_{A_1^-(f)}\right),$$

$$\#c_-\left(\pi_L \circ f\right) = \#c_-\left(\pi_L \circ f\big|_{A_1^+(f)}\right) + \#c_+\left(\pi_L \circ f\big|_{A_1^-(f)}\right).$$

Tehát azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
\chi(M) &= \#c_+\left(\pi_L \circ f\right) - \#c_-\left(\pi_L \circ f\right) = \\
&= \left(\#c_+\left(\pi_L \circ f\big|_{A_1^+(f)}\right) + \#c_-\left(\pi_L \circ f\big|_{A_1^-(f)}\right)\right) - \\
&\quad - \left(\#c_-\left(\pi_L \circ f\big|_{A_1^+(f)}\right) + \#c_+\left(\pi_L \circ f\big|_{A_1^-(f)}\right)\right) = \\
&= \chi\big(A_1^+(f)\big) - \chi\big(A_1^-(f)\big),
\end{aligned}$$

amit bizonyítani kellett. □

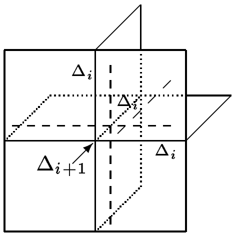
2. Többszörös pont formula egy kodimenziós immerziókra

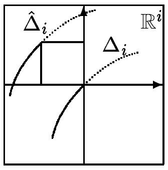
2.1. Lemma (Herbert). *Legyen K $(p-1)$-dimenziós zárt sokaság, $\varphi : K^{p-1} \looparrowright \mathbb{R}^p$ általános helyzetű immerzió, p páratlan, ekkor:*

$$\theta(\varphi) \equiv \left\langle (w_1(\nu))^{p-1}, [K]_2 \right\rangle \mod 2,$$

ahol $\theta(\varphi)$ a φ p-szeres pontjainak a száma, ν a φ normál nyalábja.

Bizonyítás: Legyen $\Delta_i := \{\text{az } i\text{-szeres pontok a képben } (\mathbb{R}^p\text{-ben})\}$, és $\tilde{\Delta}_i := \{\text{az } i\text{-szeres pontok } (\Delta_i) \text{ őse}\}$. Tekintsük az $f(M)$-nek és a $\hat{\Delta}_i := \Delta_i$ $f(M)$-re transzverzális perturbáltjának a metszetét. Ez $\mathbb{R}^p$-ben null-homológ (nem is lehet más), és így $f^{-1}(\hat{\Delta}_i \cap f(M)) = 0$ homológia osztály M-ben. Másrészt ezen metszet őse (ahol D a Poincare-dualitás) $\tilde{\Delta}_{i+1} + D(w_1(\nu|_{\tilde{\Delta}_i})$, mivel keletkeznek metszéspontok Δ_{i+1} körül, melyek azonosíthatóak $\tilde{\Delta}_{i+1}$-gyel. Ezen kívül is lesznek még metszéspontok, abból adódóan, hogy $\hat{\Delta}_i$ "megcsavarodik" Δ_i körül. Δ_i normálnyalábja i-dimenziós, mely azonosítható $\nu|_{\tilde{\Delta}_i}$ képével. $\hat{\Delta}_i$ tekinthető az i-dimenziós normálnyaláb egy szelésének. Azonban $\hat{\Delta}_i$ pontjait minden fibrumban merőlegesen vetítve a $\nu|_{\tilde{\Delta}_i}$ ágaira $\nu|_{\tilde{\Delta}_i}$ egy szelését kapjuk. E második szelés null-helyei azonosak az első nyaláb szelésének a metszéspontjaival, azaz $\hat{\Delta}_i \cap f(M)$-mel. Így:





$$0 = \tilde{\Delta}_{i+1} + D(w_1(\nu|_{\tilde{\Delta}_i}) = \tilde{\Delta}_{i+1} + Dw_1(\nu) \cap \tilde{\Delta}_i,$$

amiből kapjuk, hogy $0 = D\tilde{\Delta}_{i+1} + w_1(\nu) \cup D\tilde{\Delta}_i$. Mivel $\tilde{\Delta}_1 = M$, így $D\tilde{\Delta}_1 = 1$, amiből $\tilde{\Delta}_{i+1} = w_1(\nu)^i$ adódik. Mivel p páratlan, így $\tilde{\Delta}_p$ és Δ_p azonos paritású pontból áll, amiből a lemma azonnal adódik. $\square$

2.2. Megjegyzés. Tetszőleges k-kodimenziós $\varphi : K^{(p-1)k} \looparrowright \mathbb{R}^{pk}$ immerzióra (p páratlan) igaz, hogy $\theta(\varphi) \equiv \left\langle (w_k(\nu))^{p-1}, [K]_2 \right\rangle \mod 2$. A bizonyítás hasonló a fentihez.

2.3. Tétel. *Legyen K $(p-1)$-dimenziós zárt sokaság, $\varphi : K^{p-1} \looparrowright \mathbb{R}^p$ általános helyzetű immerzió, p páratlan, ekkor:*

$$\theta(\varphi) \equiv \chi(K) \mod 2.$$

Bizonyítás: K érintő nyalábjára nyilván teljesül, hogy $TK \oplus \nu \approx \varphi^* T\mathbb{R}^p$, így $w(K) \cup (1 + w_1(\nu)) = w(\varphi^* T\mathbb{R}^p) = 1$, ahol w, w_1 a megfelelő Stiefel-Whitney karakterisztikus osztályok. Ebből adódik:

$$w(K) = 1 + w_1(\nu) + \dots + (w_1(\nu))^{p-1}.$$

Felhasználva a 2.1. lemmát adódik:

$$\theta(\varphi) \equiv \left\langle (w_1(\nu))^{p-1}, [K]_2 \right\rangle \equiv \langle w_{p-1}(K), [K]_2 \rangle \equiv \chi(K) \mod 2.$$

Ezzel igazoltuk a tételt. $\square$

3. A Hopf-invariáns egy probléma

3.1. Állítás. *Az n-dimenziós irányítható sokaságok* $\mathbb{R}^{n+1}$*-be menő immerzióinak kobordizmuscsoportja* $\pi_n^S(S^0)$.

Bizonyítás: Tekintsünk egy $M^n_{ir} \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ immerziót. Mivel M irányítható, így az irányításból adódik egy tüskézés. Ezt az immerziót komponálva a standard $\mathbb{R}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$ beágyazással egy $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{2n+2}$ $(n+2)$ lineárisan független tüskézéssel ellátott immerziót kapunk. Ez kis perturbációval beágyazássá tehető (nyilván bármely két perturbált tüskézetten kobordáns), azaz kapunk egy $M^n, \nu_1, \ldots, \nu_{n+2} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$ tüskézett beágyazást. Hasonlóan a kobordizmusok is 'felemelkednek', azaz ha M_1^n, M_2^n egy kodimenziós immerziói kobordánsak, akkor a hozzájuk rendelt tüskézett beágyazások is megfelelően kobordánsak lesznek.
Ez fordítva is igaz: Hirsch-tétele szerint egy $N^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$ tüskézett beágyazásból $(\nu_1, \ldots, \nu_{n+2}$ független tüskék) egy $N^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}$ k-tüskés immerzió adódik egészen $k = 1$-ig. Végül kapunk egy $N^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ 1-tüskés immerziót. Persze azt is be kell látni, hogy az előbbi 'lenyomás' megy a kobordizmusokra is: ha $N_i^n, \nu_{i,1}, \ldots, \nu_{i,k+1} \looparrowright \mathbb{R}^{n+k+1}$ $(i = 1, 2)$ kobordánsak (azaz létezik egy $W^{n+1}, \nu_1, \ldots, \nu_{k+1} \looparrowright \mathbb{R}^{n+k+1} \times [0,1]$, melynek a peremre történő megszorítása éppen az előbbi két tüskézett immerzió) akkor az előbb Hirsch-tételével nyert $N_i^n, \tilde{\nu}_{i,1}, \ldots, \tilde{\nu}_{i,k} \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}$ $(i = 1, 2)$ immerziók is kobordánsak. Ezt a keresett kobordizmust a W^{n+1} fenti tüskézett kobordizmus felhasználásával fogjuk megalkotni, ami nem más, mint a következő nyaláb egy Γ szelése:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mono}\big(TW \oplus \varepsilon^k, \mathbb{R}^{n+k} \times [0,1]\big) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{SO}(n+k)"] & \mathrm{Mono}\big(TW \oplus \varepsilon^{k+1}, \mathbb{R}^{n+k+1} \times [0,1]\big) \arrow[d, "\mathrm{SO}(n+k+1)"] \\
W^{n+1} \arrow[u, bend left, "\Gamma'"] \arrow[r, equal] & W^{n+1} \arrow[u, bend left, "\Gamma"]
\end{tikzcd}$$

Ezt alakítjuk át egy Γ' szeléssé, amely már $\mathrm{SO}(n+k) \hookrightarrow \mathrm{SO}(n+k+1)$-be képez. Azaz a $\mathrm{Mono}\big(TW \oplus \varepsilon^{k+1}, \mathbb{R}^{n+k+1} \times [0,1]\big) \times [0,1] \xrightarrow{\mathrm{SO}(n+k+1)} W^{n+1} \times [0,1]$ nyaláb egy szelését keressük, mely $W^{n+1} \times 0$ felett már adott ($\mathrm{SO}(n+k+1)$-ba képez), és $\partial W^{n+1} \times 1$ felett is adott, ($\mathrm{SO}(n+k) \hookrightarrow \mathrm{SO}(n+k+1)$-ba képez). A szokásos cella indukciós eljárás során egy i-dimenziós cellára ($W^{n+1} \times 1$-ben, mely felett $W^{n+1} \times [0,1]$-ben van egy $i+1$-dimenziós cella) pontosan akkor terjed ki, ha a hozzá tartozó $\pi_i\left(\mathrm{SO}(n+k+1), \mathrm{SO}(n+k)\right)$-beli relatív szferoid null-homotóp. Az $\mathrm{SO}(n+k+1) \xrightarrow{\mathrm{SO}(n+k)} S^{n+k}$ fibrálásból azonban tudjuk, hogy ez izomorf $\pi_i\left(S^{n+k}\right)$-val, tehát biztosan kiterjed, ha $\pi_i\left(S^{n+k}\right) \approx 0$. Mivel itt $(n+1)$-dimenziós cella is van így $\pi_{n+1}\left(S^{n+k}\right) \approx 0$ elegendő, ami $n+1 < n+k$, azaz $k = 2$-ig igaz. Tehát a kobordizmust is le lehet 'nyomni' egészen 2-tüskézésig. Hiányzik még az utolsó lépés, azaz ha két sokaság 2-tüskével kobordáns, akkor Hirsch-tétellel adódó 1-tüskés ‘lenyomottjai’ is szintén kobordánsak. Egy ilyen 2-tüskés kobordizmusból persze a Hirsch-tétel ad egy 1-tüskés kobordizmust két ‘lenyomott’ között, csak nem akármelyik két ‘lenyomott’ között. Elegendő tehát igazolni, hogy egy $M^n, \nu_1, \nu_2 \looparrowright \mathbb{R}^{n+2}$ 2-tüskés immerzióból a Hirsch-tétellel adódó két különböző $f_0 : M^n, v_1 \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ és $f_1 : M^n, u_1 \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ 1-tüskés immerzió tüskézetten kobordáns.

$$\begin{tikzcd}
& M^n, \nu_1, \nu_2 \looparrowright \mathbb{R}^{n+2} \arrow[dl, bend right, "\text{Hirsch}"'] \arrow[dr, bend left, "\text{Hirsch}"] & \\
M^n, v_1, v_2 \looparrowright \mathbb{R}^{n+2} \arrow[rr, leftrightarrow, "\mathrm{H}_t"] \arrow[d, "\text{projekció}"] & & M^n, u_1, u_2 \looparrowright \mathbb{R}^{n+2} \arrow[d, "\text{projekció}"] \\
f_0 : M^n, v_1 \looparrowright \mathbb{R}^{n+1} & & f_1 : M^n, u_1 \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}
\end{tikzcd}$$

Ahol H_t a homotópia f_0 és f_1 felemeltjei között. ($\mathrm{H}_t \in \mathrm{Mono}\,(TM \oplus \varepsilon^2, \mathbb{R}^{n+2})$, $t \in [0,1]$.) Ez a homotópia definiálja egy G elemét $\mathrm{Mono}\,(TM \times I \oplus \varepsilon, \mathbb{R}^{n+2})$-nek:

$$G : (V, r, s)_t \to (V, r\frac{\partial}{\partial t}, s) \quad (m,t) \in M \times I \text{ és } T_{(m,t)}M \times I = T_m M \times T_t I.$$

Legyen $J : M \times I \to \pi^{-1}[0,1]$ sima leképezés, ($\pi : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ projekció az utolsó koordinátára (v)) hogy:

$$\begin{aligned} J(m,t) &= f_0(m) + tv \text{ ha } 0 \leq t < \tfrac{1}{3}, \\ J(m,t) &= f_1(m) + tv \text{ ha } \tfrac{2}{3} < t \leq 1. \end{aligned}$$

Így $(J, G) : T(M \times I) \to T(\mathbb{R}^{n+2})$ monomorfizmus, melyet $M \times 0$ és $M \times 1$-en f_0 és f_1 indukált. Ebből Hirsch-tétele szerint adódik egy $M \times I \looparrowright \pi^{-1}[0,1]$ tüskés immerzió, mely f_0 és f_1 keresett kiterjesztése.
Így elég meghatározni irányítható n-dimenziós sokaságok $\mathbb{R}^{2n+2}$-be menő, $n+$ $+2$ független tüskével ellátott beágyazásainak a kobordizmuscsoportját. Ez pedig a Pontrjagin-Thom-konstrukció miatt $\pi_{2n+2}(S^{n+2})$-vel izomorf. □

3.2. Állítás. *Az $(n-1)$-dimenziós sokaságok $\mathbb{R}^n$-be menő immerzióinak kobordizmuscsoportja $\pi_n^S(\mathbb{RP}^\infty)$.*

Bizonyítás: Az előzőekhez hasonlóan itt elég az $N^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$, $\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$ $(n-1)$ lineárisan független tüskével ellátott beágyazás kobordizmuscsoportját kiszámolni. Legyen ν_N az $N^{n-1} \looparrowright \mathbb{R}^n$ immerzió normálnyalábja, és ε^i az N feletti triviális i-dimenziós vektornyaláb. Ekkor az $N^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ beágyazás csőszerű környezete indukálható az univerzális vonalnyalábból, illetve

$\gamma_1 \oplus \varepsilon^{n-1}$-ből:

$$\begin{array}{ccc} \nu_N \oplus \varepsilon^{n-1} & \longrightarrow & \gamma_1 \oplus \varepsilon^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ N^{n-1} & \longrightarrow & G_1 = \mathbb{RP}^\infty \end{array}$$

Az $S^{2n-1} \to T(\gamma_1 \oplus \varepsilon^{n-1}) = D(\gamma_1 \oplus \varepsilon^{n-1})/S(\gamma_1 \oplus \varepsilon^{n-1}) = E^{n-1}(T(\gamma_1)) = E^{n-1}(\mathbb{RP}^\infty)$ (ahol $E^i(X)$ az X topológikus tér i-szeres szuszpenziója) a következő leképezés lesz: $D(\nu_N \oplus \varepsilon^{n-1}) \to D(\gamma_1 \oplus \varepsilon^{n-1})$ leképezés már adott, és az $N^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n-1} \hookrightarrow S^{2n-1}$ beágyazás csőszerű környezetével adódik egy $D(\nu_N \oplus \varepsilon^{n-1}) \hookrightarrow S^{2n-1}$ beágyazás is. Az $S^{2n-1} \setminus D(\nu_N \oplus \varepsilon^{n-1})$ pedig képződjön $S(\gamma_1 \oplus \varepsilon^{n-1})$-képére $T(\gamma_1 \oplus \varepsilon^{n-1})$-ban, ami a faktorizálás miatt egy pont lesz $E^{n-1}(\mathbb{RP}^\infty)$-ben. A Pontrjagin-Thom-konstrukció miatt a fenti leképezés izomorfizmus a megfelelő csoportok között, ezzel az állítást igazoltuk. □

3.3. Definíció. *Legyen* $\Psi_2^{(n)} \colon \pi_n^S(S^0) \to \mathbb{Z}/\left(1-(-1)^n\right)\mathbb{Z}$ *a következő leképezés:* $\pi_n^S(S^0)$ *egy tetszőleges eleme reprezentálható egy* $M_{ir}^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ *immerzióval, ehhez a standard* $\mathbb{R}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ *beágyazással vett kompozíció egy* $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{2n}$ *immerziót rendel, pontosabban ennek generikusan (egy reguláris homotópiával megmozgatva) csak kétszeres pontjai lehetnek, ennek számát rendeli hozzá. Ha* n *páros, akkor egy kettőspontban a sorrendtől függetlenül az irányítás jól definiált (azaz ekkor* $\Psi_2^{(n)}$ $\mathbb{Z}$*-be mutat), míg ha* n *páratlan, akkor a kettőspontok száma csak mod 2 jól definiált, azaz ekkor* $\Psi_2^{(n)}$ $\mathbb{Z}_2$*-be képez.*

3.4. Megjegyzés. Nyilván nem függ a kettőspontok száma a kobordizmuscsoport adott elemének reprezentánsától. Egy másik $N_{ir}^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ reprezentánsra a $W_{ir}^{n+1} \looparrowright \mathbb{R}^{n+1} \times [0,1]$ kobordizmust véve, ezt az $\mathbb{R}^{n+2} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ standard beágyazással a generikussá tétel után egy $W_{ir}^{n+1} \looparrowright \mathbb{R}^{2n+1}$ immerzió adódik. Ennek a kétszeres pontjai egy 1-dimenziós részsokaságot adnak a kobordizmusban, végpontjai csak a peremen lehetnek. Pátatlan n-re tehát azonos a kettőspontok száma mod 2. Páros n-re pedig különböző előjelűeket köt össze, ha mindkét végpontja ugyanazon a szinten van, ellenkező esetben azonos előjelűeket.

3.5. Definíció (Hopf-invariáns). *Legyen* $f \colon S^{2n+1} \to S^{n+1}$ *sima leképezés,* p *és* q *ennek reguláris értékei.* f *Hopf-invariánsa* $f^{-1}(p)$ *és* $f^{-1}(q)$ *hurkolódási száma:* $H(f) = lk\left(f^{-1}(p), f^{-1}(q)\right)$*.* *(*$f^{-1}(p)$ n*-dimenziós részsokaság* S^{2n+1}*-ben.)*

3.6. Állítás. *A Hopf-invariáns független* p, q *és* $f \in [f]$ *választásától.*

Bizonyítás: Először azt igazoljuk, hogy a Hopf-invariáns független az $[f]$ homotópia-osztály reprezentánsától. Legyen $g \in [f]$, $H \colon S^{2n+1} \times [0,1] \to S^{n+1}$ a sima homotópia f és g között, p és q reguláris értékei H-nak is. Ekkor $H^{-1}(p)$ és $H^{-1}(q)$ egy kobordizmust létesít $f^{-1}(p)$ és $g^{-1}(p)$ illetve $f^{-1}(q)$ és $g^{-1}(q)$ között. Feltehető, hogy $H^{-1}(p)$ és $H^{-1}(q)$ diszjunkt, mivel komplementer dimenziósak, és hogy majdnem minden $t \in [0,1]$-re a $H^{-1}(p) \cap S^{2n+1} \times t$ illetve a $H^{-1}(q) \cap S^{2n+1} \times t$ sima részsokaság, jelölje ezeket A_t^n és B_t^n. Nyilván feltehető, hogy $A_t^n \cap B_t^n = \emptyset$. Ekkor minden $t \in [0,1]$-re létezik $\varepsilon_t > 0$, hogy $A_t^n \cap B_{t+x}^n = \emptyset$, ha $x \in (-\varepsilon_t, \varepsilon_t)$ és persze $x + t \in [0,1]$, illetve létezik $\varepsilon'_t > 0$, hogy $B_t^n \cap A_{t+x}^n = \emptyset$, ha $x \in (-\varepsilon'_t, \varepsilon'_t)$ és persze $x + t \in [0,1]$. Így a $[0,1] \subset \mathbb{R}$ intervallumnak adódik két nyílt fedése: $\{(t-\varepsilon_t, t+\varepsilon_t) : t \in [0,1]\}$, illetve $\{(t-\varepsilon'_t, t+\varepsilon'_t) : t \in [0,1]\}$. Mindkét fedésből ($[0,1]$ kompaktsága miatt) kiválasztható egy-egy véges részfedés. A két részfedéshez tartozó ε_{t_i}-k, illetve ε'_{t_j}-k minimuma legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor $lk\,(A_t^n, B_t^n) = lk\left(A_t^n, B_{t+\varepsilon}^n\right)$, mivel a bal oldal egyenlő az A_t^n-nek és egy tetszőleges B_t^n peremű sokaság metszési indexével, ahol a B_t^n peremű sokaság tekinthető a $H^{-1}(q)$ sokaság B_t^n és $B_{t+\varepsilon}^n$ közötti részének, és egy $B_{t+\varepsilon}^n$ peremű sokaság uniójának. Igy $lk\,(f^{-1}(p), f^{-1}(q)) = lk\,(A_0^n, B_0^n) = lk\,(A_0^n, B_\varepsilon^n) = lk\,(A_\varepsilon^n, B_\varepsilon^n) = \cdots = lk\,(A_1^n, B_1^n) = lk\,(g^{-1}(p), g^{-1}(q))$.

Ha p és q reguláris értékei f- és g-nek, de nem reguláris értékei H-nak, akkor vegyünk p- és q-hoz nagyon közeli $\tilde{p}$ és $\tilde{q}$ pontokat, amelyek már reguláris értékei H-nak is. Ekkor nyilván $lk\,(f^{-1}(p), f^{-1}(q)) = lk\,(f^{-1}(\tilde{p}), f^{-1}(\tilde{q})) = lk\,(g^{-1}(\tilde{p}), g^{-1}(\tilde{q})) = lk\,(g^{-1}(p), g^{-1}(q))$ teljesül. (Az 1. és 3. egyenlőtlenség azért igaz, mert a p és $\tilde{p}$-ot (ill. q és $\tilde{q}$-ot) S^{n+1}-ben összekötő ív minden pontja reguláris értéke f-nek (ill. g-nek), és az ív őseként kapott sokaságra lehet a fentihez hasonló bizonyítást megismételni.)

Legyenek $p_1, p_2, q \in S^{n+1}$ reguláris értékei f-nek, $\alpha : S^{n+1} \times [0,1] \to S^{n+1}$ izotópia, mely q-t fixen hagyja, a p_1-t p_2-be 'viszi'. (Minden $t \in [0,1]$-re $\alpha(q,t) = q$, minden $x \in S^{n+1}$-re $\alpha(x,0) = x$, és $\alpha(p_1, 1) = p_2$.) Így adódik egy $\alpha \circ \left(f \times id_{[0,1]}\right) : S^{2n+1} \times [0,1] \to S^{n+1}$ homotópia f és $g = \alpha \circ (f,1)$ között. A bizonyítás elején látottakból azt kapjuk, hogy $lk\,(f^{-1}(p_2), f^{-1}(q)) = lk\,(g^{-1}(p_2), g^{-1}(q)) = lk\,(f^{-1}(p_1), f^{-1}(q))$, azaz a Hopf-invariáns független a kritikus pontok választásától. $\square$

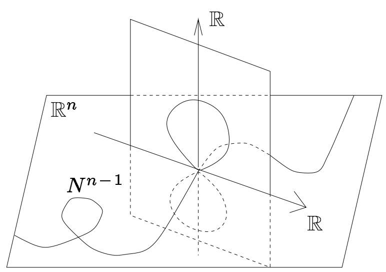
3.7. Állítás. *$\Psi_2^{(n)}$ a stabil Hopf-invariáns.*

Bizonyítás: A $H\colon \pi_{2n+2}(S^{n+2}) \to \mathbb{Z}$ Hopf-invariáns definíciója így is megadható: Legyen $p \in S^{n+2}$ egy reguláris értéke az $f \in \pi_{2n+2}(S^{n+2})$-nek. $v_1, \ldots, v_{n+2}$ T_pS^{n+2} egy bázisa, ekkor ez megad $f^{-1}(p)$-n egy $\nu_1, \ldots, \nu_{n+2}$ triviális tüskézést. Ekkor $H(f) = lk(f^{-1}(p), \nu_1$ tüske végpontja), mivel egy v_1 irányában lévő p-hez közeli q reguláris érték őse a ν_1 tüske végpontját adja. Az $f\colon S^{2n+2} \to S^{n+2}$ leképezéshez a Pontrjagin-Thom-konstrukció egy $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$ beágyazást rendel $n+2$ lineárisan független tüskézéssel, ahol egy p reguláris érték őse $f^{-1}(p)$ lesz az M^n sokaság. Ekkor a Hirsch-tétel szerint adódik egy $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{2n+1}$ immerzió $n+1$ lineárisan független tüskézéssel, ami generikusan egy $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ beágyazás $n+1$ lineárisan független tüskézéssel. Jelölje az egyik tüskézést ν_1. Hirsch-tétele szerint feltehető, hogy a ν_1 tüskézés 'függőleges', vagyis pl. a $2n+1$. koordinátairányban áll. A ν_1 tüske végpontjai által adott M^n sokaságból a tüskézés irányában induló, tüskézés irányú félegyeneseket tekintsük, illetve csak megfelelően husszú szakaszokat, így egy W^{n+1} $(n+1)$-dimenziós immertált sokaságot kapunk. Erre egy láncot illeszthetünk távol a sokaságoktól. A W^{n+1} sokaság és a lánc úniójának pereme a ν_1 tüskézés végpontjai által alkotott M^n-nel diffeomorf sokaság. A 'függőleges' tüskézés irányában levetítve az $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ beágyazást egy $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{2n}$ immerziót kapunk. A konstrukcióból látható, hogy $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{2n}$ kettőspontjai pontosan a $W^{n+1} \cap M^n$ pontjainak a vetülete, ami viszont $lk(f^{-1}(p), \nu_1 \text{ tüske végpontja}) = H(f)$. □

3.8. Állítás. *$\Psi_2^{(n)} = 0$ ha n páros.*

Bizonyítás: A dimenzióra vonatkozó feltételek szerint ekkor (a korábbi jelöléseket használva) $lk\,(f^{-1}(p), f^{-1}(q)) = -lk\,(f^{-1}(q), f^{-1}(p))$, másrészt viszont $lk\,(f^{-1}(p), f^{-1}(q)) = lk\,(f^{-1}(q), f^{-1}(p))$, így az állítás nyilván teljesül. □

3.9. Definíció (Nyolcas konstrukció). $8_*\colon \pi_n^S(\mathbb{RP}^\infty) \to \pi_n^S(S^0)$ *a következő leképezés: $\pi_n^S(\mathbb{RP}^\infty)$ egy eleme egy $N^{n-1} \looparrowright \mathbb{R}^n$ immerzióval reprezentálható, vegyük ennek ν normálnyalábját, és tekintsük az $\varepsilon^1 \oplus \nu$ síknyalábot, mely az N normálnyalábja $\mathbb{R}^{n+1}$-ben. Rögzítsünk egy $j\colon S^1 \looparrowright \mathbb{R}^2$ immerziót, mely a koordináta tengelyekre szimmetrikus, és egyetlen kétszeres pontja az origóban van*



(ábra). Az $\varepsilon^1 \oplus \nu$ síknyaláb minden fibrumában tekintsük a j immerzió által kijelölt 'nyolcasokat'. Ezek uniója egy $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ immerzió képét, azaz $\pi_n^S(S^0)$ egy elemét adja meg.

3.10. Megjegyzés. A fenti konstrukcióban N^{n-1}-től függetlenül M^n irányítható, mivel egy irányításfordító út mentén N-ben S^1 irányítása is megfordul, azaz M^n irányítása nem változik.

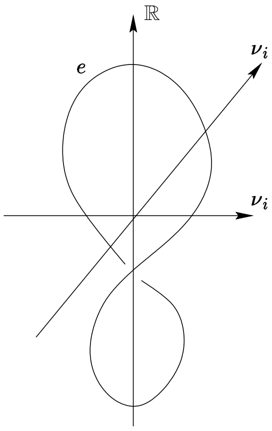
3.11. Tétel (Koschorke). *Az alábbi diagram kommutatív minden n-re:*

$$\begin{tikzcd} \pi_n^S(\mathbb{RP}^\infty) \arrow[rr, "8_*"] \arrow[dr, "\chi"'] & & \pi_n^S(S^0) \arrow[dl, "\Psi_2^{(n)}"] \\ & \mathbb{Z}/\left(1-(-1)^n\right)\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

ahol χ az Euler-karakterisztika, vagy mod 2 redukciója attól függően, hogy $\mathbb{Z}$-be, vagy $\mathbb{Z}_2$-be mutat.

Bizonyítás: Elég azzal az esettel foglalkozni, ha n páratlan, különben $\Psi_2^{(n)} = \chi = 0$ teljesül. Tekintsük az $i\colon N^{n-1} \looparrowright \mathbb{R}^n$ immerziót, mint $\pi_n^S(\mathbb{RP}^\infty)$ egy elemének a reprezentáltja, és legyen ν_i ennek normálnyalábja, ε^k pedig az N feletti triviális k-dimenziós vektornyaláb. Ekkor $8_*[i]$ azonos a $\nu_i \oplus \varepsilon^1$ gömbnyalábjának $\mathbb{R}^{n+1}$-be való immerziójával:

$8'_i\colon S\left(\nu_i \oplus \varepsilon^1\right) \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$. Legyen e az ábrán látható beágyazása $S\left(\nu_i \oplus \varepsilon^1\right) = S^1$-nek $\left(\nu_i \oplus \varepsilon^1\right) \oplus \nu_i$-be, amelyet a $\left(\nu_i \oplus \varepsilon^1\right) \oplus \nu_i \to \left(\nu_i \oplus \varepsilon^1\right)$ projekcióval komponálva a nyolcas konstrukció adódik. (Lehet $e\colon t \to \left(\sin(t), \sin\left(\frac{t}{2}\right), \sin\left(\frac{t+\pi}{2}\right)\right)$ $t \in [0, 4\pi]$.) Az $N^{n-1} \looparrowright \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ generikusan egy $N^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ beágyazás, aminek a csőszerű környezete azonos a $\left(\nu_i \oplus \varepsilon^1\right) \oplus \varepsilon^{n-1}$ nyalábbal. Legyen $g\colon \left(\nu_i \oplus \varepsilon^1\right) \oplus \varepsilon^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ a csőszerű környezet beágyazása $\mathbb{R}^{2n}$-be. Legyen $h\colon \nu_i \to \varepsilon^{n-1}$ egy generikus nyaláb morfizmus. Ezt komponálva e-vel egy $S\left(\nu_i \oplus \varepsilon^1\right) \xrightarrow{h \circ e} \left(\nu_i \oplus \varepsilon^1\right) \oplus \varepsilon^{n-1}$ leképezés adódik. Ezt g-vel komponálva a kapott leképezés kettőspontjainak a száma éppen $\Psi_2^{(n)} \circ 8_*[i]$-vel azonos, azonban ennek a leképezésnek pontosan ott lesznek a kettőspontjai, ahol h nulla volt. Viszont h a $Hom\left(\nu_i, \varepsilon^{n-1}\right)$ nyaláb egy szelése, így nullhelyeinek mod 2 száma megegyezik e nyaláb $(n-1)$-ik Stiefel-Whitney osztályával:



$$
\begin{aligned}
\left\langle w_{n-1}\left(Hom\left(\nu_i, \varepsilon^{n-1}\right)\right), [N]_2\right\rangle &= \left\langle w_{n-1}\Big(Hom\left(\nu_i, \varepsilon^1\right)^{n-1}\Big), [N]_2\right\rangle = \\
= \left\langle w_{n-1}\left(\nu_i^{n-1}\right), [N]_2\right\rangle &= \left\langle w_1\left(\nu_i\right)^{n-1}, [N]_2\right\rangle
\end{aligned}
$$

Mivel $TN \oplus \nu_i$ triviális, így $w(N) \cup \left(1 + w_1\left(\nu_i\right)\right) = 1$, amiből $w_{n-1}(N) = w_1\left(\nu_i^{n-1}\right)$ adódik, azaz $\left\langle w_1\left(\nu_i\right)^{n-1}, [N]_2\right\rangle = \left\langle w_{n-1}(N), [N]_2\right\rangle$ Azonban $\left\langle w_{n-1}(N), [N]_2\right\rangle \equiv \chi(N) \mod 2$. Ezzel igazoltuk, hogy $\Psi_2^{(n)} \circ 8_*[i] = \chi[i]$. □

3.12. Tétel (Adams). *Páratlan Hopf-invariáns csak $n = 1, 3$ és 7 esetén létezik.*

3.13. Tétel. *Ha $n \neq 1, 3$ és 7, akkor minden zárt $(n-1)$-dimenziós sokaság, mely immertálható $\mathbb{R}^n$-be páros Euler-karakterisztikájú.*

Bizonyítás: Adams és Koschorke előbbi tételeiből nyilvánvalóan következik. □

3.14. Definíció. *Legyen $\Theta_n : \pi_n^S(\mathbb{RP}^\infty) \to \mathbb{Z}_2$ a következő leképezés: $\pi_n^S(\mathbb{RP}^\infty)$ egy eleméhez – ami egy $N^{n-1} \looparrowright \mathbb{R}^n$ immerzió – n-szeres pontjai számának mod 2 értékét rendeli hozzá.*

3.15. Megjegyzés. Az eddigiekhez hasonlóan látható, hogy Θ_n jól definiált.

3.16. Tétel (Eccles). *Legyen n páratlan. Ekkor Θ_n akkor és csak akkor nem triviális, ha $n = 1, 3$ vagy 7.*

Bizonyítás: A 3.13. tétel és a 2.3. tétel nyilvánvaló következménye. □

4. A Morin-leképezések lehetetlensége

a. Hajtás leképezések

4.1. Tétel. *Legyen M zárt n-dimenziós sokaság páratlan Euler-karakterisztikával, N p-dimenziós sokaság, p páros és $w_p(N) = 0$. Ekkor nem létezik $f : M^n \to N^p$ $(n \geqslant p)$ Morin-leképezés csak hajtás szingularitással.*

Bizonyítás: Az 1.18. tételben szereplő formula szerint $\chi(M) \equiv \chi(S(f))$ mod 2. A képletben a $\chi_f \cdot \chi(N)$ szorzat páros, mert $0 = \langle w_p(N), [N]_2 \rangle \equiv \chi(N)$ mod 2, vagy pedig azért, mert N nem kompakt. Így $S(f)$ $p-1$-dimenziós sokaság páratlan Euler-karakterisztikájú lenne, ami lehetetlen, mert páratlan dimenziós sokaságok Euler-karakterisztikája nulla. Ezzel a tételt igazoltuk. □

4.2. Lemma. *Legyen N majdnem paralelizálható p-dimenziós zárt sokaság, ekkor $\chi(N)$ páros.*

Bizonyítás: Legyen $* \in N$ egy tetszőleges pont. Jelölje ε az N feletti triviális vonalnyalábot. Legyen $i : N \setminus * \hookrightarrow N$ beágyazás. Ekkor a kohomológiák között adódik: $\mathrm{H}^k(N) \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^k(N \setminus *) \approx \mathrm{H}^k(N \setminus int\triangle^p)$, ahol $\triangle^p$ egy p-dimenziós szimplex. Így N és $N \setminus int\triangle^p$ szimplíciális kohomológiáira $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
C^0 & \longrightarrow & C^1 & \longrightarrow \ldots \longrightarrow & C^{p-2} & \longrightarrow & C^{p-1} & \longrightarrow & C^p & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow\approx & & \downarrow\approx & \downarrow\approx & \downarrow\approx & & \downarrow\approx & & \downarrow & & \downarrow \\
D^0 & \longrightarrow & D^1 & \longrightarrow \ldots \longrightarrow & D^{p-2} & \longrightarrow & D^{p-1} & \longrightarrow & D^p & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Tehát i^* izomorfizmus, ha $k = 0, 1, \ldots, p-2$. Mivel $\varepsilon^p\big|_{N\setminus *} \approx TN\big|_{N\setminus *} \hookrightarrow TN$, így $i^*(w_k(N)) = w_k\left(TN\big|_{N\setminus *}\right) = w_k\left(\varepsilon^p\big|_{N\setminus *}\right) = 1$, azaz $w(TN) = 1 + w_{p-1} + w_p$. Tudjuk, hogy minden p-dimenziós sokaság $\mathbb{R}^{2p-1}$-be immertálható, így az $N \looparrowright \mathbb{R}^{2p-1}$ leképezés νM normál nyalábjára $w(\nu M) = (1 + w_{p-1} + w_p)^{-1} = 1 + w_{p-1} + w_p$ teljesül, ha $p \geqslant 3$. Ha $p = 1$ akkor $\chi(N) = 0$ nyilvánvaló, ha $p = 2$ akkor a nem irányítható felületeken egy irányításfordító út mentén a két lineárisan független vektormező sorrendje is felcserélődne, az irányítható felületekről pedig tudjuk, hogy páros Euler-karakterisztikájúak. Mivel νM $p-1$-dimenziós, tehát $w_p = 0$ teljesül, így $0 = \langle w_p, [N]_2 \rangle \equiv \chi(N)$ mod 2, azaz N Euler-karakterisztikája páros. □

4.3. Tétel. *Legyen $f : M^n \to N^p$ $(n \geqslant p)$ Morin-leképezés csak hajtás szingularitással, M zárt n-dimenziós sokaság páratlan Euler-karakterisztikával, N majdnem paralelizálható p-dimenziós sokaság. Ekkor $p = 1, 3$ vagy 7 lehet csak.*

Bizonyítás: Az 1.18. tételben szereplő formula szerint $\chi(M) \equiv \chi(S(f))$ mod 2. A képletben a $\chi_f \cdot \chi(N)$ szorzat páros a 4.2. lemma miatt, vagy pedig azért, mert N nem kompakt. Így $S(f)$ páratlan Euler-karakterisztikájú, $p-1$-dimenziós sokaság, tehát p csak páratlan lehet, mert a páratlan dimenziós sokaságok Euler-karakterisztikája nulla. Tudjuk, hogy $f\big|_{S(f)}$ immerzió, legyen $* \in N \setminus f(S(f))$ tetszőleges pont, és mivel N majdnem paralelizálható Hirsch-tétele miatt létezik $g : N \setminus * \looparrowright \mathbb{R}^p$ immerzió. Ezzel adódik egy $f \circ g : S(f) \looparrowright \mathbb{R}^p$ immerzió. A 3.13. tétel miatt $p = 1, 3$ vagy 7 lehet. □

4.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy $f: M \to N$* stabil, *ha az*

$$\alpha\colon (\mathit{Diff}(M) \times \mathit{Diff}(N)) \times C^\infty(M,N) \to C^\infty(M,N)$$

csoporthatásnál keletkező orbitja a C^∞-topológiával ellátott $C^\infty(M,N)$ térben nyílt halmaz, ahol $\alpha((g,h),f) := h^{-1}fg$ és $\mathit{Diff}(X)$ az X sokaság diffeomorfizmuscsoportja.

4.5. Megjegyzés. A stabil leképezések $C^\infty(M,N)$-nek egy nyílt részhalmazát alkotják. $N = \mathbb{R}$ esetén a stabil leképezések éppen az M-en értelmezett Morse-függvények. Ha $f: M \to \mathbb{R}^p$ Morin-leképezés csak hajtás szingularitással, akkor f pontosan akkor stabil, ha $f\big|_{S(f)}$ általános helyzetű immerzió.

4.6. Tétel. *Legyen $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ $(n \geqslant p)$ stabil Morin-leképezés csak hajtás szingularitással, M zárt n-dimenziós sokaság. Ha p páratlan, akkor $f\big|_{S(f)}$ p-szeres pontjainak a száma, és $\chi(M)$ azonos paritású.*

Bizonyítás: Az 1.18. tétel, a 2.3. tétel és az előbbi megjegyzés nyilvánvaló következménye. □

b. Csúcs szingularitások

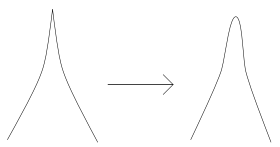
4.7. Tétel. *Legyen $f : M^n \to N^p$ $(n \geqslant p)$ Morin-leképezés csak hajtás és csúcs szingularitással, M zárt n-dimenziós sokaság páratlan Euler-karakterisztikával, N majdnem paralelizálható p-dimenziós sokaság. Ekkor $p = 1, 2, 3, 4, 7$ vagy 8 lehet csak.*

Bizonyítás: Az 1.18. tételben szereplő formula szerint $\chi(M) \equiv \chi(S(f)) + \chi(A_2(f))$ mod 2. A képletben a $\chi_f \cdot \chi(N)$ szorzat páros a 4.2. lemma miatt, vagy pedig azért, mert N nem kompakt. A következő esetek lehetségesek: $\chi(S(f))$ páratlan, vagy $\chi(A_2(f))$ páratlan. Tekintsük először a $\chi(S(f))$ páratlan esetet. Ekkor $f\big|_{S(f)}$ nem immerzió, $A_2(f)$ mentén lehetnek szingularitásai. $f\big|_{S(f)}$ lokálisan az $A_2(f)$ pontok körül a következő alakú:

$$(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}) \to \left(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, -3x_{p-1}^2, -2x_{p-1}^3\right).$$

Ezt lokálisan változtassuk meg (1. ábra):

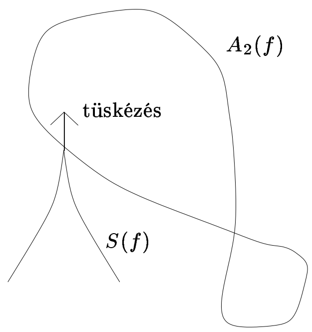
$$(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) \to \left(x_1, x_2, \ldots, x_{p-2}, -3x_{p-1}^2, -2x_{p-1}\right).$$



1. ábra.

Így egy $g\big|_{S(f)} : S(f) \looparrowright N$ immerziót kapunk. A 4.3. tétel bizonyításához hasonlóan adódik egy $h : S(f) \looparrowright \mathbb{R}^p$ immerzió. A 3.13. tétel miatt $p = 1, 3$ vagy 7 lehet.

Második eset: $\chi(A_2(f))$ páratlan. Ekkor tekintsük az f megszorítását az $A_2(f)$-re. Ez egy 2-kodimenziós immerzió. Ehhez tartozik egy tüskézés (2. ábra), a fenti lokális koordinátás alakban a $(0, 0, \ldots, 0, 0)$ kezdőpontú, $(0, 0, \ldots, 1, 0)$ pontba mutató vektor. Az $f\big|_{A_2(f)} : A_2(f) \looparrowright N$ immerzió után a $g : N \setminus * \looparrowright \mathbb{R}^p$ immerziót alkalmazva adódik egy $f\big|_{A_2(f)} : A_2(f) \looparrowright \mathbb{R}^p$ immerzió egy tüskével. Hirsch-tétele szerint ekkor létezik már 1-gyel kisebb dimenzióba is immerziója $A_2(f)$-nek: $f\big|_{A_2(f)} : A_2(f) \looparrowright \mathbb{R}^{p-1}$. A 3.13. tétel miatt azonban csak $p-1 = 1, 3$ vagy 7 lehet. $\square$



2. ábra.

4.8. Tétel. *Legyen $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ ($n \geqslant p$) stabil Morin-leképezés csak hajtás és csúcs szingularitással, M zárt n-dimenziós sokaság. Ha p páratlan, akkor $f\big|_{A_1(f)}$ p-szeres pontjainak a száma, és $\chi(M)$ azonos paritású.*

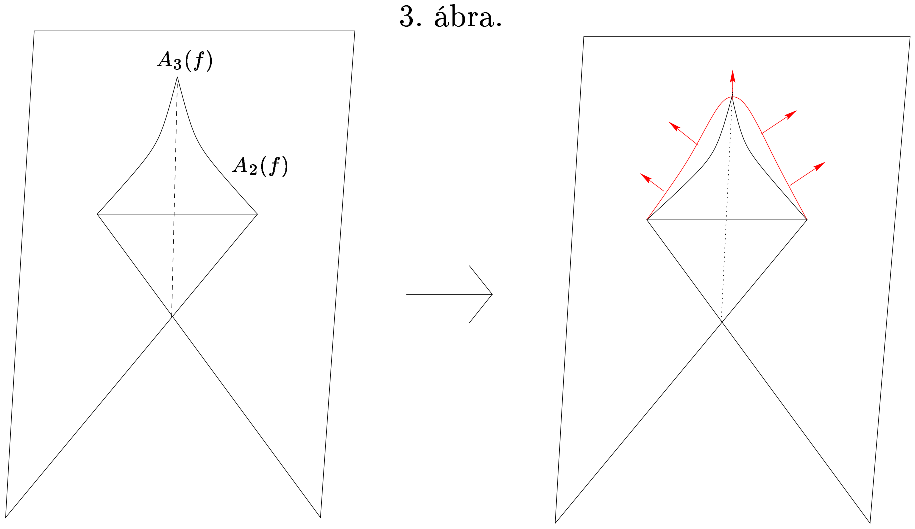
Bizonyítás: Az 1.18. tétel, a 2.3. tétel és az előző kisimítási eljárás nyilvánvaló következménye. $\square$

c. Fecskefarok szingularitások

4.9. Tétel. *Legyen $f : M^n \to N^p$ ($n \geqslant p$) Morin-leképezés csak hajtás, csúcs és fecskefarok szingularitással, M zárt n-dimenziós sokaság páratlan Euler-karakterisztikával, N majdnem paralelizálható p-dimenziós sokaság. Ha p páros, akkor $p = 2, 4$ vagy 8 lehet csak.*

Bizonyítás: Az 1.18. tételben szereplő formula szerint $\chi(M) \equiv \chi(S(f)) + \chi\left(\overline{A_2(f)}\right) + \chi(A_3(f)) \mod 2$. A képletben a $\chi_f \cdot \chi(N)$ szorzat páros a 4.2. lemma miatt, vagy pedig azért, mert N nem kompakt. Mivel p páros, így $S(f)$ és $A_3(f)$ páratlan dimenziós sokaságok, tehát Euler-karakterisztikájuk nulla. Így – mivel $\chi(M)$ páratlan – $\chi\left(\overline{A_2(f)}\right)$ páratlan. Az $f\big|_{\overline{A_2(f)}} : \overline{A_2(f)} \to N$ nem immerzió, $A_3(f)$ mentén szingularitásai

3. ábra.



vannak. A 4.3. tétel bizonyításához hasonlóan itt is egy tüskézett immerzió adódik (3. ábra). Így felhasználva $g: N \setminus * \looparrowright \mathbb{R}^p$ immerziót, és Hirsch-tételét egy $f\big|_{\overline{A_2(f)}}\colon \overline{A_2(f)} \to \mathbb{R}^{p-1}$ immerzió adódik. A 3.13. tétel miatt $p-1=1,3$ vagy 7 lehet. □

4.10. Tétel. *Legyen $f: M^n \to N^p$ $(n \geqslant p)$ Morin-leképezés csak hajtás, csúcs és fecskefarok szingularitással, M zárt n-dimenziós sokaság páratlan Euler-karakterisztikával, N majdnem paralelizálható p-dimenziós sokaság. Ha $0 =$ $= [A_3(f)]_2 \in \mathrm{H}_{p-3}\left(\overline{A_2(f)}; \mathbb{Z}_2\right)$ és p páratlan, akkor $p = 1, 3$ vagy 7 lehet csak.*

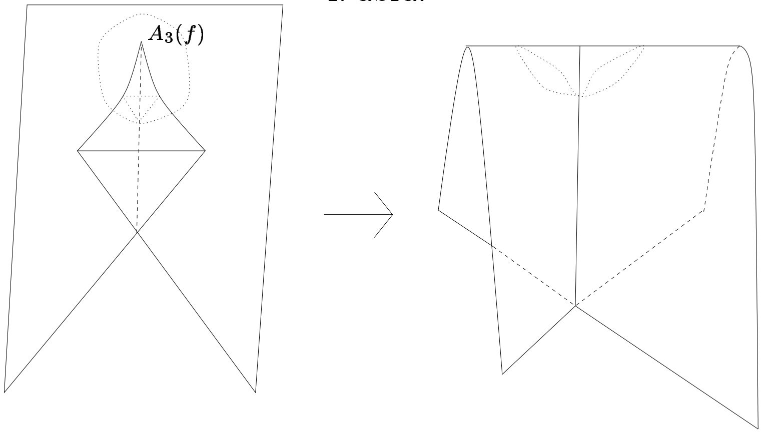
4.11. Megjegyzés. A 4.7. tétel nyilvánvalóan következik a 4.10. és a 4.9. tételekből, hiszen ott $A_3(f) = \emptyset$.

Bizonyítás: Az 1.18. tételben szereplő formula szerint $\chi(M) \equiv \chi(S(f)) +$ $+ \chi\left(\overline{A_2(f)}\right) + \chi(A_3(f)) \mod 2$. A képletben $\chi\left(\overline{A_2(f)}\right) = 0$, mivel $\overline{A_2(f)}$ $p-1$ (azaz páros) dimenziós.

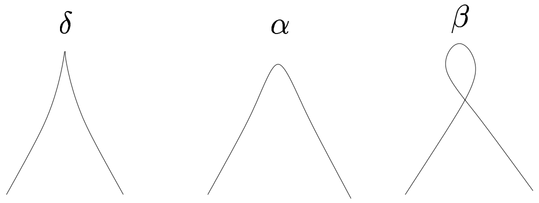
4.12. Lemma. *A 4.10. tétel feltételei mellett $\chi(A_3(f))$ páros.*

Bizonyítás: Azt fogjuk igazolni, hogy $A_3(f)$ perem, a ‘kétszeres’ A_2 pontok pereme, így Euler-karakterisztikája páros. Tekintsük az $f\big|_{S(f)}: S(f) \to N$ leképezést, ezt fogjuk $\overline{A_2(f)}$ mentén megváltoztatni. Az f lokálisan $A_3(f)$ pontjai körül $f_1 \times f_2\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{p-3} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{p-3}$ alakú, ahol f_2 az identitás, $f_1(x,y) = (-4x^3 - 2xy, y, -3x^4 - x^2y)$. Az $A_3(f)$ pontjai körül ezt kicserél-jük (4. ábrának megfelelően) a $g_1 \times g_2\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{p-3} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{p-3}$ alakúra, ahol g_2 az identitás, $g_1(x,y) = (x^2, y, xy)$. (g_1 a Whitney esernyő). Ezt a cserét azért hajthatjuk végre, mert az $A_3(f)$ pontjai körül felvett kis gömb mindkettőt egy-egy ‘nyolcasban’ metszi. Így kapunk egy $g\colon S(f) \to N$ leképezést, melyre $g\big|_{S(f)\setminus A_3(f)}$ immerzió, feltehető, hogy általános helyzetű. Legyen $W_1 = \{(x,y) \in S(f) \times S(f) : x \neq y \text{ és } g(x) = g(y)\}$, jelölje ennek topologikus lezártját $W = \overline{W_1}$, legyen $\Delta = \{(x,x) \in S(f) \times S(f) : x \in A_3(f)\} (= A_3(f))$. Könnyen látható, hogy $W \setminus W_1 = \Delta$, W sima $p-2$-dimenziós zárt sokaság. A $\tau\colon (x,y) \to (y,x)$ egy involúció W-n, a W/τ faktortér pereme pedig $A_3(f)$ lesz. Ezzel a lemmát igazoltuk. $\square$

4. ábra.



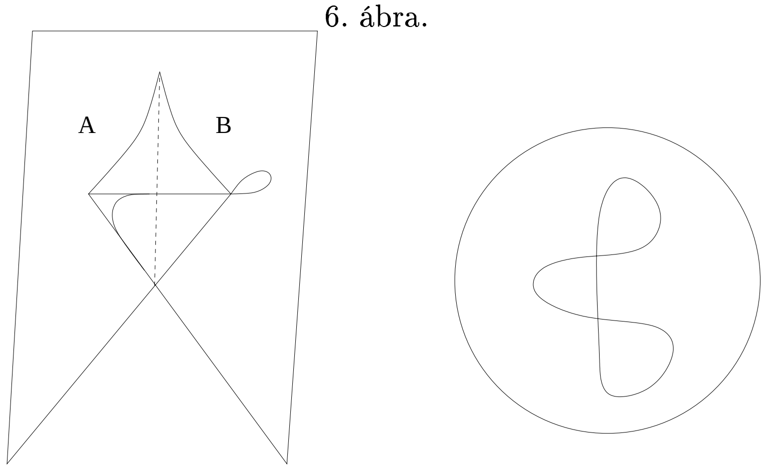
Így $\chi(S(f))$ páratlan most. Módosítani fogjuk az $f\big|_{S(f)} : S(f) \to N$ leképezést. Mivel $0 = [A_3(f)]_2 \in \mathrm{H}_{p-3}\left(\overline{A_2(f)}; \mathbb{Z}_2\right)$, így $A_3(f)$ határol $\overline{A_2(f)}$-ban, azaz léteznek A és B nyílt halmazok $\overline{A_2(f)}$-ban, hogy $A \cup B = {}$ $= A_2(f)$ és $\partial A = \partial B = \overline{A} \cap \overline{B}$. Az $f\big|_{S(f)}$ lokálisan az $A_2(f)$ pontjaiban a következő alakú: $(x_1, \ldots, x_{p-1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{p-2}, \delta(x_{p-1}))$, ahol $\delta(x_{p-1}) = {}$ $= \left(-3x_{p-1}^2, -2x_{p-1}^3\right)$ (5. ábra). Az A pontjaiban lokálisan módosítsuk a leképezést a következő módon: $(x_1, \ldots, x_{p-1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{p-2}, \alpha(x_{p-1}))$, ahol $\alpha(x_{p-1}) = \left(-3x_{p-1}^2, -2x_{p-1}\right)$ (5. ábra). A B pontjaiban pedig a következő módon: $(x_1, \ldots, x_{p-1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{p-2}, \beta(x_{p-1}))$, ahol $\beta(x_{p-1}) = {}$ $= \left(-3x_{p-1}^2, -2x_{p-1}^2 + 2x_{p-1}\right)$ (5. ábra). Így elértük, hogy az $f\big|_{S(f)}$ leképezés az $A_3(f)$ pontjait kivéve immerzió lett (6. ábra). Az $A_3(f)$ egy csőszerű környezetét véve, a leképezés ott triviális $p-3$ paramétercsaládja $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ leképezéseknek. Egy $q \in A_3(f)$ pont környezetének pereme látható a 6. ábrán, ami nyilván kiterjed egy körlap immerziójaként. A fenti csőszerű környezet



5. ábra.

mentén az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ leképezéseket módosítsuk úgy, hogy 'belül' az immerzió legyen. Így egy $g\colon S(f) \looparrowright N$ immerzió adódik. Legyen $* \in N \setminus g(S(f))$

6. ábra.



tetszőleges pont, és mivel N majdnem paralelizálható Hirsch-tétele miatt létezik $h : N \setminus * \looparrowright \mathbb{R}^p$ immerzió. Adódik egy $g \circ h : S(f) \looparrowright \mathbb{R}^p$ immerzió. A 3.13. tétel miatt $p = 1, 3$ vagy 7 lehet. $\square$

4.13. Megjegyzés. A fejezetben található tételekben előforduló lehetséges p értékekre (alkalmas M sokasággal) léteznek megfelelő $M \to \mathbb{R}^p$ Morin-leképezések a megkövetelt szingularitásokkal.

Felhasznált irodalom

[A] F. Adams: *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math. **72** (1960), 20-104.

[B] R. Bott: *Nondegenerate critical manifolds*, Ann. Math. **60** (1954), 248-261.

[C] D. S. Chess: *A note on the classes* $[S_1^k(f)]$, Proc. Sympos. Pure Math. **40**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence RI, (1983), 221-224.

[F] Takuo Fukuda: *Topology of folds, cusps and Morin singularities*, "*A fete of topology*", ed. by Y. Matsumoto, T. Mizutani and S. Morita, (Academic Press, New York 1987) pp. 331-353.

[He] R. J. Herbert: *Multiple points of immersed manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **34**, no. 250, 1981.

[Hi] M. Hirsch: *Immersions of manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 242-276.

[K] Mahito Kobayasi: *Simplifying certain mappings from simply connected 4-manifolds into the plane*, Tokyo J. Math. **15** (1992), 327-349.

[Ká] Kálmán Tamás: *Globális szingularitáselmélet*, (Szakdolgozat 1998) http://www.cs.elte.hu/szakdolg

[Ko] Ulrich Koschorke: *Multiple points of immersions, and the Kahn-Priddy theorem*, Math. Z. **169** (1979), 223-236.

[KS] Shigeki Kikuchi & Osamu Saeki: *Remarks on the topology of folds*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 905-908.

[M] J. Milnor: *Morse theory*, Annals Study, Princeton Univ. Press, 1963.

[S] Osamu Saeki: *Studying the topology of Morin singularities from a global viewpoint*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **117** (1995), 223-235.

[SS] Osamu Saeki & Kazuhiro Sakuma: *Maps with only Morin singularities and the Hopf invariant one problem*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **124** (1998), 223-235.

[W] Robert Wells: *Cobordism groups of immersions*, Topology **5**, 281-294.