Utak és párosítások

SZAKDOLGOZAT

Írta:
Szegő László
V. matematikus

Témavezető:
Frank András
egyetemi tanár

1997.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Ezen szakdolgozat témája az út–párosítás probléma. W. H. Cunningham és J. F. Geelen vezette be [4]–ben az út–párosítás fogalmát, és mint kiderítették: ez az első polinomiális közös általánosítása a gráfokbéli súlyozott párosítás problémának és a súlyozott matroidmetszet problémának. Számos kísérlet történt már ilyen közös általánosításra, ám azok mind nehezen megoldható kérdéseknek bizonyultak.

Cunningham és Geelen [4]–ben szép leírását adja az út–párosítások poliéderének, és más egyéb érdekes poliéderes eredményeket is közölnek, azonban a maximális értékű út–párosítás megtalálására algoritmust csak az ellipszoid–módszeren keresztül kapnak. Kombinatorikus algoritmust a mai napig nem sikerült találni.

Cunningham és Geelen abban az esetben, amikor a matroidok szabad matroidok, azaz az út–párosítás tisztán gráfelméleti fogalom, megad egy, a Berge–Tutte–formulával rokon, minimax formulát a maximális út–párosítás értékére, amit elemi eszközökkel is bizonyítanak, de ezen bizonyítás lineáris algebrai alapokra épül. Dolgozatunk első részében ezt a bizonyítást ismertetjük, majd vizsgálataink fő eredményét mutatjuk be, ami új fogalom, az út–párosításokra vonatkozó vágás segítségével a minimax tétel egy átfogalmazása, és erre az új alakra egy tisztán kombinatorika bizonyítás. Az út–párosítások érdekességét mutatja, hogy a szóbanforgó tételnek speciális esete a Kőnig–tétel, a Tutte–tétel, a Berge–Tutte–formula. A Hall–tétel is egyszerű következményként kapható, és Cunningham nyomán megmutatjuk, hogy egy egyszerű konstrukcióval Menger tételére is bizonyítást nyerünk. Kombinatorikai bizonyításunk voltaképpen a Tutte tételre adott "gátas" bizonyítás általánosítása, míg Cunningham és Geelen Tutte eredeti bizonyítását használja út–párosításokra.

A dolgozat második felében az út–párosításokra vonatkozó alapvető poliéderes eredményeket ismertetjük, végül a kombinatorikus algoritmus megtalálására irányuló törekvéseink eredményeit foglaljuk össze.

A dolgozat első része csak a legegyszerűbb gráfelméleti fogalmak ismeretét igényli, a poliéderekkel foglalkozó rész használja a poliéderes kombinatorika alapvető eredményeit és módszereit. A szükséges előismeretek megszerzésére kiválóan alkalmas [7] és [9].

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Frank Andrásnak, amiért munkámat végig nagy figyelemmel kísérte, és ellátott hasznos és lényegi tanácsaival.

Hálás köszönettel tartozom még Fleiner Balázs, Varga Dániel és Wiener Gábor okleveles matematikusoknak is, a szakdolgozat technikai elkészültében nyújtott kedves segítségükért.

2. Alapfogalmak

Adott $G = (V, E)$ gráfban egy M élhalmazt **párosításnak** nevezünk, ha a gráf minden pontja legfeljebb egy M–beli élre illeszkedik. Ennek a fogalomnak a következő általánosítását fogjuk vizsgálni. A $G = (V, E)$ gráf ponthalmazának legyen I és J két olyan részhalmaza, melyre $I \cup J = V$, továbbá az $I - J$ és a $J - I$ halmazok legyenek stabilak, azaz ne legyen olyan él, amelynek mindkét végpontja $I - J$–ben vagy $J - I$–ben lenne.

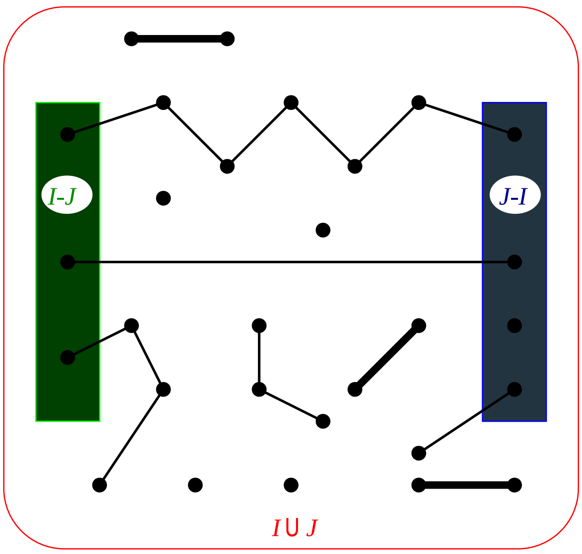
2.1. Definíció. *Az $M \subseteq E$ élhalmazt I–re és J–re vonatkozó út–párosításnak nevezzük, ha a $D = (V, M)$ gráf minden komponense egy I–ből J–be vezető út, melynek minden belső pontja $I \cap J$–beli pont.*

A továbbiakban mindig feltesszük, hogy a $G = (V, E)$ gráffal együtt mindig adott egy megfelelő (I, J) pár is. Az út–párosítás definíciója indokolja, hogy kötőjellel írjuk a szót magyarul, mert nem utakat párosítunk, amit az egybeírás sugallna, hanem vannak útjaink és párosításéleink. Adott M út–párosításra jelöljük M'-vel azon M–beli élek halmazát, amelyek két $I \cap J$–beli pontot kötnek össze, és valamely $D = (V, M)$ komponens egyedüli élei. M' elemeit nevezzük az út–párosítás **párosításéleinek**, az $M - M'$ elemeit pedig az **útéleinek**.

2.2. Definíció. *Az M út–párosítás értéke legyen a következő:*

$$val(M) = |M| + |M'|$$

Vagyis az útélek 1–gyel járulnak hozzá az értékhez, a párosításélek pedig 2–vel. Az első ábrán szereplő út–párosítás értéke 19, vastag élekkel jelöltük a párosításéleket.



1.ábra

Látható, hogy az $I \cap J$–beli utakat minden második élüknek az elhagyásával leépíthetjük a $val(M)$ csökkenése nélkül, ezért amikor a maximális értékű út–párosítást keressük, kereshetjük mindig ilyen alakban őket, amikoris $val(M)$ tulajdonképpen az $I \cap J$–ben az M által lefedett pontok száma, és még minden egyes $I - J$–ből $J - I$–be vezető út is megér egyet.

Könnyen látható, hogy $I = J$ esetén a maximális út–párosítás értéke éppen a maximális párosítás elemszámának a kétszerese. Vagyis a maximális út–párosítás megtalálása a maximális párosítás probléma egy általánosítása.

Az $I \cap J = \emptyset$ esetben a G páros gráf, és a maximális út–párosítás értéke megegyezik a maximális párosítás elemszámával, tehát páros gráf esetében kétféleképp is általánosítja az út–párosítás a párosítást.

Adott M út–párosításra a következő vektort **út–párosítás–vektornak** nevezzük:

$$e \in E\text{–re} \quad \psi_e^M = \begin{cases} 2, & \text{ha} \;\; e \in M' \\ 1, & \text{ha} \;\; e \in M - M' \\ 0, & \text{ha} \;\; e \notin M \end{cases}$$

$c = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^E$ súlyfüggvény esetén $c\psi^M$ éppen az út–párosítás értékét adja. Ennél is általánosabb az a kérdés, amikor tetszőleges $c \in \mathbb{R}^E$ esetén keressük azt az út–párosítás–vektort, amelyre a következő maximum felvétetik: $\max\{cx : x \text{ út–párosítás–vektor}\}$.

Ez utóbbi probléma általánosítja a maximális súlyú párosítás problémáját is. Ugyanis $I = J$ esetén egy ψ^M út–párosítás–vektor előáll két (esetleg egybeeső) párosítás incidenciavektorának az összegeként, és ekkor világos, hogy a maximum a maximális súlyú G–beli párosítás kétszerese.

Érdekes megfigyelés, hogy az út–párosítás értékére adott definíciónkon egy kicsit változtatva már NP–teljes problémához jutunk, míg —ahogy azt később látni fogjuk — ilyen $val(M)$ definícióval a probléma polinomiális:

$\varepsilon \in \mathbb{R}$–re és M út–párosításra legyen $val_\varepsilon(M) = |M - M'| + (2 + \varepsilon/n)|M'|$. A $\max\{val_\varepsilon(M) : M \text{ út–párosítás}\}$ érték meghatározása NP–nehéz feladat minden $\varepsilon < 1$ értékre, kivéve az $\varepsilon = 0$ esetet.

Tegyük fel, hogy $|I - J| = |J - I| = 1$. $\varepsilon < 0$, esetén akkor és csak akkor létezik M út–párosítás, amelyre $val_\varepsilon(M) \geq |I \cup J| - 1$, ha M Hamilton–út $I \Delta J$ végponthalmazzal, vagyis tényleg NP–nehéz a probléma.

$0 < \varepsilon < 1$ esetben a következő problémával állunk szemben: egy gráf adott két pontja között keressük meg az olyan legrövidebb utat, amely pontjainak a kihagyása után a visszamaradt gráfban létezik teljes párosítás. A hírek szerint Martin Loebl megmutatta, hogy ez szintén NP-nehéz feladat.

3. Gráfok, mátrixok és a maximális út–párosítás formula

Ebben a fejezetben először megismerkedünk Cunningham és Geelen azon tételével, miszerint az $A[I,J]$ Tutte–mátrix rangja éppen a maximális út–párosítás értékével egyenlő. Ezután ennek segítségével és némi lineáris algebrával eljutunk egy minimax tételhez, amely megadja a maximális út–párosítás értékét. Ezen tétel bizonyításában Lovász László egy érdekes megfigyelése döntőnek bizonyul. Végül egy teljesen kombinatorikai bizonyítását látjuk az előző tétel egy másik alakjának, és aztán belátjuk, hogy a minimax–formulának speciális esete a Kőnig–tétel, a Hall–tétel, Tutte tétele, a Berge–Tutte–formula, és a pontdiszjunkt utakra vonatkozó Menger–tétel is könnyen megkapható belőle.

3.1. Út–párosítások és mátrixrang

3.1. Definíció. *A $G = (V, E)$ egyszerű gráf Tutte-mátrixának nevezzük a következő $|V| \times |V|$–es ferdén szimmetrikus mátrixot:*

$$A(V,E) = (a_{ij}),\ a_{ij} = \begin{cases} \pm x_e, & \textit{ha } ij = e \in E, \\ 0 & \textit{különben,} \end{cases}$$

ahol az x_e–k ($e \in E$) egymással felcserélhető határozatlanok.

Bár ez a mátrix nem egyértelmű, a definíció mégsem vezet majd félreértésre. Ismert Tutte–nak az a tétele, hogy $r(A)$, azaz a mátrix rangja a G–beli maximális párosítás kétszerese. Ezt a tételt fogjuk a következő definíció után általánosítani.

3.2. Definíció. *Jelölje $A[I,J]$ az $A(I \cup J, E)$ Tutte–mátrix azon részmátrixát, amelynek sorai az I elemeivel, oszlopai a J elemeivel vannak indexelve.*

3.3. Tétel. *A G–beli maximális út–párosítás értéke egyenlő az $A[I,J]$ mátrix rangjával.*

A tétel bizonyításához szükségünk lesz ezen probléma irányított gráfbeli változatára, amiből aztán könnyen következik, amit szeretnénk.

A $G = (V, E)$ gráfra és pontjainak egy $S \subseteq V$ halmazára jelölje $G[S]$ az S pontjai által G–ben feszített részgráfot!

A $\vec{G} = (V, \vec{E})$ irányított gráf származzon úgy a $G = (V, E)$ gráfból, hogy minden $ij \in E$ él helyére tegyünk egy ij és egy ji irányított élet. Jelölje $\vec{E}_{IJ}$ az $\{ij \in \vec{E} : i \in I, j \in J\}$ halmazt. Az $F \subseteq \vec{E}_{IJ}$ élhalmazt (I,J)–**faktornak** ((I,J)–**szubfaktornak**) nevezzük, ha minden I–beli pont pontosan egy (legfeljebb egy) F–beli irányított él töve, és minden J–beli pont pontosan egy (legfeljebb egy) F–beli irányított él feje. Látható, hogy ha F szubfaktor, akkor (V, F) komponensei irányított utak vagy $\vec{G}[I \cap J]$–beli irányított körök, ha pedig F faktor, akkor minden (V, F)–beli irányított út $I - J$–beli pontban kezdődik, és $J - I$–beli pontban végződik, és V minden pontja le van fedve ezen útjai és körei által. Az F faktort *párosnak* nevezzük, ha minden irányított köre páros hosszú. Világos, hogy ha létezik páros (I, J)–szubfaktor $\vec{G}$–ben, akkor létezik olyan is, amelyben minden irányított kör kettő hosszúságú.

3.4. Lemma. *Az $A[I, J]$ mátrix rangja egyenlő a legnagyobb $\vec{G}$–beli (I, J)–szubfaktor elemszámával.*

Bizonyítás. Nyilván elég belátnunk, hogy $|I| = |J|$ esetén az $A[I, J]$ mátrix akkor és csak akkor nemszinguláris, ha létezik (I, J)–faktor. Legyen $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$. A kifejtési tétel szerint:

$$det(A[I, J]) = \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \cdot \prod_{b=1}^{k} a_{i_b j_{\sigma(b)}},$$

ahol a szummáció az $\{1, 2, \ldots, k\}$ halmaz összes σ permutációjára történik, és $sgn(\sigma)$ a σ permutáció előjele.

Az $A[I, J]$ definíciójából következik, hogy egy ilyen σ–ra az $\{i_b j_{\sigma(b)} : b = 1, 2, \ldots, k\}$ élhalmaz akkor és csak akkor (I, J)–faktor, ha $\prod\{a_{i_b j_{\sigma(b)}} : b = 1, 2, \ldots, k\} \neq 0$. Egy F (I, J)–faktorra jelöljük $sgn(F)$–fel a hozzátartozó permutáció előjelét, ekkor

$$det(A[I, J]) = \sum_{F} sgn(F) \cdot \prod_{b=1}^{k} a_{i_b j_{\sigma(b)}}, \tag{1}$$

ahol a szummáció az összes (I, J)–faktorra történik. Legyen F (I, J)–faktor, és legyen $C \subseteq F$ egy irányított kör (V, F)–ben. $F' = F - C \cup \{ji : ij \in C\}$, tehát F'–t úgy kapjuk, hogy megfordítjuk a C kör irányítását F–ben. Ekkor $sgn(F) = sgn(F')$, és a ferde szimmetria miatt:

$$\prod_{ij \in F} a_{ij} = (-1)^{|C|} \prod_{ij \in F'} a_{ij}.$$

Vagyis ha C páratlan hosszú, akkor ez a két tag kiesik. Általában: ha F $k \geq 1$ darab páratlan kört tartalmaz, és m darab párosat, akkor a $\prod(x_{ij} : ij \in F)$ monom pontosan 2^{k-1-m}–szer szerepel $+1$ együtthatóval, és ugyanennyiszer -1 együtthatóval. Következésképpen a (1) egyenlőség akkor is igaz, ha a szummáció csak a *páros* (I, J)–faktorokra történik.

Ha F egy páros (I, J)–faktor $\vec{G}$–ben, akkor a $\prod(x_{ij} : ij \in F)$ monom együtthatója a $det(A[I, J])$ kifejtésében $sgn(F) \cdot 2^m$, ahol m a (V, F)–beli páros körök száma. Eszerint $A[I,J]$ akkor és csak akkor nemszinguláris, ha létezik páros (I,J)–faktor. $\square$

A 3.3.Tétel bizonyítása. Világos, hogy akkor és csak akkor létezik k méretű (I,J)–szubfaktor, ha létezik k értékű út–párosítás. Következésképpen a 3.4.Lemma szerint az $A[I,J]$ mátrix rangja éppen a legnagyobb út–párosítás értéke. $\square$

3.2. A maximális út–párosítás formula

A $W \subseteq V$ ponthazmazra a szokásosnak megfelelően jelölje a szomszédok halmazát $N(W) = \{v \in V : \exists\ u \in W,$ amelyre $uv \in E\}$.

3.5. Definíció. *Az (I',J')–párt stabil párnak nevezzük, ha $I' \subseteq I,\ J' \subseteq J$, és $N(I'-J') \subseteq V-J',\ N(J'-I') \subseteq V-I'$.*

Tehát stabil párok esetén nincs él $I'-J'$–ből J'–be, és $J'-I'$–ből I'–be. Könnyen látható, hogy ha (I,J) stabil pár, akkor az $A[I,J]$ mátrix összes nemnulla eleme az $A[I\cap J, I\cap J]$–ben van, és így az $A[I,J]$ rangja megegyezik az utóbbi mátrix rangjával, ami egy részgráf Tutte-mátrixa, és így az előző tételünk szerint rangja a maximális párosítás kétszerese. Ez a megfigyelés és Lovász László út–párosítások hallatán megfogalmazott következő lemmája vezetett Cunningham és Geelen minimax tételéhez.

3.6. Állítás. *Legyen $A = (a_{ij})$ egy $I \times J$–es mátrix. Ha valamely $i \in I$–re és $j \in J$–re $r(A[I,J]) = r(A[I-i,J]) = r(A[I,J-j])$, akkor $r(A[I,J]) = r(A[I-i,J-j])$.* $\square$

3.7. Lemma. **(Lovász)** *Tegyük fel, hogy az $A[I,J]$ mátrixnak nincs olyan oszlopa vagy sora, amelynek elhagyásával a mátrix rangja csökkenne. Ekkor (I,J) stabil pár.*

Bizonyítás. Elég belátnunk, hogy ha valamely $i \in I$–re és $j \in J$–re $a_{ij} = \pm x_e$, akkor $j \in I, i \in J$. Indirekten tegyük fel, hogy ez nem teljesül. Legyen $k = r(A[I,J])$. Ekkor a feltevés és az állítás szerint létezik egy nemszinguláris $k\times k$–as részmátrix, hogy $i \notin I''$, $j \notin J''$. De mivel x_e csak egy helyen fordul elő az $A[I,J]$ mátrixban, az $A[I''+i, J''+j]$ determinánsának a kifejtésekor az x_e együtthatója előjeltől eltekintve $\det(A[I,J])$, ami szerint $A[I''+i,J''+j]$ nemszinguláris, ami ellentmond annak, hogy $A[I,J]$ rangja k. $\square$

Jelölje $c(G)$ a G–beli páratlan komponensek számát. Könnyen látható, hogy a legnagyobb lepárosítható ponthalmaz legfeljebb $|V|-c(G)$ elemű, amikoris egy $X \subseteq V$ ponthalmazt **lepárosíthatónak** mondunk, ha X valamely G–beli párosítás éleinek végponthalmaza.

3.8. Tétel. **(Maximális út–párosítás formula)**

$$\max_{M \text{ út–pár.}} val(M) = \min_{(I',J') \text{ stabil pár}} |I - I'| + |J - J'| + |I' \cap J'| - c(G[I' \cap J']) \quad (2)$$

Bizonyítás. Egy mátrix rangja legfeljebb eggyel csökken, ha egy sorát vagy oszlopát elhagyjuk, ezért ha (I', J') stabil pár, akkor $r(A[I,J]) \leq r(A[I',J']) + |I - I'| + |J - J'|$. De mivel (I', J') stabil pár: $r(A[I',J']) = r(A[I \cap J]) \leq |I' \cap J'| - c(G[I' \cap J'])$, tehát $r(A[I',J']) \leq |I - I'| + |J - J'| + |I' \cap J'| - c(G[I' \cap J'])$.

Most megmutatjuk, hogy létezik (I', J') stabil pár, amelyre az előző egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, amivel a tételt be is látjuk.

Legyen $I^* \subseteq I$ és $J^* \subseteq J$ olyan minimális halmaz, amelyre $r(A[I,J]) = r(A[I^*,J^*]) + |I - I^*| + |J - J^*|$. Ekkor minden $i \in I^*$–ra $r(A[I^*,J^*]) = r(A[I^* - i, J^*])$, és minden $j \in J^*$–ra $r(A[I^*,J^*]) = r(A[I^*, J^* - j])$, ami a 3.6.Állítás és Lovász lemmája szerint azt jelenti, hogy (I^*, J^*) stabil pár.

Jelöljük S–sel $I^* \cap J^*$–ot. Tudjuk, hogy $r(A[I^* - i, J^*]) = r(A[S,S])$, és azt is tudjuk, hogy az I^*, J^* választása miatt tetszőleges $v \in S$–re: $r(A[S,S]) = r(A[S - v, S]) = r(A[S, S - v])$, ami a korábbiak szerint azt jelenti, hogy $r(A[S,S]) = r(A[S - v, S - v])$, ami szerint $\forall v \in S$–re létezik őt nem fedő maximális párosítás S–ben, amiből Gallai egy tétele szerint (ld. 3.13.Tétel) az következik, hogy $G[S]$ minden komponensének maximális párosításai pontosan egy pontot nem fednek (sőt, a komponensek faktorkritikusak), vagyis a maximális lepárosítható ponthalmaz elemszáma $G[S]$–ben $|S| - c(G[S])$, és így $r(A[S,S]) = |S| - c(G[S])$, amivel az adódik, hogy a kérdéses egyenlőtlenség az (I^*, J^*) stabil párra egyenlőséggel teljesül. □

3.9. Definíció. *Egy M út–párosítást teljesnek nevezünk I-re és J-re vonatkozóan, ha* $2 \cdot val(M) = |I| + |J|$.

Könnyen látható, hogy ekkor létezik olyan $M \subseteq E$ élhalmaz is, hogy D=(V,M) minden komponense egy $I \cap J$–beli él vagy egy út $I - J$ és $J - I$ között, azaz $|I| = |J|$, és minden pont fedve van párosításélekkel vagy "teljes" utakkal. Ezután a teljes út–párosításokat mindig ilyen alakban fogjuk elképzelni.

3.10. Következmény. *$|I| = |J| = n$ esetén akkor és csak akkor létezik teljes út–párosítás I–re és J–re vonatkozóan, ha minden (I', J') stabil párra teljesül, hogy*

$$|I' \cup J'| + odd(G[I' \cap J']) \leq n.$$

Bizonyítás. $|I| = |J| = n$ esetén ha létezik teljes út–párosítás, akkor az értéke n. A 3.8.Tétel szerint ha nem létezik teljes út–párosítás, akkor létezik (I', J') stabil pár, amelyre:

$$|I - I'| + |J - J'| + |I' \cap J'| - odd(G[I' \cap J']) < n$$

Amiből: $|I - I'| + |J - J'| + |I' \cap J'| + |I' \cup J'| - odd(G[I' \cap J']) < n + |I' \cup J'|$

$$\implies |I| + |J| - n < odd(G[I' \cap J']) + |I' \cup J'|$$

$$\implies n < odd(G[I' \cap J']) + |I' \cup J'|$$

$\square$

A következő lemma tanulmányozása vezetett el a vágás fogalmához az út–párosítások témakörében:

3.11. Lemma. *Ha $I' \subseteq I$, és létezik $J' \subseteq J$, hogy az (I', J') stabil párra felvétetik a minimum a maximális út–párosítás formulában, akkor a maximális ilyen J' a következőképpen kapható meg:*
(a) $I' \cup J' = I' \cup (J - N(I'))$,
(b) $(I' - J') \cap J = \{v \in J : \exists$ olyan P út v–be, amely valamely $u \in I' - J$ pontból indul, és u kivételével minden pontja $(I' \cup J') \cap J$–ben van$\}$.

Bizonyítás. A stabil pár definíciója szerint egy $v \in J' - I'$ pont nem lehet $N(I')$–ben, másrészt ha $v \in J - (I' \cup N(I'))$, de $v \notin J'$, akkor hozzávehető lenne J'–höz a stabilitás megsértése nélkül, (2)–ben a minimum csökkenne, ami ellentmond J' maximalitásának. Eszerint (a) teljesül.

Legyen T a (b)–ben megfogalmazott utakkal elérhető pontok halmaza. Világos, hogy u–nak $I' - J'$–ben kell lennie, és az is világos, hogy minden $w \in I' - J'$ pont minden szomszédjának is $I' - J'$–ven kell lennie a stabilitás miatt, amiből következik, hogy $T \subseteq I' - J'$.

Legyen $K = (I' - J') - T$. Ekkor K–beli pontból nem indul él sem T–be, sem $I' \cap J'$–be, ugyanis ha K–t J'-be is belevesszük, akkor továbbra is stabil párunk marad, és a $G[I' \cap J']$–beli páratlan komponensek száma sem csökken, továbbá $|I - I'|$ nem változik, $|J - J'|$ csökken $|K|$–val, $|I' \cap J'|$ növekszik $|K|$–val, ami összességében ellentmond J' maximalitásának. $\square$

3.3. Faktorkritikus gráfokról

Ebben a fejezetben ismertetjük a később felhasználandó fontos gráfelméleti fogalmakat és tételeket. A tételek bizonyításai megtalálhatók [6]–ban vagy [9]–ben.

3.12. Definíció. *Egy gráfot faktorkritikusnak nevezünk, ha bármely pontját elhagyva a maradékban létezik teljes párosítás.*

Az előző fejezetben szükségünk volt az alábbi tételre:

3.13. Gallai tétele. *Ha egy gráf bármely pontját elhagyva a független élek maximális száma nem csökken, akkor a gráf komponensei faktorkritikusok.*

Egy $Q \subseteq V$ páratlan pontszámú részhalmaz által feszített gráfot valamely M párosításra nézve M–**kritikusnak** mondunk, ha az M Q–ba eső élei egyetlen r pont (ún. **bázispont**) kivételével lefedik Q pontjait, és Q minden pontjából vezet r–be páros élszámú alternáló út, azaz olyan, amelynek első éle, ás azután minden második éle párosításél. A következő tétel a faktorkritikus gráfok legfontosabb tulajdonságairól ad számot.

3.14. Tétel. *Legyen adott a D gráf egy M párosítása, amely az r pont kivételével minden pontot lefed. A következők ekvivalensek:*

(a) G M–kritikus,

(b) G felépíthető a bázispontjából kiindulva M–alternáló utak illetve körök egymás utáni hozzávételével,

(c) G felépíthető bármely pontjából kiindulva páratlan élszámú utak és körök hozzávételével,

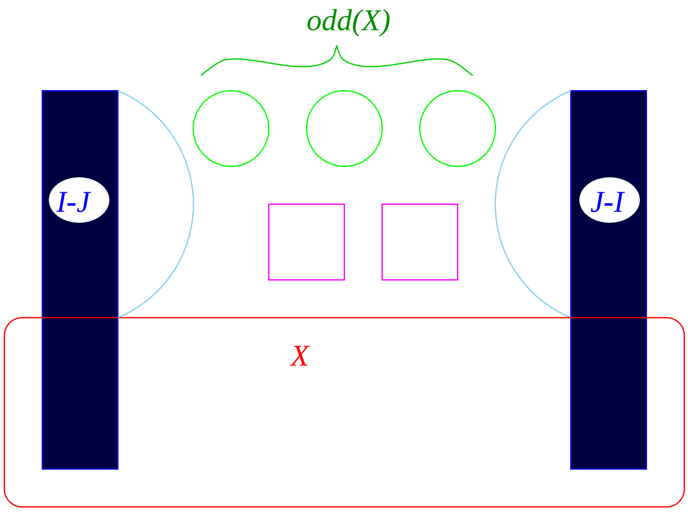
(d) G faktorkritikus.

3.4. A maximális út–párosítás formula egy másik alakja

Most saját vizsgálódásaink fő eredményének ismertetésére kerül sor. Egy új fogalom, az út–párosításokra vonatkozó vágás segítségével átfogalmazzuk a maximális út–párosítás formulát, és tisztán kombinatorikai eszközökkel bebizonyítjuk helyességét. A vágás könnyebben kezelhető fogalomnak tűnik a stabil párnál, ezért remélhetjük, hogy egy esetleges algoritmus megtalálásában majd hathatós segítségünkre lesz.

3.15. Definíció. *Az $X \subseteq V = I \cup J$ halmazt vágásnak nevezzük, ha $G - X$ –ben nem létezik $I - J$ és $J - I$ között út.*

Jelölje $odd(X)$ a $G - X$–beli csupa $(I \cap J)$–beli pontból álló páratlan komponensek számát, sőt a komponensek unióját is jelöljük így, nem fog félreértésre okot adni. A második ábrán egy X vágást szemléltetünk. A körök jelölik az $odd(X)$ komponenseit, a négyzetek pedig a $(G - X) \cap (I \cap J)$–beli *páros* komponenseket. A félkörök az $(I - J) - X$–ből a $G - X$–ben elérhető pontok, illetve a $(J - I) - X$–ből elérhető pontok halmazára utalnak. A vágás definíciója szerint élek az ábrán körberajzolt gráfrészek között csak akkor mehetnek, ha ezek egyike az X halmaz.



2.ábra

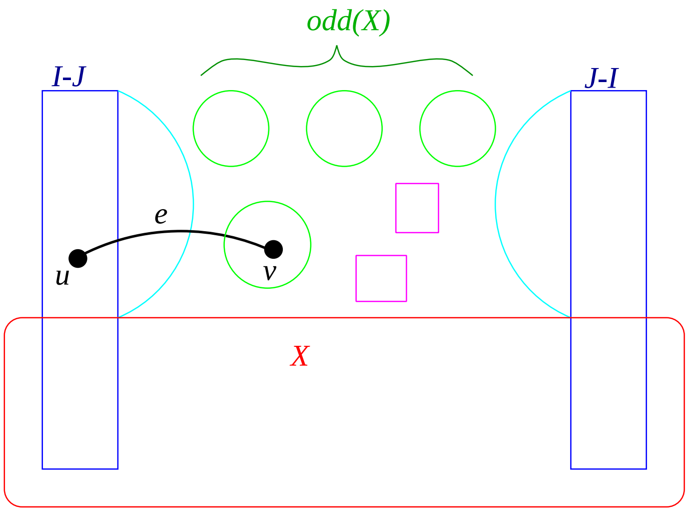
3.16. Tétel. *$G = (V, E)$, $|I - J| = |J - I| = k$ esetén G-ben akkor és csak akkor létezik teljes út–párosítás, ha minden X vágásra teljesül, hogy $|X| \geq odd(X) + k$.*

Bizonyítás. A feltétel szükségessége nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy létezik egy M teljes út–párosítás. A k darab úton egyértelműen létezik $I - J$–hez legközelebbi X–beli pont, hiszen X vágás. Az $odd(X)$ komponenseiből kell élnek kijönnie teljes út–párosításban, hiszen páratlan sok pontja van, tehát egy komponenshez létezik legalább egy X–beli pont, amely M'-ben szomszédja az adott komponens valamely pontjának, vagy ha halad át út a komponensen, akkor természetesen legalább két X-beli pontból vezet az adott komponensbe M–beli él, és ezen két pont közül az $I - J$–től távolabbit meg rendeljük ehhez az $odd(X)$–komponenshez. Mivel ezen pontok mind különbözőek, ezért X pontjainak a száma legalább $odd(X) + k$.

Az elegendőség bizonyítása kettős indukcióval történik: $I \cap J$ elemszámára vonatkozóan, és ezen belül E elemszámára, azaz az élek számára vonatkozóan. A kezdeti esetben ($|I \cap J| = 0, |E| = 1$) trivialisan ellenőrizhető, hogy a feltétel teljesülése esetén létezik teljes út–párosítás (ez csak $k = 1$ esetben teljesül).

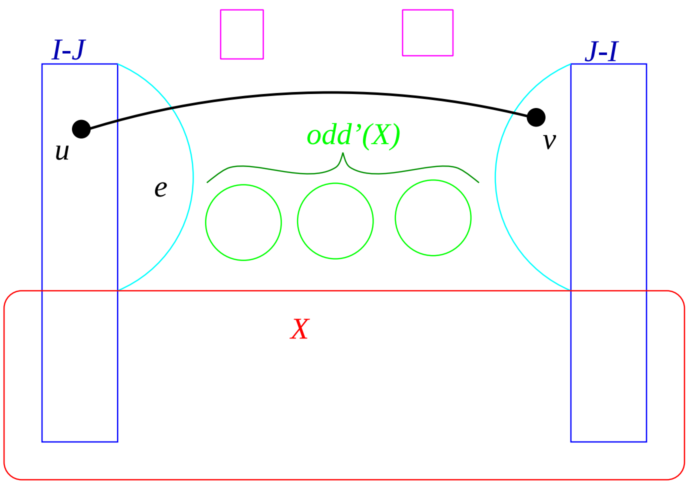
Nézzük most az általános esetet. *Pontosnak* nevezünk egy X vágást, ha $|X| = odd(X) + k$. Egy X vágás *nemtriviális*, ha $X \neq I - J$ és $X \neq J - I$. Kezdetben célunk egy pontos, nemtriviális vágás megtalálása.

$k = 0$ esetben bármely egyelemű X halmaz ilyet ad. $k > 0$ esetén tekintsünk egy olyan élet, amelynek egyik végpontja $I - J$–beli (a feltételből következik, hogy nem lehet 0-adfokú pont $I \Delta J$–ben). Ha e elhagyása után a feltétel továbbra is teljesül, akkor az élszám szerinti indukció miatt készen vagyunk, ha nem teljesül, akkor a következő két eset valamelyike áll fenn:



3a.ábra

$$|X| \geq odd(X) + k,\ |X| < odd(X) + k + 1 \implies |X| = odd(X) + k$$



3b.ábra

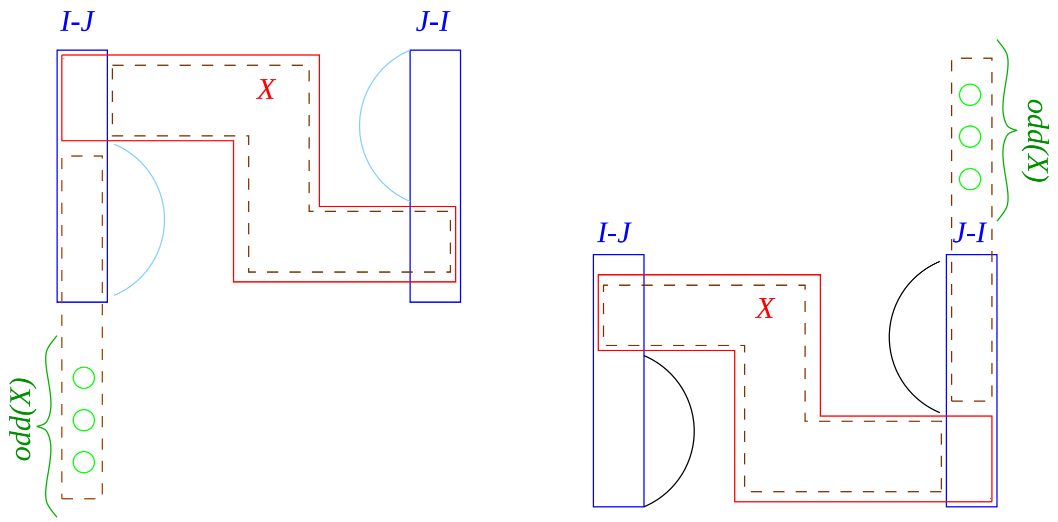
$$|X| < odd'(X) + k,\ |X + u| \geq odd'(X) + k \implies |X + u| = odd'(X) + k$$

Hasonlóan adódik $|X + v| = odd'(X) + k$

Az első esetben ha X triviális vágás, akkor $X + u$ már nem az, és szintén pontos, a második esetben pedig $X + u$ vagy $X + v$ egyike nemtriviális, feltéve, hogy nem a következő teljesül: $k = 1,\ X = \emptyset$. Ha ekkor van u–nak vagy v–nek más éle, akkor az élszám szerinti indukció szerint kész vagyunk, ha nincs, akkor viszont könnyen látható módon $I \cap J$–ben teljesülni fog $k = 0$–ra a vágásfeltétel, vagyis az élszámra vonatkozó indukció szerint megint készen leszünk, hisz $I - J$ és $J - I$ között csak az e él halad, és $I \cap J$–ben teljes (út–)párosítás létezése a kérdés.

Feltehetjük, hogy $odd(X)$ minden komponense faktorkritikus, hiszen egy komponens egy maximális gátját X–hez véve újabb pontos, nemtriviális vágást kapunk. Feltehetjük azt is hasonlóképpen, hogy X elhagyása után nem keletkeznek páros komponensek.

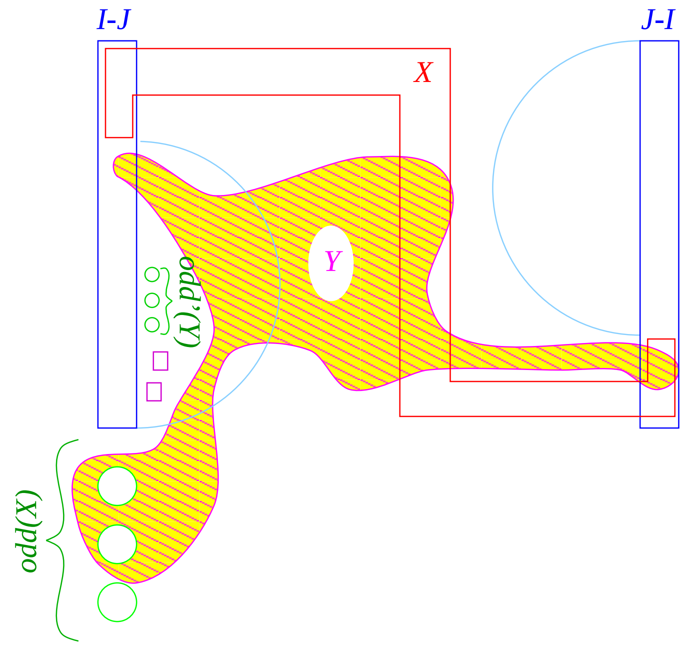
Húzzuk most össze $odd(X)$ minden egyes komponensét egy ponttá! Ezután is $odd(X)$ jelöli ezeket a pontokat. Bal oldalnak nevezzük az $odd(X)$, $X - (I - J)$, $(I - J) - X$, és az $I - J$–ből $G - X$–ben úton elérhető pontok által feszített részgráfot, jobb oldalnak pedig az $odd(X)$, $X - (J - I)$, $(J - I) - X$, és a $J - I$–ből $G - X$–ben úton elérhető pontok által feszített részgráfot. A 4.ábra szemlélteti ezeket.



4.ábra

3.17. Állítás. *A bal oldalon az $I' - J' = (I - J) - X \cup odd(X)$ és a $J' - I' = X - (I - J)$ terminális ponthalmazokkal létezik teljes út–párosítás.*

Biz. $|I'| = |J'|$ teljesül az X vágás pontossága miatt. $|X| > k$ esetén $odd(X) \geq 1$, ami szerint az $|I \cap J|$–re vonatkozó indukció alkalmazható. $|X| = k$ esetén, ha $X \cap (I \cap J) \neq \emptyset$, akkor ismét alkalmazható az $|I \cap J|$–re vonatkozó indukció, ha $X \cap (I \cap J) = \emptyset$, akkor a nemtrivialitás miatt $(I - J) \cap X \neq \emptyset$ és $(J - I) \cap X \neq \emptyset$, és ekkor alkalmazható az élszám szerinti indukció. Tehát az indukció szerint ha a bal oldalon minden Y vágásra $|Y| \geq odd'(Y) + k - |(I - J) \cap X| + odd(X)$, akkor létezik a bal oldalon az új terminális halmazokra vonatkozóan teljes út–párosítás (odd' a bal oldali gráfban jelenti egy vágásra vonatkozóan a megfelelő komponenseket, illetve azok számát is).



5.ábra

Tegyük fel, hogy létezik Y bal oldali vágás, hogy $|Y| < odd'(X) + k - |(I - J) \cap X| + odd(X)$ (5.ábra). Ebből adódik, hogy

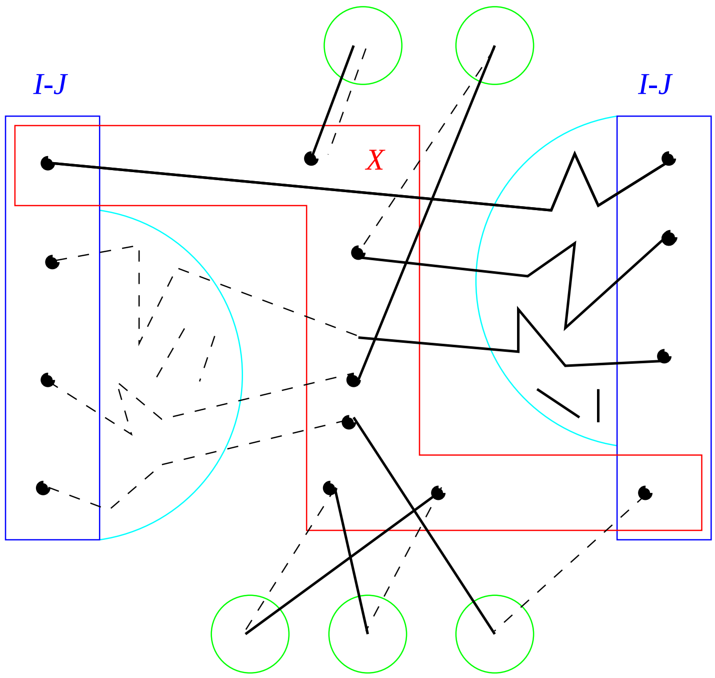
$$|Y| + |(I-J) \cap X| - |odd(X) \cap Y| > odd'(Y) + odd(X) - |odd(X) \cap Y| + k$$

Ez viszont azt jelenti, hogy a $Z = ((I-J) \cap X) \cup (Y - odd(X))$ az $odd(X)$-komponensek visszafújása után is sértő lenne (hiszen az egyenlőtlenség jobb oldalan szereplő páratlan komponensek mind megkeletkeznek), feltéve, hogy Z vágás. Az $(I-J) \cap X$–ből $J-I$–be vezető G–beli utakon Z-nek nyilván van pontja. Az $(I-J) - X$–ből $J-I$–be vezető utaknak pedig van X–beli pontjuk, nade ezen utak első X–beli pontjukig vezető részükön pedig a bal oldali gráfban van Y–beli pont, és ez az $odd(X) \cap Y$ pontok elhagyása után sem változhat, hiszen ezen pontokból csak közvetlen élek vezetnek X–be, tehát Z vágás G–ben. $\square$

3.18. Állítás. *A jobb oldalon az $J' - I' = J - I - X \cup odd(X)$ és a $I' - J' = X - (J - I)$ terminális ponthalmazokkal létezik teljes út–párosítás.* $\square$

3.19. Állítás. *A bal és jobb oldali teljes út–párosítások uniójából az $odd(X)$-komponensek visszafújása után az eredeti gráf egy teljes út–párosítása könnyen adódik.*

Biz. Jelölje M_1 a bal oldali teljes út–párosítást, M_2 pedig a jobb oldalit. Legyen M e kettő uniója úgy, hogy esetleges kettős éleit megtartjuk. Az $odd(X)$–komponensek visszafújása után ha egy adott komponensnek az M csak egy pontját fedi, akkor a komponens maradék pontjai a faktorkritikusság miatt kipárosíthatók, ha út megy át a komponensen, amely két különböző pontban megy be a komponensbe, akkor a 3.14.Tétel szerint létezik út ezen két pont között úgy, hogy a komponens maradék pontjai kipárosíthatók. Az $I \cap J$–ben keletkező esetleges páros körök minden második élét kihagyva a $G = (V, E)$ teljes út–párosítását kapjuk. (ld. 6. ábra) $\square$



6.ábra

Ezzel feltételünk elégséges voltát is beláttuk. $\square$

3.20. Tétel. **(Maximális út–párosítás formula 2.)**

$$\max_{M \text{ út-páros.}} val(M) = |I \cap J| + \min_{X \text{ vágás}} ((X) - odd(X))$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $|I| = l \geq k = |J|$, $\min_{X \text{ vágás}}((X) - odd(X)) = m$. Egészítsük ki $J - I$–t $l - k$ darab ponttal, amelyek minden I–beli ponttal legyenek éllel összekötve. $I \cap J$–t pedig egészítsük ki $k - m$ darab ponttal ($k \geq m$ nyilván teljesül), amelyek minden $V = I \cup J$–beli ponttal legyenek összekötve, ezen kívül az összes új pontot is kössük össze egymással. Ezzel $(l - k) + (k - m) = l - m$ új pontot vettünk hozzá a gráfunkhoz. Jelölje G' az így kapott gráfot. Ha a G' egy Y vágása nem tartalmazza az új pontok legalább egyikét, akkor tartalmaznia kell az új terminális halmazok egyikét teljes egészében, és könnyen látható módon igaz lesz: $|Y| - odd(Y) \geq l$. G egy vágásához hozzávéve az új pontokat G'-nek egy vágását kapjuk. Ezek szerint G'–ben $\min_{Y \text{ vágás}} |Y| - odd(Y) = m + (l - - m) = l$, vagyis teljesül a teljes út–párosítás létezésének szükséges és elégséges feltétele, tehát létezik M teljes út–párosítás, amelynek értéke $val(M) = |I| = = |(I \cap J) \cup \{\text{új nemterminális pontok}\}| + l = |I \cap J| + k - m + l$.

3.21. Állítás. *$E \cap M$ maximális út–párosítás G-ben.*

Biz. Mivel az új pontok benne vannak G' egy pontos Z vágásában, ezért M nem használ új éleket, hisz azok mind Z–n belül vannak. Tehát minden egyes új metszetbeli pont elhagyása után kettővel csökken az út–párosítás értéke, az új terminális pontok elhagyása után pedig eggyel-eggyel. Eszerint $val(E \cap M) =$ $= (|I \cap J| + k - m + l) - 2(k - m) - (l - k) = |I \cap J| + m = |I \cap J| + \min_{X \text{ vágás}}(|X| -$ $- odd(X))$ □

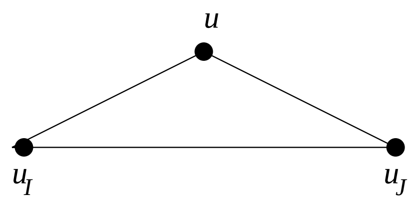
Az előző két tétel érdekessége, hogy speciális esetként tartalmazza a Hall-tételt, a Kőnig-tételt, Tutte tételét és a Berge-Tutte-formulát.

Ha G páros gráf, és az I, J halmaz a két színosztálya, akkor a maximális út–párosítás a maximális párosítással azonos. A $G = (I \cup J, E)$ egy X vágása éppen az élek egy lefogó ponthalmaza, ekkor $|I \cap J| = odd(X) = 0$, és tételünk azt állítja, hogy a maximális út–párosítás értéke (itt elemszáma) egyenlő a minimális lefogó ponthalmaz elemszámával, vagyis megkaptuk a Kőnig-tételt.

A Hall-tétel pedig úgy adódik, hogy a 3.16.Tétel egy sértő X vágására $k >$ $> |X| = |X \cap I| + |X \cap J| \implies k - |X \cap J| = |X - J| > |X \cap I| = N(X - J)$. És fordítva: $Y \subseteq I$ Hall-feltételt sértő halmazra: $N(Y) \cup (I - J)$ vágás megsérti a mi feltételünket.

$I = J = V$ esetén maximális párosítás egyben maximális út–párosítás is, melynek értéke az élszám kétszerese, hiszen ekkor $M = M'$. A 3.20.Tétel ekkor éppen a Berge-Tutte-formulát adja.

Most megmutatjuk, hogy a Menger–tétel hogyan fogalmazható bele az út–párosítások témakörébe. $|I - J| = |J - I| = k$ esetén a $G = (V, E)$ gráfhoz készítsük el a $G' = (V', E')$ gráfot: minden $u \in I \cap J$ pontra vegyünk egy u_I és egy u_J extrapontot. $I' = I \cup \{u_I : u \in I \cap J\}$, $J' = J \cup \{u_J : u \in I \cap J\}$. $E' = E \cup \{u_I u_J, u_I u, u_J u : u \in I \cap J\}$.



7.ábra

3.22. Állítás. *G–ben akkor és csak akkor létezik k darab pontdiszjunkt út $I - J$ és $J - I$ között, ha G'–ben létezik teljes út–párosítás.* □

A 3.16.Tétel szerint G'–ben akkor és csak akkor létezik teljes út–párosítás, ha minden X vágás elemszáma legalább $|I' - J'| + odd(X) = |I - J| + |I \cap J| +$ $+ odd(X) = |I| + odd(X)$.

3.23. Menger tétele. *$I-J$ és $J-I$ között akkor és csak akkor létezik k darab pontdiszjunkt út, ha G minden Y vágására $|Y| \geq k$.*

Könnyen látható, hogy a Menger-tétel feltételéből következik, hogy G'–ben minden X vágásra

$$|X| - odd(X) \geq k + |I \cap J| = |I - J| + |I \cap J| = |I| \qquad (3)$$

hiszen egy X vágásban egy $odd(X)$ komponens u pontjainak u_I megfelelőit X–ből kivéve az $|X| - odd(X)$ érték nem növekszik, és ezek után elképzelhető az $|X| - -odd(X)$–et minimalizáló vágás úgy, hogy X az u_I és u_J pontok közül pontosan az egyiket tartalmazza, és ebből kifolyólag $odd(X) = 0$. Vagyis a Menger–feltételből csakugyan következik (3). És hasonló meggondolásokkal az is könnyen belátható, hogy a Menger–tétel feltétele is következik a G'–beli teljes út–párosítás létezésére vonatkozó vágásfeltételből.

4. Az út–párosítás poliéder

Az eddigiek alapján nem meglepő, hogy az út–párosítás–vektorok konvex burkának leírása a párosítás poliéder tétel általánosítását fogja adni. Cunningham és Geelen erre vonatkozó eredményeit foglaljuk a következőekben össze.

A poliéderes kombinatorikában szokásos jelöléseket fogjuk használni. $x \in \mathbb{R}^B$–re és $C \subseteq B$–re $x(C)$ jelölje a következő összeget: $\sum(x_j : j \in C)$. $G = (V, E)$ gráfra és $S \subseteq V$ halmazra jelölje $\gamma(S)$ (vagy $\gamma_G(S)$) G azon éleit, amelyeknek mindkét végpontja S–ben van. $\delta(S)$–sel jelöljük azon élek halmazát, amelyeknek pontosan az egyik végpontjuk van S–ben. Irányított $\vec{G} = (V, \vec{E})$ gráf esetén $\rho(S)$ jelöli az S–be belépő éleket, azaz $\rho(S) = \{uv \in \vec{E} : u \notin S, v \in S\}$, $\delta(S)$ pedig az S–ből kilépő éleket, azaz $\delta(S) = \{uv \in \vec{E} : u \in S, v \notin S\}$.

V egy S részhalmazára jelölje $G \circ S$ azt a gráfot, amelyet úgy kapunk G–ből, hogy S pontjait egy ponttá húzzuk össze, amit majd szintén S–sel jelölünk.

Jelöljük $\mathcal{M}(G; I, J)$–vel (vagy néha csak $\mathcal{M}$–mel) a G út–párosítás–vektorait, és $conv(\mathcal{M})$–mel pedig az út–párosítás–vektorok konvex burkát!

A következő tétel általánosítja Edmonds párosítás poliéder tételét.

Adott $I \subseteq V$–re és $v \in V$–re legyen $I_v = |I \cap \{v\}|$, azaz $I_v = 1$, ha $v \in I$, és $I_v = 0$, ha $v \notin I$.

4.1. Tétel. **(Út–párosítás poliéder tétel)** *$conv(\mathcal{M}(G;I,J))$ azonos a következő egyenlőtlenségeket kielégítő $x \in \mathbb{R}^E$ vektorok halmazával:*

$$
\begin{aligned}
x(\delta(v)) &\leq I_v + J_v && (v \in V) && (4)\\
x(\gamma(S)) &\leq |S \cap J| && (I - J \subseteq S \subseteq I) && (5)\\
x(\gamma(S)) &\leq |S \cap I| && (J - I \subseteq S \subseteq J) && (6)\\
x(\gamma(S)) &\leq |S| - 1 && (S \subseteq I \cap J,\ |S| \text{ páratlan}) && (7)\\
x &\geq 0. && && (8)
\end{aligned}
$$

A tételt — majd valamivel általánosabb alakban — később bizonyítjuk. Cunninghamék azt is belátták, hogy az előző lineáris egyenlőtlenség–rendszer teljesen duálisan egészértékű (TDI).

A tétel egy fontos következménye, hogy létezik polinomiális algoritmus a maximális súlyú út–párosítás megtalálására. Aminek egy további következménye az $A[I,J]$ mátrixok rangjának polinomiális meghatározása, aminek segítségével Cunningham és Geelen erősen polinomiális algoritmust adott a párosítás poliéder szeparációs problémájára. Ez az első erősen polinomiális ilyen algoritmus, bár korábban is ismert volt polinomiális algoritmus. Érdekesség, hogy Cunningham és Geelen ebből az irányból talált rá az út–párosításokra. Később ismertetjük röviden az idevágó eredményeket.

4.2. Tétel. *A maximális súlyú út–párosítás megtalálható polinomidőben.*

Bizonyítás. Az előző tétel következményeként bizonyítjuk ezt a tételt, felhasználva Grötschel, Lovász és Schrijver híres eredményét [8], miszerint a szeparációs probléma és az optimalizáció ekvivalensek. Megmutatjuk, hogy a szeparációs probléma, vagyis annak eldöntése, hogy egy adott $\hat{x} \in \mathbb{R}^E$ vektor eleme-e $conv(\mathcal{M})$–nek, és ha nem, akkor egy elválasztó hipersík megadása megoldható polinomidőben.

Az előző tétel szerint elég eldöntenünk, hogy a (4), (5), (6), (7), (8) típusú egyenlőtlenségek közül teljesíti-e mindet az $\hat{x}$. Az (4) és (8) típusúakra ezt egyszerűen végignézhetjük, mert kevés van belőlük ($|E| + |V|$ darab).

Most nézzük a (5) alatti egyenlőtlenségeket. Ezekből már nagyon sok van, tehát valami ügyes trükkel kellene ezekről döntenünk. Nyilván elég a következőt meghatároznunk:

$$\min\{|S \cap J| - \hat{x}(\gamma(S)) : I - J \subseteq S \subseteq I\}. \qquad (9)$$

A $\sum_{v \in S} \hat{x}(\delta(v)) = \hat{x}(\delta(S) + 2\hat{x}(\gamma(S))$ azonosság felhasználásával:

$$\begin{aligned}
&\min\{|S \cap J| - \hat{x}(\gamma(S)) : I - J \subseteq S \subseteq I\} = \\
&= \frac{1}{2}\min\{2 \cdot |S \cap J| - \sum_{v \in S} \hat{x}(\delta(v)) + \hat{x}(\delta(S) : I - J \subseteq S \subseteq I\} = \\
&= \frac{1}{2}\min\{\hat{x}(\delta(S)) + \sum_{v \in S}(2 - \hat{x}(\delta(v)) : I - J \subseteq S \subseteq I\} - \frac{1}{2} \cdot |I - J|,
\end{aligned}$$

ami szerint nekünk elég a $\min\{\hat{x}(\delta(S)) + \sum_{v \in S}(2 - \hat{x}(\delta(v)) : I - J \subseteq S \subseteq I\}$–t meghatározni, amit egy folyamprobléma segítségével teszünk meg:

Vegyünk fel egy új s forráspontot és egy új t nyelőt, a vw élek kapacitását pedig definiáljuk a következőképp:

$$c_{vw} = \begin{cases} \hat{x}_{vw}, & \text{ha } v, w \in I \cup J \\ 2 - \hat{x}(\delta(v)), & \text{ha } v \in I,\ w = t \\ \infty, & \text{ha } v = s,\ w \in I - J \\ \infty, & \text{ha } w = t,\ v \in J - I. \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy egy minimális (s, t)–vágás a (9) egy megoldását szolgáltatja (feltehetjük, hogy az (4) és (8) típusú egyenlőtlenségeket először vizsgáltuk meg, amiből az adódik, hogy az utóbbi minimális vágást már csak nemnegatív kapacitásokkal kell meghatároznunk), és ezt a Ford–Fulkerson–algoritmussal könnyen megtalálhatjuk.

A (6) egyenlőtlenségek teljesülését ugyanígy meghatározhatjuk.

Végül a (7) egyenlőtlenségekkel is hasonlóan járhatunk el, mint az előbb, azzal a megkötéssel, hogy páratlan vágást keresünk, ami szintén megtalalálható polinomidőben Padberg és Rao tétele szerint [10]. □

Az előbbi tételben kapott algoritmus az ellipszoid–módszeren alapul, tehát nem kombinatorikai algoritmus. A próbálkozások ellenére ilyen algoritmust még nem találtak.

Most pedig kiterjesztjük az út–párosítások problémáját oly módon. hogy speciális esetként tartalmazza a matroidmetszet tételt.

Legyen N_I egy matroid az $I - J$ alaphalmazon, N_J pedig egy másik matroid a $J - I$ alaphalmazon.

4.3. Definíció. *Egy M út–párosítást függetlennek nevezünk, ha a $\{v \in I - J : M \cap \delta(v) \neq \emptyset\}$ halmaz független N_I–ben, a $\{v \in J - I : M \cap \delta(v) \neq \emptyset\}$ halmaz pedig független N_J–ben.*

Jelöljük $\mathcal{M}(G; I, J, N_I, N_J)$–vel (vagy néha csak $\mathcal{M}$–mel) a vonatkozó független út–párosításokat.

Abban az esetben, amikor N_I és N_J szabad matroid, akkor minden út–párosítás független, vagyis a maximális súlyú független út–párosítás probléma tartalmazza a korábban tekintett maximális súlyú út–párosítás problémát.

$I \cap J = \emptyset$ esetén, ha a gráf egyetlen teljes párosításból áll, akkor a probléma azonos a maximális súlyú matroidmetszet problémával, illetve a maximális elemszámú matroidmetszet problémával. Ezek szerint a következő tétel általánosítja a 4.1.Tételt, és a matroidmetszet tételt.

4.4. Tétel. *$conv(\mathcal{M}(G; I, J, N_I, N_J))$ azonos azon $x \in \mathbb{R}^E$ vektorok halmazával, amelyek teljesítik az (4), (5), (6), (7), (8) egyenlőtlenségeket és a következőket:*

$$x(\delta(A)) \leq r_I(A) \qquad (A \subseteq I - J) \tag{10}$$
$$x(\delta(A)) \leq r_J(A) \qquad (A \subseteq J - I) \tag{11}$$

Ezt a tételt fogjuk majd bizonyítani a 4.2 fejezetben.

4.5. Tétel. *A maximális súlyú független út–párosítás megtalálható polinomidőben, feltéve, hogy rendelkezésünkre áll polinomidejű függetlenségi orákulum N_I–re és N_J–re.*

Bizonyítás. A tétel a 4.4.Tétel következménye, és még annak a ténynek, hogy ilyen orákulummal [3] szerint a matroidpoliéder szeparációs problémája polinomiális. □

4.1. A párosítás poliéderről

Egy gráf pontjainak egy részhalmazát lepárosíthatónak mondjuk, ha valamely párosítás éleinek a végponthalmaza. A $Q(G)$ **párosítás poliéder** a lepárosítható részhalmazok incidenciavektorainak a konvex burka $\mathbb{R}^V$–ben. A $Q(G)$ párosítás poliédernek Balas és Pulleyblank [2]–ben megadja lineáris egyenlőtlenségekkel való leírását, de erre most nem lesz szükség. A $Q(G)$–re vonatkozó szeparációs probléma tehát az, hogy eldöntsük, egy adott $\hat{x} \in \mathbb{R}^V$ vektor eleme-e $Q(G)$–nek, és ha nem, akkor adjunk meg egy $Q(G)$–t és $\hat{x}$–t elválasztó hipersíkot. Ismert már néhány polinomiális algoritmus, ami megoldja a szeparációs problémát [5], de ezek közül még egyik sem erősen polinomiális. Cunningham és Geelen az út–párosításokra vonatkozó eredményeik következményeként megad egy erősen polinomiális algoritmust, amit most röviden vázolni fogunk. Megemlítjük még egyszer, hogy Cunningham és Geelen kutatásainak kezdetben ez a probléma volt a fő motivációja.

Legyen A egy $V \times V$–es mátrix. $\mathcal{F}$ legyen a következő halmaz: $\{I \subseteq V : A[I, I]$ nemszinguláris$\}$. (A 3.3.Tétel szerint ha A a G Tutte–mátrixa, akkor $\mathcal{F}$ éppen a lepárosítható ponthalmazok rendszere.) Legyen $A' = (A, I)$, ahol I a $|V| \times |V|$–es identitásmátrix. Legyenek az I oszlopai $V' = \{v' : v \in V\}$ halmaz elemeivel indexelve, és $J \subseteq V$–re J' legyen a $\{v' : v \in J\}$ halmaz. Világos, hogy $A[J, J]$ akkor és csak akkor nemszinguláris, ha $B = J \cup (V' - J')$ oszlopok A' oszlopainak egy bázisát adják, azaz lineáris kombinációjukként előáll A' összes oszlopa. Természetesen A'–nek nemcsak ilyen alakú bázisai vannak. Legyen $\mathcal{B} = \{B \subseteq V \cup V' :$ a B indexhalmaz A' oszlopainak egy bázisát adja$\}$. Ekkor $\mathcal{B}$ egy N matroid bázisrendszere a $V \cup V'$ alaphalmazon.

A következő tétel kulcsfontosságú az algoritmus megadásakor. Bizonyítása egyszerű meggondolásokból áll, és szükség van hozzá Edmonds matroidmetszet poliéder tételére.

4.6. Tétel. *Adott $x \in \mathbb{R}^V$–re legyen $y \in \mathbb{R}^{V \cup V'}$ a következő vektor: $y = (x, 1 - x')$. Ekkor x akkor és csak akkor áll elő $\mathcal{F}$–beli halmazok incidenciavektorainak lineáris kombinációjaként, ha y előáll $\mathcal{B}$–beli halmazok incidenciavektorainak lineáris kombinációjaként.* □

Ezen tétel következménye, hogy annak eldöntésére, hogy egy x vektor eleme-e $conv(\mathcal{F})$–nek, alkalmas egy algoritmus, ami azt dönti el, hogy egy y vektor eleme-e $conv(\mathcal{B})$–nek.

Amikor x nem eleme a poliédernek, akkor egy elválasztó hipersíkot is meg kell találnunk, és ez is könnyen megkapható, ha van y–t $conv(\mathcal{B})$–től elválasztó hipersíkunk: $ax + b(1 - x') \leq \alpha \Leftrightarrow (a - b)x \leq \alpha + b \cdot 1$, ahol $a, b, 1 \in \mathbb{R}^V, \alpha, b \cdot 1 \in \mathbb{R}$.

Cunningham [3]–ban megad egy erősen polinomiális algoritmust a matroid poliéder szeparációs problémájára, amit most $conv(\mathcal{B})$–re alkalmazva megkapjuk, amit kerestünk, feltéve, hogy abban az esetben, amikor A egy G gráf Tutte–mátrixa, el tudjuk dönteni, hogy $V \cup V'$ egy részhalmaza független-e az N matroidban. Könnyen látható, hogy a $P \cup Q'$ halmaz akkor és csak akkor független, ha az $A[V - Q, P]$ részmátrix rangja $|P|$, és erre a 3.3.Tétel és a 4.2.Tétel következményeként tényleg tudunk erősen polinomiális algoritmust.

4.2. Poliéderes bizonyítások

Ebben a fejezetben bebizonyíjuk a 4.4.Tételt, amivel az előzőek is mind bizonyítást nyernek. A bizonyítás közben — akárcsak Cunningham és Geelen — néhány más érdekes poliéderes eredményt is megfogalmazunk tételként.

Egy M független út–párosítást **alap út–párosításnak** nevezünk, ha az értéke $|I \cap J| + r(N_I) = |I \cap J| + r(N_J)$, vagyis az út–párosítás $r(N_I) = r(N_J)$ darab $I - J$–ből $J - I$–be vezető útból áll, és az ezen utak által nem használt $I \cap J$–beli pontok mind le vannak párosítva. (Látható, hogy ha N_I és N_J szabad matroidok, akkor az alap út–párosítások éppen a teljes út–párosítások.) Jelöljük $\mathcal{M}^*(G; I, J, N_I, N_J)$–vel (vagy csak $\mathcal{M}^*$–gal) az alap út–párosítások halmazát. Szükségünk lesz az alap út–párosítások konvex burkának a következő karakterizációjára:

4.7. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ és I, J, N_I, N_J a szokásos. $r(N_I) = r(N_J) = r$ esetén $conv(\mathcal{M}^*(G; I, J, N_I, N_J))$ megegyezik azon $x \in \mathbb{R}^E$ vektorok halmazával, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenségeket:*

$$
\begin{array}{rcllr}
x(\delta(v)) & = & 2 & (v \in I \cap J) & (12) \\
x(\delta(S)) & \geq & r & (I - J \subseteq S \subseteq I) & (13) \\
x(\delta(S)) & \geq & 2 & (S \subseteq I \cap J,\ |S| \geq 3,\ |S|\ \textit{páratlan}) & (14) \\
x(\delta(A)) & \leq & r_I(A) & (A \subseteq I - J) & (15) \\
x(\delta(A)) & \leq & r_J(A) & (A \subseteq J - I) & (16) \\
x(\delta(I - J)) & = & r & & (17) \\
x(\delta(J - I)) & = & r & & (18) \\
x & \geq & 0. & & (19)
\end{array}
$$

Ezen tétel bizonyításában fel fogjuk használni a következő tételt, ami $I = J$ speciális esetben a "Fractional Matching Polihedron Theorem", ami szerint a teljes párosítás poliéder relaxációjából származó poliéder fél–egész, azaz minden extremális pontjának a koordinátái egészek vagy $\frac{1}{2}$ törtrészűek.

4.8. Tétel. *Jelölje P a (12), (13), (15), (16), (17), (18), (19) egyenlőtlenségek által definiált poliédert. P egész poliéder, azaz minden csúcsának minden koordinátája egész szám.*

Bizonyítás. Egy N_I' matroidot definiálunk $\vec{E}$–n a következőképp: N_I' bázisai legyenek a következő feltételeket kielégítő $A \subseteq \vec{E}$ halmazok:

- A–beli ív töve nem lehet $J - I$–ben,
- $I \cap J$ minden egyes pontja pontosan egy A–beli ív töve,
- $I - J$ minden egyes pontja legfeljebb eg A–beli ív töve,
- azok az $I - J$-beli pontok, amelyek A–beli élek tövei, bázist alkotnak N_I–ben.

N_I' matroid, hiszen néhány 1-rangú partíciós matroid, és az N_I–ből, annak megfelelő elemeinek a megtöbbszörözésével előálló matroid direkt összege!

Definiáljuk N_J'–t hasonlóképpen, felcserélve a definícióban a "tő" és "fej" szavakat, és az I–t J–vel, azaz N_J' bázisai legyenek a következő feltételeket kielégítő $A \subseteq \vec{E}$ halmazok:

- A–beli ív feje nem lehet $I - J$–ben,
- $I \cap J$ minden egyes pontja pontosan egy A–beli ív feje,

- $J-I$ minden egyes pontja legfeljebb eg A–beli ív feje,
- azok az $J-I$-beli pontok, amelyek A–beli élek fejei, bázist alkotnak N_J–ben.

A matroidmetszet poliéder tétel bázisokra vonatkozó alakjából következik, hogy az alábbi egyenlőtlenségeket kielégítő $y \in \mathbb{R}^{\vec{E}}$ vektorok által alkotott Q poliéder egész poliéder.

$$\begin{aligned}
y(\delta(v)) &= 0 && (v \in J-I)\\
y(\rho(v)) &= 0 && (v \in I-J)\\
y(\delta(v)) &= 1 && (v \in I\cap J)\\
y(\rho(v)) &= 1 && (v \in I\cap J)\\
y(\delta(A)) &\le r_I(A) && (A \subseteq I-J)\\
y(\rho(A)) &\le r_J(A) && (A \subseteq J-I)\\
y(\delta(I-J)) &\le r &&\\
y(\rho(J-I)) &\le r &&\\
y &\ge 0 &&
\end{aligned}$$

Definiáljunk egy $\rho : \mathbb{R}^{\vec{E}} \to \mathbb{R}^E$ függvényt a következő módon: $(\rho(y))_{uv} = = y_{uv} + y_{vu}$, ahol $uv \in E$ (itt az uv–edik koordinátáját adtuk meg a $\rho(y) \in \mathbb{R}^E$ pontnak). Jelölje $\rho(Q)$ a $\{\rho(y) : y \in Q\}$ halmazt.

4.9. Állítás. *$\rho(Q)$ egész poliéder.*

Biz. $x \in \rho(Q)$–ra igaz, hogy $x = \rho(y)$ valamely $y \in Q$–ra. Ha y előáll Q–beli egész pontok lineáris kombinációjaként, akkor a ρ linearitása miatt x is előáll az előző pontok képeinek lineáris kombinációjaként, amelyek $\rho(Q)$–nak egész pontjai!

Ezek után tételünk belátásához elég az alábbit bebizonyítanunk:

4.10. Állítás. $P = \rho(Q)$

Biz. $\rho(Q) \subseteq P$: adott $x \in \rho(Q)$–ra legyen $y \in Q$ olyan, hogy $\rho(y) = x$. Ekkor tetszőleges olyan S–re, amelyre $I - J \subseteq S \subseteq I$ igaz, hogy

$$x(\delta(S)) = y(\delta(S)) + y(\rho(S)) = y(\delta(S)) - y(\rho(S)) = \sum_{v\in S}(y(\delta(v)) - y(\rho(v))) = r,$$

vagyis x kielégíti a (13) alatti egyenlőtlenségeket. Nagyon könnyen látható, hogy x az összes többi P–t definiáló egyenlőtlenséget és egyenlőséget is kielégíti.

$P \subseteq \rho(Q)$: Legyen $x \in P$. Jelölje $\mathcal{P}$ a G $I-J$–ből $J-I$–be vezető élsorozatainak a halmazát. $uv \in E$ élre jelöljük $\mathcal{P}_{uv}$–vel azokat a $\mathcal{P}$–beli élsorozatokat, amelyek használják az uv élet. $x : E \to \mathbb{R}$ kapacitásfüggvénnyel a (13), (15) egyenlőtlenségek szerint a minimális $(I-J, J-I)$–vágás értéke r, és így a Ford–Fulkerson–tétel szerint létezik $\lambda \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}}$ nemnegatív vektor, amely egy maximális $(I-J, J-I)$–folyamot ad meg, így $\lambda(\mathcal{P}) = r$, és $\lambda(\mathcal{P}_{uv}) \leq x_{uv}$.

Legyen $f \in \mathbb{R}^{\vec{E}}$ az az $(I-J, J-I)$–folyam $\vec{G}$–ben, amelyik a λ "path–flow"–ból a következőképp adódik: $uv \in \vec{E}$–re $f_{uv} = \sum \lambda_{\hat{P}}$, ahol az összegzés azon $\hat{P} \in \mathcal{P}$–kre történik, amelyekben az u pont megelőzi a v–t. $y \in \mathbb{R}^{\vec{E}}$ legyen a következő:

$$y_{uv} = f_{uv} + \frac{1}{2}(x_{uv} - (f_{uv} + f_{vu})) \qquad uv \in \vec{E}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $y \in Q$, és $\rho(y) = x$.

Ezzel be is láttuk, amit akartunk. □

Cunningham és Geelen 4.7.Tételre adott bizonyítása lépésről lépésre követi Schrijvernek [11]–ben megadott, az Edmonds–féle teljes párosítás poliéderre vonatkozó bizonyítását. Ugyanilyen technikákkal talalkozhatunk [1]–ben is.

A bizonyítás felhasználja a párosítás polieder tételt, de újabb indukciós feltevésekkel ez könnyen elkerülhető lenne.

A 4.7.Tétel bizonyítása. Jelölje $P'(G; I, J, N_I, N_J)$ (vagy csak P') a tétel állításában szereplő egyenlőtlenségek által meghatározott poliédert.

Világos, hogy az alap út–párosítások kielégítik az összes egyenlőtlenséget, így $conv(\mathcal{M}^*) \subseteq P'$.

$P' \subseteq conv(\mathcal{M}^*)$ bizonyításához elég belátnunk, hogy P' egész poliéder, hiszen a tétel sok egyenlőtlenségét kielégítő egészértékű x vektor csak út–párosítás–vektor lehet.

Ezt a G pontszámára vonatkozó teljes indukcióval látjuk be. Amennyiben G egypontú, az állítás nyilvánvlóan igaz.

Legyen $x' \in \mathbb{R}^E$ a P' egy csúcsa. Ha x' a (14) egyenlőtlenségek közül mindegyiket szigorú egyenlőtlenséggel teljesíti, akkor az előző tétel szerint x' egész. Máskülönben létezik $S \subseteq I \cap J$, $|S| \geq 3$, $|S|$ páratlan halmaz, hogy $x'(\delta(S)) = 2$.

Húzzuk ekkor össze az S halmazt egy ponttá, azaz legyen $G_1 = G \circ S$, és legyen $I_1 = (I - S) \cup \{S\}$, $J_1 = (J - S) \cup \{S\}$, és $x^{(1)}$ jelölje az x' G_1–re való megszorítását. Jelölje P_1' $P'(G_1; I_1, J_1, N_I, N_J)$–t, és $\mathcal{M}_1^*$ jelölje $\mathcal{M}_1^*(G_1; I_1, J_1, N_I, N_J)$–t. Könnyen ellenőrizhető, hogy $x^{(1)} \in P_1'$. Az indukciós feltevésből következik, hogy $conv(\mathcal{M}_1^*) = P_1'$, ami szerint létezik egy nemnegatív $\lambda^{(1)} \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}_1^*}$ vektor,amelyre $\lambda^{(1)}(\mathcal{M}_1^*) = 1$, és

$$x^{(1)} = \sum_{M \in \mathcal{M}_1^*} \lambda_M^{(1)} \psi^M \tag{20}$$

Legyen $T = V - S$, és legyen $G_2 = G \circ T$, és jelölje $\mathcal{M}_2^*$ a G_2 párosításainak a halmazát, $x^{(2)}$ pedig az x' G_2–re való megszorítását. Egyszerűen megmutatható a párosítás poliéder tétel alapján, hogy ekkor létezik egy nemnegatív $\lambda^{(2)} \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}_2^*}$ vektor, amelyre $\lambda^{(2)}(\mathcal{M}_2^*) = 1$, és

$$x^{(2)} = \sum_{M \in \mathcal{M}_2^*} \lambda_M^{(2)} \psi^M \tag{21}$$

Ha ezután G alap út–párosításairól beszélünk, akkor azt (I, J, N_I, N_J)–re vonatkozóan értjük, ha G_1–ről, akkor azt (I_1, J_1, N_I, N_J)–re vonatkozóan.

Ekkor legyen $x' = \sum \alpha_i M_i$, ahol M_i egy G_1–beli alap út–párosítás és két (esetleg egybeeső) G_2–beli teljes párosítás uniója, és ezen előző alap út–párosítás és két teljes párosítás ugyanazon két (esetleg egybeeső) S–re illeszkedő élt tartalmazza, a szummáció az összes ilyen M_i–re történik, és α_i legyen a következő, ahol β_{i1} az M_i G_1–beli részének együtthatója (20)–ben, β_{i2} pedig M_i G_2–beli részének együtthatója (21)–ban:

$$\alpha_i = \frac{\beta_{i1} \cdot \beta_{i2}}{x'(e)}$$

Mivel két teljes párosítás incidenciavektorának az átlaga az M_i G_2–be eső része, ezért x'–t előállítottuk út–párosítás–vektorok konvex kombinációjaként (egyszerűen ellenőrizhető, hogy az α_i–k csakugyan konvex kombinációt határoznak meg), de mivel x' extremális pont, ez csak úgy lehet, ha ő maga is út–párosítás–vektor. Ezzel a tételünket be is láttuk. □

A 4.7.Tétel egy másik következményeként kapjuk a $conv(\mathcal{M}^*)$ egy újabb leírását:

4.11. Következmény. *$conv(\mathcal{M}^*(G; I, J, N_I, N_J))$ azonos azon $x \in \mathbb{R}^E$ vektorok halmazával, melyek teljesítik a következő egyenlőtlenségeket:*

$$\begin{aligned}
x(\delta(v)) &= 2 && (v \in I \cap J) && (22)\\
x(\gamma(S)) &\leq |S \cap J| && (I - J \subseteq S \subseteq I) && (23)\\
x(\gamma(S)) &\leq |S| - 1 && (S \subseteq I \cap J,\ |S| \text{ páratlan}) && (24)\\
x(\delta(A)) &\leq r_I(A) && (A \subseteq I - J) && (25)\\
x(\delta(A)) &\leq r_J(A) && (A \subseteq J - I) && (26)\\
x(\delta(I - J)) &= r && && (27)\\
x(\delta(J - I)) &= r && && (28)\\
x &\geq 0. && && (29)
\end{aligned}$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy az út–párosítás–vektorok mind teljesítik a fentieket, vagyis $conv(\mathcal{M}^*)$ minden pontjára is igazak.

Tegyük fel, hogy $x \in \mathbb{R}^E$ teljesíti a fenti egyenlőtlenségeket. Belátjuk, hogy ekkor teljesíti a 4.7.Tétel feltételeit, és így $x \in conv(\mathcal{M}^*)$ igaz.

Adott $S \subseteq I$–re, amelyre $I - J \subseteq S$, igaz, hogy

$$\begin{aligned}
x(\delta(S)) &= \sum_{v \in S} x(\delta(v)) - 2x(\gamma(S)) = \\
&= 2|S \cap J| + r - 2x(\gamma(S)) \geq \\
&\geq 2|S \cap J| + r - |S \cap J| \\
&= r,
\end{aligned}$$

tehát x teljesíti a (13) alatti egyenlőtlenségeket. Hasonlóan, ha S az $I \cap J$ egy páratlan elemszámú részhalmaza, akkor

$$\begin{aligned}
x(\delta(S)) &= \sum_{v \in S} x(\delta(v)) - 2x(\gamma(S)) = \\
&= 2|S| - 2x(\gamma(S)) \geq \\
&\geq 2|S| - 2(|S| - 1) = \\
&= 2,
\end{aligned}$$

tehát x kielégíti a (14) egyenlőtlenségeket is. Világos, hogy x kielégíti a 4.7.Tétel többi feltételét is. Ezzel be is láttuk, amit akatunk. □

Most végre bebizonyítjuk a 4.4.Tételt az előző következmény segítségével, és ezzel minden korábbi tételünk is bizonyítást nyer.

A 4.4.Tétel bizonyítása. Világos, hogy a (4), (5), (6), (7), (8), (10), (11) egyenlőtlenségek mind igazak a független út–párosításokra, és így a $conv(\mathcal{M})$ pontjaira is.

Tegyük fel, hogy $x \in \mathbb{R}^E$ teljesíti a tétel feltételeiben szereplő összes egyenlőtlenséget.

Most definiálunk egy $G' = (V', E')$ segédgráfot, amelynek alap út–párosításai és a $G = (V, E)$ út–párosításai között igen szoros kapcsolat fog fennállni.

Készítsük el az összes $v \in V$ pont $\tilde{v}$ másolatát, és ezután $\tilde{S}$ jelentse az $S \subseteq V$ halmazbeli pontok másolatát. Hasonlóan $F \subseteq E$–re $\tilde{F}$ legyen a következő halmaz: $\{\tilde{u}\tilde{v} : uv \in F\}$. Legyen $V' = V \cup \tilde{V}$, $E' = E \cup \tilde{E} \cup \{v\tilde{v} : v \in V\}$. (Magyarán eltoltuk a G gráfot, és pluszban összekötöttünk minden egyes pontot a képével.)

Legyen $I' = I \cup \tilde{J}$ és $J' = J \cup \tilde{I}$. Jelölje $\tilde{N}_I$ és $\tilde{N}_J$ az N_I és N_J matroidok megfelelő másolatát, és legyen $N_{I'}$ az N_I és $\tilde{N}_J$ direkt összege, $N_{J'}$ pedig az N_J és $\tilde{N}_I$ direkt összege.

Az elkövetkezőkben $\mathcal{M}$–mel jelöljük $\mathcal{M}(G; I, J, N_I, N_J)$–t, $\mathcal{M}^*$–gal pedig $\mathcal{M}^*(G'; I', J', N_{I'}, N_{J'})$–t!

4.12. Állítás. *Ha létezik $y' \in conv(\mathcal{M}^*) \subseteq \mathbb{R}^{E'}$, amelynek az E–re való megszorítása y, akkor $y \in conv(\mathcal{M})$.*

Biz. Az állítást elég $conv(\mathcal{M}^*)$ y' extrém pontjaira belátnunk, amely a 4.7.Tétel szerint előáll valamely $L \in \mathcal{M}^*$ alap út-párosítás út–párosítás–vektoraként, azaz $y' = \psi^L$. Legyen $M = L \cap E$, és legyen S az M azon párosításéleinek a halmaza, amelyek L-ben nem párosításélek (hanem útélek). Ekkor $x = \frac{1}{2}(\psi^M + \psi^{M-S})$, ami szerint $x \in conv(\mathcal{M})$. Ezzel az állítást be is láttuk. □

Az Állítás szerint a Tétel bizonyításához elég x–hez megfelelő x'–t definiálni, amit most meg is teszünk.

A matroid poliéder tétel szerint az $(x(\delta(v)) : v \in I - J)$ vektor előáll az N_I független halmazai incidenciavektorainak konvex kombinációjaként. Könnyen látható, hogy létezik egy $(y_v : v \in I - J)$ vektor, mely N_I bázisainak egy konvex kombinációja, és $y_v \geq x(\delta(v))$ minden $v \in I - J$–re. Ilyen y–t kapunk, ha az x előállításában az összes független halmazt kiterjesztjük valamely bázissá, és az együtthatókat megtartjuk, aztán összevonjuk.

$x' \in \mathbb{R}^{E'}$ legyen a következő:

- $uv \in E$–re: $x'_{uv} = x_{uv}$, $x'_{\tilde{u}\tilde{v}} = x_{uv}$,
- $v \in I \cap J$–re: $x'_{v\tilde{v}} = 2 - x(\delta_G(v))$,
- $v \in I \triangle J$–re: $x'_{v\tilde{v}} = y_v - x(\delta_G(v))$

A 4.11.Következmény szerint a $conv(\mathcal{M}^*)$ az (22), (23), (24), (25), (26), (27), (28), (29) egyenlőtlenségek által van meghatározva. A bizonyításunk teljes lesz, ha megmutatjuk, hogy x' kielégíti ezeket az egyenlőtlenségeket. Konkrétan a (23)–ról és a (24)–ről fogjuk megmutatni, a többi nyilvánvalóan teljesül.

Legyen $S' \subseteq I'$ olyan, hogy $I' - J' \subseteq S'$. Ekkor S' előáll a következő alakban: $S' = S \cup \tilde{T}$, ahol $S, T \subseteq V$, és nyilván $I - J \subseteq S \subseteq I$, $J - I \subseteq T \subseteq J$. Ekkor:

$$\begin{aligned}
x'(\gamma_{G'}(S')) &= x(\gamma(S)) + x(\gamma(T)) + |I \cap S \cap T| + |J \cap S \cap T| - \\
&\quad - \sum_{v \in S \cap T} x(\delta(v)) = && (30)\\
&= x(\gamma(S)) + x(\gamma(T)) - 2x(\gamma(S \cap T)) - x(\delta(S \cap T)) + \\
&\quad + |I \cap S \cap T| + |J \cap S \cap T| \leq && (31)\\
&\leq x(\gamma(S - T)) + x(\gamma(T - S)) + |I \cap S \cap T| + |J \cap S \cap T| \leq && (32)\\
&\leq |(S - T) \cap J| + |(T - S) \cap I| + |I \cap S \cap T| + |J \cap S \cap T| = && (33)\\
&= |J \cap S| + |I \cap T| = && (34)\\
&= |J' \cap S'|, && (35)
\end{aligned}$$

ahol (31)–ból (32) a nemnegativitás miatt adódik, (32)–ből (33) az (5) és (6) figyelembevételével jön. Ezek szerint x' teljesíti a (23) egyenlőtlenségeket.

Legyen most $S' \subseteq I' \cap J'$ páratlan elemszámú részhalmaz. Legyen továbbá $S, T \subseteq V$ két olyan halmaz, hogy $S' = S \cup \tilde{T}$. Világos, hogy $S, T \subseteq I \cap J$, és $|S|$ és $|T|$ közül pontosan az egyik szám páratlan, vagyis $|S - T|$, $|T - S|$ közül is pontosan az egyik páratlan. Ekkor a (7) egyenlőtlenségek szerint:

$$x(\gamma(S-T)) + x(\gamma(T-S)) \quad \leq \quad |S-T| + |T-S| - 1. \tag{36}$$

Ekkor:

$$\begin{aligned}
x'(\gamma_{G'})) = x(\gamma(S)) + x(\gamma(T)) + |I \cap S \cap T| + |J \cap S \cap T| - \\
- \sum_{v \in S \cap T} x(\delta(v)) = \qquad\qquad\qquad\qquad & \quad (37)\\
= x(\gamma(S)) + x(\gamma(T)) - 2x(\gamma(S \cap T)) - x(\delta(S \cap T)) + \\
+2|S \cap T| \leq \qquad\qquad\qquad\qquad & \quad (38)\\
\leq x(\gamma(S-T)) + x(\gamma(T-S)) + 2|S \cap T| & \quad (39)\\
\leq |(S-T)I \cap J| + |(T-S) \cap I| + 2|S \cap T| \leq & \quad (40)\\
= |S| + |T| - 1 = & \quad (41)\\
= |S'| - 1, & \quad (42)\\
& \quad (43)
\end{aligned}$$

ahol (38)–ből (39) a nemnegativitás miatt következik, (39)–ból (40) pedig a (36) egyenlőtlenségek miatt.

Következésképpen x' kielégíti a (24) egyenlőtlenségeket is. □

5. Próbálkozások algoritmusra

Mint azt említettük már, kombinatorikus algoritmus még nem ismeretes teljesen általánosan a maximális út–párosítás meghatározására (súlyozott esetről még szó sincs), ám bizonyos speciális esetekben könnyen tudunk ilyet találni.

$I = J$ esetben, mint azt láttuk, a maximális párosítás megtalálása a kérdés, amire jól ismert az Edmonds-féle algoritmus.

$I \subseteq J$ esetben világos, hogy a maximális út–párosítás előáll olyan alakban is, hogy csak 1-hosszú utak vannak benne, azaz I–beli élek, és $J - I$–ből I–be belelógó élek. Könnyen látható, hogy az I–beli éleket 2 súllyal ellátva, a többit pedig 1 súllyal ellátva a maximális súlyú párosítás az előbb megfogalmazott út–párosítás alakkal azonos, és ennek a megtalálására is létezik jól ismert algoritmus, szintén Edmondstól.

$|I - J| = |J - I| = 1$ esetben, hogy létezik-e teljes út–párosítás, illetve ha létezik, akkor egynek a megadására könnyen találhatunk algoritmust két maximális párosítás segítségével:

Legyen $\{u\} = I - J$, $\{v\} = J - I$. Ekkor ha $|I \cap J|$ páros, akkor egy $I \cap J$–beli és egy $I \cup J$–beli teljes párosítás uniója éppen teljes út–párosítás lesz (a keletkező páros körök minden második élének az elhagyása után), és minden teljes út–párosítás fel is bontható így.

Ha $I \cap J$ páratlan, akkor $(I \cap J) \cup \{u\}$ egy teljes párosításának és $(I \cap J) \cup \{v\}$ egy teljes párosításának uniója teljes út–párosítás, és minden teljes út–párosítás elő is áll ilyen felbontásban.

A legérdekesebb eredményünk ebben a témában egy olyan algoritmus, amely arról dönt, hogy létezik-e teljes út–párosítás, feltéve, hogy $I \cap J$–ben nincs páratlan hosszúságú kör, és $|I - J| = |J - I|$ méretére nincs is megkötésünk. Tutte néhány eredményének az áttekintése után ezt fogjuk ismertetni dolgozatunk lezárásaként.

5.1. Definíció. *A $G_0 = (V_0, E_0)$ gráf egy $M \subseteq E_0$ élhalmazát 1–2–faktornak nevezzük, ha $G = (V_0, M)$ komponensei körök és egyedüli élek, és minden $v \in V_0$ pontra illeszkedik M–beli él.*

5.2. Tétel. *$G_0 = (V_0, E_0)$–ban akkor és csak akkor létezik 1–2–faktor, ha minden $X \subseteq V_0$ részhalmazra: $|N(X)| \geq |X|$, ahol $N(X)$ az X szomszédainak halmazát jelöli.*

Bizonyítás. A tételre algoritmikus bizonyítást adunk, ami egy segédgráfon lefuttatott Kőnig–algoritmus lesz páros gráf maximális párosításának megtalálására.

A $G_1 = (V_1, E_1)$ segédgráf legyen a következő: kettőzzük meg V_0 pontjait, azaz minden $v \in V_0$ mellé vegyünk egy $\tilde{v}$ pontot is. $V_1 = V_0 \cup \tilde{V_0}$. A gráf élei pedig legyenek a következőek:

- ha $uv \in E$, akkor $u\tilde{v}, \tilde{u}v \in E_1$,
- és sehol máshol nincs él.

Ez a gráf csakugyan páros gráf a V_0 és $\tilde{V_0}$ színosztályokkal.

5.3. Állítás. *G_1–ben akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha G_0–ban létezik 1–2–faktor.* □

A Kőnig–algoritmus által a G_1–ben esetlegesen megadott Hall–feltételt sértő $X \subseteq V_0$ vagy $X \subseteq \tilde{V_0}$ halmaz őseképére a G gráfban: $|N(X)| < |X|$. □

Könnyen látható, hogy az 5.2.Tételben elég csak stabil X részhalmazokra megkövetelnünk a feltétel teljesülését.

Most az előző tétel bizonyításában szereplő algoritmushoz hasonló algoritmust adunk meg speciális esetünk teljes út–párosításának a megtalálására.

Készítsünk el a $G = (I \cup J, E)$ gráfhoz egy $G_1 = (V_1, E_1)$ segédgráfot. Duplázzuk meg a $v \in I \cap J$ pontokat, és a kapott pontokat jelölje v_I és v_J. $u \in I - J$–t ezután jelöljük u_I–vel, $u \in J - I$–t pedig u_J–vel.

A segédgráf élei legyenek a következők:

- ha $u \in I,\ v \in J,\ uv \in E$, akkor $u_I v_J, u_J v_I \in E_1$,
- ha $u \in I - J,\ uv \in E$, akkor $u_I v_J \in E_1$,
- ha $v \in J - I,\ uv \in E$, akkor $u_I v_J \in E_1$,
- más él nincs.

5.4. Állítás. *$G_1 = (V_1, E_1)$–ben akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha $G = (V, E)$–ben létezik teljes út–párosítás, feltéve, hogy nincs $I \cap J$–ben páratlan hosszúságú kör.* □

Ezen eredményekből kiindulva kapjuk a következőket az út–párosításoknál gyengébb általánosított 1–2–faktor fogalomra.

5.5. Definíció. *A $G = (I \cup J, E)$ gráfban (az $I - J$, $J - I$ halmazok, mint eddig is: stabilak) egy $M \subseteq E$ élhalmazt általánosított 1–2–faktornak nevezünk, ha $G(I \cup J, M)$ komponensei körök, $I \cap J$–beli egyedüli élek, és $I - J$–ből $J - I$–be vezető utak, és az $I \cup J$ minden pontjára illeszkedik M–beli él.*

5.6. Tétel. *A $G = (I \cup J, E)$–ben akkor és csak akkor létezik általánosított 1–2–faktor, ha $|I| = |J|$, és minden $X \subseteq J$ ponthalmazra $|N(X)| \geq |X|$.*

A tétel bizonyítása az előzőekhez hasonló, és itt is elég csak a stabil X részhalmazokra megkövetelni a feltétel teljesülését.

Amennyiben $I \cap J$–ben nincsenek páratlan körök, akkor az általánosított 1–2–faktor éppen a teljes út–párosítás, és ezen utóbbi eredmények azonosak az előzőekkel.

Az általánosított 1–2–faktorok páratlan köreinek összehúzásával való próbálkozások sajnos nem vezettek az általános teljes út–párosítás probléma megoldásához, kivéve a már eddig is jól ismert $I = J$ esetet.

$k = |I - J| = |J - I| = 2$ esetben a teljes út–párosítás probléma egyelőre nehéznek bizonyult, míg — mint láttuk — $k = 1$ esetben: nem.

Irodalom

[1] J. Aráoz, W. H. Cunningham, J. Edmonds and J. Green–Krótki: *Reductions to 1-Matching Polyhedra*, NETWORKS, Vol. 13 (1983) 455–473.

[2] E. Balas and W. R. Pulleyblank: *The perfectly matchable subgraph polyhedron of an arbitrary graph*, Combinatorica 9, (1989), 495–516.

[3] W. H. Cunningham: *Testing membership in matroid polyhedra*, J. Combinatorial Theory Ser. B 36 (1984), 139–150.

[4] W. H. Cunningham and J. F. Geelen: *The Optimal Path–Matching Problem*, (1996), preprint

[5] W. H. Cunningham and J. Grren–Krótki: *A separation algorithm for the matchable set polytope*, Math. Programming Stud. 8, (1994), 139–150.

[6] A. Frank: Kombinatorikus algoritmusok, sokszorosított jegyzet

[7] A. Frank: Poliéderes kombinatorika, sokszorosított jegyzet

[8] M. Grötschel, L. Lovász and A. Schrijver: *The ellipsoid method and its consequences in combinatorial ortimization*, Combinatorica 1, (1981), 169–197.

[9] L. Lovász: Combinatorial Problems and Exercises, North-Holland 1979.

[10] M. W. Padberg and M. R. Rao: *Odd minimum cut–sets and b–matchings*, Math. Oper. Res. 7, (1982), 67–80.

[11] A. Schrijver: *Short proofs on the matching polyhedron*, J. Combinatorial Theory Ser. B 34, (1983), 104–108.