Baire 1 függvények rendtípusai

SZAKDOLGOZAT

Elekes Márton

Témavezető: Laczkovich Miklós
egyetemi tanár

1998

Bevezetés

Az X alaphalmazon értelmezett valós értékű függvények halmazán tekintsük a pontonkénti parciális rendezést:

$$f \leq g, \quad \text{ha } \forall x \in X \ f(x) \leq g(x),$$

azaz

$$f < g, \quad \text{ha } \forall x \in X \ f(x) \leq g(x) \text{ és } \exists x \in X \ f(x) \neq g(x).$$

Ha csak karakterisztikus függvényekre szorítkozunk, akkor épp X részhalmazainak tartalmazás szerinti parciális rendezéséhez jutunk.

Tekinthetjük ezen parciális rendezések megszorítását bizonyos konkrét függvényosztályokra. Ebből a szempontból a Baire 1 függvények osztálya különösen érdekesnek bizonyult.

Kuratowski klasszikus tétele szerint valós Baire 1 függvényeknek nincs ω_1 típusú teljesen rendezett (a továbbiakban: rendezett) halmaza. Laczkovich Miklós fogalmazta meg a kérdést, hogy pontosan milyen rendtípusúak lehetnek valós Baire 1 függvények rendezett halmazai, azaz mely rendtípusok reprezentálhatók valós Baire 1 függvényekkel. A jelen dolgozatban ezzel a kérdéssel és hozzá kapcsolódó problémákkal foglalkozunk.

Az első fejezetben konkrét függvény- és halmazosztályokat vizsgálunk meg, és rávilágítunk, hogy miért a Baire 1 osztállyal foglalkozunk részletesebben. Ezt a függvényosztályt a második, harmadik és negyedik fejezetben tárgyaljuk. Előbb bebizonyítjuk a valós Baire 1 függvényekkel való reprezentáció két klasszikus tételét, majd összefoglaljuk az ezzel kapcsolatos egyéb eredményeket, ezután megvizsgáljuk a problémát általános alapterek esetén. Végül az ötödik fejezetben összegyűjtjük a dolgozatban felmerülő nyitott problémákat.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Laczkovich Miklósnak a dolgozat megírásához nyújtott felbecsülhetetlen értékű segítségéért.

1. Valós függvényosztályok rendtípusai

1.1. Tétel. Folytonos függvényekből álló rendezett halmaz hasonló a valós számok egy részhalmazához.

Bizonyítás. Legyen $\{f_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ folytonos függvények egy rendezett halmaza és legyen $\varphi : (0,1) \to \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton növő homeomorfizmus. Feltehető, hogy a függvények a $(0,1)$ intervallumon vannak értelmezve és 0 és 1 közötti értékeket vesznek fel, hiszen a $\{\varphi^{-1} \circ f_\alpha \circ \varphi : \alpha \in \Gamma\}$ folytonos függvényekből álló függvényhalmaz az eredetihez hasonlóan van rendezve.

Legyen tehát $f_\alpha : (0,1) \to (0,1)$ folytonos $(\alpha \in \Gamma)$, és tekintsük az

$$f_\alpha \mapsto \int_0^1 f_\alpha \quad (\alpha \in \Gamma)$$

hozzárendelést. Ez nyilván rendezéstartó, és a függvények folytonossága miatt injektív, azaz hasonlóság. ■

Ha a folytonosságot a valamivel gyengébb Darboux-tulajdonsággal helyettesítjük, a helyzet lényegesen bonyolultabbá válik.

1.2. Tétel. Intervallumon értelmezett Darboux függvényekkel ugyanazok a rendtípusok reprezentálhatók, mint tetszőleges valós függvényekkel.

Bizonyítás. Az egyik irány nyilvánvaló. A másik irány bizonyításához legyen $\{f_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ valós függvények egy rendezett halmaza. Ha $F : C \to \mathbb{R}$ egy bijekció, ahol C-vel a Cantor-halmazt jelöljük, akkor az $\{f_\alpha \circ F : \alpha \in \Gamma\}$ függvényhalmazra áttérve feltehető, hogy f_α $(\alpha \in \Gamma)$ a Cantor halmazon van értelmezve. Ha $(a,b) \subset [0,1]$ a Cantor halmaz egy kiegészítő intervalluma, akkor terjesszük ki ide az összes f_α-t úgy, hogy a közös kiterjesztés (a,b)-n folytonos legyen és $x \searrow a$ illetve $x \nearrow b$ esetén a lim sup-ok $+\infty$-ek, a lim inf-ek $-\infty$-ek legyenek. Ez az $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ $(0,1)$-be eső darabjának megfelelő lineáris transzformáltjainak segítségével megtehető. Ezzel a rendezést nem befolyásoltuk. Azt kell még belátni, hogy Darboux függvényeket kaptunk. Ha x és y ugyanabban a kiegészítő intervallumban vannak, akkor a folytonosság miatt érvényes $[x,y]$-ban a Darboux-tulajdonság. Ha nem ez az eset áll fenn, de legalább az egyik pont egy kiegészítő intervallumban van, akkor annak a kiegészítő intervallumnak az $[x,y]$-ba eső részén a függvény minden valós értéket felvesz, így érvényes a Darboux-tulajdonság. Ha pedig mindkét pont a Cantor halmazban van, akkor van közöttük egy teljes kiegészítő intervallum, mivel a Cantor halmaz sehol sem sűrű, így $[x, y]$-ban megint minden értéket felvesz a függvény. ■

Hasonló állítás igaz a gyakran vizsgált Darboux Baire 1 függvények osztályára.

1.3. Tétel. Intervallumon értelmezett Darboux Baire 1 függvényekkel ugyanazok a rendezett halmazok reprezentálhatóak, mint Baire 1 függvényekkel.

Bizonyítás. Mint azt majd a 3.3. tételben látni fogjuk, feltehető, hogy a Baire 1 függvények a Cantor halmazon vannak értelmezve. Ekkor azonban az előző állításban adott konstrukció most is megfelel, felhasználva a 3.2. tételt követő megjegyzést. ■

Megjegyzés. Ismeretes, hogy a Darboux Baire 1 függvények gráfjai összefüggő halmazok a síkon, ezért meglepő módon a harmadik fejezetben konstruált bonyolult rendezéseket "egymás fölött elhelyezkedő" összefüggő függvénygráfokkal is meg lehet valósítani.

Ha azzal a valamivel erősebb feltevéssel élünk, hogy a reprezentáló függvények deriváltak, a helyzet egyszerűsödik.

1.4. Tétel. Minden deriváltakból álló rendezett halmaz hasonló a valós számok egy részhalmazához.

Bizonyítás. Legyen X a rendezett halmaz és $f \in X$. Jelöljük F-fel f egy primitív függvényét. Tekintsük a következő leképezést:

$$f \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(F(n) - F(-n)\right)}{2^n}.$$

Legyen $f < g$ és jelölje g egy primitív függvényét G. Ekkor a $G - F$ függvény monoton növő, hiszen a deriváltja $g - f \geq 0$. Emellett nem konstans, hiszen akkor $g - f \equiv 0$ lenne, ami lehetetlen. Így tehát $(G-F)(-n) \leq (G-F)(n)$, amiből $F(n)-F(-n) \leq G(n)-G(-n)$ és elegendően nagy n-re szigorú egyenlőtlenség érvényes. Innen kihasználva, hogy az arctg függvény korlátos és szigorúan monoton növő azt kapjuk, hogy a fent definiált leképezés értelmes, és valóban rendezéstartó injekció. ■

A folytonos függvények osztályának kétféle általánosítása kínálkozik. Az egyik lehetőség a (különféle értelemben) mérhető függvények osztálya, a másik pedig a Baire α osztályok hierarchiája. Következő célunk megmutatni, hogy a Baire 1 osztály kivételével valamennyi probléma tisztázottnak tekinthető. [Ko] legfőbb eredménye, hogy a Baire α osztály ($\alpha \geq 2$) esetén már a jólrendezések kérdése sem válaszolható meg a ZFC-axiómarendszerben, emellett a 4.6. következményben látni fogjuk, hogy a Borel-mérhető függvényekre ugyanez áll. Ezeket egybevetve a következő két tétellel látható, hogy csak a Baire 1 függvények esete vár még válaszra.

1.5. Tétel. Lebesgue-mérhető függvényekkel ugyanazok a rendtípusok reprezentálhatóak mint tetszőleges valós függvényekkel.

Bizonyítás. Csak a nem nyilvánvaló irányt bizonyítjuk. Legyen C a Cantor halmaz (tetszőleges kontinuum számosságú nullmértékű halmaz megfelelő), és legyen $f : C \to \mathbb{R}$ egy bijekció. Ha $\{f_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ egy rendezett függvényhalmaz, akkor $\{g_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ ugyanilyen rendtípusú, ahol

$$g_\alpha := \begin{cases} f_\alpha \circ f & C\text{-n;} \\ 0 & \mathbb{R} \setminus C\text{-n,} \end{cases}$$

emellett minden $\alpha \in \Gamma$-ra g_α majdnem mindenütt nulla, így Lebesgue-mérhető. ■

Az L_p függvényterek vizsgálatához értelemszerűen módosítanunk kell a rendezés definícióját. Ezen függvényterek elemei ugyanis csak majdnem mindenütt vannak meghatározva, ezért az edig használt rendezés most nem értelmezhető. Ehelyett természetes módon adódik, hogy egy $f \in L_p$-t akkor mondjunk kisebbnek egy $g \in L_p$-nél, ha majdnem mindenütt kisebb vagy egyenlő nála, emellett mint L_p elemei különbözőek, azaz pozitív mértékű halmazon térnek el.

1.6. Tétel. Bármely $1 \le p \le \infty$-re L_p minden rendezett részhalmaza hasonló a valós számok egy részhalmazához.

Bizonyítás. Az

$$f \mapsto \int_{[-\pi/2,\pi/2]} \operatorname{arctg} \circ f \circ \operatorname{tg}$$

hozzárendelés könnyen láthatóan hasonlóság, felhasználva, hogy a tangens és az arctg függvények szigorúan monoton növőek, és pozitív mértékű halmazt pozitív mértékű halmazba képeznek. ■

Most rátérünk a tetszőleges valós függvényekkel való reprezentáció problémájára. Érdemes megemlíteni, hogy itt valójában egy tisztán halmazelméleti problémáról van szó. Először a jólrendezések kérdésével foglalkozunk.

1.7. Tétel. Valós függvényekkel a rendszámok közül pontosan a kontinuumnál nem nagyobb számosságúak reprezentálhatók.

Bizonyítás. Legyen α egy rendszám és $\{f_\beta : \beta < \alpha\}$ egy α típusú függvényhalmaz. A rendezés definíciója szerint a

$$\operatorname{subgraf} f_{\beta+1} \setminus \operatorname{subgraf} f_\beta \quad (\beta < \alpha)$$

halmazok páronként diszjunktak és nem üresek, eszerint α elemeihez hozzárendelhetjük $\mathbb{R}^2$ nem üres, diszjunkt részhalmazait, amiből következik, hogy α legfeljebb kontinuum számosságú.

Legyen most α egy legfeljebb kontinuum számosságú rendszám és $\varphi : \alpha \to H \subset \mathbb{R}$ egy bijekció. Definiáljuk a következő függvényeket.

$$f_\beta := \chi_{\{x \in H : \varphi^{-1}(x) < \beta\}} \ (\beta < \alpha).$$

Ekkor $\{f_\beta : \beta < \alpha\}$ valós függvények egy α típusú halmaza. ■

Megjegyzés. A bizonyításból az is adódik, hogy minden legfeljebb kontinuum számosságú rendezett halmaz reprezentálható valós függvényekkel. Természetes volna azt gondolni, hogy ez megfordítható, azaz pontosan a legfeljebb kontinuum számosságú rendezések reprezentálhatók. Ez azonban nem igaz.

1.8. Tétel. Létezik valós függvényekből álló $(2^{\aleph_0})^+$ számosságú rendezett halmaz.

Bizonyítás. Legyen $\kappa := \min\{\lambda : 2^\lambda > 2^{\aleph_0}\}$ és α a legkisebb κ számosságú rendszám. Nyilvánvaló, hogy $\aleph_0 < \kappa \leq 2^{\aleph_0}$. Legyen

$$H := \{f|\ f : \alpha \to \{0,1\}\ \exists\beta < \alpha\ \forall\gamma \geq \beta\ f(\gamma) = 0\}.$$

$|H| = 2^{\aleph_0}$, mivel $\aleph_0 < \kappa$-ből következően $|H| \geq 2^{\aleph_0}$, emellett

$$|H| \leq \sum_{\beta<\alpha} 2^{|\beta|} \leq \kappa \cdot 2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$

hiszen $|\beta| < \kappa$.

Elegendő tehát H-ban konstruálni részhalmazok egy $2^{\aleph_0}$ számosságú rendezett halmazát, mivel egy H és $\mathbb{R}$ közti bijekció segítségével ez átvihető a valós számokra, ahol ezen halmazok karakterisztikus függvényei teljesíteni fogják az állítás feltételeit.

Legyen tehát $g : \alpha \to \{0,1\}$ tetszőleges és

$$A_g := \{f \in H : f < g \text{ a lexikografikus rendezés szerint}\}.$$

Könnyen látható, hogy így $2^\kappa > 2^{\aleph_0}$ különböző részhalmazát kaptuk H-nak, melyek rendezett halmazt alkotnak, tehát kiválaszthatjuk ennek egy $(2^{\aleph_0})^+$ számosságú részét. ■

A következő két állítás rámutat a függvényekkel és a halmazokkal való reprezentáció szoros kapcsolatára.

1.9. Definíció. Legyen X metrikus tér. Egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvényt Baire $\frac{1}{2}$ függvénynek nevezünk, ha minden zárt halmaz f által vett őseképe F_σ.

Megjegyzés. Az elnevezést indokolja, hogy a Baire $\frac{1}{2}$ függvények osztálya a folytonos, azaz Baire 0, és a Baire 1 függvények osztálya között helyezkedik el, mivel a definíció könnyen láthatóan ekvivalens azzal a feltétellel, hogy a nyílt halmazok ősképei ambigusak.

1.10. Tétel. Baire $\frac{1}{2}$ függvényekkel ugyanazok a rendtípusok reprezentálhatóak mint ambigus halmazokkal.

Bizonyítás. Az egyik irány nyilvánvaló, mivel egy halmaz karakterisztikus függvénye pontosan akkor Baire $\frac{1}{2}$, ha a halmaz ambigus.

A másik irány igazolásához legyen $\{f_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ Baire $\frac{1}{2}$ függvények egy rendezett halmaza. Egy $\mathbb{R}$ és $(0,1)$ közötti homeomorfizmussal elkészítve az alkalmas kompozíciókat feltehető, hogy a függvények $(0,1)$-en vannak értelmezve és $(0,1)$-be képeznek. Legyen

$$\{r_n : n \in \mathbb{N}\} = (0,1) \cap \mathbb{Q}.$$

f_α-hoz rendeljük hozzá a következő halmazt:

$$H_\alpha := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(f_\alpha^{-1}\left((r_n,1)\right)+n\right).$$

Könnyen látható, hogy $f_\alpha < f_\beta \Leftrightarrow (H_\alpha \subset H_\beta$ és $H_\alpha \neq H_\beta)$. H_α nyilvánvalóan F_σ, és mivel

$$\mathbb{R}\setminus H_\alpha = (-\infty,0)\cup\mathbb{Z}\cup\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[\left((0,1)\setminus f_\alpha^{-1}\left((r_n,1)\right)\right)+n\right]$$

azért $\mathbb{R}\setminus H_\alpha$ is F_σ, azaz H_α G_δ. ∎

1.11. Tétel. Borel-mérhető függvényekkel, illetve tetszőleges valós függvényekkel ugyanazok a rendtípusok reprezentálhatók, mint Borel-halmazokkal, illetve tetszőleges halmazokkal.

Bizonyítás. Az egyik irány a karakterisztikus függvényekre áttérve nyilvánvaló. A másik irány abból adódik, hogy ha a szubgráfokat egy Peano-görbe segítségével visszahúzzuk a számegyenesre, akkor az eredetihez hasonló rendezést kapunk. ∎

Most rátérünk a halmazokkal való reprezentálás kérdésére. Az ambigus halmazokkal reprezentálható rendezések egy karakterizációját a 3.33. tételben adjuk meg.

1.12. Tétel. Nyílt halmazokból álló rendezett halmaz hasonló a valós számok egy részhalmazához.

Bizonyítás. Legyen $\{G_\alpha : \alpha\in\Gamma\}$ egy nyílt halmazokból álló rendezett halmaz, és legyen $\{U_n : n\in\mathbb{N}\}$ a tér egy megszámlálható bázisa. Tekintsük a

$$G_\alpha \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_{n,\alpha}}{2^n} \quad (\alpha\in\Gamma)$$

hozzárendelést, ahol

$$\varepsilon_{n,\alpha} = \begin{cases} 1, & \text{ha } U_n \subset G_\alpha; \\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Ez rendezéstartó leképezés, és nyilván injektív is. ∎

1.13. Következmény. Zárt halmazokból álló rendezett halmaz hasonló a valós számok egy részhalmazához.

Bizonyítás. Ha $\{F_\alpha : \alpha\in\Gamma\}$ egy zárt halmazokból álló rendezett halmaz, akkor az $\{\mathbb{R}\setminus F_\alpha : \alpha\in\Gamma\}$ halmazhoz az előző állítás miatt létezik egy $f : \{\mathbb{R}\setminus F_\alpha : \alpha\in\Gamma\}\to\mathbb{R}$ hasonlóság, és ekkor $F_\alpha \mapsto -f(\mathbb{R}\setminus F_\alpha)$ szintén hasonlóság. ∎

1.14. Tétel. F_σ halmazoknak létezik ω_1 típusú sorozata.

Bizonyítás. Transzfinit indukcióval könnyen definiálhatjuk megszámlálható halmazok ω_1 típusú sorozatát, amely nyilvánvalóan megfelel. ∎

1.15. Tétel. G_δ halmazoknak létezik ω_1 típusú sorozata.

Bizonyítás. Nullmértékű G_δ halmazok sorozatát definiáljuk transzfinit rekurzióval. H_0 legyen az üres halmaz. Ha az α-nál kisebb rendszámokra már definiáltuk a sorozatot, akkor H_α legyen a $\cup_{\beta<\alpha} H_\beta$ nullmértékű halmaz és még egy rajta kívüli pont uniójának egy G_δ burka. Könnyen ellenőrizhető, hogy a konstrukció megfelel. ■

Megjegyzés. A 4.4. tétel bizonyításából adódik, hogy mind az F_σ, mind a G_δ halmazosztály esetén független a ZFC axiómarendszertől, sőt $ZFC + (2^{\aleph_0} = \aleph_2)$-től is, hogy létezik-e ω_2 típusú sorozat. [Ko] eredményeiből könnyen adódik ugyanez az állítás minden más Borel-osztályra is. Emellett a 4.5. tételben látni fogjuk, hogy a Borel-halmazok problémája sem válaszolható meg a halmazelmélet szokásos axiómarendszerében.

2. Kuratowski és Komjáth tételei

Célunk a Baire 1 függvényekkel reprezentálható jólrendezett halmazok leírása. Minden megszámlálható rendszám hasonló a racionális számok egy részhalmazához, így ezek már konstans függvényekkel is reprezentálhatók, eszerint a következő klasszikus tétel ([Ku. II.24.III.2'.]) teljesen megválaszolja a kérdést.

2.1. Tétel. (Kuratowski) ω_1 nem reprezentalható lengyel téren értelmezett Baire 1 függvényekkel.

Bizonyítás. Legyen X egy lengyel tér és $\{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ Baire 1 függvények egy monoton növő sorozata. Azt kell igazolni, hogy a sorozat stabilizálódik, azaz egy indextől kezdve a függvények megegyeznek.

Elegendő ehhez megmutatni, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re létezik egy ξ_n rendszám, amelytől kezdve bármely két függvény bármely pontban $1/n$ -nél kevesebbel tér el egymástól. Valóban, ha $\xi > \xi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, akkor ξ-től kezdve a függvények mind megegyeznek.

Legyen tehát $n \in \mathbb{N}$ rögzített, és legyen

$$\mathcal{G} := \quad \{G \subset X : \ G \text{ nyílt } \ \exists \xi < \omega_1 \, \forall \alpha \geq \xi \ \ \forall x \in G \quad f_\alpha(x) - f_\xi(x) < 1/n\}.$$

$\mathcal{G}$ zárt a megszámlálható unióra, hiszen a megszámlálhatóan sok index szuprémuma teljesíti a feltételt. Emellett X öröklődően Lindelöf tulajdonságú, így $\cup\mathcal{G} \in \mathcal{G}$. Megmutatjuk, hogy $\cup\mathcal{G} = X$. Tegyük fel indirekt, hogy $F := X \setminus \cup\mathcal{G}$ egy nem üres zárt halmaz. Meg fogjuk mutatni, hogy F-nek van egy U relatíve nyílt és nem üres részhalmaza, melyen egy alkalmas indextől kezdve a függvények $1/n$-nél kevesebbel térnek el. Ez azonban ellentmondásra vezet, hiszen ha U-t felírjuk $U = G \cap F$ alakban, ahol $G \subset X$ nyílt halmaz, akkor az U-hoz és $\cup\mathcal{G}$-hez tartozó indexek közül a nagyobbikat választva $G \in \mathcal{G}$ adódik, ami azonban F definíciója miatt lehetetlen.

Mivel F maga is lengyel tér, elég igazolni, hogy ha egy lengyel téren adott egy ω_1 típusú rendezett függvényhalmaz, akkor található egy nem üres nyílt halmaz a fenti tulajdonsággal. Indirekt úton bizonyítunk. Legyen M a tér egy megszámlálható sűrű részhalmaza. Minden $x \in M$-hez található egy index, ami felett az $f_\alpha(x)$ értékek mind megegyeznek, hiszen a valós számok minden A jólrendezett része megszámlálható. (Ellenkező esetben ugyanis minden $x \in A$ ponthoz hozzárendelve az (x, x') intervallumot, ahol x' jelöli x rákövetkezőjét A-ban, diszjunkt nem üres nyílt intervallumoknak egy nem megszámlálható rendszerét kapjuk, ami lehetetlen.) Ha ezen megszámlálhatóan sok index szuprémumát ξ-vel jelöljük, akkor ξ felett M pontjaiban az összes függvény megegyezik f_ξ-vel. Az indirekt feltevés szerint minden G nem üres nyílt halmazhoz található egy $\alpha > \xi$ rendszám és egy $x \in G$ pont, melyre $f_\alpha(x) - f_\xi(x) \geq 1/n$. Ezen pontok tehát sűrű halmazt alkotnak a térben, így kiválasztható belőlük egy M' megszámlálható sűrű részhalmaz. Jelöljük η-val az M' pontjaihoz tartozó megszámlálhatóan sok α index szuprémumát. Ekkor azonban M-en f_η egybeesik f_ξ-vel, M'-n pedig legalább $1/n$-nel eltér tőle, így az $f_\eta - f_\xi$ Baire 1 függvénynek nincs folytonossági pontja, ami azonban a teljesség miatt lehetetlen. ■

2.2. Következmény. Ambigus halmazoknak nincs sem növő sem fogyó ω_1 típusú rendezett halmaza.

Megjegyzés. A szeparábilitás szükséges is, hiszen egy metrikus tér pontosan akkor szeparábilis, ha rendelkezik a *ccc*-tulajdonsággal, ezért ha a tér nem szeparábilis, akkor léteznek G_α $(\alpha < \omega_1)$ nem üres diszjunkt nyílt halmazok, de ekkor

$$\{\chi_{\left(\cup_{\beta<\alpha} G_\alpha\right)} : \alpha < \omega_1\}$$

Baire 1 függvényeknek, sőt valójában ambigus halmazok karakterisztikus függvényeinek egy ω_1 típusú halmaza. Emellett, mint azt a 4.3. tételben majd látni fogjuk, a teljesség sem hagyható el.

2.3. Következmény. Legyen X egy Baire 1 függvényekkel reprezentálható rendezett halmaz, és tekintsük X-et a rendezéstopológiával. Ekkor X parakompakt, emellett erősen parakompakt, gyengén parakompakt és Dieudonné teljes, mivel ezek a fogalmak a rendezéstopológiák körében ekvivalensek. Speciálisan X homeomorf teljes metrikus terek szorzatának egy zárt alterével.

Bizonyítás. A parakompaktság könnyen adódik [En. 5.5.22(e)]-ből. A definíciók valamint az ekvivalenciák igazolása megtalálható [En. 5.], [En. 5.5.22.] illetve [En. 8.5.13.]-ban. ■

Most bebizonyítjuk Komjáth tételét.

2.4. Definíció. Legyen X egy rendezett halmaz. X szeparábilis, ha van megszámlálható sűrű részhalmaza, azaz olyan megszámlálható részhalmaza, amelynek minden nem üres nyílt intervallumban van pontja. X rendelkezik a *ccc*-tulajdonsággal, ha nem adható meg benne diszjunkt nyílt nem üres intervallumok megszámlálhatónál nagyobb számosságú rendszere. X Szuszlin-egyenes, ha *ccc*-tulajdonságú, de nem szeparábilis. A szeparábilitásból könnyen láthatóan következik a *ccc*-tulajdonság, azonban az, hogy ennek az állításnak a megfordítása igaz-e, azaz hogy létezik-e Szuszlin-egyenes, független a ZFC axiómarendszertől. Ennek bizonyítása, valamint a forszolással kapcsolatos fogalmak és állítások megtalálhatóak [Je]-ben.

2.5. Tétel. (Komjáth) Szuszlin egyenes nem reprezentálható Baire 1 függvényekkel.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy X Baire 1 függvényekből álló Szuszlin-egyenes. Ismeretes, hogy ekkor X bizonyos intervallumait a fordított tartalmazás szerint rendezve egy $(T, \leq)$ Szuszlin-fát kapunk. Forszoljunk T-vel. A kapott ZFC-modellben a generikus filter egy kofinális ágat ad T-ben, amely tehát X intervallumainak egy $\{I_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ ω_1 típusú fogyó sorozata. Az $I_\alpha \setminus I_{\alpha+1} (\alpha < \omega_1)$ halmazok nem üresek, ezért $I_{\alpha+1}$-től balra vagy jobbra tartalmaznak elemet. Feltehető, hogy $\aleph_1$ esetben az intervallum bal oldalán. Most ezekből az elemekből transzfinit rekurzióval kiválasztunk egy ω_1 típusú sorozatot. Tegyük fel, hogy minden $\gamma < \beta < \omega_1$-re már választottunk egy α_γ-t és egy $x_\gamma \in I_{\alpha_\gamma} \setminus I_{\alpha_\gamma+1}$, $I_{\alpha_\gamma+1}$-től balra eső elemet. Mivel $\{\alpha_\gamma : \gamma < \beta\}$ korlátos ω_1-ben, választhatunk egy α_β-t, amelyre $\alpha_\gamma < \alpha_\beta$ $(\gamma < \beta)$ és $I_{\alpha_\beta} \setminus I_{\alpha_\beta+1}$-nek van eleme $I_{\alpha_\beta+1}$-től balra. Legyen ekkor x_β egy tetszőleges ilyen elem. Belátjuk, hogy valóban egy ω_1 típusú sorozatot kaptunk. Legyen $\gamma < \beta$. Mivel $x_\gamma \notin I_{\alpha_\gamma+1} \supset I_{\alpha_\beta}$, és a pontok a megfelelő intervallumoktól balra helyezkednek el, így $x_\gamma < x_\beta$. Megmutatjuk, hogy ez a sorozat a forszolt modellben Baire 1 függvények egy ω_1 típusú sorozata, ami azonban Kuratowski tétele szerint lehetetlen.

Mivel a Szuszlin-fa definíciója szerint T ccc, ω_1 nem omlik össze, ezért a sorozat az új modellben is ω_1 típusú. Elég tehát belátni, hogy a forszolt modell és az eredeti modell Baire 1 függvényei megegyeznek.

Legyen tehát M az eredeti és M^G az új modell, ahol $G \subset T$ a generikus filter. Azt mutatjuk meg, hogy egy $H \in M$ halmaznak M^G-ben nincsenek új megszámlálható részhalmazai. Legyen tehát $S = \{\tau_n^G : n \in \omega\} \in M^G$ egy megszámlálható halmaz, ahol $\tau_n \in M$ név és $\tau_n^G \in H \in M$. Minden $n \in \omega$-re választhatunk a Zorn-lemma szerint egy A_n maximális antiláncot a $\{p \in$T: $\exists x \in H \;\; p \Vdash \tau_n = x\}$ halmazból, azaz azokból a feltételekből, amelyek eldöntik τ_n értékét. Mivel T ccc, A_n minden n-re megszámlálható, így valamely $\alpha < \omega_1$-re $\cup_{n\in\omega} A_n$ része az első α szintnek. Rögzítsünk egy $p \in T$ feltételt valamelyik α-nál magasabb szintről. Megmutatjuk, hogy minden rögzített n-re pontosan egy p-vel kompatibilis $q \in A_n$ létezik. Mivel T egy fa, két feltétel kompatibilitása azt jelenti, hogy a parciális rendezés szerint összehasonlíthatóak. Ebből látszik, hogy p legfeljebb egy A_n-belivel lehet kompatibilis, hiszen ellenkező esetben a két feltétel egymással is kompatibilis lenne. Tegyük fel indirekt, hogy p nem kompatibilis egyetlen A_n-beli elemmel sem. Ismeretes, hogy ekkor található egy $q \leq p$ feltétel,amelyre $q \Vdash \tau_n = x$ valamely $x \in H$-ra. Ekkor a fa tulajdonság miatt q sem kompatibilis egyetlen A_n-beli elemmel sem. Ezekből következik, hogy $S = \{x \in H : \exists n \in \omega \; \exists q \in A_n \; p \leq q \; q \Vdash \tau_n = x\}$, itt azonban a jobb oldal egy M-beli halmaz, így $S \in M$.

Mivel ω abszolút, a racionális számok halmaza ugyanaz a két modellben, ezért a valós számok halmaza is, hiszen egy valós szám nem más mint a racionális számok egy megszámlálható részhalmaza. Ebből következik, hogy a nyílt intervallumok halmaza is megegyezik a két modellben, így a nyílt halmazok rendszere is, hiszen egy nyílt halmaz előáll megszámlálhatóan sok nyílt intervallum uniójaként. Ugyanígy adódik, hogy a G_δ halmazok rendszere is ugyanaz. Tehát a két modell Baire 1 függvényei ugyanazon a halmazon vannak értelmezve, ugyanabba a halmazba képeznek és az $\{f \leq c\}$ illetve $\{f \geq c\}$ $(c \in \mathbb{R})$ nívóhalmazoknak ugyanabba a halmazrendszerbe kell esniük. Tehát a Baire 1 függvények halmaza a két modellben megegyezik. ■

3. Valós Baire 1 függvények rendtípusai

Előkészítésként bebizonyítunk két gyakran alkalmazható állítást.

3.1. Tétel. Legyenek X és Y metrikus terek, $f : X \to \mathbb{R}$ egy Baire 1 függvény és $g : Y \to X$ egy folytonos leképezés. Ekkor $f \circ g : Y \to \mathbb{R}$ Baire 1.

Bizonyítás. Bármely $c \in \mathbb{R}$-re

$$Y(f \circ g < c) = \{y \in Y : f(g(y)) < c\} = \{y \in Y : g(y) \in X(f < c)\} = g^{-1}(X(f < c)),$$

ami egy F_σ halmaz folytonos függvény általi őse, így maga is F_σ. Hasonlóan $Y(f > c)$ is F_σ, tehát $f \circ g$ Baire 1. $\blacksquare$

Megjegyzés. Az állítás erősíthető, mivel elegendő, ha g Baire $\frac{1}{2}$.
Bizonyítás. A fenti bizonyítás jelölései mellett

$$g^{-1}(X(f < c)) = g^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}(F_n),$$

ahol F_n zárt $(n \in \mathbb{N})$. $\blacksquare$

3.2. Tétel. Legyen X egy metrikus tér és $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, ahol minden $n \in \mathbb{N}$-re $X_n \subset X$ F_σ halmaz. Ha $f : X \to \mathbb{R}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re relatíve Baire 1 X_n-en, akkor f Baire 1.

Bizonyítás. Látható, hogy bármely $c \in \mathbb{R}$-re

$$X(f < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n(f < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \cap H_n),$$

ahol $H_n \subset X \quad (n \in \mathbb{N}) \quad F_\sigma$, hiszen f minden $n \in \mathbb{N}$-re relatíve Baire 1 H_n-en. Azonban két F_σ halmaz metszete is F_σ, így $X(f < c)$ és hasonlóan $X(f > c)$ F_σ halmazok, azaz f Baire 1. $\blacksquare$

Megjegyzés. Az állítást gyakran abban a speciális esetben alkalmazzuk, amikor az alaptér véges sok diszjunkt ambigus halmazra van felosztva, melyeken a függvény Baire 1.

Elsőként azt a kérdést vizsgáljuk, hogy melyek azok a metrikus terek, amelyek Baire 1 függvényekkel való reprezentáció szempontjából a valós számokhoz hasonlóan viselkednek.

Nyilvánvaló, hogy ha az alaptér megszámlálható, akkor az

$$f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} f(x_n)}{2^n}$$

leképezés, ahol $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ az alaptér egy felsorolása, hasonlóságot létesít $\mathbb{R}$ egy részhalmazával. Eszerint célszerű feltenni, hogy az alaptér egy nem megszámlálható metrikus tér. Könnyen látható, hogy elegendően nagy számosságú diszkrét metrikus téren minden rendezett halmaz reprezentálható Baire 1 függvényekkel, így érdemes valamiféle megszorítást tenni az alaptérre vonatkozóan. A 2.2. következmény után tett megjegyzés szerint mindenekelőtt érdemes szeparábilis metrikus terekre szorítkozni. Ennek részletes vizsgálatára a negyedik fejezetben térünk vissza. Azonban a 4.3. tételben majd látni fogjuk, hogy a szeparábilitás sem elegendő. Éljünk ezért ehelyett azzal az erősebb feltevéssel, hogy az alaptér egy X kompakt metrikus tér. Felmerül a kérdés, hogy a probléma szempontjából hogyan viszonyul X a valós számokhoz , vagy a $[0,1]$ intervallumhoz. Megmutatjuk, hogy ebben az értelemben a kompakt, sőt a σ-kompakt metrikus terek mind ekvivalensek.

3.3. Tétel. Nem megszámlálható σ-kompakt metrikus téren értelmezett valós értékű Baire 1 függvényekkel pontosan azok a rendtípusok reprezentálhatók, mint valós Baire 1 függvényekkel.

Bizonyítás. Legyen X egy nem megszámlálható σ-kompakt metrikus tér. Azt mutatjuk meg, hogy X-en ugyanazok a rendtípusok reprezentálhatók, mint a Cantor-halmazon. Ebből $X = \mathbb{R}$ választással adódik majd az állítás.

Legyen először X kompakt, és jelölje C a Cantor-halmazt. Ismeretes, hogy ekkor létezik $F : C \to X$ folytonos ráképezés [La. 4.8.]. Ha $\{f_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ X-en értelmezett Baire 1 függvények egy rendezett halmaza, akkor F szürjektivitását felhasználva könnyen látható, hogy az $\{f_\alpha \circ F : \alpha \in \Gamma\}$ C-n értelmezett függvényekből álló halmaz hasonló az eredeti függvényhalmazhoz. Emellett $f_\alpha \circ F$ a 3.1. tétel alapján minden $\alpha \in \Gamma$-ra Baire 1, hiszen F folytonos.

Tekintsük most az általános esetet, azaz legyen $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$, ahol $X_n \subset X$ kompakt, és legyen ismét $\{f_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ X-en értelmezett Baire 1 függvények egy rendezett halmaza. Megmutatjuk,hogy ez a halmaz reprezentálható a $[0,1]$ intervallumon, amiből az előzőek szerint következni fog, hogy a Cantor-halmazon is, mivel $[0,1]$ egy nem megszámálható kompakt metrikus tér. Válasszunk minden n-re egy $H_n \subset (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ Cantor-halmazzal homeomorf halmazt, és legyen $g_n : H_n \to C$ egy homeomorfizmus. Választhatunk ezenkívül egy $F_n : C \to X_n$ folytonos ráképezést, hiszen X_n kompakt metrikus tér. Most megadjuk a keresett reprezentációt. Ha $\alpha \in \Gamma$, akkor legyen

$$g_\alpha := \begin{cases} f_\alpha \circ F_n \circ g_n & H_n\text{-en } (n \in \mathbb{N}); \\ 0 & [0,1] \setminus \cup_{n=1}^{\infty} H_n\text{-en.} \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy a $\{g_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ függvényhalmaz hasonló $\{f_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$-hoz, elég tehát megmutatni, hogy minden $\alpha \in \Gamma$-ra $g_\alpha : C \to \mathbb{R}$ Baire 1. Tekntsünk egy $\alpha \in \Gamma$-t. $\{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ zárt, így $[0,1] \setminus \cup_{n=1}^{\infty} H_n$ ambigus, tehát F_σ, és itt a függvény Baire 1, hiszen azonosan nulla. Így a 3.2. tétel alapján elegendő igazolni, hogy g_α minden n-re Baire 1 a H_n zárt, azaz F_σ halmazon. Ez azonban ko:nnyen adódik a 3.1. tételből, felhasználva, hogy $F_n \circ g_n$ folytonos.

A másik irány igazolásához legyen $\{f_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ a Cantor halmazon értelmezett Baire 1 függvények egy halmaza. Imeretes, hogy minden nem megszámlálható kompakt metrikus tér tartalmaz C-vel homeomorf részhalmazt [La. 6.4.], ami könnyen általánosítható σ-kompakt metrikus terek esetére, ugyanis ha $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$, akkor legalább az egyik X_n kompakt részhalmaz nem megszámlálható. Legyen tehát $h : C \to Y \subset X$ egy homeomorfizmus, és minden $\alpha \in \Gamma$-ra definiáljuk a következő függvényt.

$$g_\alpha := \begin{cases} f_\alpha \circ h^{-1} & Y\text{-on;} \\ 0 & X \setminus Y\text{-on.} \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy az így adódó függvényhalmaz az eredetivel megegyező rendtípusú, ezért csak azt kell bizonyítani, hogy minden $\alpha \in \Gamma$-ra $g_\alpha : X \to \mathbb{R}$ Baire 1. Y zárt halmaz, hiszen kompakt az X Hausdorff térben. Eszerint Y és $X \setminus Y$ ambigusak, emellett g_α nyilván relatíve Baire 1 $X \setminus Y$-on, így elegendő igazolni, hogy Y-on is az. Ez azonban h^{-1} folytonosságát felhasználva a 3.1. tétel alapján nyilvánvaló. ■

3.4. Következmény. Ambigus halmazokkal való reprezentálás szempontjából is ekvivalensek a σ-kompakt metrikus terek.

Bizonyítás. Ha a fenti bizonyításban f_α egy karakterisztikus függvény, azaz csak 0 és 1 értékeket vesz fel, akkor a konstruált g_α is ilyen tulajdonságú. ■

3.5. Kérdés. Igaz-e, hogy Baire 1 függvényekkel való reprezentáció szempontjából a nem megszámlálható lengyel terek ekvivalensek?

Megjegyzés. Ennek igazolásához elegendő lenne megmutatni, hogy minden irracionális számokon értelmezett Baire 1 függvényekből álló rendezett halmaz reprezentálható valós Baire 1 függvényekkel.

Bizonyítás. Egyfelől ismeretes, hogy minden nem megszámlálható lengyel tér tartalmaz a Cantor halmazzal homeomorf részhalmazt [La. 6.4.], másfelől minden lengyel tér előáll az irracionális számok halmazának folytonos képeként [La. 6.3.], így a fenti állítás gondolatmenete alkalmazható. ■

A következőkben megvizsgáljuk, hogy a reprezentálható rendezett halmazok zártak-e bizonyos operációkra. Ezen operációk jól használhatóak bonyolult struktúrájú reprezentálható rendezett halmazok konstruálására.

3.6. Definíció. Ha $(X, \leq)$ egy rendezett halmaz, akkor $X \times \{0,1\}$-et a lexikografikus rendezéssel $(X, \leq)$ duplázottjának nevezzük.

3.7. Kérdés. Igaz-e, hogy reprezentálható rendezett halmaznak a duplázottja is reprezentálható?

Ez a kérdés szinte minden esetben helyettesíthető az alábbi állítással.

3.8. Tétel. Ha X duplázottja reprezentálható Baire 1 függvényekkel, akkor az a rendezett halmaz is reprezentálható, melyet úgy kapunk, hogy minden $x \in X$ helyébe egy A_x reprezentálható rendezett halmazt teszünk. (Tehát az $\{(x,y) : x \in X, y \in A_x\}$ halmaz a lexikografikus rendezéssel.)

Bizonyítás. A számegyenes minden pontját helyettesítjük egy nem megszámlálható zárt halmazzal a következőképpen. Tekintsünk egy Peano-görbét, azaz egy $P : [0,1] \to [0,1]^2$ folytonos ráképezést és legyen $P = (P_1, P_2)$ a koordinátafüggvényeivel megadva. Ekkor $P_1 : [0,1] \to [0,1]$ egy folytonos szürjekció, melynél minden $a \in [0,1]$ szám őskképe egy $F_a := P_1^{-1}(\{a\})$ nem megszámlálható zárt halmaz. Álljon X duplázottjának reprezentációja az $f_x < g_x$ $(x \in X)$ párokból. A 3.1. tételben láttuk, hogy az $f_x \circ P_1$ illetve $g_x \circ P_1$ függvényekre áttérve ismét Baire 1 függvényeket kapunk, melyek az eredetihez hasonlóan vannak rendezve. Azonban f_x és g_x már eltérnek egymástól egy nem megszámlálható zárt halmazon, ugyanis ha f_x és g_x eltérnek a_x-ben, akkor $f_x \circ P_1$ és $g_x \circ P_1$ eltérnek F_{a_x}-en. Mivel F_{a_x} kompakt metrikus tér, feltehető, hogy A_x F_{a_x}-en értelmezett függvényekkel van reprezentálva. Ezek választhatók úgy is, hogy $[0,1]$-be képezzenek, így egy lineáris transzformációval elérhetjük, hogy csak szigorúan $f_x(a_x)$ és $g_x(a_x)$ közötti értéket vegyenek fel.

Ha $x \in X$ és $y \in A_x$, akkor legyen

$$h_{(x,y)} := \begin{cases} f_x \circ P_1 & [0,1] \setminus F_{a_x}\text{-en;} \\ \text{az } y\text{-t reprezentáló függvény} & F_{a_x}\text{-en.} \end{cases}$$

Azt állítjuk, hogy ez a keresett reprezentáció. Mivel F_{a_x} és $[0,1] \setminus F_{a_x}$ ambigus halmazok és $h_{(x,y)}$ ezeken külön-külön relatíve Baire 1, ezért az unión, vagyis $[0,1]$-en is az. Ha $x_1 < x_2$, akkor $h_{(x_1,y_1)} < h_{(x_2,y_2)}$, mivel $f_x \circ P_1 < h_{(x,y)} < g_x \circ P_1$ a függvény-rendezés szerint. Ha pedig $x_1 = x_2 = x$, akkor $h_{(x,y_1)}$ és $h_{(x,y_2)}$ csak F_{a_x}-en tér el, és ott A_x rendezésenek megfelelően vannak definiálva, azaz ha $y_1 < y_2$, akkor $h_{(x,y_1)} < h_{(x,y_2)}$. ∎

Megjegyzés. Ambigus halmazokkal való reprezentálásra ugyanez áll.

3.9. Kérdés. Igaz-e, hogy egy A reprezentálható rendezett halmaznak az $\tilde{A}$ teljessé tétele is reprezentálható?

3.10. Definíció. Legyenek X és X_n $(n \in \mathbb{N})$ rendezett halmazok. Azt mondjuk, hogy X előáll az X_n halmazok összefésüléseként, ha léteznek olyan diszjunkt $H_n \subset X$ halmazok, melyekre $X = \cup_{n=1}^{\infty} H_n$, és H_n hasonló X_n-hez.

3.11. Tétel. Tegyük fel, hogy a reprezentálható rendezett halmazok teljessé tétele és duplázottja is reprezentálható. Ekkor az X_n reprezentálható rendezett halmazok összefésüléseként előálló X rendezett halmaz maga is reprezentálható.

Bizonyítás. A feltétel szerint $H_n \times \{0,1\}$ teljessé tétele minden n-re reprezentálható, így feltehetjük, hogy az $(n, n+1)$ intervallumon van reprezentálva, hiszen minden nem elfajuló intervallum egy nem megszámlálható σ-kompakt metrikus tér. Legyen $x \in X$ a rendezett halmaz egy eleme, azaz legyen valamely n-re $x \in H_n$, és rendeljünk x-hez egy valós Baire 1 függvényt a következőképpen.

$$f_x := \begin{cases} \text{az } (x,0)\text{-t reprezentáló függvény} & (n,n+1)\text{-en;} \\ \text{a } \sup\{(y,i) \in H_m \times \{0,1\} : y \leq x\}\text{-et reprezentáló függvény} & (m,m+1)\text{-en;} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol a szuprémum $H_m \times \{0,1\}$ teljessé tételének rendezése szerint értendő. A 3.2. tétel alapján látható, hogy a fentiekben Baire 1 függvényeket konstruáltunk, tehát csak azt kell ellenőrizni, hogy X-hez hasonlóan vannak rendezve. Legyen $x \in H_k$, $y \in H_l$ és $x < y$. Ha $k = l$, akkor nyilvánvaló, hogy $f_x \leq f_y$, és eltérnek $(k, k+1)$-en. Ha $k \neq l$, akkor $(k, k+1)$-en, $(l, l+1)$-en és a két halmaz uniójának komplementerén külön-külön ellenőrizhető, hogy $f_x \leq f_y$, emellett ismét eltérnek $(k, k+1)$-en, mivel f_y itt nem kisebb az $(x, 1)$-et reprezentáló függvénynél. ■

A következőkben egy konkrét konstrukciót adunk reprezentálható rendezett halmazokra, amelyről az sejthető, hogy elegendően gazdag ahhoz, hogy elvezessen az összes reprezentálható halmaz leírásához.

3.12. Definíció. Legyen α egy rendszám és $I = [0,1]$. Jelöljük I^α-val az α típusú I-ben haladó sorozatok halmazát a lexikografikus rendezéssel.

Megjegyzés. Ha $\alpha \geq \omega_1$, akkor Kuratowski tétele (2.1.) alapján I^α nem reprezentálható, mivel tartalmaz ω_1-hez hasonló részhalmazt. Azonban igaz a következő.

3.13. Tétel. I^α reprezentálható Baire 1 függvényekkel minden $\alpha < \omega_1$-re.

Bizonyítás. $\alpha < \omega$-ra az állítás teljes indukcióval azonnal adódik a 3.8. tételből. Jelölje $H = \prod_{n=1}^{\infty}[0,1]$ a Hilbert kockát, azaz a [0,1] intervallum mint topologikus tér megszámlálható sok példányának topologikus szorzatát. Ismeretes, hogy H kompakt metrikus tér, ezért elegendő H-n értelmezett függvényekkel reprezentálni I^α-t. Azt mutatjuk meg, hogy ez karakterisztikus függvényekkel is lehetséges, azaz léteznek H-ban a tartalmazás szerint I^α típusban rendezett ambigus halmazok.

Rendezzük először H-t I^α típusban. Mivel $\alpha < \omega_1$, létezik egy $\varphi : \mathbb{N} \to \alpha$ bijekció. Minden $a = (a_1, a_2, \ldots) \in H$-hoz rendeljük hozzá az $x = \{a_{\varphi(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ transzfinit sorozatot, és húzzuk vissza I^α rendezését H-ra. Mivel a fenti leképezés bijekció, így egy $(H, <_H)$ I^α típusú rendezett halmazt kapunk. Azt állítjuk, hogy a $H_a := \{b \in H : b <_H a\}$ $(a \in H)$ halmazok megfelelőek. Mivel $H_a \subseteq H_{a'} \iff a \leq_H a'$, ezért ez egy I^α típusú halmazrendszer. Azt kell még belátni, hogy minden $a \in H$-ra H_a ambigus. Először belátjuk, hogy F_σ.

$$H_a = \bigcup_{\beta<\alpha} \left(\bigcap_{\gamma<\beta} \left\{ (b_1, b_2, \ldots) \in H : b_{\varphi^{-1}(\gamma)} = a_{\varphi^{-1}(\gamma)} \right\} \cap \left\{ b_{\varphi^{-1}(\beta)} < a_{\varphi^{-1}(\beta)} \right\} \right).$$

Mivel az unió tagjai úgy állnak elő, mint egy nyílt és még zárt halmazok metszete, ezért ez egy F_σ halmaz, így ilyenek megszámlálható uniója, azaz H_a is F_σ.

Hasonlóan $\{b \in H : a <_H b\}$ is F_σ, és mivel $\{a\}$ maga is F_σ, ezért $\{b \in H : b <_H a\}$ egy F_σ halmaz komplementere, azaz G_δ. ■

Megjegyzés. Valójában itt ambigus halmazokkal reprezentáltunk.

3.14. Tétel. I^α-nak nincs $I^{\alpha+1}$-hez hasonló része semmilyen $\alpha < \omega_1$-re.

Bizonyítás. Indirekt, legyen $f : I^{\alpha+1} \to I^\alpha$ egy rendezéstartó injekció. Legyenek a koordinátafüggvényei $f = (f_0, f_1, \ldots, f_\beta, \ldots)$ $(\beta < \alpha)$. $f_0 : I^{\alpha+1} \to I$ monoton leképezés, melynél különböző $a \in [0,1]$ pontokra az $f_0(\{x_0, \ldots, x_\beta, \ldots, x_\alpha : x_0 = a\})$ halmazok konvex burkai diszjunkt belsejű intervallumok $\mathbb{R}$-ben, így legfeljebb megszámlálhatóan sok nem elfajuló lehet köztük. Rögzíthetünk tehát egy $a_0 \in [0,1]$ pontot, melyre $f_0((a_0, x_1, \ldots, x_\beta, \ldots, x_\alpha))$ konstans. Ha $\gamma < \beta$-ra már rögzítettük a_γ-t úgy, hogy $f_\gamma((a_0, \ldots, a_\gamma, x_{\gamma+1}, \ldots, x_\alpha))$ konstans, akkor x_β-t különböző $[0,1]$-beli értékeknek rögzítve megint olyan képhalmazokat kapunk, melyeknek a konvex burkai diszjunkt belsejű intervallumok, ezért rögzíthetünk egy a_β-t, melyre $f_\beta((a_0, \ldots, a_\beta, x_{\beta+1}, \ldots, x_\alpha))$ konstans. De ekkor az indukciós lépést minden $\beta < \alpha$-ra elvégezve

$$f((a_0, \ldots, a_\beta, \ldots, 0)) = f((a_0, \ldots, a_\beta, \ldots, 1)),$$

adódik, ami lehetetlen. ■

Felmerül a kérdés, hogy található-e minden reprezentálható rendezett halmazhoz hasonló részhalmaz alkalmas $\alpha < \omega_1$-re I^α-ban. A válasz nemleges.

3.15. Tétel. Létezik olyan reprezentálható rendezett halmaz, amely semmilyen $\alpha < \omega_1$-re nem hasonló I^α egy részhalmazához.

Bizonyítás. Mivel $\mathbb{R}$ duplázottja reprezentálható, hiszen hasonló I^2 egy részhalmazához, ha $\mathbb{R}$-nek $\aleph_1$ pontját helyettesítjük az $I^\alpha (\alpha < \omega_1)$ halmazokkal, egy reprezentálható halmazt kapunk.

Ha ez hasonló volna valamely α-ra I^α egy részhalmazához, akkor $I^{\alpha+1}$ is az volna, ez azonban az előző tétel szerint lehetetlen. ■

Megjegyzés. Ez valójában ambigus halmazokkal való reprezentáció.

Eddigi módszereink ismételt alkalmazásával újabb reprezentálható halmazokat konstruálhatunk.

3.16. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ rendezett halmazok egy halmaza. Definiáljunk egy R_α bővülő halmazsorozatot transzfinit rekurzióval.

$R_0 := \mathcal{H}$;

R_α álljon azokból a rendezett halmazokból, amelyek előállnak úgy, hogy egy $X \in \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$ pontjait $A_x \in \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$ $(x \in X)$ rendezett halmazokkal helyettesítjük.

3.17. Tétel. A sorozat stabilizálódik, azaz létezik egy α rendszám, melyre $\beta \geq \alpha$ esetén $R_\beta = R_\alpha$ áll.

Bizonyítás. Legyen $\kappa \geq |H|$ $(H \in \mathcal{H})$ egy számosság. Transzfinit indukcióval adódik, hogy ha valamely α-ra $X \in R_\alpha$, akkor $|X| \leq \kappa$. Legyen ugyanis X az a rendezett halmaz, amelyet úgy kapunk, hogy egy $Y \in \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$ halmaz pontjait $A_y \in \bigcup_{\beta<\alpha}$ $(y \in Y)$ halmazokkal helyettesítjük. Ekkor $|X| \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$, hiszen $|Y| \leq \kappa$ és $|A_y| \leq \kappa$ $(y \in Y)$. Legyen most α egy olyan számosság, melynek kofinalitása nagyobb κ-nál, például $\alpha := 2^\kappa$.

Először belátjuk, hogy $R_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$. Legyen $X \in \bigcup_{\beta<\alpha} R_\alpha$ és legyen $A_x \in \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$ $(x \in X)$. Mivel $|X| \leq \kappa$ és $\mathrm{cf}\ \alpha > \kappa$, ezért ha minden A_x-hez rögzítünk egy $\beta_x < \alpha$-t, melyre $A_x \in R_{\beta_x}$, akkor $\{\beta_x : x \in X\}$ korlátos α-ban. Létezik tehát egy közös $\beta < \alpha$, melyre $A_x \in R_\beta$ $(x \in X)$, emellett nyilván $X \in R_\beta$ is feltehető. Ekkor viszont az a rendezett halmaz, melyet úgy kapunk, hogy X pontjait az A_x $(x \in X)$ halmazokkal helyettesítjük, maga is eleme $R_{\beta+1}$-nek, és így $\bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$-nak is. Transzfinit indukcióval igazoljuk, hogy $\beta \geq \alpha$-ra $R_\beta = R_\alpha$. Legyen $\gamma < \beta$-ra $R_\gamma = R_\alpha$, és legyen $X \in R_\beta$. X álljon elő Y és A_y $(y \in Y)$ összetevéseként, ahol Y, $A_y \in \bigcup_{\gamma<\beta} R_\gamma$ $(y \in Y)$. Mivel $R_\gamma = R_\alpha$ $(\gamma < \beta)$, így $\bigcup_{\gamma<\beta} R_\gamma = R_\alpha$, emellett $R_\alpha = \bigcup_{\delta<\alpha} R_\delta$. Tehát Y, $A_y \in \bigcup_{\delta<\alpha} R_\delta$, amiből $X \in R_\alpha$. ∎

3.18. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ rendezett halmazok egy halmaza. $\mathcal{R}(\mathcal{H}) := \bigcup_\alpha R_\alpha$.

Megjegyzés. A fenti állítás szerint ez valóban egy halmaz, hiszen

$$\bigcup_{\alpha \in On} R_\alpha = \bigcup_{\alpha < 2^\kappa} R_\alpha.$$

3.19. Tétel. $\mathcal{R}(\{\mathbb{R}\})$ elemei reprezentálhatóak Baire 1 függvényekkel.

A bizonyítást valamivel általánosabban végezzük el:

3.20. Tétel. Legyen $\mathcal{H}$ rendezett halmazok egy olyan halmaza, hogy minden elemének a duplázottja reprezentálható Baire 1 függvényekkel. Ekkor $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ minden eleme reprezentálható Baire 1 függvényekkel.

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg transzfinit indukcióval, hogy $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ elemeinek a duplázottja is reprezentálható Baire 1 függvényekkel. $\alpha = 0$-ra ezt feltettük. Legyen α-ra $\bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$ elemeinek a duplázottja reprezentálható és $X \in R_\alpha$. X álljon elő úgy, hogy egy $Y \in \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$-ba $A_y \in \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$ $(y \in Y)$ rendezett halmazokat teszünk. Mivel $A_y \in \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$, a duplázottja, $A_y \times \{0,1\}$ is reprezentálható az indukciós feltevés szerint. De ha Y-ba az y pont helyére $A_y \times \{0,1\}$-et tesszük, éppen X duplázottját kapjuk. Mivel $Y \in \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$, ezért Y-ba reprezentálhatóakat téve reprezentálhatót kapunk, azaz X duplázottja reprezentálható. ∎

Megjegyzés. Ambigus halmazokkal való reprezentálásra ugyanez érvényes.

Felmerül a kérdés, hogy $\mathcal{R}(\{\mathbb{R}\})$ egybeesik-e a reprezentálható halmazok halmazával. A válasz nemleges:

3.21. Tétel. $\mathcal{R}(\{\mathbb{R}\})$-ben nincs I^ω-hoz hasonló rendezett halmaz.

Bizonyítás. Transzfinit indukcióval igazoljuk, hogy R_α egyetlen eleme sem tartalmaz I^ω-hoz hasonló részhalmazt. $\alpha = 0$-ra ez abból következik, hogy $\mathbb{R}$ részhalmazai szeparábilisak. Tegyük fel, hogy az α-nál kisebb rendszámokra már beláttuk az állítást, és legyen $X \in R_\alpha$. Az, hogy X előáll Y-ból az A_y-ok betevésével, egyenértékű azzal, hogy X felbontható I_y intervallumokra, melyek Y-hoz hasonlóan rendezettek, és I_y hasonló A_y-hoz. Tegyük fel, hogy X tartalmaz egy H, I^ω-hoz hasonló részhalmazt. I^ω minden legalább kétpontú intervalluma tartalmaz I^ω-hoz hasonló részt, ezért egy I_y H-nak legfeljebb egy pontját tartalmazhatja, hiszen I_y-ban az indukciós feltevés szerint nincs I^ω-hoz hasonló részhalmaz. Ekkor viszont a H-t metsző I_y-okhoz tartozó y-ok Y-nak egy I^ω-hoz hasonló részhalmazát alkotják, ami az indukciós feltevés miatt lehetetlen. ∎

A 3.20. tétel szerint $\mathcal{R}(\{I^\alpha : \alpha < \omega_1\})$ elemei reprezentálhatóak, hiszen I^α duplázottja $I^{\alpha+1}$ $(\alpha < \omega_1)$. Szemléletesnek tűnik az a megállapítás, hogy az íly módon adódó kombinációi az I^α halmazoknak előállítanak szinte minden rendezett halmazt, ami nem tartalmaz ω_1 típusú részhalmazt. Ha ezt Kuratowski tételével (2.1.) egybevetjük, indokolttá válik a következő kérdés.

3.22. Kérdés. $\mathcal{R}(\{I^\alpha : \alpha < \omega_1\})$ egybeesik-e a reprezentálható rendtípusokkal?

Most rátérünk a probléma egy más megközelítési módjára, amely amely egy $\mathcal{R}(\mathcal{H})$-hoz hasonló fogalomhoz vezet.

3.23. Tétel. M_2 téren értelmezett Baire tulajdonságú függvényekből álló rendezett halmaz, melynek bármely két eleme második kategóriájú halmazon tér el, hasonló a valós számok egy részhalmazához.

Bizonyítás. Ismeretes, hogy egy rendezett halmaz pontosan akkor hasonló a valós számok egy részhalmazához, ha szeparábilis, és nincs benne megszámlálhatónál több szomszédos pontpár.

Először belátjuk, hogy a rendezett halmaz szeparábilis. Legyen X az alaptér, és tegyük fel egyelőre, hogy X Baire tér, azaz minden nem üres nyílt altere második kategóriájú. Legyen B a tér egy megszámlálható bázisa, melyről feltesszük, hogy nem tartalmazza az üres halmazt. Ha $U, V \in B$-hez és $p, q \in \mathbb{Q}$-hoz van a rendezett halmaznak olyan h eleme, amelyre U egy reziduális részén $h > p$ és V egy reziduális részén $h < q$, akkor válasszunk egy ilyen függvényt. Azt állítjuk, hogy az így kiválasztott M megszámlálható halmaz sűrű a rendezett halmazban. Legyen tehát (f, g) a rendezett halmaz egy nem üres nyílt intervalluma, és $h_0 \in (f, g)$ a rendezett halmaz egy eleme. Azt kell megmutatnunk, hogy található egy $h \in (f, g) \cap M$ a rendezett halmazban. Könnyen latható, hogy

$$X(f < h_0) = \bigcup_{p \in \mathbb{Q}} X(f < p < h_0)$$

és

$$X(h_0 < g) = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} X(h_0 < q < g),$$

ahol a feltétel szerint az egyenlőségek bal oldalán második kategóriájú halmazok állnak, így valamely p-re és q-ra $X(f < p < h_0)$ illetve $X(h_0 < q < g)$ második kategóriájúak. Nyilvánvaló, hogy egy második kategóriájú és Baire tulajdonságú halmaz reziduális valamely nem üres nyílt halmazban, így valamely B-beli elemben is. Az $X(f < p < h_0)$ és $X(h_0 < q < g)$ halmazok Baire tulajdonságúak, hiszen f, g és h_0 Baire tulajdonságú függvények, található tehát hozzájuk egy U illetve V B-beli elem, melyben reziduálisak. Ekkor $U, V \in B$-hez és $p, q \in \mathbb{Q}$-hoz van a rendezett halmazban fenti tulajdonságú elem, hiszen $h_0 > p$ és $h_0 < q$ U illetve V egy reziduális részén, így M definíciója szerint létezik egy $h \in M$ függvény ugyanezzel a tulajdonsággal. Megmutatjuk, hogy $h \in (f, g)$. X Baire tér, így U nem első kategóriájú, ezért létezik egy $x \in U$, melyre $f(x) < p < h(x)$, és hasonlóan létezik egy $y \in V$, melyre $h(y) < q < g(y)$. Eszerint csak $f < h < g$ lehetséges, ami bizonyítja a szeparábilitást.

Legyenek most $f_\alpha < g_\alpha$ $(\alpha \in \Gamma)$ különböző szomszédos pontpárok. A fentiekhez hasonlóan minden $\alpha \in \Gamma$-ra

$$X(f_\alpha < g_\alpha) = \bigcup_{p\in\mathbb{Q}} X(f_\alpha < p < g_\alpha),$$

ezért alkalmas p_α-ra $X(f_\alpha < p_\alpha < g_\alpha)$ második kategóriájú. Rögzíthetünk tehát α-hoz egy $U_\alpha \in B$-t, amelyben ez a halmaz reziduális. Nyilvánvaló, hogy ha $\alpha \neq \beta$, akkor α-hoz és β-hoz nem rendelhettük ugyanazt a (p, U) párt, mivel ekkor felhasználva hogy U második kategóriájú azt kapnánk, hogy egy $x \in U$ pontban $f_\alpha < p < g_\alpha$ és $f_\beta < p < g_\beta$, ami szomszédos pontpárok esetén lehetetlen. Ebből azonban következik, hogy Γ megszámlálható.

Ha X nem Baire tér, akkor Banach tételének következményeként felírható $X = A \cup G$ alakban, ahol A első kategóriájú és G olyan nyílt halmaz, amely altérként Baire tér [La. 11.2.]. Ha a rendezett függvényhalmaz elemeit megszorítjuk G-re, a kapott rendezett halmaz hasonló lesz az eredetihez, mivel a függvények G-n is eltérnek egymástól, hiszen A első kategóriájú. Valójában ugyanígy adódik az is, hogy a megszorított függvenyek G-n második kategóriájú halmazon térnek el egymástól. Alkalmazhatjuk tehát az előző esetet, amiből azt kapjuk, hogy a leszűkített függvények halmaza hasonló a valós számok egy részhalmazához, de ebből következően az eredeti függvényhalmaz is az, amivel az állítást bizonyítottuk. ■

Legyen adva Baire 1 függvények egy X rendezett halmaza. A Zorn lemma szerint kiválaszthatjuk ennek egy maximális részrendszerét, melyben bármely két függvény második kategóriájú halmazon tér el egymástól. Az előző tételben láttuk, hogy ez a részrendszer szeparábilis, legyen tehát M ennek egy megszámlálható sűrű részhalmaza. Ekkor $X \setminus M$ maximális intervallumai bizonyos értelemben egyszerűbb szerkezetűek X-nél, hiszen egy ilyen intervallum bármely két eleme csak egy első kategóriájú halmazon különbözik, sőt, Kuratowski tételét (2.1.) felhasználva adódik, hogy az egész intervallum összes eleme megegyezik egy közös reziduális halmazon. Ez motiválja a következő definiciót.

3.24. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ egy rendezett halmazokból álló halmazrendszer, melyről feltesszük, hogy tartalmazza az üres halmazt. Nevezzük $\mathcal{H}$ elemeit 0 rangú halmazoknak. Legyen α egy rendszám. Azt mondjuk, hogy egy X rendezett halmaz rangja legfeljebb α, ha található egy $M \subset X$ megszámlálható halmaz, hogy $X \setminus M$ minden I maximális intervallumának a rangja legfeljebb β, alkalmas (I-től függő) $\beta < \alpha$-ra. Ez tehát egy transzfinit rekurzió. A legfeljebb α rangú halmazok osztályát jelölje R^*_α.

Jelölje $\mathcal{R}^*(\mathcal{H})$ azon rendezett halmazok osztályát, amelyeknek van rangja, azaz

$$\mathcal{R}^*(\mathcal{H}) := \bigcup_\alpha R^*_\alpha.$$

Meg fogjuk mutatni, hogy $\mathcal{R}^*(\mathcal{H})$ egy halmaz és hogy $\mathcal{R}^*(\mathcal{H}) \subset \mathcal{R}(\mathcal{H})$, ha $\mathbb{R} \in \mathcal{H}$.

3.25. Lemma. Legyen X egy rendezett halmaz, melynek rangja legfeljebb α. Ekkor X előáll úgy, hogy $\mathbb{R}$ pontjait $\bigcup_{\beta<\alpha} R^*_\beta$-beli beli rendezett halmazokkal helyettesítjük.

Bizonyítás. Legyen $M \subset X$ a definícióban szereplő megszámlálható részhalmaz. Ismeretes, hogy minden megszámlálható rendezett halmaz hasonló $\mathbb{Q}$ egy részhalmazához, legyen tehát $\varphi : M \to \mathbb{Q}$ egy hasonlóság.

$X \setminus M$ egy I maximális intervalluma két részre osztja M-et. Jelöljük az I-től balra eső részt M_1-gyel, és legyen $F(I) = \sup\{\varphi(x) : x \in M_1\}$. Feltehetjük, hogy $M_1 \neq \emptyset$ és a szuprémum véges, hiszen X-hez hozzávehetünk egy legkisebb és egy legnagyobb elemet, és ezekről feltehetjük, hogy M elemei. Ha I_1, I_2, I_3, különböző maximális intervallumok ebben a sorrendben rendezve, akkor a maximalitás miatt léteznek $x \in M$ és $y \in M$ elemek I_1 és I_2 illetve I_2 és I_3 között, ezért $F(I_1) < F(I_3)$, hiszen $\varphi(x) < \varphi(y)$. Hasonlóan adódik, hogy ha $F(I_1) = F(I_2)$, akkor I_1 és I_2 között pontosan egy $x \in M$ található.

Leképeztük tehát X-et φ és F segítségével rendezéstartó módon a valós számok egy részhalmazába úgy, hogy egy $c \in \mathbb{R}$ őképe a következők valamelyike: egy pont, egy maximális intervallum, egy maximális intervallum és még előtte vagy utána egy pont, két intervallum és köztük egy pont vagy az üres halmaz. Ezen rendezett halmazok könnyen láthatóan elemei $\bigcup_{\beta<\alpha} R^*_\beta$-nak.

Ha most visszafelé, minden $c \in \mathbb{R}$ számot a fenti leképezéseknél vett őképével helyettesítünk, X-et kapjuk. ■

3.26. Következmény. Ha $\mathbb{R} \in \mathcal{H}$, akkor minden α rendszámra $R^*_\alpha \subset R_\alpha$, emellett $\mathcal{R}^*(\mathcal{H}) \subset \mathcal{R}(\mathcal{H})$ és $\mathcal{R}^*(\mathcal{H})$ halmaz.

Bizonyítás. Transzfinit indukcióval nyilvánvaló. ■

3.27. Következmény. Ha $\mathcal{H}$ elemeinek a duplázottjai reprezentálhatóak Baire 1 függvényekkel, akkor $\mathcal{R}^*(\mathcal{H})$ elemei is.

Megjegyzés. Létezik $\mathcal{H}$, melyre $\mathcal{R}^*(\mathcal{H}) \neq \mathcal{R}(\mathcal{H})$. Álljon például $\mathcal{H}$ I^ω részhalmazaiból. Transzfinit indukcióval könyű megmutatni, hogy $\mathcal{R}^*(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, mivel ha $\mathbb{R}$ pontjait I^ω részhalmazaival helyettesítjük, a kapott halmaz hasonló lesz $\mathbb{R} \times I^\omega$ egy részhalmazához, ami $(0,1) \times I^\omega \subset I \times I^\omega = I^{1+\omega} = I^\omega$-val megegyező rendtípusú. Azonban $I^{\omega+1} \in R_1(\mathcal{H}) \subset \mathcal{R}(\mathcal{H})$, amelyről a 3.14. tételben láttuk, hogy nem hasonló I^ω egyetlen részhalmazához sem.

3.28. Tétel. $\mathcal{R}^*(\{\mathbb{R}\})$ minden eleme hasonló I^ω egy részhalmazához.

Bizonyítás. Transzfinit indukcióval adódik, felhasználva, hogy $\mathbb{R} \times I^\omega$ hasonló I^ω egy részhalmazához. ■

3.29. Tétel. $\mathcal{R}(\{\mathbb{R}\})$ minden eleme hasonló I^α egy részhalmazához alkalmas $\alpha < \omega_1$-re.

Bizonyítás. Transzfinit indukcióval megmutatjuk, hogy minden $\alpha < \omega_1$-hez található egy $\alpha' < \omega_1$, amelyre R_α minden eleme hasonló $I^{\alpha'}$ egy részhalmazához. $\alpha = 0$-hoz $\alpha' = 1$ megfelel. Ha $\alpha = \beta + 1 < \omega_1$, akkor legyen $\alpha' := \beta' \cdot 2$. Ez könnyen láthatóan teljesíti a feltételt, mert ha $I^{\beta'}$ pontjait $I^{\beta'}$-höz hasonló halmazokkal helyettesítjük, egy $I^{\beta' \cdot 2}$-höz hasonló rendezést kapunk. Legyen végül $\alpha < \omega_1$ egy limeszrendszám, és legyen $\alpha_n \nearrow \alpha$ $(n \in \mathbb{N})$ egy hozzá konvergáló sorozat. Ekkor a fenti gondolatmenethez hasonlóan adódik, hogy $\alpha' := \sup\{\alpha'_n : n \in \mathbb{N}\} \cdot 2$ megfelel. ■

A reprezentálható rendezések konstrukcióival kapcsolatban utolsóként megemlítünk egy kérdést.

3.30. Kérdés. $\mathcal{R}(\{I^\alpha : \alpha < \omega_1\}) = \mathcal{R}^*(\{I^\alpha : \alpha < \omega_1\})$?

Azt állapíthatjuk meg tehát a konstrukciók összefoglalásaként, hogy több jel is arra mutat, hogy ha egy rendezett halmaz nem tartalmaz ω_1 típusú növő vagy fogyó sorozatot, akkor reprezentálható. Ezt Kuratowski tételével (2.1.) egybevetve megkaphatnánk a reprezentálható halmazok karakterizációját. Azonban az alábbi tétel szerint ez nem lehetséges.

3.31. Tétel. A ZFC-axiómarendszerben nem bizonyítható, hogy pontosan azok a rendezett halmazok reprezenrálhatók Baire 1 függvényekkel, amelyek nem tartalmaznak ω_1 típusú növő vagy fogyó részt.

Bizonyítás. Szuszlin-egyenes nem tartalmazhat ω_1 típusú $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ növő sorozatot, hiszen ekkor $\{(x_\alpha, x_{\alpha+2}) : \alpha < \omega_1 \text{ limeszrendszám}\}$ diszjunkt nem üres nyílt intervallumoknak egy megszámlálhatónál nagyobb számosságú rendszere lenne, ami ellentmondana a *ccc*-tulajdonságnak. Hasonlóan igazolható, hogy nem tartalmazhat ω_1 típusú fogyó sorozatot sem.

Eszerint, ha a fenti karakterizáció bizonyítható lenne, akkor azt is bebizonyítanánk, hogy minden Szuszlin-egyenes reprezentálható. Ez azonban Komjáth tétele (2.5.) szerint azt jelentené, hogy bebizonyítottuk, hogy nem létezik Szuszlin-egyenes, ami ellentmondás. ■

Ezek szerint a fent említett karakterizáció nem bizonyítható. Ez azonban még nem ad választ a következő kérdésre.

3.32. Kérdés. Konzisztens-e, hogy pontosan azok a halmazok reprezentálhatóak Baire 1 függvényekkel, amelyek nem tartalmaznak ω_1 típusú növő vagy fogyó sorozatot?

A fejezet hátralévő részében megadjuk az ambigus halmazokkal reprezentálható rendezett halmazok egy karakterizációját. Az eddigi példák általában olyanok voltak, hogy egy kompakt metrikus térnek az alaphalmazát rendeztük úgy, hogy a rendezés bizonyos szeletei ambigus halmazok voltak. A szeletek alkotta rendtípus tehát reprezentálható volt. Ez megfordítható.

3.33. Tétel. Egy X rendezett halmaz pontosan akkor reprezentálható ambigus halmazokkal, ha van egy kompakt metrikus térnek egy olyan rendezése, melyben bizonyos szeletek ambigusak és a tartalmazás szerint X-hez hasonlóan vannak rendezve.

Bizonyítás. Ha van ilyen rendezés, akkor a szeletek karakterisztikus függvényei megfelelnek. Legyen most adott egy $\{H_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ ambigus halmazokból álló reprezentáció, és definiáljunk egy relációt a metrikus tér pontjai között. Legyen

$$x <' y \text{ ha } \exists \alpha \in \Gamma, \text{ melyre } x \in H_\alpha \text{ és } y \notin H_\alpha.$$

Ez könnyen láthatóan parciális rendezés, hiszen amellett, hogy az irreflexivitás triviális, $\{H_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ rendezettsége miatt teljesül a tranzitivitás és az antiszimmetria.

A Zorn-lemma szerint minden parciális rendezés kiterjeszthető rendezéssé, úgyhogy vegyük $<'$-nek egy tetszőleges $<^*$ kiterjesztését. Megmutatjuk, hogy ez jó. Mivel ez valóban rendezés, és minden $\alpha \in \Gamma$-ra H_α ambigus, csak azt kell megmutatni, hogy H_α egy szelete $<^*$-nak. Azt kell belátni tehát, hogy ha $x \in H_\alpha$ és $y \leq^* x$, akkor $y \in H_\alpha$, ami azzal ekvivalens, hogy ha $y \notin H_\alpha$ és $x \in H_\alpha$, akkor $x <^* y$. Ez pedig nyilvánvaló. ■

A fejezet lezárásaként megemlítünk egy kérdést, amely rávilágít az ambigus halmazokkal való reprezentálás jelentőségére.

3.34. Kérdés. Egybeesnek-e az ambigus halmazokkal és a Baire 1 fügvényekkel reprezentálható rendtípusok?

4. Szeparábilis metrikus tereken értelmezett Baire 1 függvények rendtípusai

E fejezet témája a szeparábilis metrikus tereken értelmezett rendezett függvényhalmazok problémája. Először az 1.1. tételt általánosítjuk.

4.1. Tétel. Szeparábilis metrikus téren értelmezett folytonos függvények rendezett halmaza hasonló a valós számok egy részhalmazához.

Bizonyítás. Legyen $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ a tér egy sűrű megszámlálható részhalmaza. Ekkor az

$$f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} f(x_n)}{2^n}$$

leképezés, ahol f a rendezett halmaz elemein fut végig, hasonlóságot létesít a rendezett halmaz és a valós számok egy részhalmaza között, hiszen ha két folytonos függvény nem esik egybe, akkor eltérnek a sűrű halmaz valamely elemén is. ■

A következő állítás szerint a megfordítás is igaz.

4.2. Tétel. Nem szeparábilis metrikus téren minden legfeljebb $\aleph_1$ számosságú rendezett halmaz, így speciálisan ω_1 is reprezentálható folytonos függvényekkel.

Bizonyítás. Legyen X egy nem szeparábilis metrikus tér. Metrikus terek körében a szeparábilitás ekvivalens a *ccc*-tulajdonsággal, ezért létezik diszjunkt nem üres nyílt halmazoknak egy $\{G_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ rendszere. Ez a halmazrendszer tekinthető az $\bigcup_{\alpha<\omega_1} G_\alpha$ metrikus tér nyílt fedésének. Stone tétele szerint egy metrikus tér minden nyílt fedésének létezik σ-diszkrét finomítása [En. 4.4.1.], amelyből könnyen láthatóan kiválasztható egy $\{H_\alpha \subset X : \alpha < \omega_1\}$ nem üres nyílt halmazokból álló diszkrét halmazrendszer. Mivel az alaptér egy metrikus tér, minden $\alpha < \omega_1$-hez rögzíthetünk egy $\varphi_\alpha : X \to [0,1]$ folytonos függvényt, amely H_α-n kívül nulla, de H_α-n nem azonosan nulla.

Legyen most A egy legfeljebb $\aleph_1$ számosságú rendezett halmaz és $F : A \to \omega_1$ egy injektív leképezés. Az

$$a \mapsto \sum_{b<a} \varphi_{F(b)} \quad (a \in A)$$

hozzárendelés értelmes, hiszen minden pontban az összegnek legfeljebb egy tagja nem nulla, emellett nyilvánvalóan hasonlóság. Annak igazolása van még hátra, hogy minden $a \in A$-ra folytonos a fenti összeg. Azonban $\bigcup_{\alpha<\omega_1} H_\alpha$ pontjaiban a folytonosság nyilvánvaló, az ezen kívüli pontokban pedig könnyen adódik a halmazrendszer diszkrétségéből. ■

Most rátérünk a szeparábilis metrikus tereken értelmezett Baire 1 függvényekre. Mint azt már a második fejezetben említettük, ez az eset már a jólrendezések szempontjából is lényegesen bonyolultabb, mint ha azt tesszük fel, hogy az alaptér egy lengyel tér.

4.3. Tétel. Van olyan szeparábilis metrikus tér, amelyen létezik Baire 1 függvényeknek ω_1 típusú sorozata.

Bizonyítás. A bizonyítás azon alapul, hogy van olyan nem megszámlálható szeparábilis metrikus tér, amelynek minden megszámlálható részhalmaza G_δ. Ugyanis ha ebben transzfinit rekurzióval definiáljuk megszámlálható halmazok egy ω_1 típusú növő sorozatát, akkor ezen halmazok karakterisztikus függvényei megfelelnek a feltételeknek, hiszen minden megszámlálható halmaz F_σ is, azaz ambigus. Fenti tulajdonságú metrikus tér konstruálásához definiáljuk először a valós számok G_δ részhalmazainak egy ω_1 típusú növő sorozatát transzfinit rekurzióval. Legyen G_0 az üres halmaz. Ha $\alpha < \omega_1$, akkor G_α legyen az $\cup_{\beta<\alpha} G_\beta$ nullmértékű halmaz és még egy rajta kívüli pont uniójának nullmértékű G_δ burka. Így könnyen láthatóan egy keresett tulajdonságú, ráadásul nullmértékű halmazokból álló sorozatot kapunk. Legyen most $x_\alpha \in G_{\alpha+1} \setminus G_\alpha \subset \mathbb{R}$ $(\alpha < \omega_1)$ és $H := \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Azt állítjuk, hogy a H szeparábilis metrikus tér megfelel. Legyen tehát $M \subset H$ egy megszámlálható részhalmaz, azaz $M = \{x_\alpha : \alpha \in A\}$, ahol $A \subset \omega_1$ megszámlálható. A korlátos ω_1-ben, így valamely $\alpha < \omega_1$-re $M \subset G_\alpha$. A $G_\alpha \cap H = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ halmaz megszámlálható és H-ban G_δ. Ekkor azonban M is G_δ H-ban, hiszen előáll

$$M = (G_\alpha \cap H) \cap \bigcap_{x \in G_\alpha \setminus M} (\mathbb{R} \setminus \{x\})$$

alakban. ■

4.4. Tétel. Az az állítás, hogy van olyan szeparábilis metrikus tér, amelyen létezik Baire 1 függvényeknek ω_2 típusú sorozata, független a ZFC axiómarendszertől, sőt független $ZFC + (2^{\aleph_0} \geq \aleph_2)$-től is.

Bizonyítás. A Baire 1 függvények halmaza kontinuum számosságú, így a kontinuumhipotézisből nyilvánvalóan következik, hogy Baire 1 függvényeknek nincs ω_2 típusú sorozata. Ez az állítás tehát konzisztens ZFC-vel.

Most belátjuk, hogy konzisztens $ZFC + (2^{\aleph_0} \geq \aleph_2)$-vel is. [So] szerint konzisztens, hogy $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ és szeparábilis metrikus térben Borel halmazoknak nincs ω_2 típusú jólrendezett rendszere. Tekintsünk egy ilyen tulajdonságú modellt, és tegyük fel, hogy létezik egy szeparábilis metrikus téren Baire 1 függvényeknek egy ω_2 típusú halmaza. Ekkor az $X \times \mathbb{R}$ szeparábilis metrikus térben a függvények szubgráfjai F_σ halmazok egy ω_2 típusú halmazát alkotják, ami a szóbanforgó modellben lehetetlen.

Mielőtt igazolnánk az állítás tagadásának konzisztenciáját, bevezetünk egy definíciót. Egy topologikus tér egy alterét Q-halmaznak nevezzük, ha minden részhalmaza relatíve

G_δ. Egy H Q-halmaz minden $A \subset H$ részhalmaza relatíve ambigus, hiszen $H \setminus A \subset H$ is relatíve G_δ, azaz $A \subset H$ relatíve F_σ. [Ha. 5.4.2.] alapján konzisztens, hogy $2^{\aleph_0} = \aleph_3$ és létezik a valós számoknak egy H $\aleph_2$ számosságú részhalmaza, amely Q-halmaz. Legyen $H = \{h_\alpha : \alpha < \omega_2\}$ egy jólrendezése H-nak. Ekkor a H szeparábilis metrikus téren a

$$\{\chi_{\{h_\beta : \beta < \alpha\}} : \alpha < \omega_2\}$$

függvényhalmaz Baire 1 függvények egy ω_2 típusú sorozata, tehát az állítást igazoltuk. ■

Megjegyzés. Ha csak a ZFC-től való függetlenséget igazoltuk volna, akkor nem zárnánk ki azt a lehetőséget, hogy pontosan a legfeljebb kontinuum számosságú rendszámok reprezentálhatók, és ekkor az állítás nem volna más, mint a kontinuum hipotézis nyilvánvaló átfogalmazása.

Megjegyzés. Ambigus halmazokkal való reprezentációról ugyanez mondható.

Utolsóként a Borel-mérhető függvények osztályával foglalkozunk. A folytonos függvények vizsgálata után a Baire 1 osztály helyett a mérhető függvények osztálya is természetes továbblépési lehetőség. Mint azt az 1.5. tételben már láttuk, nem jelent megszorítást, ha felteszük, hogy a reprezentáló függvények Lebesgue-mérhetőek, ezért célszerűbb a Borel-mérhető függvények osztályát tekinteni. Az 1.14. tételben már bizonyítottuk, hogy valós Borel függvényeknek létezik ω_1 típusú sorozata.

A most következő állítások lényegében megtalálhatók [Ko]-ban, mivel az ott az α-adik Borel-osztályokra kimondott állítások könnyen átvihetők a jelen esetre.

4.5. Tétel. Az az állítás, hogy van olyan szeparábilis metrikus tér, amelyen Borel mérhető függvényeknek létezik ω_2 típusú rendezett halmaza, független $ZFC + (2^{\aleph_0} = \aleph_2)$-től.

Bizonyítás. Az egyik irány ugyanúgy adódik, mint az előző állításban.

A másik irány igazolásához tekintsünk egy olyan modellt, melyben $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, és minden kontinuumnál kisebb számosságra teljesül a Martin-axióma. Ekkor $\aleph_2$-nél kevesebb nullmértékű halmaz uniója is nullmértékű, így az 1.15. tétel gondolatmenetét alkalmazva G_δ halmazok egy ω_2 típusú sorozatát kapjuk. Ezen halmazok karakterisztikus függvényei megfelelnek. ■

A Baire 1 függvények esetétől eltérően most a valós függvények problémájának függetlensége is adódik.

4.6. Következmény. Független $ZFC + (2^{\aleph_0} = \aleph_2)$-től, hogy létezik-e valós Borel-függvényeknek ω_2 típusú sorozata.

5. Nyitott problémák

Ebben a fejezetben felsoroljuk, hogy mely problémák várnak még megoldásra.

1) Igaz-e, hogy Baire 1 függvényekkel való reprezentáció szempontjából a nem megszámlálható lengyel terek ekvivalensek?
2) Igaz-e, hogy reprezentálható rendezett halmaznak a duplázottja is reprezentálható?
3) Igaz-e, hogy egy A reprezentálható rendezett halmaznak az $\tilde{A}$ teljessé tétele is reprezentálható?
4) $\mathcal{R}(\{I^\alpha : \alpha < \omega_1\})$ egybeesik-e a reprezentálható rendtípusokkal?
5) $\mathcal{R}(\{I^\alpha : \alpha < \omega_1\}) = \mathcal{R}^*(\{I^\alpha : \alpha < \omega_1\})$?
6) Konzisztens-e, hogy pontosan azok a halmazok reprezentálhatóak Baire 1 függvényekkel, amelyek nem tartalmaznak ω_1 típusú növő vagy fogyó sorozatot?
7) Egybeesnek-e az ambigus halmazokkal és a Baire 1 fügvényekkel reprezentálható rendtípusok?

Felhasznált irodalom

[En] R. Engelking: *General Topology*. PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977.

[Je] T. Jech: *Set Theory*. Academic Press, 1978.

[Ko] P. Komjáth, Ordered families of Baire-2-functions. *Real Analysis Exchange*, Vol **15** (1989-90), 442-444.

[Ku] K. Kuratowski: *Topology*. Academic Press, 1966.

[La] Laczkovich Miklós: *Valós függvénytan* (egyetemi jegyzet). Budapest, ELTE, 1995.

[So] R. Solovay publikálatlan eredménye.

[Ha] *Handbook of Set-Theoretic Topology*. Szerkesztette K. Kunen és J. E. Vaughan. Elsevier Science Publishers B. V., 1984.

Tartalom

Bevezetés 2

1. Valós függvényosztályok rendtípusai 3
2. Kuratowski és Komjáth tételei 9
3. Valós Baire 1 függvények rendtípusai 12
4. Szeparábilis metrikus tereken értelmezett Baire 1 függvények rendtípusai 24
5. Nyitott problémák 27

Felhasznált irodalom 28