Farkas Bálint

A topologikus vektorterek elméletének alkalmazásai

Szakdolgozat

témavezető
Czách László

1999. május

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A dolgozat három fő részből áll, melyek lényegében függetlenek egymástól, bár az egyes fejezetek között is hivatkozunk bizonyos tételekre. Az első két fejezet célja alapvetően a topologikus vektorterek elméletének legfontosabb fogalmai közötti kapcsolatok megvilágítása nem közismert példákon keresztül, illetve a jól ismert tételek lehető legnagyobb mértékű általánosítása, élesítése. Ezekben a fejezetekben a topologikus vektorterek metrikus tulajdonságait, egyes szétválasztási tételeket és az elméletben oly fontos szerepet játszó, bornologikus és hordó terek közötti kapcsolatot vizsgáljuk. A harmadik részben a szummálhatóság modern elméletében alapvető fontosságú végtelen mátrixokról lesz szó. Célunk itt az volt, hogy a legismertebb sorozatterek közötti mátrixleképezések minél teljesebb jellemzését adjuk. Ennek érdekében az, egyébként önmagában is fontos, (FK) terek fogalmát is bevezetjük, és ezek legalapvetőbb tulajdonságait tárgyaljuk.

A dolgozatban idáig nem ismert eredmények is találhatóak. M.M. Day [4] eredményének messzemenő általánosítása az 1.3.2 Állítás. Az 1.1.4 Tétel ebben a formában még nem volt ismert, az 1.2.11 Megjegyzésben foglaltak szintén új eredménynek tekinthetőek. Ezekkel kapcsolatban is szeretnék köszönetet mondani Czách László tanár úrnak, aki ezekre a témákra irányította figyelmemet, és a dolgozat elkészítése során nyújtott támogatása is nélkülözhetetlennek bizonyult.

0.1. Elnevezések, jelölések

Általában a következő jelöléseket használjuk: $\mathbb{N}$ a pozitív egész számok halmaz, $\mathcal{N}$ az $\mathbb{N}$ véges részhalmazaiból álló halmaz. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ jelöli a racionális, valós illetve komplex számok testjét. Tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén értelmezzük $\operatorname{sgn}(z)$-t a következőképpen: ha $z = 0$, akkor $\operatorname{sgn}(z) = 0$, egyébként pedig $\operatorname{sgn}(z) = \frac{z}{|z|}$. Legyen $\mathbb{U} = \{z : z \in \mathbb{K}, |x| \leq 1\}$.

Tetszőleges Y és $Z \subseteq X$ halmazok illetve $f : X \to Y$ függvény esetén $f\lceil_Z$ jelenti az f leképezés Z-re való megszorítását. Ha F X-en értelmezett függvények egy halmaza, akkor jelentse $F\lceil_Z$ az F-beli függvények Z-re való megszorításaiból álló halmazt. Ha Y el van látva egy $\leq$ rendezéssel, akkor $y \in Y$ esetén $X[f \leq y] := \{x : x \in X, f(x) \leq y\}$, értelemszerűen vezetjük be a $X[f \geq y]$, $X[f < y]$ és $X[f > y]$ jelöléseket is. Ha $Y = \mathbb{R}$, $r \geq 0$ és f nemnegatív függvény, akkor használjuk még a $B_f(y, r) := X[f(x - y) < r]$ jelölést is. Ahol nem szükséges, ott az indexből elhagyjuk a függvény jelölését.

Ha $\langle X, \tau \rangle$ és $\langle Y, \tau' \rangle$ topologikus terek, akkor az $f : X \to Y$, $\tau - \tau'$ folytonos függvények halmazát $\mathcal{C}(X, Y)$ jelöli (a jelölésbe hallgatólagosan beleértjük, hogy a topológiák rögzítettek). Használjuk még a következő jelölést: $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ esetén, $[f_1, f_2] := \{f : f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}), f_1 \leq f \leq f_2\}$.

Ha $\langle X, \tau \rangle$ topologikus tér, akkor egyes esetekben, az egyszerűség kedvéért mindig csak annyit mondunk, hogy X topologikus tér, ennek topológiáját pedig ha szükséges, τ_X jelöli. Ha $\langle X, \tau \rangle$ és $\langle X, \tau' \rangle$ topologikus terek, akkor $\tau \vee \tau'$ jelöli a τ és τ' topológiák legkisebb felső korlátját.

A dolgozatban végig a vektorterek vagy $\mathbb{R}$, vagy $\mathbb{C}$ felettiek lesznek, tehát $\mathbb{K}$ jelentse e kettő közül valamelyiket. Ha X, Y vektorterek, akkor a direkt összeget $X \oplus Y$ jelöli. Egy $H \subseteq X$ halmaz lineáris burkára a $\mathrm{span}(H)$ jelölést használjuk. Egy X vektortérben a nullvektort $\mathbf{0}_X$ jelöli, ahol nem szükséges ott nem írjuk ki az indexet. Ha $f : X \to \mathbb{K}$, $g : Y \to \mathbb{K}$, ahol X, Y vektorterek és $X \cap Y = \{\mathbf{0}\}$, akkor $f \oplus g$ jelöli azt a $h : X \oplus Y \to \mathbb{K}$ leképezést, amelyre $h(x + y) = f(x) + g(y)$. Ha $y \in Y$, akkor a $X \oplus \mathrm{span}(\{y\})$ helyett a $X \oplus y$ jelölést használjuk.

Ismertnek tételezzük fel a topologikus vektorterek elméletének legalapvetőbb fogalmait: topologikus vektortér, lokálisan konvex tér, az elnyelő, konvex, abszolút konvex és szimmetrikus halmaz, a félnorma, a Minkowski-funkcionál, a korlátosság, a duális pár, a duális párral kompatibilis topológia és tulajdonság, a poláris, az ekvifolytonosság, az ekvikorlátosság, a teljesség, a kváziteljesség, a relatív kompaktság, a szeparáltság és a hordó fogalmát. Fontosak lesznek még a félnormákkal megadott vektortopológiák tulajdonságai.

Hordó térnek nevezünk egy lokálisan konvex teret, ha benne minden hordó nullkörnyezet. Egy B halmazt bornologikusnak nevezünk, ha abszolút konvex és minden korlátos halmazt elnyel. Egy lokálisan konvex tér bornologikus, ha benne minden bornologikus halmaz nullkörnyezet. Ha $\langle X, \tau \rangle$ topologikus vektortér, akkor topológiai duálisát X^* jelöli. Az erős, Mackey, gyenge topológiákra rendre a $\beta(X, X^*)$, $\mu(X, X^*)$ és $w(X, X^*)$ jelölést használjuk. Ha $\langle X, Y \rangle$ duális pár, egy H halmaz polárisát H° jelöli. Ha $\mathcal{G}$ X-beli halmazokból álló rendszer, akkor $\mathcal{G}^\circ$ jelölje azt a halmazrendszert, amelyet a $\mathcal{G}$-beli halmazok polárisai alkotnak. Egy H halmaz konvex, zárt konvex, abszolút konvex, zárt abszolút konvex burkára a $\mathrm{conv}(H)$, $\overline{\mathrm{conv}}(H)$, $\mathrm{ac}(H)$ és $\overline{\mathrm{ac}}(H)$ jelölést használjuk. $\langle X, \tau \rangle$-beli hordók halmazát $\mathcal{H}$ jelöli, míg X^*-beli ekvifolytonos, gyengén korlátos és erősen korlátos halmazok összességére rendre az $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}_w$ és $\mathcal{B}_\beta$ jelölést használjuk. Jelölje továbbá $\mathcal{C}$ azon X^*-beli halmazok összességét, amelyek zárt, abszolút konvex burka gyengén kompakt. Ha $\langle X, \tau \rangle$ és $\langle Y, \tau' \rangle$ topologikus vektorterek, akkor jelölje $\mathfrak{B}(X, Y)$, illetve $\mathfrak{L}(X, Y)$ az $X \to Y$ korlátos, illetve folytonos lineáris operátorok halmazát.

Egy topologikus vektortér lokálisan korlátos, ha van benne korlátos nullkörnyezet. Mackey térnek nevezünk egy topologikus vektorteret, ha topológiája a Mackey-topológia. A teljesen metrizálható, lokálisan konvex tereket (F) térnek (Frèchet térnek) hívjuk. A Banach terekre a topologikus vektorterek elméletében inkább szokásos (B) tér elnevezést használjuk. Ismertnek vesszük az induktív topológia és induktív limesz fogalmát is, (B) terek induktív limeszeire az (LB) tér elnevezést fogjuk használni.

Használjuk még a halmazelméletből ismert kofinalitás operációt, erre a cf jelölést alkalmazzuk. ω_0, ω_1 és ω_2 az első három végtelen számosságot jelöli. Ha α rendszám, akkor α rákövetkezőjére az $\alpha + 1$ jelölést használjuk. Erősen elérhetetlennek nevezünk egy κ számosságot, ha $\kappa > \omega_0$, κ-nál kevesebb, κ-nál kisebb számosság összege is kisebb κ-nál, és tetszőleges $\lambda < \kappa$-ra $2^\lambda < \kappa$.

$\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, τ_ω a megfelelő $\mathbb{K}$-beli, euklideszi topológiák szorzata. Triviálisan látható, hogy ezzel $\langle \omega, \tau_\omega \rangle$ (F) tér. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$-re $\pi_n : \omega \to \mathbb{K}$ az n-edik koordinátafüggvény, azaz $\pi_n x = x_n$. ϕ jelöli azon vektorok vektorterét, amelyeknek csak véges sok nemzérus koordinátája van. Legyen $P_m : \omega \to \omega$ az első m koordinátára való projekció, tehát $(P_m x)_n = x_n$ ha $n \le m$ egyébként pedig $(P_m x)_n = 0$. x^* az x vektor konjugált transzponáltját jelöli. Ha $x, y \in \omega$, $x \cdot y$ legyen ω azon eleme, amelyre $(x \cdot z)_n = x_n z_n$, továbbá xz jelentse a $\sum_{n=1}^\infty x_n z_n$ összeget, ha ez konvergens. Végtelen sorok esetében, ha a konvergenciát külön nem hangsúlyozzuk, de a sor összegére valamely feltételt teszünk, akkor ebbe a feltételbe hallgatólagosan azt is beleértjük, hogy a sor konvergens.

Egy B mátrix n-edik sorában és k-adik oszlopában levő elemet b_{nk} jelöli, esetenként erre a $[B]_{nk}$ jelölést is használjuk. Az A mátrix k-adik oszlopát a^k jelöli. Véges mátrix esetében az ℓ^2-norma által indukált mátrixnormát használjuk. Ha $A = (a_{nk})_{n,k=1,\dots}$ végtelen mátrix és $x \in \omega$, akkor jelentse Ax azt az y ω-beli vektort, amelyre $y_n = \sum_{k=1}^\infty a_{nk} x_k$, feltéve, hogy ez az összeg minden $n \in \mathbb{N}$-re értelmes. Ha $Y \subseteq \omega$, akkor jelölje Y_A azon $x \in \omega$ vektorok halmazát, amelyekre $Ax \in Y$, speciálisan $\omega_A = \{x \in \omega : Ax \text{ értelmes}\}$.

$X, Y \subseteq \omega$ esetén $(X : Y)$ jelölje azon mátrixok halmazát, amelyekre minden $x \in X$ esetén Ax értelmes és $Ax \in Y$. Egy ilyen mátrixról azt mondjuk, hogy $(X : Y)$ típusú. δ^n jelölje azt a vektort, melynek n-edik koordinátája 1 az összes többi 0. Az $(1, 1, \dots)$ vektorra az $\mathbf{1}$ jelölést használjuk. Általában a következő megállapodásokat használjuk még, legyen minden $x \in \omega$ esetén $x_0 = 0$. Ezzel összhangban legyen egy A mátrixra $a_{00} = a_{0k} = a_{n0} = 0$ minden $k, n \in \mathbb{N}$ esetén. A^T jelöli az A mátrix transzponáltját, A^* pedig a konjugált transzponáltját. Ha $x \in \omega$, akkor $\operatorname{diag}(x) = \operatorname{diag}(x_1, x_2, \dots)$ jelöli azt az A mátrixot, amelyre $a_{nk} = x_n \delta_{nk}$, ahol δ_{nk} a Kronecker-féle szimbólum. $\ell^1, \ell^p, \ell^\infty, c, c_0$ az abszolút konvergens, a p-edik hatványon szummázható, korlátos, konvergens és nullsorozatok (B) terét jelöli, a jól ismert normákkal.

X (B) tér esetében, a félreértések elkerülése végett a normára időnként az $\|\cdot\|_X$ jelölést használjuk, ez alól kivétel az ℓ^p terek esete $(1 \le p \le \infty)$, amikor inkább a szokásos $\|\cdot\|_p$ jelölést alkalmazzuk. Általában azonban, ha nyilvánvaló, hogy melyik térről van szó, akkor egyszerűen csak $\|\cdot\|$ jelet írunk.

0.2. Felhasznált tételek

Ismertnek vesszük a topologikus vektorterek elméletének legalapvetőbb eredményeit ([3], [9] és [15]). Az alábbi tételekre később hivatkozni fogunk, most csak bizonyítás nélkül közöljük őket.

0.2.1. Tétel (Szeparációs tétel). *Legyen $\langle X, \tau \rangle$ topologikus vektortér, $A, B \subseteq X$ diszjunkt, nem üres, konvex halmazok, amelyek közül az egyiknek van belső pontja, ekkor szétválaszthatóak folytonos lineáris funkcionállal.*

0.2.2. Tétel. *Tetszőleges $\langle X, \tau \rangle$ topologikus vektortér esetében, minden X feletti, nemzérus, lineáris funkcionál nyílt leképezés.*

0.2.3. Tétel. *Legyen $\langle X, Y \rangle$ duális pár, ekkor az X-beli konvex halmazok lezárása és általában a korlátosság kompatibilis fogalom a duális párral.*

0.2.4. Tétel. *Tetszőleges $\langle X,\tau\rangle$ lokálisan konvex tér esetén, minden hordó elnyel minden olyan halmazt, amely abszolút konvex, korlátos és teljes.*

0.2.5. Tétel (Bipoláris tétel). *Ha $\langle X,Y\rangle$ duális pár, akkor tetszőleges $H\subseteq X$ halmazra $H^{\circ\circ}=\overline{\mathrm{ac}}(H)$, ahol a lezárást a $w(X,Y)$ topológiában értjük.*

0.2.6. Tétel (Alaoglu-Bourbaki). *Legyen $\langle X,\tau\rangle$ lokálisan konvex tér, ekkor tetszőleges $U\subseteq X^*$ ekvifolytonos halmaz gyengén relatív kompakt.*

0.2.7. Tétel. *Minden lokálisan konvex tér izomorf* (B) *terek szorzatának egy alterével.*

0.2.8. Tétel (Mackey-Arens). *Ha $\langle X,Y\rangle$ duális pár, akkor egy τ X feletti, lokálisan konvex topológia pontosan akkor kompatibilis a duális párral, ha azonos egy $\mathcal{G}$ halmazrendszer által meghatározott poláris topológiával, ahol $\mathcal{G}$ abszolút konvex, gyengén kompakt, X^*-beli halmazokból álló fedőrendszer. Speciálisan, a legfinomabb ilyen topológia a μ Mackey topológia.*

0.2.9. Tétel (Mackey-Ulam). *Legyen κ számosság, amely kisebb mint a legkisebb erősen elérhetetlen számosság, ekkor κ-sok bornologikus tér szorzata is bornologikus.*

0.2.10. Tétel. *Minden* (LB) *tér hordó tér is egyben.*

0.2.11. Tétel. *Ha $\langle X_n,\tau_n\rangle$ $(k,n\in\mathbb{N})$ szeparált, topologikus vektorterek, alterei X-nek és $k\le n$ esetén $X_\alpha\subseteq X_\beta$, továbbá $\{\langle X_n,\tau_n,\iota_n\rangle : n\in\mathbb{N}\}$ család által X-en meghatározott τ induktív topológia Hausdorff, ahol $\iota_n : X_n\to X$ a kanonikus beágyazás, akkor létezik a $\varinjlim g_{nk}\langle X_k,\tau_k\rangle$ induktív limesz és $\varinjlim g_{nk}\langle X_k,\tau_k\rangle=\langle X,\tau\rangle$ (g_{nk} a kanonikus beágyazása X_k-nak X_n-be).*

0.2.12. Tétel (Zárt gráf tétel). *Ha X,Y* (F) *terek, $B:X\to Y$ lineáris leképezés, B pontosan akkor folytonos, ha gráfja zárt.*

0.2.13. Tétel (Hölder egyenlőtlenség). *Legyen $x\in\ell^p$, $y\in\ell^q$, ekkor $\|x\cdot y\|_1\le\|x\|_p\|y\|_q$.*

0.2.14. Tétel. *Legyen B $n\times n$-es, pozitív, szimmetrikus mátrix, ekkor maximális sajátértéke éppen $\|B\|$.*

1. fejezet

Klasszikus eredmények

Ez a fejezet a topologikus vektorterek elméletének klasszikusnak (és eleminek) számító témáival kapcsolatos eredményeket tárgyal. A bemutatásra kerülő tételek közül még az ismertek mindegyike sem közismert. Először metrizálhatósághoz hasonló fogalmakat vezetünk be, majd ezekkel kapcsolatos példákat említünk. Végül az elmélet szempontjából talán legfontosabb elválasztási tétel élességét vizsgáljuk.

1.1. Topologikus vektorterek metrizálhatósága

Ebben a részben szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy egy topologikus vektortér metrizálható legyen. Ez az eredmény a bemutatott bizonyítással együtt már ismert volt. Azonban ebből a bizonyításból erősebb eredményre is juthatunk, nevezetesen arra, hogy minden metrizálható topologikus vektortér pszeudonormálható is. Ez látszólag erősebb tulajdonság a metrizálhatóságnál, a tétel azonban éppen azt mutatja, hogy nem így van.

1.1.1. Definíció. Legyen X vektortér. A $p : X \to \mathbb{R}$ függvényt pszeudonormának nevezzük, ha teljesülnek rá az alábbiak.

(i) $p(x) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = \mathbf{0}$

(ii) minden $x, y \in X$-re $p(x + y) \le p(x) + p(y)$

(iii) minden $x \in X$-re és $\lambda \in \mathbb{K}$ számra $|\lambda| \le 1$ esetén $p(\lambda x) \le p(x)$

(iv) minden $x \in X$ vektorra és $\{\lambda_n\} \subseteq \mathbb{K}$ sorozatra $\lambda_n \to 0$ esetén $p(\lambda_n x) \to 0$ is teljesül.

1.1.2. Megjegyzés. $p(x) \ge 0$ minden $x \in X$-re, ugyanis (i) és (iii) szerint $0 = p(0x) \le p(x)$. Legyen most $\lambda \in \mathbb{K}$ és $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ olyan, hogy $p(x_n) \to 0$, ekkor $p(\lambda x_n) \to 0$. $|\lambda| \le 1$ esetén ez nyilvánvaló (iii) szerint. Ha $|\lambda| > 1$, akkor $\lambda = \alpha r$, ahol $|\alpha| = 1$ és $r > 1$ valós, ekkor $p(\lambda x_n) \le p(r x_n)$ (iii) szerint. Ha most $r = m + q$, ahol $m \in \mathbb{N}$ és $0 \le q < 1$, akkor (ii) és (iii) felhasználásával, $p(r x_n) \le m p(x_n) + p(x_n) = (m + 1) p(x_n)$, ebből pedig már látható, hogy $p(\lambda x_n) \to 0$.

1.1.3. Megjegyzés. Nyilvánvaló az 1.1.1 Definíció (i) és (ii) pontja illetve az 1.1.2 Megjegyzés első része szerint, hogy $d : X \times X \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto p(x-y)$ metrika X-en. Egyedül a szimmetrikusság nem teljesen triviális, a $p(-x) \leq p(x)$ és a $p(x) = p(-(-x)) \leq p(-x)$ egyenlőtlenségekből azonban azonnal következik. Tekintsük a $\langle X, \tau_d \rangle$ topologikus teret, ahol τ_d a d metrika indukálta topológia. Nyilvánvaló, hogy τ_d eltolásinvariáns. $\tau_d(\mathbf{0})$ egy bázisa a $\mathcal{G} = \{B(\mathbf{0}, \delta) : \delta \in \mathbb{R}^+\}$ halmazrendszer. (ii) szerint $B(\mathbf{0}, \frac{1}{2}\delta) + B(\mathbf{0}, \frac{1}{2}\delta) \subseteq B(\mathbf{0}, \delta)$, tehát $\mathcal{G}$ osztható halmazrendszer, következésképp $+ : X \times X \to X$ folytonos.

$$\begin{aligned} p(\lambda x - \lambda_n x_n) &= p(\lambda(x - x_n) + (\lambda - \lambda_n)x + (\lambda_n - \lambda)(x - x_n)) \\ &\leq p(\lambda(x - x_n)) + p((\lambda - \lambda_n)x) + p((\lambda_n - \lambda)(x - x_n)) \end{aligned}$$

felhasználásával, (iv) és az 1.1.2 Megjegyzés szerint $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ is folytonos. Kaptuk tehát, hogy $\langle X, \tau_d \rangle$ szeparált (hiszen metrizálható) topologikus vektortér. A $\tau_p = \tau_d$ topológiát pszeudonorma topológiának nevezzük. Egy $\langle X, \tau \rangle$ topologikus vektortér pszeudonormálható, ha létezik olyan $p : X \to \mathbb{R}$ pszeudonorma, amelyre $\tau = \tau_p$.

1.1.4. Tétel. *$\langle X, \tau \rangle$ topologikus vektortér pontosan akkor metrizálható, ha szeparált és M_1, ekkor a metrika származtatható egy pszeudonormából.*

Bizonyítás. Ha $\langle X, \tau \rangle$ metrizálható, akkor nyilván szeparált és M_1.

A megfordításhoz megmutatjuk, hogy X pszeudonormálható, ezzel a metrizálhatóságot is belátjuk. Legyen $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\tau(\mathbf{0})$ egy nyílt bázisa. Feltehető, hogy $U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, és minden U_n szimmetrikus. Legyen

$$R = \{r : r = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(r) \frac{1}{2^n}, e_n(r) = 0, 1, \text{ és véges sok kivétellel } e_n(r) = 0\}.$$

Adott $r \in R$ (ekkor $0 \leq r < 1$) számhoz legyen $A(r) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(r) U_n$, definíció szerint ez egy véges összeg. Ha $r \geq 1$, akkor legyen $A(r) = X$. Legyen $p(x) = \inf\{r : x \in A(r)\}$. Nyilván $p(x) \leq 1$. Állítjuk, hogy $p : X \to \mathbb{R}$ pszeudonorma, és $\tau_p = \tau$. Ehhez először belátjuk, hogy

$$A(r) + A(s) \subseteq A(r+s). \tag{1.1}$$

Teljes indukciót alkalmazunk, legyen Π_n a következő kijelentés:

Ha $r, s \in R$, $r+s < 1$, és $e_m(r) = e_m(s) = 0$ minden $m > n$ esetén, akkor $A(r) + A(s) \subseteq A(r+s)$.

Π_1 nyilvánvalóan igaz, hiszen ekkor, vagy $r = 0$ vagy $s = 0$. Tegyük most fel, hogy Π_{n-1} igaz $n > 1$-re. Legyen $r, s \in R$, $r+s < 1$ és $e_m(r) = e_m(s) = 0$ minden $m > n$-re. Tekintsük $r' = r - e_n(r)\frac{1}{2^n}$ és $s' = s - e_n(s)\frac{1}{2^n}$ számokat. Nyilván $r', s' \in R$, és $A(r) = A(r') + e_n(r)U_n$, illetve $A(s) = A(s') + e_n(s)U_n$. Az indukciós feltevés szerint $A(r') + A(s') \subseteq A(r' + s')$, amiből

$$A(r) + A(s) \subseteq A(r' + s') + e_n(r)U_n + e_n(s)U_n.$$

Ha most $e_n(r) = e_n(s) = 0$, akkor persze $r = r'$, $s = s'$ és készen vagyunk. Ha $e_n(r) = 0$ és $e_n(s) = 1$, akkor $A(r' + s') + U_n = A(r' + s' + \frac{1}{2^n}) = A(r+s)$, tehát megint készen vagyunk.

($e_n(r) = 1$ és $e_n(s) = 0$ esete teljesen szimmetrikusan intézhető el.) $e_n(r) = e_n(s) = 1$ esetén a következők igazak:

$$A(r'+s') + U_n + U_n \subseteq A(r'+s') + U_{n-1} =$$
$$= A(r'+s') + A(\frac{1}{2^{n-1}}) \subseteq A(r'+s'+\frac{1}{2^{n-1}}) = A(r+s)$$

Itt az indukciós feltételt, illetve az U_n halmazokra feltett tulajdonságot használtuk ki. Beláttuk tehát (1.1)-et. Vegyük észre, hogy ebből $r < s$ esetén, $A(r) \subseteq A(r) + A(s-r) \subseteq A(s)$ is teljesül.

Ezek után megmutatjuk, hogy p valóban pszeudonorma, és $\tau_p = \tau$. Legyen $x, y \in X$ és $\varepsilon > 0$ adott, tegyük fel továbbá, hogy $p(x) + p(y) < 1$. $p(x)$ definíciója szerint létezik $s, r \in R$, hogy $p(x) < r$, $p(y) < s$, $x \in A(r)$, $y \in A(s)$ és $r + s < p(x) + p(y) + \varepsilon$. (1.1) szerint $x + y \in A(r+s)$. Tehát $p(x+y) \leq r + s < p(x) + p(y) + \varepsilon$, amiből (ii) következik, hiszen $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt. Ha most $p(x) + p(y) \geq 1$, akkor (ii) triviális, hiszen $p(x+y) \leq 1$. Nyilvánvalóan $p(\mathbf{0}) = 0$, ha pedig $x \neq \mathbf{0}$, akkor létezik n, hogy $x \notin U_n$, ezért $p(x) \geq \frac{1}{2^n} > 0$, tehát (i) is teljesül. Legyen $\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1$, ekkor $p(\lambda x) = \inf\{r : \lambda x \in A(r)\}$ és $A(r)$ szimmetrikussága miatt, $p(\lambda x) \leq p(x)$, így (iii) is teljesül. Tekintsünk most egy $\lambda_n \to 0$ sorozatot, és legyen $x \in X$ tetszőleges, $\varepsilon > 0$ rögzített. Minden $k \in \mathbb{N}$ számra létezik $n_k \in \mathbb{N}$, hogy $\frac{1}{2^{n_k}} x \in U_k = A(\frac{1}{2^k})$, ezért $p(\frac{1}{2^{n_k}} x) \leq \frac{1}{2^k}$. Legyen most k olyan nagy, hogy $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$, és n olyan nagy, hogy $|\lambda_n| < \frac{1}{2^{n_k}}$, ekkor (iii) felhasználásával, $p(\lambda_n x) = p(\lambda_n 2^{n_k} \frac{1}{2^{n_k}} x) \leq p(\frac{1}{2^{n_k}} x) < \varepsilon$. Ezzel beláttuk, hogy (iv) is teljesül, tehát p pszeudonorma. Könnyen látható, hogy

$$B_p(\mathbf{0}, \delta) = \bigcup_{r<\delta, r\in R} A(r), \tag{1.2}$$

ezért $B_p(\mathbf{0}, \delta)$ nyílt, hiszen az $A(r)$ halmazok nyíltak. Másrészt ha $\delta < \frac{1}{2^n}$, akkor $B_p(\mathbf{0}, \delta) \subseteq U_n$. Tehát azt kaptuk, hogy τ_p durvább és finomabb is mint τ, azaz $\tau_p = \tau$, és ezzel a bizonyítást befejeztük. ∎

1.1.5. Megjegyzés. Az alábbiak könnyen láthatóak az 1.1.4 Tétel bizonyításából. Minden $B_p(\mathbf{0}, \delta)$ szimmetrikus, hiszen az $A(r)$ halmazok azok. Ha X lokálisan konvex, feltehető, hogy az U_n halmazok konvexek, és így az $A(r)$ halmazok is konvexek lesznek. Ekkor az $A(r)$ halmazok monotonitása miatt $B_p(\mathbf{0}, \delta)$ is konvex lesz.

1.1.6. Következmény. *Egy $\langle X, \tau\rangle$ topologikus vektortér pontosan akkor pszeudonormálható, ha metrizálható.*

1.2. Lokálisan korlátos terek

A következőkben két, normához hasonló fogalmat vezetünk be, és ezekkel kapcsolatban jellemzünk egyes szeparált, topologikus vektortér családokat. Következményként Kolmogorov normálhatóságról szóló klasszikus tételét is megkapjuk.

1.2.1. Definíció. X legyen egy vektortér $\mathbb{K}$ felett, ekkor a $q : X \to \mathbb{R}$ függvényt kvázinormának nevezzük, ha teljesíti az alábbiakat:

(i′) $q(x) \geq 0$ minden $x \in X$-re, és $q(x) = 0$ esetén $x = \mathbf{0}$.

(ii′) létezik $k \geq 1$, hogy $q(x+y) \leq k(q(x)+q(y))$ minden $x, y \in X$-re.

(iii′) $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$ minden $x \in X$-re és $\lambda \in \mathbb{K}$-ra.

Egy $\langle X, \tau \rangle$ topologikus vektorteret q-kvázinormálhatónak mondunk, ha létezik olyan $q : X \to \mathbb{R}$ kvázinorma, amelyre $\tau = \tau_q$. Itt τ_q az a topológia, amelyre $\tau_q(x)$ egy bázisa $\{B_q(x, \delta) : \delta \in \mathbb{R}^+\}$ (ez nyilvánvalóan eltolás invariáns topológia). Az $\langle X, q \rangle$ párt kvázinormált térnek nevezzük.

1.2.2. Megjegyzés. Ha $\langle X, q \rangle$ kvázinormált tér, akkor τ_q szeparált vektortopológia. Legyen ugyanis $\mathcal{G} = \{B_q(\mathbf{0}, \delta) : \delta > 0\}$. (iii′) szerint $\mathcal{G}$ minden eleme szimmetrikus és elnyelő. (ii′) szerint $B_q(\mathbf{0}, \frac{\delta}{2k}) + B_q(\mathbf{0}, \frac{\delta}{2k}) \subseteq B_q(\mathbf{0}, \delta)$, azaz $\mathcal{G}$ osztható halmazrendszer is. Lévén, hogy $\mathcal{G}$ metszet zárt, megadható olyan τ vektortopológia X-en, amelyre $\tau(\mathbf{0})$ bázisa $\mathcal{G}$. Mivel τ_q eltolásinvariáns, ezért $\tau_q = \tau$, hiszen $\tau_q(\mathbf{0})$-nak is bázisa $\mathcal{G}$. τ szeparált (i′) szerint.

1.2.3. Tétel. *Egy $\langle X, \tau \rangle$ topologikus vektortér pontosan akkor kvázinormálható, ha szeparált és lokálisan korlátos.*

Bizonyítás. Egy q-kvázinormálható topologikus vektortérben a $B_q(\mathbf{0}, 1)$ nullkörnyezet (iii′) felhasználásával, triviálisan korlátos halmaz. Ha $x \neq \mathbf{0}$, akkor $x \notin B_q(\mathbf{0}, q(x))$, tehát a szeparáltság is teljesül.

Legyen most $\langle X, \tau \rangle$ szeparált topologikus vektortér, és B korlátos nullkörnyezet. Feltehető, hogy B szimmetrikus, hiszen $\tau(\mathbf{0})$-nak van szimmetrikus halmazokból álló bázisa. Legyen $q : X \to \mathbb{R}$ a B környezet Minkowski-funkcionálja:

$$q(x) = \inf\{r : r > 0 \text{ és } x \in rB\}.$$

$q(x) \geq 0$ nyilvánvaló. Mivel B korlátos, ezért tetszőleges $U \in \tau(\mathbf{0})$ halmazhoz létezik $t > 0$, hogy $tB \subseteq U$, tehát $\{rB : r > 0\}$ bázisa $\tau(\mathbf{0})$-nak. X szeparáltsága miatt $\bigcap_{r>0} rB = \{\mathbf{0}\}$. Ebből látható, hogy q kielégíti az (i′) feltételt. (iii′) nyilvánvaló következménye az rB halmazok szimmetrikusságának. Mivel az rB halmazok bázisát alkotják $\tau(\mathbf{0})$-nak, ezért $+$ folytonossága miatt létezik $l \geq 2$, hogy $B + \frac{1}{2}B \subseteq lB$. Ha $0 < t < 1$, akkor t és $1-t$ közül valamelyik kisebb mint $\frac{1}{2}$, azaz $x \in B$ esetén tx vagy $(1-t)x$ eleme az $\frac{1}{2}B$ halmaznak. Tehát B szimmetrikusságát is felhasználva $tx + (1-t)x \in B + \frac{1}{2}B \subseteq lB$. Legyen továbbiakban k olyan, hogy $tB + (1-t)B \subseteq kB$ minden $0 \leq t \leq 1$ esetén. Ilyen k van, ahogy az előző gondolatmenetünk mutatja. Legyen most $x, y \in X$, valamint $r > q(x)$ és $s > q(y)$ tetszőlegesek. Ekkor persze $\frac{1}{r}x, \frac{1}{s}y \in B$, q definíciója és B szimmetrikussága következtében. k megválasztása miatt $\frac{x+y}{r+s} = \frac{r}{r+s}\frac{x}{r} + \frac{s}{s+r}\frac{y}{s} \in kB$. Ebből $q(x+y) \leq k(q(x)+q(y))$, hiszen $r > q(x)$ és $s > q(y)$ tetszőleges volt. Így (ii′) is teljesül q-ra. Nyilvánvalóan $r, \varepsilon > 0$ esetén $rB \subseteq B_q(\mathbf{0}, r) \subseteq (r+\varepsilon)B$, amiből következik, hogy $\tau_q = \tau$. ■

1.2.4. Megjegyzés. Ha $\langle X, \tau \rangle$ topologikus vektortér, vezessük be a következő jelölést:

$$\mu(X, \tau) = \inf\{k : \langle X, \tau \rangle \text{ kvázinormálható } k\text{-konstansú kvázinormával}\}.$$

Nyilvánvaló, hogy minden $k > \mu(X,\tau)$ esetén létezik olyan q kvázinorma, amelyre $q(x+y) \leq k(q(x)+q(y))$ minden $x,y \in X$ vektorra. Felmerül a kérdés, hogy $k = \mu(X,\tau)$ esetén mi a helyzet. Később megadunk egy példát, mely mutatja, hogy $\mu(X,\tau)$-konstansú kvázinormával nem feltétlenül kvázinormálható egy topologikus vektortér.

1.2.5. Definíció. Legyen X egy vektortér, $0 < p \leq 1$ rögzített, a $q : X \to \mathbb{R}$ függvényt p-normának nevezzük, ha az alábbiakat kielégíti:

(i*) $q(x) \geq 0$ minden $x \in X$-re, és $q(x) = 0$ esetén $x = \mathbf{0}$,

(ii*) $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$ minden $x,y \in X$-re,

(iii*) $q(\lambda x) = |\lambda|^p q(x)$ minden $x \in X$-re és $\lambda \in \mathbb{K}$-ra.

Nyilvánvalóan egy p-norma pszeudonorma is, így az 1.1.3 Megjegyzés szerint X vektorteret elláthatjuk a τ_p topológiával, amellyel az szeparált topologikus vektortér lesz. Értelemszerűen bevezethetjük a p-normált és a p-normálható tér fogalmát. Természetesen $p = 1$ esetén a norma, a normált tér, és a normálható tér fogalmát kapjuk.

1.2.6. Definíció. Legyen X vektortér, $0 < p \leq 1$ rögzített. Egy $A \subseteq X$ halmazt p-konvexnek nevezünk, ha minden $r,s \geq 0$, $s^p + r^p = 1$ és $x,y \in A$ esetén $rx + sy \in A$ is teljesül. (Indukcióval látható, hogy tetszőleges véges p-konvex kombinációra is zárt az A halmaz.) Ha A még szimmetrikus is, akkor abszolút p-konvex halmazról beszélünk. Egy tetszőleges $B \subseteq X$ halmaz abszolút p-konvex burkának nevezzük a B halmazt tartalmazó legszűkebb p-konvex halmazt, ezt $\mathrm{ac}_p(B)$-vel jelöljük.

1.2.7. Megjegyzés. Egy $B \subseteq X$ tetszőleges halmaz abszolút p-konvex burkáról a következő mondható:

$$\begin{aligned}\mathrm{ac}_p(B) &= \bigcap\{A : B \subseteq A \subseteq X,\ A \text{ abszolút } p\text{-konvex}\} = \\ &= \{x : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, n \in \mathbb{N}, x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^p \leq 1\}\end{aligned}$$

Az első egyenlőség nyilvánvaló, a második egyenlőség $\subseteq$ része abból következik, hogy a jobb oldalon álló halmaz abszolút p-konvex, $\supseteq$ pedig indukcióval látható be az $|\alpha+\beta|^p \leq |\alpha|^p + |\beta|^p$ egyenlőtlenség felhasználásával.

Ha A szimmetrikus, B p-konvex és $A \subseteq B$, akkor $\mathrm{ac}_p(A) \subseteq B$. Valóban, ugyanis legyen $\lambda^p = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^p \leq 1$, és $x_i \in A$, ekkor $\frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}\lambda x_i \in A \subseteq B$, mivel A szimmetrikus. $\sum_{i=1}^{n}(\frac{|\lambda_i|}{\lambda})^p = 1$ és $\frac{|\lambda_i|}{\lambda} \geq 0$, ezért $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\lambda_i|}{\lambda}\frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}\lambda x_i \in B$, hiszen B p-konvex.

1.2.8. Tétel. *Legyen $0 < p \leq 1$ rögzített. Egy $\langle X,\tau\rangle$ topologikus vektortér pontosan akkor p-normálható, ha szeparált és létezik benne korlátos, p-konvex nullkörnyezet.*

Bizonyítás. Legyen először $\langle X,\tau\rangle$ p-normálható, ekkor X (i*) szerint szeparált, $B_p(\mathbf{0},1)$ (iii*) szerint szimmetrikus és korlátos, (ii*) és (iii*) szerint p-konvex.

Megfordítva, legyen U p-konvex, korlátos nullkörnyezet. Feltehető, hogy U szimmetrikus, hiszen van $V \subseteq U$ szimmetrikus nullkörnyezet, az 1.2.7 Megjegyzés szerint pedig

$\mathrm{ac}_p(V) \subseteq U$. Legyen most q az U halmaz Minkowski-funkcionáljának p-edik hatványa. Az 1.2.8 Tétel bizonyítása szerint q teljesíti az (i*) és (iii*) feltételeket, valamint $\tau = \tau_q$. Egyedül (ii*) teljesülését kell belátnunk. Legyen $x, y \in X$ tetszőleges és $r > q(x)^{\frac{1}{p}}, s > q(y)^{\frac{1}{p}}$, ekkor $\frac{x}{r} \in U$ és $\frac{y}{s} \in U$, ezért U p-konvexitását felhasználva.

$$\frac{x+y}{(r^p+s^p)^{\frac{1}{p}}} = \frac{r}{(r^p+s^p)^{\frac{1}{p}}}\frac{x}{r} + \frac{s}{(r^p+s^p)^{\frac{1}{p}}}\frac{y}{s} \in U.$$

Ebből pedig $q(x) \leq r^p + s^p$ következik, és mivel $r > q(x)^{\frac{1}{p}}, s > q(y)^{\frac{1}{p}}$ tetszőlegesek, ezért $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$, tehát q p-norma. ∎

1.2.9. Következmény (Kolmogorov). *Egy $\langle X, \tau\rangle$ topologikus vektortér normálható pontosan akkor, ha szeparált és létezik $\mathbf{0}$-nak korlátos, konvex környezete.*

Egy olyan $\langle X, \tau\rangle$ szeparált topologikus vektortér , amelyben van B korlátos nullkörnyezet, az pszeudonormálható is, hiszen $\{rB : r \in \mathbb{Q}\}$ bázisa $\tau(\mathbf{0})$-nak, és így alkalmazhatjuk az 1.1.4 Tételt. Ennél azonban egy erősebb állítás is igaz:

1.2.10. Tétel. *Ha $\langle X, \tau\rangle$ lokálisan korlátos, akkor valamely $0 < p \leq 1$ számra X p-normálható.*

Bizonyítás. Legyen U szimmetrikus, korlátos nullkörnyezet X-ben. $+$ folytonossága miatt létezik $k \geq 2$, hogy $U + U \subseteq kU$. Definiáljuk a követkeőket.

$$\kappa(U, X) = \inf\{k : k \geq 2, U + U \subseteq kU\}$$

$$\kappa(X, \tau) = \inf\{\kappa(U, X) : U \subseteq X \text{ korlátos, szimmetrikus nullkörnyezet}\}$$

Ezeket rendre az U halmaz X-beli konkávitási modulusának, illetve X konkávitási modulusának nevezzük.

Tegyük fel, hogy $\kappa(X, \tau) = 2^{\frac{1}{p_0}}$. Állítjuk, hogy minden $p < p_0$ esetén X p-normálható. Ehhez az 1.2.8 Tétel fényében elegendő egy korlátos, p-konvex környezetet mutatnunk. A feltétel szerint $2^{\frac{1}{p}} > \kappa(X, \tau)$, tehát létezik U szimmetrikus, korlátos nullkörnyezet, amire $2^{-\frac{1}{p}}U + 2^{-\frac{1}{p}}U \subseteq U$. Általánosabban, $\sum_1^n 2^{-k_i} \leq 1$ $(k_i \in \mathbb{N})$ esetén

$$2^{-\frac{k_1}{p}}U + \cdots + 2^{-\frac{k_n}{p}}U \subseteq U \tag{1.3}$$

is teljesül. Nyilvánvalóan elegendő ezt $\sum_1^n 2^{-k_i} = 1$ $(*)$ esetére igazolni. (1.3) fennállását $\max\{k_i\}$ szerinti indukcióval bizonyítjuk. Ha ez maximum 1, akkor persze igaz (1.3). Tegyük fel, hogy $\max\{k_i\} = k$-ra már tudjuk, hogy (1.3) igaz. Ha most $\max\{k_i\} = k+1$, akkor a $(*)$ szummában páros sok $2^{-(k+1)}$ tag szerepel, és ekkor két-két $2^{-(k+1)}$ tagot 2^{-k}-val helyettesítve, olyan felbontását kapjuk 1-nek, amelyre $\max\{k_i\} = k$. Ha (1.3)-ban minden $2^{-\frac{k+1}{p}}U + 2^{-\frac{k+1}{p}}U$ tagot helyettesítjük $2^{-\frac{k}{p}}U$-val, akkor az indukciós feltevés szerint (1.3) teljesül. De ekkor helyettesítés nélkül is teljesül, ugyanis $2^{-\frac{k+1}{p}}U + 2^{-\frac{k+1}{p}}U \subseteq 2^{-\frac{k}{p}}U$ (ez utóbbi azért igaz, mert $2^{-\frac{1}{p}}U + 2^{-\frac{1}{p}}U \subseteq U$).

Megmutatjuk, hogy $\mathrm{ac}_p(U) \subseteq 2^{\frac{1}{p}}U$. Legyen ugyanis $\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^p \leq 1$ (feltehető, hogy $n > 1$), válasszuk $k_i \in \mathbb{N}$ számokat úgy, hogy $2^{-k_i} \leq |\lambda_i|^p < 2^{-k_i+1}$, ekkor persze $\sum_{i=1}^n 2^{-k_i} \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^p \leq 1$, ezért (1.3) szerint, U szimmetrikusságát is felhasználva, tetszőleges $x_i \in U$ $(i = 1 \dots n)$ esetén $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in 2^{\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^n 2^{-\frac{k_i}{p}} U \subseteq 2^{\frac{1}{p}}U$. Tehát valóban $\mathrm{ac}_p(U) \subseteq 2^{\frac{1}{p}}U$, azaz $\mathrm{ac}_p(U)$ korlátos, és persze abszolút p-konvex nullkörnyezet. ■

1.2.11. Megjegyzés. Legyen $k > \mu(X, \tau)$, és legyen q egy megfelelő, k-konstansú kvázinorma. A $B = B_q(\mathbf{0}, 1) \in \tau(\mathbf{0})$ szimmetrikus, korlátos halmazzal $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B \subseteq kB$, tehát $B + B \subseteq 2kB$. Ezért $\kappa(X, \tau) \leq 2k$, tehát $\kappa(X, \tau) \leq 2\mu(X, \tau)$. Legyen most $2^{\frac{1}{p}} > \kappa(X, \tau)$, az 1.2.10 Tétel szerint $\langle X, \tau \rangle$ p-normálható, legyen ez a p-norma q. A $q^{\frac{1}{p}}$ függvény nyilvánvalóan kielégíti a (i′) és (iii′) feltételt.

$$q^{\frac{1}{p}}(x + y) \leq (q(x) + q(y))^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-1}(q^{\frac{1}{p}}(x) + q^{\frac{1}{p}}(y)).$$

A második egyenlőtlenség a $t \mapsto t^{\frac{1}{p}}$ függvény konvexitásából következik. Kaptuk tehát, hogy $q^{\frac{1}{p}}$ $2^{\frac{1}{p}-1}$-konstansú kvázinorma. Nyilvánvaló, hogy $\tau_q = \tau_{q^{\frac{1}{p}}}$, ezért $2\mu(X, \tau) \leq 2^{\frac{1}{p}}$. Ebből $2\mu(X, \tau) \leq \kappa(X, \tau)$, azaz végülis $2\mu(X, \tau) = \kappa(X, \tau)$.

1.3. Példák

Az 1.2.1 Tétel bizonyításából, az 1.2.4 Megjegyzés mintájára, felmerülhet a kérdés, hogy $p = (\log_2 \kappa(X, \tau))^{-1}$ esetén mi mondható az adott topologikus vektortér p-normálhatóságáról. Erre és az 1.2.4 Megjegyzésben felvetett kérdésre válaszol a következő példa.

1.3.1. Példa. Legyen $0 < p_n < 1$ monoton növő sorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$ (ezt majd később konkrétan fogjuk megválasztani). Tekintsük a következő leképezést

$$\|\cdot\| : \omega \to \mathbb{R}, \ \|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p_n}.$$

Legyen X azon $x \in \omega$ vektorok halmaza, amelyekre $\|x\| < +\infty$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $d(x, y) = \|x - y\|$ metrika X felett, és τ_d egy szeparált vektortopológiát ad meg X-en. Legyen $x \in X$ esetén

$$\|x\|_m = \sum_{n=1}^{m} |x_n|^{p_m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^{p_n}$$

Egyszerűen belátható, hogy $d_m(x, y) = \|x - y\|_m$ metrika, amire τ_{d_m} szeparált vektortopológia. Állítjuk, hogy $\tau_{d_m} = \tau_d$. Valóban, ugyanis ha $\varepsilon < 1$, akkor $B(\mathbf{0}, \varepsilon) \subseteq B_{d_m}(\mathbf{0}, \varepsilon)$, tehát $\tau_{d_m} \leq \tau$. Továbbá $B_{d_m}(\mathbf{0}, \frac{\varepsilon}{2}(\frac{\varepsilon}{2m})^{\frac{p_m}{p_1}}) \subseteq B(\mathbf{0}, \varepsilon)$, azaz $\tau \leq \tau_{d_m}$.

$B = B_{d_m}(\mathbf{0}, 1)$ τ_{d_m}-korlátos, p_m-konvex halmaz. A korlátosság nyilvánvaló abból, hogy $\|\lambda x\| \leq |\lambda|^{p_m}\|x\|$ minden $\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1$ esetén. Legyen $s, r \geq 0$ és $s^{p_m} + r^{p_m} = 1$, továbbá legyen $x, y \in B$, ekkor felhasználva, hogy $\alpha, \beta > 0$ és $0 < p < 1$ esetén $(\alpha + \beta)^p \leq \alpha^p + \beta^p$, a következőt kapjuk:

$$\sum_{n=1}^{m} |rx_n + sy_n|^{p_m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} |rx_n + sy_n|^{p_n} \leq$$

$$\leq r^{p_m}\sum_{n=1}^{m}|x_n|^{p_m}+r^{p_m}\sum_{n=m+1}^{\infty}|x_n|^{p_n}+s^{p_m}\sum_{n=1}^{m}|y_n|^{p_m}+s^{p_m}\sum_{n=m+1}^{\infty}|y_n|^{p_n}\leq$$
$$\leq r^{p_m}+s^{p_m}\leq 1.$$

Tehát B valóban p_m-konvex, ekkor viszont az 1.2.8 Tétel szerint $\langle X,\tau_{d_m}\rangle$ p_m-normálható. Az 1.2.11 Megjegyzésből látható, hogy $\mu(X,\tau)\leq 2^{\frac{1}{p_m}-1}$, ebből pedig $\mu(X,\tau)=1$, illetve $\kappa(X,\tau)=2$ következik.

Megmutatjuk, hogy $\langle X,\tau_d\rangle$ nem normálható. Indirekt tegyük fel, hogy mégis, ekkor persze lokálisan konvex. Legyen $U\in\tau(\mathbf{0})$ konvex, amelyre $U\subseteq B(\mathbf{0},1)$. Mivel U nullkörnyezet, ezért létezik $\varepsilon>0$, hogy $B(\mathbf{0},\varepsilon)\subseteq U$. Legyen $x^n=\varepsilon^{\frac{1}{p_n}}\delta^n$, ekkor persze $x^n\in X$. Legyen $r_n>0$ olyan sorozat, amelyre $s=\sum_{n=1}^{\infty}r_n<+\infty$ és $\sum_{n=1}^{\infty}r_n^{p_n}=+\infty$. Később mutatjuk meg, hogy ilyen sorozat létezik p_n alkalmas megválasztása esetén. Sőt az is feltehető, hogy $s>1$, hiszen egy alkalmas konstanssal beszorozva elérhetjük ezt anélkül, hogy az r_n-re kirótt egyéb feltételeket megsértenénk. Ha most

$$y^m=\frac{\sum_{n=1}^{m}r_nx^n}{\sum_{n=1}^{m}r_n},$$

akkor U konvexitása miatt $y^m\in U\subseteq B(\mathbf{0},1)$. A következő egyenlőtlenségek állnak fenn:

$$\|y^m\|\geq\left\|\frac{\sum_{n=1}^{m}r_n}{s}y^m\right\|=\left\|\frac{\sum_{n=1}^{m}r_nx^n}{s}\right\|=\varepsilon\sum_{n=1}^{m}r_n^{p_n}s^{-p_n}>\frac{\varepsilon}{s}\sum_{n=1}^{m}r_n^{p_n}.$$

Az utolsó egyenlőtlenségnél felhasználtuk, hogy $s>1$. Mivel $\sum_{n=1}^{m}r_n^{p_n}\to+\infty$, ha $m\to\infty$, ezért ellentmondásra jutottunk azzal, hogy $y_m\in B(\mathbf{0},1)$. Már csak azt kell megmutatnunk, hogy az r_n sorozat tényleg megválasztható úgy, ahogyan előírtuk. Legyen például $p_n=(1+(\log(n+1))^{-\frac{1}{2}})^{-1}$, ekkor $\lim_{n\to\infty}p_n=1$ és p_n monotonitása nyilvánvaló. Legyen most $r_n=(n+1)^{-\frac{1}{p_n}}$, ekkor $\sum_{n=1}^{\infty}r_n^{p_n}=+\infty$ triviális. A sorok konvergenciájára vonatkozó integrálkritériummal ellenőrizhető, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}r_n<+\infty$. Legyen ugyanis

$$f(x)=((x+1)^{1+(\log(x+1))^{-\frac{1}{2}}})^{-1},$$

könnyen látható, hogy $f(x)\geq 0$, monoton csökkenő, így

$$\sum_{n=1}^{\infty}((n+1)^{1+(\log(n+1))^{-\frac{1}{2}}})^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

konvergenciája ekvivalens $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergenciájával. Ez utóbbi azonban egyszerű helyettesítéssel $\int_0^{+\infty}e^{-x^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x$ alakra hozható, ez pedig konvergens integrál.

Legyen $\langle M,\mathfrak{M},\mu\rangle$ tetszőleges mértéktér, továbbá legyen adott $0<p<1$ valós szám. Jelölje $\mathfrak{L}_p(M,\mathfrak{M},\mu)$ azon $f:M\to\mathbb{K}$ mérhető függvények halmazát, amelyekre $\int_M|f|^p\,\mathrm{d}\mu<+\infty$. A nullmértékű halmazon különböző függvények szokásos azonosítása mellett ez a halmaz vektortér. Vezessük be a következő jelölést: $\|f\|_p=\int_M|f|^p\,\mathrm{d}\mu$. Ez a függvény nyilvánvalóan p-norma, tehát ha $d(f,g)=\|f-g\|_p$, akkor $\langle\mathfrak{L}_p,d\rangle$ metrikus tér, és

$\langle X, \tau\rangle = \langle \mathfrak{L}_p, \tau_d\rangle$ topologikus vektortér. Ez nyilvánvalóan lokálisan korlátos, és belátható, hogy teljes is. Belátható továbbá [12], hogy $\kappa(\mathfrak{L}_p, \tau_d) = 2^{\frac{1}{p}}$.

A következő állítás ugyan nem kapcsolódik szorosan a témához, azonban mégis ideillik. Először szükséges egy kis megjegyzést tennünk. $\langle M, \mathfrak{M}, \mu\rangle$ mértéktér esetén a μ-nullmértékű halmazok σ-ideált alkotnak, jelölje ezt $\mathfrak{N}$. Ekkor a $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ faktoralgebrában tekinthetjük az atomokat (ha léteznek). Nevezzünk az $\mathfrak{M}$ σ-algebrában egy $A \subseteq M$ halmazt atomnak, ha a faktorizációnál vett képe (ekvivalencia osztálya) atom a faktoralgebrában. Ez azt jelenti tehát, hogy ha $A \in \mathfrak{M}$ atom, akkor mindenesetre pozitív μ-mértékű, és nincs nála szigorúan kisebb, de még mindig pozitív μ-mértékű, mérhető részhalmaza. Ezek után kimondhatjuk a következő állítást, mely a jól ismert $\langle M, \mathfrak{M}, \mu\rangle = \langle [0,1], \mathcal{L}, \lambda\rangle$ eset általánosítása. ($\mathcal{L}$, λ a Lebesgue mérhető halmazok rendszerét és a Lebesgue mértéket jelöli.)

1.3.2. Állítás. *$X^* = \{\mathbf{0}\}$ akkor és csak akkor, ha az $\langle M, \mathfrak{M}, \mu\rangle$ mértéktérben minden A atomra $\mu(A) = +\infty$.*

Bizonyítás. Mindenekelött jegyezzük meg, hogy $\mathfrak{L}_p \neq \{\mathbf{0}\}$ feltehető mert egyébként az állítás triviális.

Tudjuk, hogy egy $\langle X, \tau\rangle$ topologikus vektortérben nemzérus funkcionál létezése ekvivalens olyan U nullkörnyezet létezésével, amelyre $U \neq X$. (Ez lényegében a 0.2.1 szeparációs tétel következménye.) Tegyük fel először, hogy a mértéktéren van véges mértékű atom, legyen ez A. Ekkor mutatunk egy $U \neq X$ konvex nullkörnyezetet. Legyen

$$U = \{f : f \in \mathfrak{L}_p, |f(x)| < 1\ \mu\text{-majdnem minden } x \in A\}.$$

Ekkor U nyilvánvalóan konvex, és persze $U \neq X$. Ha $B = B(\mathbf{0}, \mu(A))$, akkor $B \subseteq U$. Ha $f(x)$ az A egy pozitív mértékű részén nagyobb vagy egyenlő lenne mint 1, akkor ez, mivel A atom, azt jelentené, hogy $f(x)$ az A halmazon μ-majdnem mindenütt nagyobb vagy egyenlő mint 1. Ekkor

$$\mu(A) \leq \int_A |f|^p\, \mathrm{d}\mu \leq \int_X |f|^p\, \mathrm{d}\mu = \|f\|_p.$$

tehát $f \notin B$. Ezzel beláttuk, hogy $U \in \tau(\mathbf{0})$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\langle M, \mathfrak{M}, \mu\rangle$-ben nincsen véges mértékű atom. Ez azt jelenti, hogy ha $A \in \mathfrak{M}$ és $0 < \mu(A) < +\infty$, akkor létezik olyan $B \in \mathfrak{M}$, hogy $0 < \mu(B) < \mu(A)$. Elsőként belátjuk, hogy minden $0 < \mu(A) < +\infty$ ($A \in \mathfrak{M}$) és $0 < \varepsilon < \mu(A)$ esetén, létezik $B \in \mathfrak{M}$, amelyre $0 < \mu(B) < \varepsilon$. Valóban, ugyanis legyen $A_0 = A$, indukcióval definiálunk A_n halmazokat, amelyekre $A_{n+1} \subseteq A_n$ és $A_n \in \mathfrak{M}$, illetve $\mu(A_{n+1}) \leq \frac{1}{2}\mu(A_n)$. Ez jó lesz, hiszen ha $n \in \mathbb{N}$ olyan nagy, hogy $\frac{1}{2^n}\mu(A) \leq \varepsilon$, akkor $\mu(A_n) \leq \varepsilon$ is teljesül. Ha A_n már megvan, akkor a következőképpen járunk el: mivel $0 < \mu(A_n) < +\infty$, ezért létezik $C_n \subseteq A_n$, amelyre $C_n \in \mathfrak{M}$ és $0 < \mu(C_n) < \mu(A_n)$. Ekkor vagy $0 < \mu(C_n) \leq \frac{1}{2}\mu(A_n)$ vagy $0 < \mu(A \setminus C_n) \leq \frac{1}{2}\mu(A_n)$. Legyen A_{n+1} a C_n illetve az $A \setminus C_n$ közül az egyik, amelynek mértéke kisebb vagy egyenlő mint $\frac{1}{2}\mu(A_n)$. Nyilván $A_{n+1} \in \mathfrak{M}$ valamint $\mu(A_{n+1}) \leq \frac{1}{2}\mu(A_n)$.

Most legyen $A \in \mathfrak{M}$, amelyre $0 < \mu(A) < +\infty$, és legyen adva $0 < \alpha < \mu(A)$. Ekkor létezik olyan $B \in \mathfrak{M}$, amelyre $B \subseteq A$ és $\mu(B) = \alpha$. Ugyanis legyen $A_0 = \varnothing$, megadunk majd indukcióval olyan A_n monoton növő halmazsorozatot, amelyre $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \alpha$ lesz. Ha már A_n halmaz adott, tekintsük a

$$c_n = \sup\{\mu(B) : A_n \subseteq B \subseteq A, B \in \mathfrak{M}, \mu(B) \leq \alpha\}$$

számot. A_{n+1} legyen olyan, hogy $A_n \subseteq A_{n+1}$ és $c_n - \frac{1}{n} \leq \mu(A_{n+1}) \leq c_n$. Nyilvánvalóan $c_{n+1} \leq c_n \leq \alpha$ minden $n \geq 0$ egészre. A c_n monoton csökkenése és nemnegativitása miatt létezik $e = \lim_{n\to\infty} c_n$. A mérték folytonosságából pedig következik, hogy $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = e$. Állítjuk, hogy $e = \alpha$. Mivel $e \leq c_i \leq c_0 \leq \alpha$, ezért elegendő belátni, hogy $e \not< \alpha$. Ha $e < \alpha$ teljesülne, akkor válasszunk egy $\varepsilon < \alpha - e$ pozitív számot. $A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pozitív mértékű, hiszen $e \leq \alpha < \mu(A)$, ezért az előbbiek szerint létezik $C \subseteq A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mérhető halmaz, amelyre $0 < \mu(C) < \varepsilon$. Legyen $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup C$, ezek szerint $D \subseteq A$ mérhető és $\mu(D) < e + \varepsilon \leq \alpha$, persze minden $n \in \mathbb{N}$-re $A_n \subseteq D$. Ha most n-et olyan nagynak választjuk, hogy $c_n < e + \mu(C) = \mu(D)$, akkor ellentmondásra jutunk c_n megválasztásával. Tehát valóban $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \alpha$.

Most tegyük fel, hogy adott egy V konvex nullkörnyezet. Ekkor valamely $r > 0$ számra $B(\mathbf{0}, r) \subseteq V$. Legyen $f \in \mathfrak{L}_p$ tetszőleges. Mivel $0 < p < 1$, ezért van $n \in \mathbb{N}$, hogy $n^{p-1}\|f\|_p < r$. Legyen φ az a mérték az $\mathfrak{M}$ σ-algebrán, amelynek Radon-Nikodym deriváltja $|f|^p$, azaz

$$\varphi(H) = \int_H |f|^p \, \mathrm{d}\mu.$$

Ekkor φ véges mérték az $\mathfrak{M}$ σ-algebrán. Belátjuk, hogy $\langle M, \mathfrak{M}, \varphi\rangle$ mértéktérre is teljesülnek az $\langle M, \mathfrak{M}, \mu\rangle$ mértéktérre kirótt feltételek. Legyen tehát $A \in \mathfrak{M}$ véges, pozitív φ-mértékű. Valamely n-re, az $A_n = \{x : x \in A, |f|^p > \frac{1}{n}\}$ halmazra $\mu(A_n) > 0$ teljesül, hiszen különben $\varphi(A) = 0$ lenne. Nyilván egy ilyen n-re $\mu(A_n) < +\infty$. A feltétel szerint létezik $B \subset A_n$ mérhető, amelyre $0 < \mu(B) < \mu(A_n)$. Ekkor

$$0 < \frac{1}{n}\mu(B) \leq \varphi(B) = \int_B |f|^p \, \mathrm{d}\mu < \int_{A_n \setminus B} |f|^p \, \mathrm{d}\mu + \int_B |f|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_{A_n} |f|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \varphi(A),$$

és persze $B \subset A$ is teljesül.

Az előző eredményünk alapján léteznek $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{M}$ diszjunkt halmazok, hogy $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X$ és $\varphi(X_i) = \frac{1}{n}\varphi(X) = \frac{1}{n}\|f\|_p$. Legyen

$$g_i(x) = \begin{cases} n \cdot f(x) & \text{ha } x \in X_i, \\ 0 & \text{ha } x \notin X_i. \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy g_i függvények mérhetőek, és mivel

$$\|g_i\|_p = \int_X |g_i|^p \, \mathrm{d}\mu = n^p \varphi(X_i) = n^{p-1}\|f\|_p < r,$$

ezért $g_i \in B(\mathbf{0}, r) \subset V$. V konvexitása és $f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i$ miatt kapjuk, hogy $f \in V$ tetszőleges $f \in X$ esetén, azaz $V = X$. ∎

1.3.3. Megjegyzés. Az előzőekhez kapcsolódóan érdemes megemlíteni a $\mathfrak{H}_p$ tereket. Legyen $0 < p < 1$, jelölje $\mathfrak{H}_p$ azon egységkörben reguláris f függvények halmazát, amelyekre

$$q(f) := \sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{\imath\vartheta})|^p \, \mathrm{d}\vartheta < \infty.$$

Ekkor $q : \mathfrak{H}_p \to \mathbb{R}$ p-norma, tehát $\langle \mathfrak{H}_p, \tau_q \rangle$ topologikus vektortér. A.E. Livingstone megmutatta [10], hogy ez a topologikus vektortér nem normálható. Az általa adott bizonyításból kis változtatással az is következik, hogy $\kappa(\mathfrak{H}_p, \tau_q) = 2^{\frac{1}{p}}$. A $\mathfrak{H}_p$ terek egyéb tulajdonságairól S.S. Walters [17] ír, bebizonyította például, hogy $\mathfrak{H}_p^* \neq \{\mathbf{0}\}$.

1.4. Elválasztási tételek

A következőkben a vektorterek $\mathbb{R}$ felettiek lesznek. Ismert, hogy lokálisan konvex térben ha két, diszjunkt, konvex, zárt halmaz közül az egyik kompakt, akkor folytonos funkcionállal szigorúan elválaszthatóak. Először azt vizsgáljuk, hogy nem lokálisan konvex térben igaz-e ez a tétel. A válasz az, hogy általában nem, sőt egy olyan példát mutatunk, amelyben egy zárt konvex halmaz nem választható el egyetlen rajta kívüli ponttól sem.

1.4.1. Lemma. *Legyen $\langle X, \tau_0 \rangle$ Baire tulajdonságú, topologikus vektortér, amelyre $\langle X, \tau_0 \rangle' = \{\mathbf{0}\}$, továbbá legyen $\langle X, \tau_1 \rangle$ lokálisan konvex tér. Tekintsük a $\tau = \tau_0 \vee \tau_1$ topológiát. Ekkor minden konvex, τ-nyílt halmaz τ_1-nyílt is egyben.*

Bizonyítás. Legyen W tetszőleges τ-nyílt, konvex halmaz, azt kell megmutatnunk, hogy τ_1-nyílt is. Ha $W = \emptyset$, akkor nincs mit bizonyítani. Legyen tehát $W \in \tau(x)$, ekkor létezik $U \in \tau_0(x)$ nyílt és $V \in \tau_1(x)$ nyílt, konvex, hogy $U \cap V \subseteq W$. Természetesen W konvexitása miatt, $\mathrm{conv}(U \cap V) \subseteq W$ is igaz. Megmutatjuk, hogy $V \subseteq \mathrm{conv}(U \cap V)$, ebből ugyanis következik, hogy $W \in \tau_1(x)$, amiből azonnal adódik, hogy W τ_1-nyílt.

Tegyük fel indirekt, hogy $V \nsubseteq \mathrm{conv}(U \cap V)$, legyen ekkor $y \in V \setminus \mathrm{conv}(U \cap V)$. A 0.2.1 szeparációs tétel szerint létezik $\varphi : X \to \mathbb{R}$ τ-folytonos funkcionál, hogy $\varphi(y) \le \alpha$ és $\varphi(\mathrm{conv}(U \cap V)) \subseteq [\alpha, +\infty)$. Mivel φ a 0.2.2 Tétel szerint nyílt leképezés és $U \cap V$ τ-nyílt halmaz, ezért $\varphi(U \cap V) \subseteq (\alpha, +\infty)$, de ekkor $\varphi(\mathrm{conv}(U \cap V)) \subseteq (\alpha, +\infty)$ is teljesül. Legyen M a $\varphi^{-1}((-\infty, \alpha))$ féltér. Legyen $z \in \mathrm{conv}(U \cap V)$ tetszőleges. Mivel $V - y$ elnyelő, ezért létezik $r > 0$, hogy $y + ry - rz \in V$. Nyilvánvalóan $y + ry - rz \in M$ is teljesül, tehát $M \cap V \neq \emptyset$, továbbá tetszőleges $u \in M \cap V$ esetén $(M \cap V) - u$ elnyelő. Ha $M \cap V$ metszi az U halmazt, akkor M metszi az $U \cap V$ halmazt, ami ellentmondás M megválasztásával. Tehát készen leszünk, ha megmutatjuk, hogy $M \cap V$ metszi az U τ_0-nyílt halmazt. Legyen $u \in M \cap V$ tetszőleges. Ekkor $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} n((M \cap V) - u)$, hiszen $(M \cap V) - u$ elnyelő. Felhasználva, hogy $\langle X, \tau_0 \rangle$ Baire tulajdonságú, kapjuk, hogy létezik $n \in \mathbb{N}$, amelyre $\mathrm{cl}(n((M \cap V) - u))$ belseje nem üres. Tehát $\mathrm{cl}(M \cap V)$ belseje nem üres, de $\mathrm{cl}(M \cap V)$ konvex, ezért $\mathrm{cl}(M \cap V) = X$, hiszen $X^* = \{\mathbf{0}\}$. (Itt a lezárást a τ_0 topológiában értjük.) Mivel U τ_0-nyílt halmaz, ezért $M \cap V \cap U \neq \emptyset$, ezzel a bizonyítást befejeztük. ∎

1.4.2. Példa. Legyen $\langle M, \mathfrak{M}, \mu \rangle$ olyan mértéktér, amelyben minden atom végtelen mértékű, és létezik $A \in \mathfrak{M}$, amelyre $0 < \mu(A) < +\infty$. Ekkor $\langle X, \tau \rangle = \langle \mathfrak{L}_p, \tau_d \rangle$ teljesen metrizálható tér, tehát Baire tulajdonságú, valamint az 1.3.2 Állítás szerint $X^* = \{\mathbf{0}\}$. Legyen $A = \{f : f \in X, |f(x)| \leq 1 \ \mu\text{-m.m.}\}$, ekkor persze A abszolút konvex. Könnyen látható, hogy A zárt is.

Legyenek $n \in \mathbb{N}$-re $M_n \subseteq M$ mérhető halmazok, amelyek páronként diszjunktak és véges, pozitív mértékűek, továbbá legyen f_n az M_n halmaz karakterisztikus függvénye. Nyilvánvaló, hogy f_n függvények lineárisan függetlenek és $f_n \in A$ minden $n \in \mathbb{N}$-re.

Legyen $\mathbb{Q}$ felsorolása $r_1, r_2, \ldots$. Legyen most $\varphi : X \to \mathbb{K}$ az lineáris funkcionál, amelyre $\varphi(f_n) = r_n$. Ilyen nyilvánvalóan létezik, f_n függvények lineáris függetlensége miatt. Ekkor $\mathbb{Q} \subseteq \varphi(A)$, amiből $f(A)$ konvexitása miatt $f(A) = \mathbb{R}$.

Ha $\tau = \tau_d \vee w(X, \mathbb{R}\varphi)$, akkor persze $\mathbb{R}\varphi \subseteq \langle X, \tau\rangle^*$. Tegyük fel, hogy $\psi \in X^*$, ekkor $X[\psi < 1]$ τ-nyílt, konvex halmaz, és így az 1.4.1 Lemma szerint w-nyílt is. Ebből azonnal adódik, hogy $\psi \in \mathbb{R}\varphi$. Tehát kaptuk, hogy $\langle X, \tau\rangle^* = \mathbb{R}\varphi$, ebből viszont az következik, hogy A nem választható el folytonos funkcionállal egyetlen $x \in X \setminus A$ ponttól sem, hiszen $\mathbf{0} \neq \psi \in \mathbb{R}\varphi$ esetén $\psi(A) = \mathbb{R}$.

1.4.3. Megjegyzés. Érdemes megjegyeznünk V.L. Klee egyik kapcsolódó eredményét. Klee [8] megmutatta, hogy létezik olyan $\langle X, \tau\rangle$ topologikus vektortér, amelyben minden zárt, lineáris altér és azon kívüli pont folytonos funkcionállal elválasztható, de létezik X-ben olyan abszolút konvex halmaz, amely viszont egyetlen rajta kívüli ponttól sem választható el. A konstrukció használja a kontinuum-hipotézist, ennek megfelelően egy transzfinit indukciós módszer a lényege, bár az alapötlet ugyanaz mint a 1.4.2 Példában.

Ezek után ℓ^2-ben konstruálunk két olyan diszjunkt, zárt halmazt, amelyek nem választhatók el folytonos funkcionállal. Ez mutatja, hogy az említett szeparációs tételben szükséges az egyik halmaz kompaktsága.

1.4.4. Lemma. *Létezik $K \subseteq \ell^2$ kompakt, abszolút konvex halmaz, amelyre $\mathbf{0} \in K$ és minden $\varphi \in (\ell^2)^*$ nemzérus funkcionálra $\ell^2[\varphi < 0] \cap K \neq \varnothing$ és $\ell^2[\varphi > 0] \cap K \neq \varnothing$.*

Bizonyítás. Legyen $T = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ teljes, ortonormált rendszer. Tekintsük most a $K = \mathrm{ac}(\mathrm{cl}(\{\pm\frac{1}{n}e_n : n \in \mathbb{N}\}))$ halmazt, mivel $\frac{1}{n}e_n$ nullsorozat, ezért $\mathbf{0} \in K$ kompakt (hiszen kompakt halmaz abszolút konvex burka kompakt), és persze konvex is. Ha most $\mathbf{0} \neq \varphi \in (\ell^2)^*$ és mondjuk $\ell^2[\varphi < 0] \cap K = \varnothing$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$-re $\varphi(e_n) = 0$, következésképp φ a zérus funkcionál. ■

1.4.5. Példa. Legyen b_n pozitív nullsorozat, a_n pedig a későbbiekben alkalmasan megválasztott, szintén pozitív sorozat. Bontsuk fel az ℓ^2 Hilbert teret: $\ell^2 = \ell^2 \oplus \ell^2$. Legyen K az 1.4.4 Lemma szerint létező, kompakt halmaz, továbbá legyen $x \in \ell^2$ olyan, hogy $(0, +\infty)x \cap K = \varnothing$. Ilyen x vektor van, hiszen K abszolút konvex, tehát ha nem lenne ilyen x vektor az azt jelentené, hogy K elnyelő. Ebből az adódna, hogy K kompakt hordó, ez viszont lehetetlen, hiszen ℓ^2 hordó tér, és persze, mint végtelen dimenziós topologikus vektortér, nem lokálisan kompakt. Definiáljuk az A és B halmazokat a következőképpen: $A = \{(z, \mathbf{0}) : z \in \ell^2, z_n \in [0, a_n], n \in \mathbb{N}\}$, $B = \overline{\mathrm{conv}}(\{(a_n\delta^n, z + b_n x) : n \in \mathbb{N}, z \in K\})$. Nyilvánvaló, hogy A és B konvex, zárt halmazok ℓ^2-ben.

Először megmutatjuk, hogy a_n megválasztásától függetlenül A és B nem választható szét folytonos funkcionállal. Majd a_n alkalmas megválasztásával elérjük, hogy $A \cap B = \varnothing$.

Tegyük fel, hogy $\varphi \in (\ell^2)^*$ nemzérus funkcionál elválasztja az A és a B halmazt, azaz $\sup_A \varphi \leq \inf_B \varphi$. Tehát minden $n \in \mathbb{N}$-re és $z \in K$-ra $\varphi(a_n\delta^n, \mathbf{0}) \leq \varphi(a_n\delta^n, z + b_n x)$. Ebből $0 \leq \varphi(\mathbf{0}, z + b_n x)$ adódik, ekkor viszont $b_n \to 0$ felhasználásával kapjuk, hogy $0 \leq \varphi(\mathbf{0}, z)$ minden $z \in K$ pontra. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha $\varphi(\mathbf{0}, z) = 0$ minden $z \in \ell^2$ vektorra, hiszen $\psi = \varphi(\mathbf{0}, \cdot)$ folyonos funkcionál ℓ^2-n, ha pedig ψ nem zérus, akkor $\ell^2[\psi < 0] \cap K \neq \emptyset$ miatt ellentmondásra jutunk. Ezért valóban $\varphi(\mathbf{0}, z) = 0$ minden $z \in \ell^2$-re. Ekkor viszont $\varphi(a_n\delta^n, \mathbf{0}) \leq \varphi(a_m\delta^m, z + b_m x) = \varphi(a_m\delta^m, \mathbf{0}) + \varphi(\mathbf{0}, z + b_m x)$, tehát $\varphi(a_n\delta^n, \mathbf{0}) \leq \varphi(a_m\delta^m, \mathbf{0})$ minden $n, m \in \mathbb{N}$-re, következésképp φ a zérus funkcionál, ezzel pedig ellentmondásra jutottunk.

Legyen $(z, \mathbf{0}) \in A$, ha $(z, \mathbf{0}) \in B$ is teljesül, akkor léteznek c_{nm} $(n, m \in \mathbb{N})$ pozitív számok és $z_n \in K$ vektorok, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} = 1$ minden $m \in \mathbb{N}$-re és

$$u_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} a_n \delta^n \to z$$

$(m \to \infty)$ valamint $v_m = (\sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} b_n)x + z_m \to \mathbf{0}$ $(m \to \infty)$. Ha $d_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} b_n$ sorozatra $\limsup_{m\to\infty} d_m > 0$, akkor alkalmas d_{m_j} részsorozatra létezik $d = \lim_{j\to\infty} d_{m_j} > 0$, és tovább ritkítva a sorozatot, K kompaktsága miatt feltehető, hogy $w = \lim_{j\to\infty} z_{m_j} \in K$ is létezik. Ekkor viszont $v_{m_j} \to \mathbf{0}$ miatt $\mathbf{0} = dx + w$, ebből viszont ellentmondásra jutunk azzal, hogy $(0, +\infty)x \cap K = \emptyset$. Tehát $0 \leq \limsup_{m\to\infty} d_m \leq 0$, azaz $\lim_{m\to\infty} d_m = 0$. Ekkor azonban b_n pozitivitása miatt $\lim_{m\to\infty} c_{nm} = 0$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ebből $u_m \to z$ felhasználásával adódik, hogy $z = \mathbf{0}$. Végülis azt kaptuk, hogy $A \cap B \subseteq \{(\mathbf{0}, \mathbf{0})\}$. Most fogjuk az a_n sorozatot megválasztani. Legyen $a_n > 0$ olyan, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < 1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm}$, ekkor szükségképpen létezik $n \in \mathbb{N}$, hogy $\frac{1}{a_n} < c_{nm}$. Ezt felhasználva $\|u_m\| = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{nm} a_n)^2 > 1$, tehát $u_m \not\to \mathbf{0}$, ezzel pedig azt kaptuk, hogy az A és a B halmaznak a $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ pont sem lehet közös eleme.

2. fejezet

Bornologikus és hordó terek

Ez a fejezet két, általános, lokálisan konvex tér családdal foglalkozik, amelyek magukban foglalják a normált és a Banach tereket. Célunk e két, igen fontos tértípus közötti kapcsolat megvilágítása, ennek érdekében a második és harmadik szakasz példákat tartalmaz. A második szakaszban egyes topologikus terek feletti folytonos függvények, bizonyos topológiával ellátott vektorterében szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy az adott tér bornologikus illetve hordó tér legyen. Itt kiderül, hogy a két tulajdonság megléte, illetve meg nem léte csupán az alaptértől függ. A harmadik részben viszont konkrét példákat említünk.

2.1. Hordó terek, bornologikus terek

Ebben a részben a hordó és bornologikus terek ekvivalens jellemzéseit adjuk. Megmutatjuk, hogy bizonyos tulajdonságok teljesülése (pl. metrizálhatóság) maga után vonja, hogy az adott tér bornologikus illetve hordó tér. Végezetül bevezetjük a két fogalom általánosításának tekinthető kvázihordó tereket is.

2.1.1. Állítás. *$\langle X, \tau \rangle$ szeparált lokálisan konvex térre ekvivalensek az alábbiak:*

a) X hordó tér.

b) Minden $p : X \to \mathbb{R}$ alulról félig folytonos félnorma folytonos.

c) $\tau = \beta(X, X^*)$.

d) Tetszőleges $\langle Y, \tau' \rangle$ lokálisan konvex térre, minden $F \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ pontonként korlátos operátor halmaz ekvifolytonos is.

e) Minden X^*-beli, $w(X, X^*)$ korlátos halmaz ekvifolytonos.

f) Tetszőleges $B \subseteq X^*$ ekvifolytonossága, relatív gyenge kompaktsága, gyengén korlátossága, erősen korlátossága ekvivalens.

Bizonyítás. a)⇒ b) Legyen $p : X \to \mathbb{R}$ alulról félig folytonos félnorma, ekkor $X[p \le r]$ zárt és természetesen abszolút konvex, tehát hordó. Ezek szerint $X[p \le r]$ nullkörnyezet, ami mutatja, hogy p folytonos $\mathbf{0}$-ban, és ekkor persze mindenütt folytonos.

b)⇒ a) Ha most H hordó, akkor p_H, a Minkowski funkcionálja félnorma. Mivel H zárt, ezért $H = X[p_H \le 1]$, tehát p alulról félig folytonos. Ekkor a feltétel szerint folytonos is, így $X[p_H < 1]$ nyílt, amiből $X[p_H < 1] \subseteq H$ felhasználásával látható, hogy $H \in \tau(\mathbf{0})$.

a)⇒ d) Legyen $\mathcal{G}$ $\tau'(\mathbf{0})$, abszolút konvex, zárt halmazokból álló bázisa. Mivel F pontonként korlátos, ezért minden $V \in \mathcal{G}$ halmazra és $x \in Y$ vektorra létezik $r(x) > 0$, hogy $Ax \in r(x)V$ tetszőleges $A \in F$ esetén. Tehát $x \in r(x)\bigcap_{A\in F} A^{-1}(V)$, azaz $\bigcap_{A\in F} A^{-1}(V)$ elnyelő halmaz X-ben. Persze nyilván abszolút konvex és zárt is, hiszen F elemei folytonos lineáris operátorok. Tehát $\bigcap_{A\in F} A^{-1}(V)$ hordó, és mivel $\langle X, \tau\rangle$ hordó tér, ezért τ-nullkörnyezet is. Ez pedig nyilvánvalóan azt jelenti, hogy F ekvifolytonos operátorcsalád.

d)⇒ e) Nyilvánvaló abból, hogy egy X^*-beli funkcionálcsalád pontonkénti korlátossága, pontosan a $w(X, X^*)$ korlátosságát jelenti.

e)⇒ f) A következő tartalmazások igazak: $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_\beta \subseteq \mathcal{B}_w$. Valóban, az első tartalmazás a 0.2.6 Alaoglu-Bourbaki tétel következménye. A másodikhoz legyen $K \in \mathcal{C}$, ekkor $\overline{\mathrm{ac}}(K)^\circ \in \mu(\mathbf{0})$, ezért $\overline{\mathrm{ac}}(K)^\circ$ elnyel minden $B \subseteq X$ korlátos halmazt, amiből B° elnyeli $\overline{\mathrm{ac}}(K)^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{ac}}(K)$ halmazt. Mivel $\mathcal{B}_w^\circ$ $\beta(\mathbf{0})$-nak bázisa, ezért $\overline{\mathrm{ac}}(K)$ β-korlátos. Az utolsó tartalmazás triviális. *e)* szerint $\mathcal{B}_w \subseteq \mathcal{E}$, ezért a fenti tartalmazások helyén mindenhol egyenlőség áll.

f)⇒ a) $\mathcal{E}^\circ$ bázisa $\tau(\mathbf{0})$-nak, ugyanis ha $U \in \tau(\mathbf{0})$ abszolút konvex, akkor U° ekvifolytonos, és $U^{\circ\circ} = U$. *f)* szerint $\mathcal{E}^\circ = \mathcal{B}_w^\circ$, de $\mathcal{B}_w^\circ = \mathcal{H}$. Tehát valóban minden hordó nullkörnyezet.

a)⇔ c) $\beta(\mathbf{0})$ bázisa $\mathcal{B}_w^\circ = \mathcal{H}$, ezért $\tau \le \beta$ miatt, $\mathcal{H} \subseteq \tau(\mathbf{0})$ ekvivalens $\tau = \beta(X, X^*)$ fennállásával. ■

2.1.2. Megjegyzés. A 2.1.1 Tétel *a)⇒d)* részét Banach-Steinhaus tételnek nevezik, ekkor azonban kiegészítik a következő, egyébként triviális ténnyel is: minden ekvifolytonos operátorcsalád ekvikorlátos is.

2.1.3. Állítás. *Ha $\langle X, \tau\rangle$ szeparált lokálisan konvex tér, akkor az alábbiak egyenértékűek:*

a) X bornologikus.

b) Minden $p : X \to \mathbb{R}$, korlátos halmazon korlátos félnorma folytonos.

c) Tetszőleges $\langle Y, \tau'\rangle$ lokálisan konvex térre $\mathcal{B}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$.

d) Tetszőleges $\langle Y, \|\cdot\|\rangle$ (B) térre $\mathcal{B}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$.

Bizonyítás. a)⇒ b) Legyen p olyan félnorma, ami korlátos minden korlátos halmazon. Megmutatjuk, hogy $X[p < r]$ tetszőleges $r > 0$ számra nullkörnyezet. Nyilvánvalóan $X[p < r]$ abszolút konvex, ugyanakkor elnyel minden B korlátos halmazt. Ugyanis $0 \le p(B) < K$ valamely $K > 0$ számra, ekkor $B \subseteq \frac{K}{r}X[p < r]$. De ekkor valóban $X[p < r]$ nullkörnyezet.

b)⇒ a) Legyen most U olyan abszolút konvex halmaz, amely elnyel minden korlátos halmazt, speciálisan U elnyelő is. Ekkor Minkowski-funkcionálja, p_U félnorma, amire $X[p < 1] \subseteq U \subseteq X[p \leq 1]$. Legyen B korlátos halmaz X-ben, ekkor $B \subseteq \lambda U$, tehát $p(B) \leq |\lambda|$. Látható, hogy p_U korlátos minden korlátos halmazon, tehát a feltétel szerint τ-folytonos, következésképp $X[p < 1]$ nyílt, amiből U nullkörnyezet.

a)⇒ c) Legyen $\langle Y, \tau' \rangle$ tetszőleges, lokálisan konvex tér és $f : X \to Y$ korlátos lineáris operátor. Ha $U \in \tau'(\mathbf{0})$ abszolút konvex, akkor $f^{-1}(U)$ szintén abszolút konvex. Legyen $B \subseteq X$ korlátos, ekkor $f(B)$ korlátos, ezért létezik $\lambda \in \mathbb{K}$, hogy $B \subseteq \lambda U$. Következésképp $B \subseteq \lambda f^{-1}(U)$, azaz $f^{-1}(U)$ elnyel minden korlátos halmazt. A feltétel szerint ekkor pedig nullkörnyezet, amiből f folytonossága következik. $\mathcal{B}(X,Y) \supseteq \mathcal{L}(X,Y)$ mindig fennáll, ezért készen vagyunk.

c)⇒ a) Legyen $\tau^\times$ az az eltolásinvariáns topológia X-en, amelyre $\tau^\times(\mathbf{0})$ egy bázisa

$$\mathcal{G} = \{A : A \text{ abszolút konvex és minden } \tau\text{-korlátost elnyel}\}.$$

Ezzel nyilvánvalóan egy lokálisan konvex topológiát adtunk meg X-en. Az is látható, hogy $\tau^\times$ finomabb mint μ, hiszen a μ-korlátos halmazok ugyanazok mint a τ-korlátos halmazok. Legyen f $\tau^\times$-folytonos funkcionál, ekkor persze f minden τ-korlátos halmazon korlátos, tehát a feltétel szerint folytonos. Ebből kapjuk a 0.2.8 Mackey-Arens tétel szerint, hogy μ finomabb mint $\tau^\times$, tehát $\mu = \tau^\times$. Nyilvánvalóan $\tau^\times$ a legfinomabb lokálisan konvex topológia, amelyre $\mathcal{B}_{\tau^\times} = \mathcal{B}_\tau$, ezért $\langle X, \tau^\times \rangle$ bornologikus. Innen rögtön kapjuk, hogy $\langle X, \mu \rangle$ bornologikus. Tekintsük most az $\mathrm{id} : \langle X, \mu \rangle \to \langle X, \tau \rangle$ függvényt, ez persze korlátos, így folytonos is. Amiből azt látjuk, hogy μ durvább mint τ, azaz $\mu = \tau$. Összevetve ezt az előzővel, kapjuk, hogy $\langle X, \tau \rangle$ bornologikus.

c)⇒ d) Triviális.

d)⇒ c) Felhasználjuk, hogy a 0.2.7 Tétel szerint minden lokálisan konvex tér izomorf (B) terek szorzatának egy alterével. Legyen most $f : X \to Y$ korlátos, lineáris leképezés, ahol $\langle Y, \tau' \rangle$ tetszőleges lokálisan konvex tér. Ekkor léteznek $\{Y_\alpha : \alpha \in I\}$ (B) terek, hogy Y izomorf $\prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ egy alterével (π_α az $Y \to Y_\alpha$ projekció). Legyen ez az izomorfizmus ι. Tekintsük most a $\pi_\alpha \circ \iota \circ f : X \to Y_\alpha$ függvényeket, ezek nyilvánvalóan korlátosak, de ekkor *d)* szerint folytonosak is, ezért $\iota \circ f$ is folytonos. Ebből ι nyíltsága miatt rögtön következik, hogy f folytonos. ∎

2.1.4. Megjegyzés. A bizonyításból látható, hogy egy $\langle X, \tau \rangle$ Mackey tér pontosan akkor bornologikus, ha minden $f : X \to \mathbb{K}$ korlátos lineáris funkcionál folytonos.

2.1.5. Tétel. *Minden szeparált, lokálisan konvex, Baire tér hordó tér.*

Bizonyítás. Legyen $\langle X, \tau \rangle$ szeparált, lokálisan konvex, Baire tér és H egy hordó. Ekkor, mivel H elnyelő, ezért $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nH$. Mivel nH zárt minden n-re, ezért létezik $x \in \mathrm{int}(nH)$, hiszen X Baire tér. Tehát $nH = x + U$, ahol $U \in \tau(\mathbf{0})$. Mivel H elnyelő, ezért van r, hogy $-x \in rH$, így $U \subseteq nH + rH = (n + r)H$ (ez utóbbi egyenlőség H konvexitása miatt áll). Kaptuk tehát, hogy $(n + r)H \in \tau(\mathbf{0})$, azaz $H \in \tau(\mathbf{0})$. ∎

2.1.6. Tétel. *Minden metrizálható, lokálisan konvex tér bornologikus.*

Bizonyítás. Legyen $\langle X,\tau\rangle$ metrizálható, lokálisan konvex tér. Legyen B olyan abszolút konvex halmaz, ami elnyel minden korlátos halmazt. Mivel X metrizálható, ezért létezik $\mathbf{0}$-nak megszámlálható, csökkenő $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ környezetbázisa. Létezik n, hogy $U_n \subseteq nB$, ugyanis ellenkező esetben minden n-re létezne x_n, hogy $x_n \in U_n$, de $x_n \notin nB$. $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ korlátos halmaz, hiszen x_n konvergens, ezért B elnyeli, ez viszont ellentmondás. Így valóban $U_n \subseteq nB$ valamely $n \in \mathbb{N}$-re, ebből pedig következik, hogy B nullkörnyezet. ∎

2.1.7. Következmény. *Minden* (F) *tér, speciálisan minden* (B) *tér hordó tér is egyben. Minden normált tér bornologikus.*

2.1.8. Definíció. Az $\langle X,\tau\rangle$ lokálisan konvex teret kvázihordó térnek nevezzük, ha minden B hordó, ami elnyel minden korlátos halmazt, az nullkörnyezet.

2.1.9. Megjegyzés. Nyilvánvaló a definícióból, hogy minden hordó és minden bornologikus tér kvázihordó tér is egyben. Könnyen látható, hogy egy $\langle X,\tau\rangle$ lokálisan konvex tér pontosan akkor kvázihordó tér, ha $\mathcal{E} = \mathcal{B}_\beta$. Valóban, ugyanis $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}_\beta$ minden lokálisan konvex térre igaz. $B \subseteq X^*$ gyengén korlátos pontosan akkor, ha B° hordó. B pontosan akkor erősen korlátos, ha minden abszolút konvex, τ-korlátos, X-beli H halmazra, H° elnyeli B-t, hiszen az ilyen H° halmazok $\beta(\mathbf{0})$ bázisát alkotják. Ez ekvivalens azzal, hogy B° elnyeli az összes H abszolút konvex, korlátos halmazt (ekkor persze az összes korlátos halmazt is). Tehát B erősen korlátos pontosan akkor, ha B° korlátos halmazokat elnyelő hordó (és persze minden ilyen hordó polárisa erősen korlátos). $B^\circ \in \tau(\mathbf{0})$ ekvivalens azzal, hogy B ekvifolytonos, ebből pedig már következik az állítás.

2.1.10. Állítás. *Minden kváziteljes, kvázihordó tér hordó tér is egyben.*

Bizonyítás. Ehhez elegendő azt belátnunk, hogy tetszőleges $\langle X,\tau\rangle$ kváziteljes, lokálisan konvex térre $\mathcal{B}_w = \mathcal{B}_\beta$. Ekkor az előzőekből és a 2.1.1 Tételből következik az állításunk.

Legyen $B \subseteq X^*$ abszolút konvex és gyengén korlátos, ekkor B° hordó X-ben. Ekkor a 0.2.4 Tétel szerint B° elnyel minden abszolút konvex, teljes, korlátos halmazt. De tetszőleges H korlátos X-beli halmazra $H \subseteq \overline{\mathrm{ac}}(H)$ abszolút konvex, teljes és korlátos (mivel a tér kváziteljes), és ekkor a 2.1.9 Megjegyzés szerint B erősen is korlátos. ∎

2.2. A $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ tér

Az előző rész eredményei után természetesen felmerül a kérdés, hogy a bornologikus terek és a hordó terek fogalma milyen kapcsolatban áll egymással. A két féle tér közötti kapcsolatra a következő részben világítunk rá példák segítségével. Ebben a fejezetben speciális, lokálisan konvex tér családon belül ekvivalens jellemzését adjuk a bornologikus és a hordó tereknek. Ezekre az eredményekre a következő részben lesz szükségünk.

Legyen $\langle E,\tau\rangle$ teljesen reguláris, topologikus tér. Jelölje $\mathcal{C} = \mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ az E halmazon értelmezett folytonos, $\mathcal{B}$ pedig a folytonos és korlátos függvények halmazát. Ha $K \subseteq E$ tetszőleges halmaz és $f \in \mathcal{C}$, akkor legyen $\|f\|_K = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$. Ha K kompakt, akkor $\|\cdot\|_K : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ félnorma. $\langle \mathcal{B}, \|\cdot\|_E\rangle$ (B) tér a τ_n szuprémum-norma topológiával. $\langle \mathcal{C}, \tau_c\rangle$ pedig szeparált, lokálisan konvex tér, ahol τ_c a $\{\|\cdot\|_K : K \subseteq E, K \text{ kompakt}\}$

félnormacsalád által meghatározott, lokálisan konvex topológia (a kompakt halmazokon való egyenletes konvergencia topológia). Minden $\varphi \in \langle \mathcal{C}, \tau_c\rangle^*$ esetén jelölje $\mathrm{supp}(\varphi)$ a legkisebb kompakt, $A \subseteq E$ részhalmazt, amelyre teljesül, hogy minden $f \in \mathcal{C}$ esetén ha $f\restriction_A = 0$, akkor $\varphi(f) = 0$ is fennáll. Egyszerűen igazolható, hogy ilyen halmaz létezik.

2.2.1. Lemma. *Legyen $U \subseteq \mathcal{C}$ konvex, $K \subseteq E$ kompakt, $\delta > 0$. Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{C}$ és $\|f\|_E \le \delta$ esetén $f \in U$, továbbá $f\restriction_K = 0$ (minden $f \in \mathcal{C}$-re) fennállásából $f \in U$ következik. Ekkor $f \in \mathcal{C}$ és $\|f\|_K \le \frac{1}{2}\delta$ esetén $f \in U$ is teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $g = \sup(f, \frac{\delta}{2}1_E) + \inf(f, -\frac{\delta}{2}1_E)$. Lévén, hogy $2g\restriction_K = 0$, ezért $2g \in U$. Ugyanakkor $\|2(f-g)\|_E \le \delta$, ezért $2(f-g) \in U$. Amiből U konvexitását felhasználva, $\frac{1}{2}\{2g + 2(f-g)\} = f \in U$. ■

2.2.2. Tétel. *$\langle \mathcal{C}, \tau_c\rangle$ hordó tér akkor és csak akkor, ha minden F nem kompakt, zárt halmazhoz létezik $f \in \mathcal{C}$, ami nem korlátos F-en.*

Bizonyítás. (i) A következőkben jelölje $^\circ$ a $\langle \mathcal{C}, \mathcal{C}^*\rangle$-ra vonatkozó, míg $^\bullet$ a $\langle \mathcal{B}, \mathcal{B}^*\rangle$-ra vonatkozó polárist, továbbá $^{-n}$ a normatopológiában való lezárást. Tegyük fel, hogy $\langle E, \tau\rangle$ rendelkezik a tételben kimondott tulajdonsággal. Legyen $H \subseteq \mathcal{C}$ egy hordó, ekkor $H \cap \mathcal{B}$ abszolút konvex, elnyelő. Mivel minden $\mathcal{C}$ feletti folytonos funkcionál megszorítása $\mathcal{B}$-re folytonos a τ_n topológiában is, ezért $H^\circ\restriction_{\mathcal{B}} \subseteq (H \cap \mathcal{B})^\bullet$. Ebből, felhasználva a 0.2.5 bipoláris tételt $\overline{\mathrm{ac}}^n(H \cap \mathcal{B}) = (H \cap \mathcal{B})^{\bullet\bullet} \subseteq (H^\circ\restriction_{\mathcal{B}})^\bullet \subseteq H \cap \mathcal{B}$. Az utolsó tartalmazásnál felhasználtuk, hogy $H^{\circ\circ} = H$, hiszen H hordó. Nyilvánvalóan $H \cap \mathcal{B} \subseteq \overline{\mathrm{ac}}^n(H \cap \mathcal{B})$, tehát végülis azt kaptuk, hogy $H \cap \mathcal{B} = \overline{\mathrm{ac}}^n(H \cap \mathcal{B})$, így $H \cap \mathcal{B}$ zárt a τ_n topológiában is, azaz hordó a τ_n topológiára nézve. Mivel $\langle \mathcal{B}, \tau_n\rangle$ (B)-tér, és így hordó tér is a 2.1.7 Következmény szerint, ezért $H \cap B$ τ_n-nullkörnyezet. Tehát létezik δ, hogy $f \in \mathcal{C}$ és $\|f\|_E \le \delta$ esetén $f \in H$. Ezután legyen $K = \mathrm{cl}(\bigcup\{\mathrm{supp}(\varphi) : \varphi \in H^\circ\})$. Ha $f\restriction_K = 0$, akkor $\varphi(f) = 0$ minden $\varphi \in H^\circ$ esetén, ezért $f \in H^{\circ\circ} = H$. A 2.2.1 Lemma szerint, ekkor $\|f\|_K \le \frac{1}{2}\delta$ esetén $f \in H$ is fennáll, ami K kompaktsága esetén azt jelentené, hogy H τ_c-nullkörnyezet. Tehát $\mathcal{C}$ valóban hordótér lenne.

Megmutatjuk, hogy K valóban kompakt. Indirekt tegyük fel, hogy K nem kompakt. Persze K zárt, ezért létezik $f \in \mathcal{C}$, ami nem korlátos a K halmazon. Legyen $n \in \mathbb{N}$-re $A_n = \{x \in E : |f(x)| > n\}$. Ezek a halmazok nyilván nyíltak, $A_{n+1} \subseteq A_n$, $\bigcap_n \overline{A}_n = \emptyset$, illetve $K \cap A_n \ne \emptyset$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$-re. Válasszuk φ_n funkcionált H°-ből úgy, hogy $\mathrm{supp}(\varphi_n) \cap A_n \ne \emptyset$. E teljesen reguláris, ezért létezik $g_n^* \in \mathcal{C}$, amire $g_n^*\restriction_{E\setminus A_n} = 0$, $g_n^*(x) = 1$ egy $x \in \mathrm{supp}(\varphi_n) \cap A_n$ pontban, és $g_n^*\restriction_{A_n} > 0$. Ekkor $\varphi_n(g_n^*) \ne 0$, tehát egy alkalmas d_n számra és a $g_n = d_n g_n^*$ függvényre $\varphi_n(g_n) = 1$. Mivel $\bigcap_n \overline{A}_n = \emptyset$, ezért $g = \sum_n c_n g_n$ sor lokálisan egyenletesen konvergens c_n tetszőleges megválasztása esetén (csupán egy véges összegről van szó minden egyes pont egy kis környezetében). $\mathrm{supp}(\varphi_n)$ kompaktságának és $\bigcap_n \overline{A}_n = \emptyset$ fennállásának köszönhetően minden elég nagy m-re $\overline{A}_m \cap \mathrm{supp}(\varphi_n) = \emptyset$, ezért méginkább $A_m \cap \mathrm{supp}(\varphi_n) = \emptyset$. Egy részsorozatra áttérve, feltehető, hogy $A_m \cap \mathrm{supp}(\varphi_n) = \emptyset$ minden $m > n$ esetén. Amiből $\varphi_n(g) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_n(g_i)$. Ha a c_n együtthatókat úgy választjuk meg, hogy $\varphi_n(g) = n$, akkor azonnal látható, hogy nincs olyan $r > 0$ szám, amelyre $g \in (rH^\circ)^\circ$ teljesülne. $(rH^\circ)^\circ = \frac{1}{r}H^{\circ\circ} = \frac{1}{r}H$, így ellentmondásra jutottunk H elnyelőségével.

(ii) Megfordítva, tegyük fel, hogy $\langle \mathcal{C}, \tau_c \rangle$ hordó tér. Ha F nem kompakt, zárt, akkor legyen $U = \{f \in \mathcal{C} : \|f\|_F \leq 1\}$. Nyilvánvalóan $\mathbf{0} \in U$, U konvex és zárt. Persze tetszőleges kompakt halmazra $F \setminus K \neq \varnothing$, ezért E teljes regularitását kihasználva, minden $n \in \mathbb{N}$-re van $f \in \mathcal{C}$, hogy $f\restriction_K = 0$, f $F \setminus K$ egy pontjában éppen n, és általában $0 < f\restriction_{F\setminus K} \leq n$ is teljesül. Ebből látható, hogy U nem nullkörnyezet. Ez csak úgy lehet, ha U nem elnyelő, azaz van $g \in \mathcal{C}$, amit nem nyel el, ez pedig azt jelenti, hogy g nem korlátos az F halmazon.

■

$\langle E, \tau \rangle$ teljesen reguláris tér Čech-Stone kompaktifikációja $\langle \beta(E), \tau_\beta \rangle$. Erről a következőkben azt használjuk csak ki, hogy kompakt, T_4 tér, E sűrű benne, és tetszőleges $f \in \mathcal{C}$ korlátos függvény egyértelműen kiterjeszthető $f^* : \beta(E) \to \mathbb{R}$ folytonos függvénnyé, illetve tetszőleges $f \in \mathcal{C}$ függvény kiterjeszthető $f^* : \beta(E) \to [-\infty, +\infty]$ folytonos függvénnyé.

2.2.3. Tétel. *$\langle \mathcal{C}, \tau_c \rangle$ bornologikus pontosan akkor, ha minden $x \in \beta(E) \setminus E$ pontra létezik $f : \beta(E) \to [-\infty, +\infty]$ folytonos függvény, hogy $f(x) = +\infty$ és f véges az E halmazon.*

Bizonyítás. (i) Tegyük fel, hogy E a fenti tulajdonságú. Vegyük észre, hogy az E-re kirótt feltétel ekvivalens az alábbival. Minden $x \in \beta(E) \setminus E$ pontra létezik $\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \tau_\beta(x)$, hogy $E \cap \bigcap_n U_n = \varnothing$. Ugyanis legyenek az adott f esetén $U_n = \{y \in \beta(E) : |f(y)| > n\}$, ekkor U_n nyílt $\beta(E)$-ben, persze $x \in U_n$, így $U_n \in \tau_\beta(x)$, és természetesen $E \cap \bigcap_n U_n = \varnothing$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy adott $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, feltehető, hogy az U_n halmazok nyíltak és $U_n \supseteq \overline{U}_{n+1}$. Legyen még $U_0 = \beta(E)$. Legyen ezután $F_n = \overline{U}_{2n} \setminus U_{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Ekkor F_n diszjunkt, zárt halmazsorozat. Indukcióval definiálunk $f_n : \beta(E) \to \mathbb{R}$ folytonos függvények egy sorozatát. f_1^* legyen olyan folytonos függvény, hogy $f_1^*\restriction_{F_1} = 1$ és $f_1^*\restriction_{F_2} = 2$, ilyen persze létezik TIETZE tétele szerint. Ezután szintén a TIETZE tétel felhasználásával, legyen f_n^* olyan folytonos függvény, amelyre $f_n^*\restriction_{F_n} = n$ és $f_n^*\restriction_{\beta(E)\setminus U_{2n-1}} = f_{n-1}^*\restriction_{\beta(E)\setminus U_{2n-1}}$. Ezek után legyen $x \in E$ pontra $f(x) = f_n^*(x)$, ahol $x \in E \setminus U_{2n+1}$. $\bigcap_n \overline{U}_n = \varnothing$ és az f_n^* függvények definíciója miatt, f az egész E halmazon jóldefiniált és folytonos, tehát $f \in \mathcal{C}$. Ennek a függvénynek az f^* kiterjesztése $\beta(E)$-re folytonos, és nyilván $f^*(x) = +\infty$, ezzel az állítások ekvivalenciáját beláttuk.

Legyen V abszolút konvex halmaz, ami elnyel minden $[f_1, f_2]$ alakú halmazt. Megmutatjuk, hogy ekkor $V \in \tau_c(\mathbf{0})$. Ezzel kész is lennénk, hiszen az $[f_1, f_2]$ alakú halmazok τ_c korlátosak, tehát egy olyan halmaz, ami abszolút konvex és minden korlátost elnyel az null környezet, azaz a tér bornologikus.

Ha V elnyel minden $[f_1, f_2]$ alakú halmazt, akkor persze a $[-1_E, 1_E]$ intervallumot is. Tehát létezik $r > 0$, hogy $[-1_E, 1_E] \subseteq rV$. Legyen most $\delta = \frac{1}{r}$, ekkor $\|f\|_E \leq \delta$ esetén $f \in V$ is fennáll. A V tartóhalmazának nevezünk egy olyan K $\beta(E)$-beli, kompakt halmazt, amelyre a következő fennáll: valahányszor $f^*\restriction_K = 0$, akkor $f \in V$. Tegyük fel, hogy K a V-nek E-beli tartóhalmaza. Ekkor a 2.2.1 Lemma szerint, $f \in \mathcal{C}$, $\|f\|_K \leq \frac{1}{2}\delta$ fennállásából $f \in V$ következik. Tehát $V \in \tau_c(\mathbf{0})$.

Megadunk egy E-beli K tartóhalmazát V-nek, amivel az előbbiek szerint kész is leszünk. Először a tartóhalmazok egy ekvivalens jellemzését adjuk meg. Legyen F zárt olyan, hogy valahányszor $F \subseteq U$, U nyílt $\beta(E)$-ben és minden $f \in \mathcal{C}$-re $f^*\restriction_U = 0$, akkor $f \in V$. Nyilvánvalóan V egy tartóhalmaza rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Másrészt legyen F ilyen tulajdonságú, $f \in \mathcal{C}$ és $f^*\restriction_F = 0$. Legyen továbbá $g = \sup(f, \frac{\delta}{2} 1_E) + \inf(f, -\frac{\delta}{2} 1_E)$.

$2g^*$ eltűnik a $\{x : x \in \beta(E), |f^*(x)| < \frac{\delta}{2}\}$ halmazon, ami egy nyílt $\beta(E)$-beli környezete F-nek. Ezért $2g \in V$. Persze $2(f-g) \in \delta[-1_E, 1_E] \subseteq V$, így V konvexitása miatt $\frac{1}{2}\{2g + 2(f-g)\} = f \in V$. Ezzel beláttuk, hogy F tartóhalmaza V-nek.

Most belátjuk, hogy véges sok tartóhalmaz metszete szintén tartóhalmaz. Természetesen elég megmutatnunk, hogy ha K_1, K_2 tartóhalmazai V-nek, akkor $K = K_1 \cap K_2$ is tartóhalmaza V-nek. Legyen adott $f \in \mathcal{C}$ és $U \subseteq \beta(E)$ nyílt, amelyre $K \subseteq U$ és $f^*\restriction_U = 0$. Mivel K_1 és $K_2 \setminus U$ diszjunkt, zárt halmazok, ezért léteznek V_1, V_2 nyílt halmazok és g^* folytonos függvény $\beta(E)$-n úgy, hogy $K_1 \subseteq V_1, K_2 \setminus U \subseteq V_2$ és $g^*\restriction_{V_1} = 1$, illetve $g^*\restriction_{V_2} = 0$. $U \cup V_2$ környezete K-nak. Legyen $g = g^*\restriction_E$. Ekkor $2fg\restriction_{(U\cup V_2)\cap E} = 0$, és mivel $U \cup V_2$ nyílt, illetve E sűrű $\beta(E)$-ben, ezért $(2fg)^*\restriction_{U\cup V_2} = 0$. Lévén, hogy $U \cup V_2$ környezete K_2-nek, ezért $2fg \in V$. Teljesen hasonlóan $(2f(1_E - g))\restriction_{V_1} = 0$, tehát $2f(1_E - g) \in V$, így V konvexitásából $f \in V$. Kaptuk, hogy K valóban tartóhalmaza V-nek. Legyen $C = \bigcap\{K : K \text{ tartóhalmaza V-nek}\}$. C nem üres, kompakt, hiszen kompakt térben nem üres zártak centrált rendszerének metszete nem üres.

Állítjuk, hogy C tartóhalmaza V-nek. Legyen ugyanis f^* folytonos $\beta(E)$-n és $f^*\restriction_U = 0$, ahol U nyílt környezete C-nek. $\beta(E) \setminus U$ kompakt és $\{\beta(E) \setminus K : K \text{ tartóhalmaza V-nek}\}$ egy nyílt fedése, ezért létezik $\{K_i : i = 1 \ldots n\}$ úgy, hogy $D = \bigcap_{i=1}^n K_i \subseteq U$. D tartóhalmaza V-nek, és $f^*\restriction_D = 0$, következésképp $f \in V$. Tehát valóban C tartóhalmaza V-nek.

Ha megmutatnánk, hogy $C \subseteq E$, akkor készen is lennénk, ahogy a korábbiakban megállapítottuk. Legyen $x \in \beta(E) \setminus E$, a legelső észrevétel szerint ekkor létezik $\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \tau_\beta(x)$, egy monoton halmazcsalád, amelyre $E \cap \bigcap_{n=1}^\infty \overline{U}_n = \varnothing$. $\beta(E) \setminus U_n$ halmazok valamelyike tartóhalmaza V-nek. Ha ezt tudjuk, akkor minden $x \in \beta(E) \setminus E$ pontra legyen $K(x)$ egy ilyen tartóhalmaz. Ekkor $C \subseteq \bigcap_{x\in\beta(E)\setminus E} K(x) \subseteq E$ bizonyítja állításunkat.

Ha $\beta(E) \setminus U_n$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazok semelyike sem tartóhalmaz, akkor találhatóak $f \in \mathcal{C}$ függvények, amelyekre $f_n^*\restriction_{\beta(E)\setminus U_n} = 0$, de $f_n \notin V$. Legyen ekkor $g = \sup\{n|f_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Ha $m \geq n$, akkor $E \setminus \overline{U}_n \subseteq \beta(E) \setminus U_m$, ezért ekkor $f_m\restriction_{E\setminus\overline{U}_n} = 0$. Ezek szerint a g és a $\sup\{|f_1|, 2|f_2|, \ldots, n|f_n|\} \in \mathcal{C}$ függvények megegyeznek az $E \setminus \overline{U}_n$ halmazon. De ezek a halmazok lefedik E-t, ebből viszont következik, hogy $g \in \mathcal{C}$. Persze V a feltétel szerint elnyeli a $[-g, g]$ halmazt is, azaz találhatunk olyan $r > 0$ számot, amellyel $[-g, g] \subseteq rV$, speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$-re $nf_n \in rV$. Ha most $n > r$, akkor V szimmetrikussága miatt $f_n \in V$. Ez pedig ellentmond az f_n függvények megválasztásának. Ezzel *(i)* bizonyítását befejeztük.

(ii) A megfordításhoz tegyük fel, hogy létezik $x \in \beta(E) \setminus E$, hogy $f^*(x)$ véges minden $f \in \mathcal{C}$-re. Legyen $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}, f \mapsto f^*(x)$, ez persze lineáris funkcionál. Megmutatjuk, hogy korlátos. Legyen $B \subseteq \mathcal{C}$ korlátos halmaz. Ha most φ nem korlátos, akkor létezik $f_n \in B$ sorozat, amelyre $f_n(x) = \varphi(f_n) \to +\infty$. Legyen most $U_n = \{y : y \in \beta(E), |f_n^*(y)| > |f_n^*(x)| - 1\}$, ekkor $U_n \in \tau_\beta(x)$. Feltételezésünk és a legelső észrevételünk szerint létezik $z \in E \cap \bigcap_n U_n$. Erre a z pontra azonban $f_n(z) \to +\infty$ állna fenn, ami ellentmondás B korlátosságával. A φ funkcionál nem folytonos, ugyanis tetszőleges $K \subseteq E$ kompakt halmazra létezik $f^* : \beta(E) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre $f^*(x) = 1$ és $f^*\restriction_K = 0$. Tehát a 2.1.3 Tétel mutatja, hogy $\langle \mathcal{C}, \tau_c \rangle$ nem bornologikus tér. ■

2.2.4. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy általában a 2.2.3 Tétel feltétele maga után vonja a 2.2.2 Tétel feltételének teljesülését is, tehát ha $\langle \mathcal{C}, \tau_c \rangle$ bornologikus, akkor hordó tér is egyben.

2.3. Példák

Ebben a részben az előző részek eredményeihez kapcsolódó példákat mutatunk, rávilágítva a különböző tulajdonságok (metrizálhatóság, Baire térség, hordó térség, bornologikusság, teljesség) közötti kapcsolatra.

2.3.1. Példa. (Hordó tér, ami normálható, de nem teljes.) Legyen X azon $x \in \ell^1 = \ell^1(\mathbb{K})$ sorozatok halmaza, amelyre $x_n = 0$ minden $n \in \{m : m \neq n_k, k \in \mathbb{N}\}$, ahol n_k természetes számok valamely sorozata, amelyre $\lim_{k\to+\infty} \frac{k}{n_k} = 0$. Nyilvánvalóan X egy $\mathbb{K}$-vektortér, és $\langle X, \|\cdot\| \rangle$ normált tér. X sűrű részhalmaza ℓ^1 (B) térnek. Ugyanis tekintsünk egy $x \in \ell^1$ sorozatot, és legyen $m \in \mathbb{N}$, hogy $\sum_{n=m}^{\infty} |x_n| < \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges rögzített. Ha $y = P_{m-1}x$, akkor $y \in X$ triviálisan teljesül, és persze

$$\|x - y\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n| = \sum_{n=m}^{\infty} |x_n| < \varepsilon,$$

tehát X valóban sűrű ℓ^1-ben. Legyen τ_n ℓ^1 normatopológiájának megszorítása X-re. Mivel $X \neq \ell^1$, ezért $\langle X, \tau_n \rangle$ nem teljes, de persze normálható tér. Megmutatjuk, hogy $\langle X, \tau_n \rangle$ hordó tér, ehhez elegendő megmutatnunk a 2.1.9 Megjegyzés szerint, hogy minden X^*-beli gyengén korlátos halmaz X^*-ban erősen korlátos is. ℓ^1 duálisa ℓ^∞, és mivel X sűrű ℓ^1-ben, ezért $X^* = \ell^\infty$. Legyen $B \subseteq X^*$ tetszőleges rögzített halmaz, vezessük be a következő jelölést: $K(x) = \sup\{|f(x)| : f \in B\}$. Legyen $B \subseteq X^*$ most gyengén korlátos halmaz, ez azt jelenti, hogy tetszőleges $x \in X$-re $K(x)$ korlátos halmaz $\mathbb{K}$-ban. Az erős korlátosság X^*-ben a norma szerinti korlátosságot jelenti.

Tegyük fel, hogy $B \subseteq X^*$ nem normakorlátos. Indukcióval definiálunk egy $x \in X$ vektort és f^k B-beli sorozatot. Legyen $f^1 \in B$, hogy $\|f^1\| > 1$, és legyen $n_1 \in \mathbb{N}$, amelyre $|f^1_{n_1}| > 1$. Tekintsük az $y^1 = \delta^1$ vektort, továbbá legyen $x_{n_1} = 1$ és $K_1 = 1$. Legyen most $k > 1$, és tegyük fel, hogy $i < k$ esetén már definiáltuk az f^i, y^i és a monoton növő n_i sorozatot. Legyen $K_k = \sum_{i=1}^{k-1} K(y^i)$. Mivel B nem normakorlátos, de gyengén korlátos, ezért van $f \in B$ és $m \in \mathbb{N}$, amelyekre $m > n_{k-1}, k^2$, és $\|f\| > |f_m| > k^3 K_k \max\{\|f^1\|, \ldots, \|f^{k-1}\|\}$. Ezek után legyen $f^k = f$, $n_k = m$,

$$y^k_{n_k} = \frac{1}{k^2 \max\{\|f^1\|, \ldots, \|f^{k-1}\|\}}$$

és $y^k_n = y^{k-1}_n$, ha $n \neq n_k$, valamint legyen $x_{n_k} = y^k_{n_k}$. Ezzel definiáltuk f^k, n_k és x_{n_k} sorozatokat. Most legyen $x_n = 0$, ha $n \notin \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$. Ezzel megadtunk egy ω-beli vektort, ami, felhasználva x definícióját és azt a tényt, hogy $\|f^1\| > 1$ és $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, láthatóan ℓ^1-beli, másrészt $0 \leq \lim_{i\to+\infty} \frac{i}{n_i} \leq \lim_{i\to+\infty} \frac{i}{i^2} = 0$ miatt $x \in X$.

$$\begin{aligned} f^k(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n^k = \sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i} f_{n_i}^k \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} x_{n_i} f_{n_i}^k + x_{n_k} f_{n_k}^k + \sum_{i=k+1}^{\infty} x_{n_i} f_{n_i}^k \end{aligned}$$

Az alábbi egyenlőtlenségek nyilvánvalóak x, f^k és n_k definíciójából.

$$\left| \sum_{i=1}^{k-1} x_{n_i} f_{n_i}^k \right| \leq K(y^{k-1})$$

$$|x_{n_k} f_{n_k}^k| > \frac{k^3 K_k \max\{\|f^1\|, \ldots, \|f^{k-1}\|\}}{k^2 \max\{\|f^1\|, \ldots, \|f^{k-1}\|\}} = kK_k$$

$$\left| \sum_{i=k+1}^{\infty} x_{n_i} f_{n_i}^k \right| \leq \sum_{i=n_{k+1}}^{\infty} x_{n_i} |f_{n_i}^k| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \|f^k\| x_{n_i}$$

$$= \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\|f^k\|}{i^2 \max\{\|f^1\|, \ldots, \|f^{i-1}\|\}} \leq \sum_{i=n_k+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leq C.$$

Ezekből, felhasználva, hogy $K_k = \sum_{i=1}^{k-1} K(y^i)$ és $K_k - K(y^i) > 1$, ha $k > i > 1$, adódik, hogy $|f^k(x)| > C'k$ valamely $C' > 0$ konstanssal, minden elég nagy k-ra. Ekkor viszont ellentmondásra jutottunk B gyengén korlátosságával. Tehát B valóban normakorlátos, és ekkor $\langle X, \tau_n \rangle$ hordó tér.

2.3.2. Példa. (Bornologikus tér, ami nem hordó tér.) Tekintsük $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$-nek azt az X alterét, amely azon függvényekből áll, amelyek 0 egy jobboldali környezetén eltűnnek. Ekkor $\langle X, \tau_n \rangle$ normálható tér, ahol τ_n a $\mathcal{C}$ -beli szuprémum-norma topológia megszorítása X-re. Ekkor persze X bornologikus. Legyen $H = \{f : f \in X, |f(\frac{1}{n})| \leq \frac{1}{n}\}$. Nyilvánvaló, hogy H abszolút konvex, zárt. H elnyelő is. Valóban, ha ugyanis $g \in X$, akkor $g\restriction_U = 0$, ahol $U = [0, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$. Ekkor, mivel létezik n_0, hogy $n_0 < n$ esetén $\frac{1}{n} < \varepsilon$, tehát $f(\frac{1}{n}) = 0 \leq \frac{1}{n}$. Most $n \leq n_0$-hoz legyen r_n olyan, hogy $r_n g(\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$, valamint legyen $r = \max\{r_1, \ldots, r_{n_0}\}$. Nyilván $rg \in H$, azaz H elnyelő, következésképp hordó is. Belátjuk, hogy H nem $\mathbf{0}$-környezet. Legyen adott $\delta > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ olyan nagy, hogy $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{2}$. Triviálisan megadható olyan folytonos függvény, amelyre $f(\frac{1}{n}) = \frac{\delta}{2}$ és $\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| < \delta$. Ezzel kaptuk, hogy tetszőleges $0 < \delta$ számra $B(\mathbf{0}, \delta) \nsubseteq H$, tehát H nem nullkörnyezet. Végülis beláttuk, hogy $\langle X, \tau_n \rangle$ nem hordó tér.

2.3.3. Példa. (Bornologikus tér, ami nem hordó tér.) Legyen $\langle X, \tau \rangle = \langle \phi, \tau_n \rangle$, ahol τ_n ℓ^2 normatopológiájának megszorítása ϕ-re. Mivel ϕ sűrű ℓ^2-ben, ezért $X^* = \ell^2$. Ekkor az X^*-beli erősen korlátos halmazok a normakorlátos halmazok. Triviális, hogy egy $B \subseteq X^*$ halmaz gyengén korlátossága azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $\pi_n(B)$ korlátos halmaz $\mathbb{K}$-ban. Ekkor a 2.1.1 Tétel *f)* része szerint $\langle X, \tau \rangle$ nem hordó tér, hiszen X^*-beli gyengén és erősen korlátos halmazok nem ugyanazok. Persze, mivel $\langle X, \tau \rangle$ metrizálható, ezért bornologikus is a 2.1.6 Tétel szerint.

2.3.4. Példa. (Hordó tér, ami nem bornologikus.) A 2.2.2 és 2.2.3 Tételeket szeretnénk használni. Ehhez olyan $\langle E,\tau\rangle$ topologikus teret kellene mutatnunk, ami a 2.2.2 Tétel feltételeit kielégíti de a 2.2.3 Tételét nem. Legyen tehát $E = \{\xi : \xi \in \omega_2, \mathrm{cf}(\xi) \neq \omega_0\}$. Állítjuk, hogy $\langle E,\tau\rangle$ megfelel elvárásainknak, ahol τ a ω_2 rendezéstopológiájának megszorítása E-re. Könnyen látható, hogy $\langle E,\tau\rangle$ T_4 tér. Az is egyszerűen ellenőrizhető, hogy megszámlálható sok E-beli zárt (nyílt) uniója (metszete) is zárt (nyílt). Ha most $F \subseteq E$ végtelen halmaz, akkor van $H \subseteq F$, hogy $H = \{\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n < \dots\}$ megszámlálhatóan végtelen, persze ekkor zárt is az előző miatt. Legyen $f(\xi_n) = n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ez a függvény folytonos a H altéren, így Tietze tétele szerint kiterjeszthető folytonosan E-re. Tehát a 2.2.2 Tétel feltétele teljesül E-re, következésképp $\langle \mathcal{C},\tau_c\rangle$ hordó tér.

Tekintsünk most egy tetszőleges $\xi_1 < \xi_2 < \dots$ monoton növő E-beli sorozatot. Ekkor persze ω_2-ben létezik $\lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi$, de E megválasztása miatt $\xi \notin E$. $\beta(E)$ kompaktsága miatt létezik ξ_{n_k} részsorozat, hogy $\xi_{n_k} \to x \in \beta(E)$. Legyen U zárt környezete x-nek (ilyen van, hiszen $\beta(E)$ T_4). Ekkor egy indextől kezdve ξ_{n_k} sorozat is $E\cap U$-ban halad. Létezik V zárt halmaz ω_2-ben, melyre $E\cap V = E\cap U$, ekkor $\xi = \lim_{n\to\infty}\xi_n = \lim_{k\to\infty}\xi_{n_k} \in E\cap V$. Tehát egy indextől kezdve ξ_n sorozat $E\cap V = E\cap U$-ban halad, azaz $\xi_n \to x$ $\beta(E)$-ben. Tehát minden $\xi \in \omega_2$, $\mathrm{cf}(\xi) = \omega_0$ rendszámhoz egyértelműen tartozik egy $x \in \beta(E)$ elem, amelyre egy E-beli, monoton, megszámlálható sorozat éppen akkor tart ξ-hez ω_2-ben, amikor ez a sorozat x-hez tart $\beta(E)$-ben. Ezért ω_2 azonosítható $\beta(E)$ egy topologikus alterével. Legyen $x \in \beta(E)$ olyan, hogy x nem felel meg az azonosításnál semelyik ω_2-beli elemnek. Ilyen természetesen van, mert ω_2 nem kompakt. Ha létezik U_n $(n \in \mathbb{N})$ nyílt, monoton csökkenő, $\beta(E)$-beli sorozata x környezeteinek, amelyre $E\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n = \varnothing$, akkor választhatunk $\xi_n \in (E\cap U_n)\setminus U_{n-1}$ rendszámokat. Nyilván feltehetjük, hogy így monoton növő sorozatot kaptunk. Ekkor viszont ellentmondásra jutottunk, ugyanis ω_2-ben ennek a monoton sorozatnak létezik limesze, mondjuk ez ξ, és ugyanez a sorozat $\beta(E)$-ben éppen x-hez tart, tehát x a fenti azonosításban ξ-hez tartozna, ez pedig lehetetlen. Ezzel beláttuk, hogy a 2.2.3 Tétel feltétele nem teljesül $\langle E,\tau\rangle$-ra, így $\langle \mathcal{C},\tau_c\rangle$ nem bornologikus.

2.3.5. Példa. (Bornologikus tér, ami nem metrizálható.) Tekintsük $\langle \mathbb{K}_\alpha,\tau_\alpha\rangle$ topologikus vektortereket, ahol minden $\alpha < \omega_1$ rendszámra $\langle \mathbb{K}_\alpha,\tau_\alpha\rangle$ izomorf $\langle \mathbb{K},\tau\rangle$-val, ahol τ az euklideszi topológia. Ekkor $\prod_{\alpha<\omega_1}\langle \mathbb{K}_\alpha,\tau_\alpha\rangle$ bornologikus tér a 0.2.9 Tétel szerint. Viszont nyilvánvalóan nem metrizálható, hiszen ekkor M_1 tér lenne, de ez most természetesen nem teljesül.

2.3.6. Példa. (Hordó tér, ami nem Baire tér.) A 0.2.10 Tétel szerint minden (LB) tér hordó tér is. Tehát csak egy olyan (LB) teret kellene mutatnunk, ami nem Baire tér. Legyen $\langle X_n,\tau_n\rangle = \langle \mathbb{K}^n,\tau^n\rangle$, ahol τ^n a megfelelő euklideszi topológia. Jelölje g_{nk} a $\langle X_k,\tau_k\rangle \to \langle X_n,\tau_n\rangle$ kanonikus beágyazást $(k,n \in \mathbb{N}, k < n)$. Legyen $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\iota_n : X_n \to X$ a kanonikus beágyazás minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ekkor a $\{\langle X_n,\tau_n,\iota_n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ család által meghatározott induktív topológia X-en Hausdorff topológia lesz, jelölje ezt τ. Képezzük a $\varinjlim g_{nk}\langle X_k,\tau_k\rangle$ induktív limeszt, ez természetesen létezik a 0.2.11 Tétel szerint, sőt $\langle X,\tau\rangle = \varinjlim g_{nk}\langle X_k,\tau_k\rangle$. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, és X_n alterek zártak, hiszen véges dimenziósak. Persze X_n-ek τ-belseje üres. Ebből pedig látható, hogy $\langle X,\tau\rangle$ nem Baire tér, viszont nyilvánvalóan (LB) tér.

3. fejezet

FK terek, Silvermann-Toeplitz típusú tételek

Ebben a részben végtelen mátrixok által meghatározott lineáris leképezésekről lesz szó. O. TOEPLITZ 1912-ben jellemezte az elemi analízis eszközeivel azokat a mátrixokat, amelyek a konvergens sorozatok teréből szintén a konvergens sorozatok terébe képeznek. Ehhez a tételhez hasonló eredményeket szeretnénk bemutatni. Az első két szakasz az (FK) terek elméletének néhány alapvető eredményét tárgyalja. Először bevezetünk számos új fogalmat, ezekre példákat mutatunk és a legismertebb sorozatterek esetén körüljárjuk ezeket a fogalmakat. A harmadik részben lesz igazán látható, hogy az (FK) terek elmélete milyen hasznosnak bizonyul, hiszen az elmélet segítségével könnyűszerrel jellemezhetők egyes mátrixleképezések. Az apparátus erejét és hasznát bizonyítja, hogy TOEPLITZ igencsak hosszadalmas bizonyítása helyett könnyen bizonyítható tételek egész sorát kapjuk, ezek közül természetesen TOEPLITZ tétele sem marad ki. Az utolsó néhány rész ezeket a tételeket tárgyalja. Konkrét (FK) terek közötti mátrixleképezések jellemzését adjuk a kiépített elmélet segítségével. A tételek nagy száma miatt, az eligazodást megkönnyítendő a dolgozat végén táblázatba foglalva hivatkozásokat találunk az egyes tételekre.

3.1. (FK) terek. Példák

Bevezetjük az (FK) terek fogalmát és néhány az elméletben fontos alapfogalmat, majd ezekre példákat mutatunk. Ezek a példák azonban igen fontosak lesznek a későbbi részekben, hiszen segítségükkel bizonyítunk végtelen mátrixokra tételeket.

Innentől kezdve az ℓ^p jelölésbe beleértjük, hogy $p < \infty$, illetve ha külön nem mondjuk, akkor $p > 1$. A megfelelő szövegkörnyezetben pedig q mindig olyan valós szám, amelyre $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. A mostantól mindig végtelen mátrixot jelöl.

Az egyik legfontosabb eszközünk a BANACH-STEINHAUS tétel lesz, mégpedig a következő két alakban. Ezek a 2.1.1 Tétel és a 2.1.2 Megjegyzés közvetlen következményei.

3.1.1. Tétel (BANACH-STEINHAUS, egyenletes korlátosság). *Ha X (F) tér, Y lokálisan konvex tér, $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, és $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ pontonként korlátos, akkor ekvikorlátos is.*

3.1.2. Tétel (BANACH-STEINHAUS). *Ha X (F) tér, $f_n \in X^*$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, és minden $x \in X$ esetén létezik $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, akkor $f \in X^*$.*

3.1.3. Megjegyzés. Fontos lesz még a továbbiakban a következő: a 2.1.6 Tétel szerint egy (F) tér bornologikus, tehát a 2.1.3 Tétel szerint (F) téren értelmezett, lokálisan konvex térbe képező lineáris leképezés pontosan akkor korlátos, ha folytonos..

3.1.4. Definíció. Egy $\langle X, \tau\rangle$ (F) teret (FK) térnek nevezünk, ha $X \subseteq \omega$ és $\tau_\omega \leq \tau$, azaz az $X \to \omega$ beágyazás folytonos. Ez utóbbi ekvivalens azzal, hogy a π_n koordinátafüggvények τ-folytonosak, hiszen a τ_ω topológiát a $|\pi_n|$ félnormák generálják. (BK) térnek nevezzük az olyan (FK) tereket, amelyek (B) terek is egyben. Egy $\langle X, \tau\rangle$ (FK) teret (AK) térnek hívunk, ha $\phi \subseteq X$ és $P_n x \to x$, azaz $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \delta^n$. Ha $\langle X, \tau\rangle$ (FK) tér és ϕ sűrű X-ben, akkor (AD) térről beszélünk.

A definícióból nyilvánvaló, hogy $\langle \omega, \tau_\omega\rangle$ (FK) tér.

3.1.5. Definíció. Vezessük be a következő jelölést $cs = \{x \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ konvergens}\}$. Legyen $\|x\|_{cs} = \sup_m |\sum_{k=1}^{m} x_k|$. Hasonlóképpen legyen $bs = \{x \in \omega : \sup_m |\sum_{k=1}^{m} x_k| < \infty\}$ és $\|x\|_{bs} = \sup_m |\sum_{k=1}^{m} x_k|$. Legyen továbbá $cs_0 = \{x : x \in cs \text{ és } \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0\}$, és $\|\cdot\|_{cs_0} = \|\cdot\|_{cs}\restriction_{cs_0}$. Könnyen látható, hogy cs, cs_0 és bs vektorterek, továbbá $\|\cdot\|_{cs}$, $\|\cdot\|_{cs_0}$ illetve $\|\cdot\|_{bs}$ valóban normák a megfelelő téren. Nyilvánvaló az is, hogy $cs = cs_0 \oplus \delta^1$.

3.1.6. Definíció. Legyen $z \in \omega$, $X \subseteq \omega$ és $Y \subseteq \omega$ altér, vezessük be a következő jelöléseket: $z^{-1} \cdot Y := \{x \in \omega : x \cdot z \in Y\}$, $z^\beta := z^{-1} \cdot cs$. $M(X, Y) := \{z \in \omega : x \cdot z \in Y \text{ minden } x \in X\text{-re}\}$ Speciális esetként, $X^\beta := M(X, cs)$, ezt az X β-duálisának nevezzük. Egyszerűen belátható, hogy $z^{-1} \cdot Y$ és $M(X, Y)$ vektorterek.

3.1.7. Állítás. *Legyen $X, Y \subseteq \omega$ és $X \subseteq Y$, ekkor a következők teljesülnek: $X \subseteq X^{\beta\beta}$, $X^{\beta\beta\beta} = X$, $Y^\beta \subseteq X^\beta$.*

Bizonyítás. Az első és utolsó állítás nyilvánvaló a β-duális definíciójából. Ezeket felhasználva, $X^\beta \subseteq (X^\beta)^{\beta\beta}$, illetve $X^\beta \supseteq (X^{\beta\beta})^\beta$ azonnal adja a második állítást is. ■

Néhány, most következő tételben hivatkozni fogunk később bizonyításra kerülő tételekre, illetve hallgatólagosan használni fogjuk a 3.2.2 Tételt. Természetesen ezen későbbi tételek bizonyításakor nem használjuk a segítségükkel bizonyított eredményeket.

3.1.8. Tétel. *Legyenek X, Y (FK) terek, melyek topológiáját rendre a $\mathcal{P} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ és a $\mathcal{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ félnormacsaládok határozzák meg. Tegyük fel továbbá, hogy $Z = X \oplus Y$. Ekkor Z (FK) tér, X, Y zárt alterei, továbbá ha X, Y (BK) terek, akkor Z is az.*

Bizonyítás. Lássuk el Z-t a $\{p \oplus q : p \in \mathcal{P}, q \in \mathcal{Q}\}$ félnormacsalád által meghatározott τ_Z topológiával. Ha z^k τ_Z-Cauchy sorozat Z-ben és $z^k = x^k + y^k$, akkor x^k és y^k Cauchy sorozatok X-ben illetve Y-ban, ekkor persze létezik $x \in X$ és $y \in Y$, hogy $x^k \to x$ és $y^k \to y$. Ha most $p \in \mathcal{P}$ és $q \in \mathcal{Q}$, akkor $p(x - x^k) \to 0$ és $q(y - y^k) \to 0$. Legyen $r = p \oplus q$, nyilvánvalóan r is félnorma, és ha $z = x + y$, akkor $r(z - z^k) = p(x - x^k) + q(y - y^k) \to 0$. Ezzel beláttuk, hogy $\langle Z, \tau_Z\rangle$ (F) tér.

Megmutatjuk, hogy Z (FK) tér is. Tegyük fel, hogy $x^k + y^k = z^k \to \mathbf{0}$ Z-ben, ekkor mivel tetszőleges $p \in \mathcal{P}$ és $q \in \mathcal{Q}$ esetén $p(x^k) \le p(x^k) + q(y^k) \to 0$ illetve $q(y^k) \le p(x^k) = q(y^k) \to 0$, ezért $x^k \to \mathbf{0}$ és $y^k \to \mathbf{0}$ X-ben illetve Y-ban. Tehát, mivel X, Y (FK) terek, ezért ω-ban is érvényes a konvergencia. Következésképp $z^k \to \mathbf{0}$ ω-ban, ezzel pedig beláttuk, hogy Z valóban (FK) tér.

Ha most $x \in X$, $p \in \mathcal{P}$ illetve $q \in \mathcal{Q}$, és $r = p \oplus q$, akkor $r(x) = p(x) + q(\mathbf{0})$, tehát X topológiája $\tau_Z\lceil_X$. Ekkor a 3.2.2 Tétel szerint X zárt Z-ben. Ugyanígy látható be, hogy Y is zárt Z-ben.

Az utolsó állítás nyilvánvaló, hiszen $\|\cdot\|_Z = \|\cdot\|_X \oplus \|\cdot\|_Y$ norma. ∎

3.1.9. Tétel. *(i) ℓ^1, ℓ^∞, ℓ^p, c, c_0 (BK) terek, ℓ^1, ℓ^p, c_0 (AK) tér is. $\ell^* = \ell^\infty$, $c_0^* = \ell^1$, $(\ell^p)^* = \ell^q$ (sőt ez az azonosítás izometrikus, illetve mindhárom esetben a funkcionálok hatása a következő: $x \mapsto xy$ alkalmas y-nal). $c^* = \ell^1$, az azonosítás pedig a következő $f \in c^*$ akkor és csak akkor, ha $f(x) = e\lim_{n\to\infty} x_n + bx$, ahol b alkalmas ℓ^1-beli vektor és $e = e(f) = f(\mathbf{1}) - \sum_{k=1}^\infty f(\delta^k)$. c, c_0 zárt alterei ℓ^∞-nek. $c = c_0 \oplus \mathbf{1}$. (ii) $(\ell^1)^\beta = \ell^\infty$, $(\ell^\infty)^\beta = c_0^\beta = c^\beta = \ell^1$. $(\ell^p)^\beta = \ell^q$.*

Bizonyítás. A tétel első része jól ismert eredményeket sorol fel, illetve az állítások bizonyítása triviális.

$(\ell^1)^\beta \supseteq \ell^\infty$ nyilvánvaló. Az $(\ell^1)^\beta \subseteq \ell^\infty$ tartalmazás belátásához legyen $y \in (\ell^1)^\beta$ és $f : \ell^1 \to \mathbb{K}$, $f(x) = xy$. Ekkor f folytonos lineáris funkcionál, hiszen $f^m(x) = \sum_{k=1}^m x_m y_m$ $(m \in \mathbb{N})$ folytonos lineáris funkcionálok sorozata, és $f = \lim_{m\to\infty} f_m$. Így, alkalmazva a 3.1.2 Banach-Steinhaus tételt, f valóban folytonos. Persze $|y_n| = |f(\delta^n)| \le \|f\|\|\delta^n\| = \|f\|$, tehát $y \in \ell^\infty$.

$\ell^1 \subseteq (\ell^\infty)^\beta$ és $\ell^1 \subseteq c_0^\beta$ nyilvánvalóak. Legyen $y \in (\ell^\infty)^\beta$, illetve $y \in c_0^\beta$. Az előzőhöz hasonlóan legyen $f^m \in (\ell^\infty)^* = \ell^1$ (illetve $f^m \in c_0^*$), $f^m(x) = \sum_{k=1}^m x_k y_k$, ekkor *(i)* szerint $\|f^m\| = \sum_{k=1}^m |y_k|$. Mivel f^m pontonként konvergens funkcionálsorozat, ezért a 3.1.1 Banach-Steinhaus tétel szerint normakorlátos is, ez pedig bizonyítja, hogy $y \in \ell^1$. A 3.1.7 Tételből a c^β-ra vonatkozó állítás is következik, hiszen $\ell^1 = (c_0)^\beta \supseteq c^\beta \supseteq (\ell^\infty)^\beta = \ell^1$.

$\ell^q \subseteq (\ell^p)^\beta$ a 0.2.13 Hölder egyenlőtlenség miatt nyilvánvaló. A másik irányú tartalmazás pedig az előzőek mintájára a 3.1.2 Banach-Steinhaus tétel segítségével könnyen igazolható. ∎

3.1.10. Lemma. *Legyen $x \in \omega$, és tegyük fel, hogy $\sum_{k=1}^\infty |x_k - x_{k+1}| < \infty$, ekkor $x \in c$.*

Bizonyítás. Legyen $n, m \in \mathbb{N}$ és $m \ge n$, ekkor

$$|x_{m+1} - x_n| = |\sum_{k=n}^m x_k - x_{k+1}| \le \sum_{k=n}^m |x_k - x_{k+1}| \to 0,$$

ha $n, m \to \infty$. Tehát x_n Cauchy sorozat, így konvergens is. ∎

3.1.11. Definíció. Legyen $bv = \{x \in \omega : \sum_{k=1}^\infty |x_k - x_{k+1}| < \infty\}$, a korlátos változású sorozatok halmaza, illetve legyen $bv_0 = bv \cap c_0$.

3.1.12. Tétel. *bv és bv_0 (BK) terek az $\|x\|_{bv} = |\lim_{k\to\infty} x_k| + \sum_{k=1}^\infty |x_k - x_{k+1}|$ normával. Továbbá bv_0 (AK) tér és zárt altere bv-nek.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy bv és bv_0 vektorterek, illetve, hogy $x \mapsto \|x\|_{bv}$ norma. Ez utóbbi leképezés persze a 3.1.10 Lemma miatt értelmes. Tekintsük a $J : bv_0 \to \ell^1$, $x \mapsto (x_n - x_{n+1})_{n=1\ldots}$, ez persze lineáris és nyilvánvalóan injektív. J szürjetív is, inverze az $y \mapsto (\sum_{k=n}^{\infty} y_k)_{n=1\ldots}$ leképezés. $x \in bv_0$ esetén $\|x\|_{bv} = \|J(x)\|_1$, tehát bv_0 izometrikusan izomorf ℓ^1-gyel, következésképp (B) tér. $x_n = \sum_{k=n}^{m}(x_k - x_{k+1}) + x_{m+1} \to \sum_{k=n}^{\infty}(x_k - x_{k+1})$ $(m \to \infty)$. Ebből pedig $|x_n| \le \|x\|_{bv}$, ezzel azt kaptuk, hogy bv_0 (BK) tér.

Könnyen látható, hogy $bv = bv_0 \oplus \mathbf{1}$, tehát a 3.1.8 Tétel szerint bv szintén (BK) tér. Ebből az is azonnal adódik, hogy bv_0 zárt altere bv-nek. Ha $x \in bv_0$, akkor $\|x - P_m x\|_{bv} = \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k - x_{k+1}| \to 0$ $(m \to \infty)$. Ebből pedig következik, hogy bv_0 (AK) tér. ∎

3.1.13. Tétel. *cs, cs_0 és bs (BK) terek, továbbá cs (AK) tér is, és zárt altere bs-nek, emellett cs_0 zárt altere cs-nek.*

Bizonyítás. A jelölésünk és cs definíciója szerint $cs = c_A$, ahol A az a mátrix, amelyre $a_{nk} = 1$, ha $k \le n$ és $a_{nk} = 0$, ha $k > n$, azaz $(Ax)_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Könnyen látható, hogy az $A : c_A \to c$ leképezés inverze a $B : c \to c_A$, $y \mapsto (y_k - y_{k-1})_{k=1,\ldots}$ leképezés. Tehát A bijekció cs és c között. Ha cs-t ellátjuk az $\|x\|_{cs} = \|Ax\|_\infty$, azaz $\|x\|_{cs} = \sup_n |\sum_{k=1}^{n} x_k|$ normával, akkor cs (B) tér is. B szintén mátrix leképezés, ahol $b_{1k} = 1$, ha $k = 1$, $b_{1k} = 0$, ha $k \ne 1$, $b_{nn} = 1$, $b_{n(n-1)} = -1$ és egyébként pedig $b_{nk} = 0$. Tehát $|x_n| = |\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}(Ax)_k| \le \|Ax\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}| = \|x\|_{cs} \sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}|$, ebből pedig következik, hogy cs (BK) tér, hiszen nyilvánvalóan $\sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}|$ véges. Mivel $\|x - P_m x\|_{cs} = \sup_n \left|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right| \to 0$ $(m \to \infty)$, ezért cs valóban (AK) tér.

Azt, hogy cs_0 (BK) tér ugyanígy bizonyíthatjuk, csak nem c-vel, hanem c_0-lal lesz izometrikusan izomorf cs_0.

Az (AK) tulajdonság kivételével teljesen hasonló bizonyítás működik $bs = (\ell^\infty)_A$ esetére is, ahol A ugyanaz mint előbb.

cs (cs_0) zárt altere bs-nek (cs-nek), hiszen mindkettő (B) tér, cs (cs_0) altere bs-nek (cs-nek), és persze a normák cs-en (cs_0-on) megegyeznek. ∎

3.1.14. Tétel. *$bv_0^\beta = bs$, $bv^\beta = cs$, $cs^\beta = bv$ és $bs^\beta = bv_0$.*

Bizonyítás. Legyen $x, y \in \omega$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, illetve $z_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$. Ekkor $m \ge n$ esetén, Abel átrendezéssel:

$$s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^{m} x_k y_k = \sum_{k=n+1}^{m} x_k(z_k - z_{k-1}) = x_m z_m - x_{n+1} z_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (x_k - x_{k+1}) z_k. \tag{3.1}$$

Legyen $y \in bs$, azaz $|z_k| < K$ $(k \in \mathbb{N})$ egy rögzített K-val, továbbá legyen $x \in bv_0$ tetszőleges, $\varepsilon > 0$ rögzített, illetve $n \in \mathbb{N}$ olyan nagy, hogy $m \ge n$ esetén $|x_m| < \varepsilon$ és $\sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k - x_{k+1}| < \varepsilon$. Ekkor (3.1) szerint $|s_m - s_n| \le 3\varepsilon K$, tehát s_n Cauchy sorozat, amiből $y \cdot x \in cs$ minden $x \in bv_0$-ra, következésképp $y \in bv_0^\beta$. Kaptuk tehát, hogy $bs \subseteq bv_0^\beta$. Legyen most $y \in bv_0^\beta$, ekkor $f^m(x) = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k$ folytonos $bv_0 \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál, hiszen a koordinátafüggvények folytonosak. Tehát a 3.1.2 Banach-Steinhaus tétel szerint $f = \lim_{m\to\infty} f^m$ is folytonos, persze $f(x) = xy$. Mivel $f(\delta^n) = y_n$, ezért

$$\left|\sum_{k=1}^{n} y_k\right| = |f(P_n \mathbf{1})| \le \|f\| \|P_n \mathbf{1}\|_{bv_0} = \|f\|,$$

ebből pedig $y \in bs$ következik. Végül arra jutottunk, hogy $bv_0^\beta \subseteq bs$, tehát valóban $bv_0^\beta = bs$.

Mivel $\mathbf{1} \in bv$, ezért a 3.1.7 Tétel szerint $bv^\beta \subseteq \{\mathbf{1}\}^\beta = cs$. Legyen $y \in cs$, azaz $z \in c$, továbbá legyen $x \in bv$ tetszőleges, persze ekkor $x \in c$ is teljesül. Legyen K olyan, hogy $|z_k| < K$ minden $k \in \mathbb{N}$-re, $\varepsilon > 0$ pedig tetszőleges. (3.1) felhasználásával

$$|s_m - s_n| \leq K|x_n - x_{n+1}| + |x_n z_n - x_m z_m| + K \sum_{k=n+1}^{m-1} |x_k - x_{k+1}| < \varepsilon,$$

elég nagy $n, m \in \mathbb{N}$-re, felhasználva, hogy $x, x \cdot z \in c$ és $x \in bv$. Tehát s_n Cauchy sorozat, így konvergens. Ezzel beláttuk, hogy $x \cdot y \in cs$ minden $x \in bv$-re, azaz $y \in bv^\beta$. Ezzel azt kaptuk, hogy $cs \subseteq bv^\beta$, amiből már $cs = bv^\beta$ is adódik.

$bv \subseteq bv^{\beta\beta} = cs^\beta$ az előző felhasználásával. Legyen $x \in cs^\beta$ és $y \in c_0$. Ha $z_n = y_n - y_{n-1}$, akkor $z \in cs$, következésképp $x \cdot z \in cs \subseteq bs$. Abel átrendezéssel

$$\sum_{k=1}^{n} x_k z_k = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) y_k + x_n y_n = (Ay)_n,$$

ahol az A mátrixra $a_{nk} = x_k - x_{k+1}$, ha $k < n$, $a_{nn} = x_n$ és $a_{nk} = 0$, ha $k > n$. Ekkor $Ay \in \ell^\infty$, és persze ez teljesül minden $y \in c_0$ esetén. Legyen $f^n \in c_0^*$ a következő $f^n(y) = (Ay)_n$, ekkor a 3.1.9 Tétel első része szerint ez valóban folytonos, és $\|f^n\| = \sum_{k=1}^\infty |a_{nk}|$. $Ay \in \ell^\infty$ ($\forall\ y \in c_0$) azt jelenti, hogy f^n pontonként korlátos funkcionálsorozat. A 3.1.2 Banach-Steinhaus tétel szerint, ekkor $\sup_n \sum_{k=1}^\infty |a_{nk}| \leq K < \infty$. Tehát $\sup_n \sum_{k=1}^{n-1} |x_k - x_{k+1}| \leq K$, azaz $x \in bv$. Ezzel kaptuk, hogy $cs^\beta \subseteq bv$.

Az előző eredmények felhasználásával adódnak a következők. $bv_0 \subseteq bv_0^{\beta\beta} = bs^\beta$, $bs^\beta \subseteq cs^\beta = bv$. Legyen $x_n = (-1)^n$, persze ekkor $x \in bs$, ezért $bs^\beta \subseteq \{x\}^\beta$. Triviális, hogy $x^\beta \subseteq c_0$. Tehát kaptuk, hogy $bs^\beta \subseteq bv_0$ és $bv_0 \subseteq bs^\beta$, azaz $bs^\beta = bv_0$. ∎

3.1.15. Definíció. Legyen X (BK) tér. Azt mondjuk, hogy egy $D \subseteq \phi$ halmaz meghatározó halmaz X-ben, ha $B(\mathbf{0}, 1) \cap \phi = \mathrm{ac}(D)$.

3.1.16. Állítás. *ℓ^1-ben meghatározó halmaz $D = \{\delta^n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathrm{ac}(D)$, ekkor $x = \sum_{k=1}^m \alpha_k \delta^k$, ahol $\alpha_k \in \mathbb{K}$ és $\sum_{k=1}^m |\alpha_k| \leq 1$. Ebből látható, hogy $x \in \phi$. Nyilvánvaló, hogy $\|x\| \leq \sum_{k=1}^m |\alpha_k| \|\delta^k\| = \sum_{k=1}^m |\alpha_k| \leq 1$, tehát $x \in B(\mathbf{0}, 1)$. Ha $x \in B(\mathbf{0}, 1) \cap \phi$ és $x = \sum_{k=1}^m x_k \delta^k$, akkor $\sum_{k=1}^m |x_k| = \|x\| \leq 1$, következésképp $x \in \mathrm{ac}(D)$. ∎

3.1.17. Állítás. *A $D = \{P_n \mathbf{1} : n \in \mathbb{N}\}$ halmaz meghatározó halmaz bv_0-ban.*

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathrm{ac}(D)$, ekkor $x = \sum_{k=1}^m \alpha_k P_k \mathbf{1}$, ezért $x \in \phi$, és persze $\|x\| \leq \sum_{k=1}^m |\alpha_k| \|P_k \mathbf{1}\| = \sum_{k=1}^m |\alpha_k| \leq 1$. A másik irányú tartalmazáshoz legyen $x \in B(\mathbf{0}, 1) \cap \phi$, ekkor $x = \sum_{k=1}^m x_k \delta^k = \sum_{k=1}^m x_k (P_k \mathbf{1} - P_{k-1} \mathbf{1})$. Felhasználva, hogy $x_{m+1} = 0$, Abel átrendezéssel a következő adódik: $x = \sum_{k=1}^m (x_k - x_{k+1}) P_k \mathbf{1}$. Mivel $\sum_{k=1}^m |x_k - x_{k+1}| \leq \|x\| \leq 1$, ezért $x \in \mathrm{ac}(D)$. ∎

3.1.18. Állítás. *c_0-ban meghatározó halmaz* $D = \{x : x \in \phi, \forall k \in \mathbb{N}(x_k \neq 0 \Rightarrow |x_k| = 1)\}$.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathrm{ac}(D)$, ekkor $x = \sum_{k=1}^m \alpha_k y^k$, ahol $\sum_{k=1}^m |\alpha_k| \leq 1$ és $y^k \in D$. Ebből $\|x\| \leq \sum_{k=1}^m |\alpha_k| \|y^k\| \leq 1$. Tehát $\mathrm{ac}(D) \subseteq \phi \cap B(\mathbf{0}, 1)$. Legyen most $x \in \phi \cap B(\mathbf{0}, 1)$, $x = \sum_{k=1}^m x_k \delta^k$ olyan, hogy $|x_k| \geq |x_{k+1}|$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Legyen most $\varepsilon_k = \mathrm{sgn}(x_k)$ és $z^k = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j \delta^j$, persze ekkor $z^k \in D$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $x = \sum_{k=1}^m (|x_k| - |x_{k+1}|) z^k$. Mivel $|x_1| = \sum_{k=1}^m (|x_k| - |x_{k+1}|)$, és $|x_k| \leq 1$, ezért $x \in \mathrm{ac}(D)$. Tetszőleges $x \in \phi \cap B(\mathbf{0}, 1)$ esetére elmondható az előző gondolatmenet x koordinátáit monoton csökkenőleg rendezve. Mivel D invariáns az elemei koordinátáinak permutációjára, ezért $\mathrm{ac}(D)$ is az, következésképp tetszőleges $x \in \phi \cap B(\mathbf{0}, 1)$ esetén $x \in \mathrm{ac}(D)$ adódik. ∎

3.2. (FK) terek tulajdonságai

Most az (FK) terek legfontosabb tulajdonságait soroljuk fel. A bizonyításokból kiderül, hogy a 0.2.12 zárt gráf tétel milyen fontos szerepet játszik, hiszen gyakorlatilag az egész elmélet a 3.2.1 Tételen alapul, mely a zárt gráf tételt használja. Ebben a részben már előkerülnek a végtelen mátrixok is. Látni fogjuk, hogy végtelen mátrixok jellemzéséhez milyen nagyszerű eszközt nyújt az (FK) terek elmélete.

3.2.1. Tétel. *Legyen* $\langle X, \tau \rangle$ (F), $\langle Y, \tau' \rangle$ (FK) *tér,* $f : X \to Y$ *lineáris leképezés. Ha* $f : X \to \omega$ *folytonos, akkor* $f : X \to Y$ *folytonos.*

Bizonyítás. A 0.2.12 zárt gráf tétel szerint elegendő belátnunk, hogy f gráfja $\tau \times \tau'$-zárt $X \times Y$-ban. f gráfja $\tau \times \tau_\omega \restriction_Y$-zárt, szintén a zárt gráf tétel miatt. Mivel $\tau' \geq \tau_\omega \restriction_Y$, ezért f gráfja $\tau \times \tau'$-zárt is. ∎

3.2.2. Tétel. *Ha* $\langle X, \tau \rangle$ *és* $\langle Y, \tau' \rangle$ (FK) *terek,* $X \subseteq Y$, *akkor* $\tau \geq \tau' \restriction_X$. *Speciálisan, egy* (FK) *tér topológiája egyértelmű.*

Bizonyítás. Az 3.2.1 Tételt alkalmazva az $\iota : X \to Y$ beágyazásra, azonnal adódik az állítás. ∎

A továbbiakban ha (FK) terekről beszélünk, általában nem írjuk ki a topológiát, hiszen a 3.2.2 Tétel szerint ez egyértelműen meghatározott.

3.2.3. Tétel. *Legyen A mátrixleképezés az X, Y* (FK) *terek között, ekkor A folytonos.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy az $x \mapsto \pi_n(Ax) = (Ax)_n$ leképezések folytonosak. Ez elegendő, hiszen ω topológiáját a $|\pi_n|$ félnormák határozzák meg, ezzel tehát azt kapjuk, hogy $A : X \to \omega$ folytonos, de ekkor a 3.2.1 Tétel szerint $A : X \to Y$ is folytonos. $(Ax)_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^m a_{nk} x_k$, másrészt minden $m \in \mathbb{N}$-re az $x \mapsto \sum_{k=1}^m a_{nk} x_k$ leképezések nyilvánvalóan folytonosak, hiszen a koordinátafüggvények lineáris kombinációi. A 3.1.2 Banach-Steinhaus tétel szerint ekkor $x \mapsto (Ax)_n$ is folytonos. ∎

3.2.4. Tétel. *Legyenek X, Y* (FK) *terek, melyek topológiáját rendre a* $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ *illetve a* $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ *félnormacsaládok határozzák meg. Legyen A mátrix, amelyre* $X \subseteq \omega_A$, *továbbá legyen* $Z = X \cap Y_A$. *Ekkor Z* (FK) *tér, amelynek topológiáját a* $\mathcal{P} = \{p_n, q_n \circ A : n \in \mathbb{N}\}$ *félnormacsalád határozza meg.*

Bizonyítás. $\mathcal{P}$ elemei nyilánvalóan félnormák. Lássuk el Z-t a $\mathcal{P}$ félnormacsalád által meghatározott τ topológiával. Mivel X topológiáját a p_n félnormák határozzák meg, ezért τ finomabb a $\tau_X\restriction_Z$ topológiánál, következésképp $\tau_\omega\restriction_Z$-nél is. Mivel $\mathcal{P}$ megszámlálható, ezért τ metrizálható, tehát már csak azt kell megmutatnunk, hogy $\langle Z,\tau\rangle$ teljes. Legyen x^k Cauchy sorozat Z-ben, persze ekkor x^k Cauchy sorozat X-ben is, tehát létezik $v\in X$, hogy $p_n(x^k-v)\to 0$ $(k\to\infty)$ minden $n\in\mathbb{N}$-re. Mivel $q_n(Ax^k)=(q_n\circ A)(x^k)$, tehát a feltétel szerint Ax^k Cauchy sorozat Y-ban, ezért $Ax^k\to u$ Y-ban. $A:X\to\omega$ folytonos a 3.2.3 Tétel szerint, ezért $Ax^k\to Av$ ω-ban, de $Ax^k\to u$ ω-ban, hiszen Y (FK) tér. Ebből következik, hogy $Av=u$. Kaptuk, hogy $v\in Z$, továbbá $x^k\to v$ a τ topológiában, hiszen $p_n(x^k-v)\to 0$ és $(q_n\circ A)(x^k-v)\to 0$ minden $n\in\mathbb{N}$-re. ∎

3.2.5. Tétel. *Legyen Y (FK) tér, mely topológiáját a q_n $(n\in\mathbb{N})$ félnormák határozzák meg, és legyen $z\in\omega$. Ekkor $z^{-1}\cdot Y$ is (FK) tér, melynek topológiáját a $\{|\pi_n|,h_n:n\in\mathbb{N}\}$ félnormacsalád határozza meg, ahol $h_n(x)=q_n(x\cdot z)$. Továbbá ha Y (AK) tér, akkor $z^{-1}\cdot Y$ is az.*

Bizonyítás. Legyen $A=\operatorname{diag}(z_1,z_2,\dots)$, nyilván $\omega_A=\omega$. $X=\omega$ választással alkalmazzuk az 3.2.4 Tételt. Az első állítás nyilvánvaló, hiszen $Y_A=z^{-1}\cdot Y$. $|\pi_n|(x-P_mx)=0$, ha $m>n$, illetve $h_n(x-P_mx)=q_n(z\cdot(x-P_mx))=q_n(z\cdot x-P_m(z\cdot x))\to 0$ $(m\to\infty)$, mivel $z\cdot x\in Y$ és Y (AK) tér, tehát $z^{-1}\cdot Y$ valóban (AK) tér. ∎

3.2.6. Tétel. *Legyen A mátrix, ekkor ω_A (AK) tér, melynek topológiáját a $\{|\pi_n|,h_n:n\in\mathbb{N}\}$ félnormacsalád határozza meg, ahol $h_n(x)=\sup_m|\sum_{k=1}^m a_{nk}x_k|$.*

Bizonyítás. Triviális, hogy a h_n függvények félnormák. Először megmutatjuk, hogy megszámlálható sok (FK), illetve (AK) tér metszete is (FK), illetve (AK) tér. Legyenek ugyanis $\langle X_n,\tau_{X_n}\rangle$ (FK) terek, és legyen $X=\bigcap_{n=1}^\infty X_n$, illetve $\tau=\bigvee_{n=1}^\infty \tau_{X_n}\restriction_X$. Persze ekkor, $\tau\ge\tau_{X_n}\restriction_X$, és a koordinátafüggvények $\tau_{X_n}\restriction_X$-folytonosak, ezért τ-folytonosak is. τ_{X_n} topológiát a $\mathcal{P}_n$ megszámlálható félnormacsalád határozza meg, ekkor $\mathcal{P}=\bigcup_{n=1}^\infty\mathcal{P}_n\restriction_X$ is megszámlálható, és $\mathcal{P}$ a τ topológiát határozza meg. Következésképp τ metrizálható. Azt kell csak belátnunk, hogy τ teljes. Legyen tehát x^k τ-Cauchy sorozat X-ben, ekkor persze x^k $\tau_{X_n}\restriction_X$ Cauchy sorozat is. Következésképp létezik z^n, hogy $x^k\to z^n\in X_n$. Mivel azonban X_n (FK) tér, ezért $x^k\to z^n$ ω-ban is. Ez minden $n\in\mathbb{N}$-re igaz, ezért $z^n=z$ minden $n\in\mathbb{N}$-re. Persze $z\in X$ és $x^k\to z$ a $\tau_{X_n}\restriction_X$ topológiában minden $n\in\mathbb{N}$-re, ezért $x^k\to z$ a τ topológiában is.

Ha X_n (AK) tér minden $n\in\mathbb{N}$-re, azaz $P_kx\to x$ minden $x\in X_n$-re a $\tau_{X_n}\restriction_X$ topológiában, akkor tetszőleges $x\in X$ esetén $P_kx\to x$ minden $\tau_{X_n}\restriction_X$ topológiában, tehát a τ topológiában is. Tehát valóban X (AK) tér is.

Mivel cs (BK) + (AK) tér, ezért a 3.2.5 Tétel szerint $z^\beta=z^{-1}\cdot cs$ is (AK) tér. Az előző meggondolásunk alapján ekkor $\omega_A=\bigcap\{z^\beta : z \text{ az } A \text{ mátrix egy sora}\}$ is (AK) tér. A félnormákra vonatkozó állítás egyszerűen következik, hiszen, ha z az A mátrix m-edik sora, akkor $z^{-1}\cdot cs$ topológiáját a $|\pi_n|,h_m$ $(n\in\mathbb{N})$ félnormák határozzák meg a 3.2.5 Tétel szerint. ∎

3.2.7. Tétel. *Legyen Y egy (FK) tér, melynek topológiáját a q_n $(n\in\mathbb{N})$ félnormák határozzák meg, és legyen A mátrix. Ekkor Y_A is (FK) tér, mely topológiáját a $\mathcal{P}=\{|\pi_n|,h_n,q_n\circ A: n\in\mathbb{N}\}$ félnormacsalád határozza meg, ahol $h_n=\sup_m|\sum_{k=1}^m a_{nk}x_k|$.*

Bizonyítás. $\mathcal{P}$ elemei nyilván félnormák. Alkalmazzuk a 3.2.4 Tételt $X = \omega_A$ választással, ami a 3.2.6 Tétel szerint (FK) tér. Ekkor persze, a 3.2.4 Tétel jelöléseit megtartva, $Z = X \cap Y_A = Y_A$, ezzel az első állítást bebizonyítottuk. A félnormákra vonatkozó állítás a 3.2.4 és 3.2.6 Tételekből következik. ∎

3.2.8. Tétel. *Legyen X, Y (BK) tér és $\phi \subseteq X$, továbbá $Z = M(X, Y)$, ekkor Z (BK) tér. Speciálisan $M(X, cs) = X^\beta$ (BK) tér.*

Bizonyítás. $\mathcal{B}(X, Y)$ (B) tér. Minden $z \in Z$ vektorhoz hozzárendelünk (a ˆ leképezés által) egy $\hat{z}$ diagonális mátrixot, amelyre $\hat{z} : X \to Y$, $\hat{z}(x) = x \cdot z$. Minden $z \in Z$-re a $\hat{z}$ leképezés 3.2.3 Tétel szerint folytonos. Ha $\hat{z} = 0$, akkor $z_n = \hat{z}(\delta^n) = 0$, tehát $z = 0$. Következésképp ˆ beágyazás. Ezután elláthatjuk Z-t a $\|z\| = \|\hat{z}\|$ normával. Be kell látnunk, hogy a koordinátafüggvények folytonosak. Ehhez rögzítsünk egy $n \in \mathbb{N}$ számot. Legyen $a = \frac{1}{\|\delta^n\|_X}$ és $b = \|\delta^n\|_Y$. Ekkor az operátornorma $\|z\| = \|\hat{z}\| \geq \|(a\delta^n) \cdot z\|_Y = a\|z_n \delta^n\|_Y = ab|z_n|$, tehát a koordinátafüggvények valóban folytonosak. Meg kell még mutatnunk, hogy $\widehat{Z}$ zárt altere $\mathcal{B}(X, Y)$-nak, ekkor ugyanis (B) tér, és mivel Z norma izomorf $\hat{Z}$-pal, ezért Z is (B) tér, így az előzőek szerint (BK) tér is. Tegyük fel, hogy $\hat{z}^k \to T \in \mathcal{B}(X, Y)$, ekkor minden $x \in X$-re $\hat{z}^k(x) \to Tx$. Mivel Y (FK) tér, ezért $\hat{z}^k(x)_n \to (Tx)_n$, azaz $x_n z_n^k \to (Tx)_n$ $(k \to \infty)$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. $x = \delta^n$ esetén ebből azt kapjuk, hogy $z_n^k \to (T\delta^n)_n$ $(k \to \infty)$. Legyen $t_n = (T\delta^n)_n$, ekkor $x_n z_n^k \to x_n t_n$ $(k \to \infty)$, tehát $(Tx)_n = x_n t_n$, azaz $Tx = t \cdot x$, amiből $T = \hat{t}$. ∎

3.3. Beágyazási és leképezési tételek

Az (FK) terek előző részben bizonyított tulajdonságait felhasználva már jellemezhetjük, persze bizonyos megszorításokkal, az $(X : Y)$ típusú mátrixokat.

3.3.1. Megjegyzés. Legyen X (FK) tér, nyilvánvaló, hogy $A \in (X : \omega)$ akkor és csak akkor, ha A sorai X^β-hoz tartoznak.

3.3.2. Lemma. *Legyen X, Y (FK) tér, $Z \subseteq X \cap Y$ altér, amelyre $X = \overline{Z}$. Ha $\tau_X\restriction_Z \geq \tau_Y\restriction_Z$, akkor $X \subseteq Y$.*

Bizonyítás. Legyen $x \in X$, a feltétel szerint létezik $z^k \in Z$ sorozat, amelyre $z^k \to x$ X-ben. Persze ekkor z^k Cauchy sorozat Y-ban, tehát $z^k \to y$, valamely $y \in Y$-ra. Mivel X, Y (FK) terek, ezért $z^k \to x$ és $z^k \to y$ ω-ban, tehát $x = y$, amiből $x \in Y$ adódik. ∎

3.3.3. Lemma. *Ha X, Y (FK) terek, $Z \subseteq X \cap Y$ altér, akkor a következők ekvivalensek: (i) $\tau_Y\restriction_Z \leq \tau_X\restriction_Z$ (ii) Minden Z-beli X-ben korlátos halmaz korlátos Y-ban is. (iii) $\mathrm{cl}_X(Z) \subseteq Y$.*

Bizonyítás. *(i)⇔(ii)* Nyilvánvaló a 3.1.3 Megjegyzés alapján, hiszen mindkettő azt jelenti, hogy a $\langle Z, \tau_X\restriction_Z\rangle \to \langle Z, \tau_Y\restriction_Z\rangle$ beágyazás folytonos. *(iii)⇒(i)* Azonnal adódik a 3.2.2 Tételt Y és $\mathrm{cl}_X(Z)$ (FK) terekre alkalmazva. *(i)⇒(iii)* Nyilvánvaló a 3.3.2 Lemmából. ∎

3.3.4. Lemma. *Legyen Y (FK) tér, A mátrix és $C \subseteq Y_A$. C korlátos Y_A-ban pontosan akkor, ha C korlátos ω_A-ban és $A(C)$ korlátos Y-ban.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy C korlátos Y_A-ban. Mivel $Y_A \subseteq \omega_A$, és mindkettő (FK) tér a 3.2.6 és 3.2.7 Tételek szerint, ezért a 3.2.2 Tétel szerint $\tau_{\omega_A} \leq \tau_{Y_A}$, tehát C korlátos ω_A-ban is. Az $A : Y_A \to Y$ leképezés folytonos a 3.2.3 Tétel szerint, tehát $A(C)$ korlátos halmaz.

A megfordításhoz elegendő belátnunk, hogy Y_A topológiáját megadó p félnormákra $p(C)$ korlátos halmaz. A 3.2.6 és 3.2.7 Tételekből tudjuk, hogy Y_A és ω_A topológiáját mely félnormák adják meg. Az ottani jelöléseket megtartva látható, hogy C ω_A-beli korlátossága azt jelenti, hogy minden $p \in \{|\pi_n|, h_n : n \in \mathbb{N}\}$ félnormára $p(C)$ korlátos, továbbá $A(C)$ Y-beli korlátossága azt adja, hogy $(p \circ A)(C) = p(A(C))$ korlátos minden $p \in \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ félnormára. Ezzel azt kaptuk, hogy Y_A topológiáját megadó összes $p \in \{|\pi_n|, h_n, q_n \circ A : n \in \mathbb{N}\}$ félnormára $p(C)$ korlátos. ■

3.3.5. Lemma. *Ha X (AD) tér, Y (FK) tér és A mátrix, akkor $A \in (X : Y)$ pontosan akkor, ha A oszlopai Y-beliek,A sorai X^β-hoz tartoznak és minden $C \subseteq \phi$, X-ben korlátos halmazra $A(C)$ korlátos Y-ban is.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A \in (X : Y)$. $X \subseteq \omega_A$ pontosan azt jelenti, hogy A sorai X^β-beliek. Az, hogy A oszlopai Y-hoz tartoznak, ekvivalens azzal, hogy $\phi \subseteq Y_A$, ez pedig, mivel X (AD) tér, nyilvánvalóan szükséges. A korlátosságról szóló feltétel azonnal következik abból, hogy a 3.2.3 Tétel szerint $A : X \to Y$ folytonos.

Most tegyük fel, hogy teljesülnek a feltételek. Mivel A oszlopai Y-beliek, ezért $\phi \subseteq Y_A$. Megmutatjuk, hogy $A \in (X : Y)$. Azt kell belátnuk, hogy $X \subseteq Y_A$, ehhez elég megmutatnunk, hogy minden $C \subseteq \phi$, X-ben korlátos halmaz Y_A-ban is korlátos. Ezt valóban elegendő megmutatnunk, hiszen ez azt jelenti, hogy $\langle \phi, \tau_X \restriction \phi \rangle \to Y_A$ folytonos, ez utóbbi pedig $\tau_{Y_A} \restriction_\phi \leq \tau_X \restriction_\phi$ fennállásával egyenértékű, de $\phi \subseteq Y_A$ és X (AD) tér, ezért alkalmazható a 3.3.2 Lemma, és ekkor $X \subseteq Y_A$ teljesül. Legyen tehát $C \subseteq \phi$, X-ben korlátos halmaz, ekkor persze C ω_A-ban is korlátos, hiszen $X \subseteq \omega_A$, mert A sorai X^β-beliek. De egy ilyen C halmazra $A(C)$ korlátos Y-ban a feltétel miatt, így a 3.3.4 Lemma szerint C korlátos Y_A-ban, és ezzel készen is vagyunk. ■

3.3.6. Lemma. *Legyen X (BK) + (AK) tér, A mátrix és $B = B(\mathbf{0}, 1) \cap \phi \subseteq X$. B akkor és csak akkor korlátos ω_A-ban, ha $A(B)$ korlátos ω-ban.*

Bizonyítás. Ha B korlátos ω_A-ban, akkor mivel a 3.2.3 Tétel szerint $A : \omega_A \to \omega$ folytonos, ezért $A(B)$ korlátos ω-ban.

A 3.2.6 Tétel jelöléseit használva ω_A topológiáját a $|\pi_n|$ és h_n ($n \in \mathbb{N}$) félnormák határozzák meg. Mivel B korlátos X-ben (hiszen az egységgömb része), ezért a koordinátafüggvények folytonosságát felhasználva (ω_A (FK) tér) látható, hogy $|\pi_n|(B)$ korlátos halmaz minden $n \in \mathbb{N}$-re. Most rögzítsünk egy $n \in \mathbb{N}$ számot, és legyen $m \in \mathbb{N}$ tetszőleges. $P_m : X \to X$ értelmes és nyilvánvalóan folytonos, hiszen X (FK) tér. P_m pontonként konvergens operátorsorozat, ezért a 3.1.1 egyenletes korlátosság tétel szerint, normakorlátos is, azaz $\|P_m\| \leq K$. Ekkor $\|P_m(x)\| \leq K\|x\|$ minden $x \in X$-re és $m \in \mathbb{N}$-re. Ebből kapjuk, hogy minden $m \in \mathbb{N}$-re és $x \in B \subseteq \phi \subseteq \omega_A$ sorozatra $AP_m(x) \in A(KB) = KA(B)$, ami viszont a feltétel szerint korlátos halmaz ω-ban. Következésképp $|\pi_n(AP_m(x))| < K'_n$ teljesül alkalmas $K'_n > 0$ számmal minden $m \in \mathbb{N}$-re és $x \in B$ sorozatra. Ebből $|\sum_{k=1}^m a_{nk} x_k| = |\sum_{k=1}^\infty a_{nk} P_m(x)_k| = |\pi_n(AP_m(x))|$ felhasználásával adódik, hogy $h_n(x) \leq K'_n$, ami azt jelenti, hogy $h_n(B)$ korlátos, és ezzel beláttuk, hogy B korlátos ω_A-ban. ■

3.3.7. Tétel. *Legyen X (BK) tér D meghatározó halmazzal, Y (FK) tér és A mátrix. Tegyük fel továbbá, hogy A sorai ϕ-ben vannak, vagy pedig X (AK) tér. Ekkor $A \in (X : Y)$ ekvivalens azzal, hogy A oszlopai Y-beliek és $A(D)$ korlátos Y-ban.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A \in (X : Y)$, ekkor a 3.3.5 Lemma bizonyításának első része szerint tételünk feltételei azonnal adódnak, hiszen $D \subseteq \phi$ korlátos X-ben.

A másik irányhoz tekintsük a következőket: ha $C \subset \phi$ korlátos részhalmaz X-ben, akkor $C \subseteq K(B(\mathbf{0}, 1) \cap \phi)$ valamely $K > 0$ számmal, ezért $A(C) \subseteq KA(B(\mathbf{0}, 1) \cap \phi)$. Ez utóbbi halmaz azonban korlátos Y-ban, hiszen $A(D)$ korlátos Y-ban, és $A(B(\mathbf{0}, 1) \cap \phi) = \mathrm{ac}(A(D))$. Ezért tetszőleges $C \subseteq \phi$, X-ben korlátos halmaz esetén $A(C)$ korlátos Y-ban. Ha A sorai ϕ-beliek, akkor triviálisan teljesül, hogy A sorai X^β-beliek. Most tegyük fel, hogy X (AK) tér. Előzőleg meggondoltuk, hogy $A(B(\mathbf{0}, 1) \cap \phi)$ korlátos Y-ban és így ω-ban is. 3.3.6 Lemma szerint viszont ekkor $B(\mathbf{0}, 1) \cap \phi$ korlátos ω_A-ban. Ebből azonnal adódik, hogy tetszőleges $C \subseteq \phi$ X-ben korlátos halmaz, korlátos ω_A-ban is, hiszen minden ilyen C halmazra $C \subseteq K(B(\mathbf{0}, 1) \cap \phi)$ alkalmas $K > 0$ számmal. Mivel $A(C)$ korlátos Y-ban, illetve, mivel X (AK) tér és $\phi \subseteq \omega_A$, ezért a 3.3.3 Lemma szerint $X \subseteq \omega_A$, ez pedig azt jelenti, hogy A sorai X^β-hoz tartoznak. Végülis azt kaptuk, hogy mindkét feltétel mellett teljesülnek a 3.3.5 Lemma feltételei, tehát ezek szerint $A \in (X : Y)$. ■

3.3.8. Tétel. *Legyen X (AD) tér, Y, Z (FK) tér, Z zárt altere Y-nak és A mátrix. Ekkor $A \in (X : Z)$ pontosan akkor, ha $A \in (X : Y)$ és A oszlopai Z-hez tartoznak.*

Bizonyítás. Ha $A \in (X : Z)$, akkor nyilván $A \in (X : Y)$ és $A \in (\phi : Z)$, ez utóbbi pedig azt jelenti, hogy A oszlopai Y-hoz tartoznak.

Megfordítva, ha $A \in (X : Y)$, akkor A folytonos a 3.2.3 Tétel szerint, továbbá abból, hogy A oszlopai Z-beliek, következik, hogy $A(\phi) \subseteq Z$. Mivel ϕ sűrű X-ben és Z zárt Y-ban, azért $A(X) \subseteq Z$. ■

3.3.9. Állítás. *Legyen X (FK) tér, $y \in Y$ és $Z = X \oplus y$, ekkor $A \in (Z : Y)$ akkor és csak akkor, ha $A \in (X : Y)$ és $Ay \in Y$.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló A linearitásából és abból, hogy Z elemei egyértelműen állnak elő X és $\mathrm{span}(y)$-beli vektorok összegeként. ■

3.3.10. Tétel. *Legyenek X, Z $(\mathsf{BK}) + (\mathsf{AK})$ terek, és legyen $Y = Z^\beta$. $A \in (X : Y)$ akkor és csak akkor, ha $A^\mathsf{T} \in (Z : X^\beta)$, továbbá $(X : Y) = (X^{\beta\beta} : Y)$.*

Bizonyítás. A 3.2.8 Tétel szerint X^β (BK) tér. Legyen $A \in (X : Y)$ és $y \in Y^\beta$ tetszőleges. Definiáljuk az f^m lineáris funkcionálokat: $x \in X$-re $f^m(x) = yP_m(Ax) = \sum_{n=1}^m y_n(Ax)_n$. Ezek nyilvánvalóan folytonosak. y megválasztása miatt f^m pontonként konvergens, így a 3.1.2 Banach-Steinhaus tétel szerint $f = \lim_{m\to\infty} f^m$ folytonos.

$$f(\delta^k) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n a_{nk} = (A^\mathsf{T} y)_k.$$

Most legyen $x \in X$ tetszőleges, ekkor

$$f(x) = f(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \delta^k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(\delta^k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k (A^\mathsf{T} y)_k,$$

tehát kaptuk, hogy $A^{\mathsf{T}}y \in X^{\beta}$, azaz $A^{\mathsf{T}} \in (Y^{\beta} : X^{\beta}) = (Z^{\beta\beta}, X^{\beta})$. A 3.1.7 Állításból következik, hogy $(Z^{\beta\beta} : X^{\beta}) \subseteq (Z : X^{\beta})$. Ezt az okoskodást elismételve $A \in (X : Y)$ helyett $A^{\mathsf{T}} \in (Z : X^{\beta})$ esetére, kapjuk, hogy ha $A^{\mathsf{T}} \in (Z : X^{\beta})$, akkor $A \in (X^{\beta\beta} : Z^{\beta}) \subseteq (X : Z^{\beta}) = (X : Y)$. Ezzel az első állítást beláttuk.

Az előzőeket felhasználva kapjuk a második állítást. $A \in (X : Y)$, ekvivalens $A^{\mathsf{T}} \in (Z : X^{\beta})$ fennállásával, ez pedig $A \in (X^{\beta\beta} : Z^{\beta}) = (X^{\beta\beta} : Y)$ teljesülésével egyenértékű. ∎

3.3.11. Tétel. *Legyen X a $c, c_0, \ell^{\infty}, \ell^1, \ell^p, cs, bs, bv, bv_0$ terek közül valamelyik, és legyen Z $(\mathsf{BK})+(\mathsf{AK})$ tér, $Y = Z^{\beta}$. Ekkor $(X : Y) = (X^{\beta\beta} : Y)$, illetve $A \in (X : Y)$ akkor és csak akkor, ha $A^{\mathsf{T}} \in (Z : X^{\beta})$.*

Bizonyítás. Elegendő az $X = c, \ell^{\infty}, bs, bv$ eseteket bizonyítani, hiszen a többi $(\mathsf{BK})+(\mathsf{AK})$ tér, tehát alkalmazható a 3.3.10 Tétel. Mivel $(c_0 : Y) \supseteq (c : Y) \supseteq (\ell^{\infty} : Y)$ és a 3.3.10 Tétel szerint $(c_0 : Y) = (c_0^{\beta\beta} : Y) = (\ell^{\infty} : Y)$, ezért $(c_0 : Y) = (c : Y) = (\ell^{\infty} : Y)$. Szintén a 3.3.10 Tétel miatt $A \in (c_0 : Y)$ akkor és csak akkor, ha $A^{\mathsf{T}} \in (Z : \ell^1)$, ezzel $X = c, \ell^{\infty}$ esetét be is fejeztük. Felhasználtuk, hogy $(\ell^1)^{\beta} = \ell^{\infty}$, illetve $c_0^{\beta} = c^{\beta} = (\ell^{\infty})^{\beta} = \ell^1$.

Legyen most $X = bs$, és $A \in (bs : Y)$. Ha $z \in Y^{\beta}$, akkor láttuk a 3.3.10 Tétel bizonyításában, hogy létezik $f \in bs^*$, amelyre $(A^{\mathsf{T}}z)_k = f(\delta^k)$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén (ennek létezéséhez még nem használtuk X-ről az (AK) tulajdonságot). Mivel cs altere bs-nek, $f\restriction_{cs} \in cs^*$. Persze akkor $(A^{\mathsf{T}}z)_k = f\restriction_{cs}(\delta^k)$, de cs (AK) tér, ezért tetszőleges $x \in cs$-re

$$f\restriction_{cs}(x) = f\restriction_{cs}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\delta^k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}(A^{\mathsf{T}}z)_k x_k,$$

ebből pedig látható, hogy $A^{\mathsf{T}}z \in cs^{\beta} = bv$. Ezzel kaptuk, hogy $A^{\mathsf{T}} \in (Y^{\beta} : bv) \subseteq (Z : bv)$, itt azt használtuk, hogy $Z \subseteq Z^{\beta\beta} = Y^{\beta}$. $bs \subseteq \omega_A$ miatt A sorai $bs^{\beta} = bv_0$-beliek, tehát nullsorozatok. Ez A^{T}-ra azt jelenti, hogy oszlopai c_0-beliek. Ekkor a 3.3.8 Tétel szerint $A^{\mathsf{T}} \in (Z : bv_0)$, hiszen Z (AK) tér, és $bv_0 = bv \cap c_0$.

Megfordítva, ha $A^{\mathsf{T}} \in (Z : bv_0)$, akkor mivel Z és bv_0 is (AK) tér, ezért alkalmazhatjuk a 3.3.10 Tételt, ami szerint $A \in (bs : Z^{\beta}) = (bs : Y)$. $bs^{\beta\beta} = bs$ miatt a fennmaradó állítás triviális.

$X = bv$ esetére az előző bizonyítás szinte szóról-szóra átvihető, ha a bs, bv és bv_0 terek helyett rendre a bv, bs, és cs tereket használjuk. ∎

A most következő négy tétel azonnal adódik a 3.3.11 Tételből $Y = \ell^{\infty}, bs, bv, \ell^p$ választással, felhasználva, hogy $(\ell^1)^{\beta} = \ell^{\infty}$, $bv_0^{\beta} = bs$, $cs^{\beta} = bv$ és $(\ell^q)^{\beta} = \ell^p$. Legyen X ismét a $c, c_0, \ell^{\infty}, \ell^1, \ell^p, cs, bs, bv, bv_0$ terek közül valamelyik.

3.3.12. Következmény. $(X : \ell^{\infty}) = (X^{\beta\beta} : \ell^{\infty})$, *és* $A \in (X : \ell^{\infty})$ *pontosan akkor, ha* $A^{\mathsf{T}} \in (\ell^1 : X^{\beta})$.

3.3.13. Következmény. $(X : bs) = (X^{\beta\beta} : bs)$, *és* $A \in (X : bs)$ *pontosan akkor, ha* $A^{\mathsf{T}} \in (bv_0 : X^{\beta})$.

3.3.14. Következmény. $(X : bv) = (X^{\beta\beta} : bv)$, *és* $A \in (X : bv)$ *pontosan akkor, ha* $A^{\mathsf{T}} \in (cs : X^{\beta})$.

3.3.15. Következmény. *$(X : \ell^p) = (X^{\beta\beta} : \ell^p)$, és $A \in (X : \ell^p)$ pontosan akkor, ha $A^{\mathsf{T}} \in (\ell^q : X^\beta)$.*

3.3.16. Lemma. *Ha A mátrix, akkor legyen $\hat{A} = B$ az a mátrix, amelyre $b_{nk} = a_{nk} - a_{n(k+1)}$ (továbbiakban erre mindig az $\hat{A}$ jelölést használjuk). Legyen továbbá $y_k = \sum_{j=1}^k x_j$ tetszőleges $x \in \omega$ esetén. Ha (i) A sorai c_0-beliek és $x \in bs$, vagy (ii) A sorai ℓ^∞-beliek és $x \in cs_0$, akkor $Ax = \hat{A}y$, és $y \in \omega_{\hat{A}}$ pontosan akkor, ha $x \in \omega_A$.*

Bizonyítás. Abel átrendezést alkalmazunk,

$$\sum_{k=1}^{m-1} a_{nk}x_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_{nk}(y_k - y_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m-1} b_{nk}y_k + a_{nm}y_{m-1}.$$

(i) esetén $y \in \ell^\infty$ és $a_{nm} \to 0$ $(m \to \infty)$, a *(ii)* esetben pedig $y_m \to 0$ és $(a_{nm})_{m=1,\dots}$ korlátos minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ha tehát $m \to \infty$, akkor mindkét esetben $a_{nm}y_{m-1} \to 0$, amiből az állítás következik. ∎

3.4. $(\ell^1 : Y)$ típusú mátrixok

A dolgozat hátralevő részeiben már konkrét esetekre alkalmazzuk az előző részekben kidolgozott apparátust. Ebben a részben például az $(\ell^1 : Y)$ típusú mátrixokkal foglalkozunk.

3.4.1. Tétel. *Legyen Y (FK) tér. Ekkor $A \in (\ell^1 : Y)$ pontosan akkor, ha A oszlopai korlátos halmazt alkotnak Y-ban.*

Bizonyítás. A 3.1.16 Tétel szerint ℓ^1-ben meghatározó halmaz $\{\delta^k : k \in \mathbb{N}\}$, alkalmazzuk tehát a 3.3.7 Tételt. Az állítás nyilvánvaló, abból, hogy $A\delta^k$ pontosan az A mátrix k-adik oszlopa. ∎

A következőkben a 3.4.1 Tételt alkalmazzuk Y konkrét megválasztása esetén. A bizonyítás szinte mindegyik esetben az, hogy az A mátrix oszlopai halmazának Y-beli korlátosságát átfogalmazzuk a konkrét esetre. Bizonyítást tehát csak ott adunk, ahol valamilyen kiegészítésre van szükség.

3.4.2. Tétel. *$A \in (\ell^1 : \ell^\infty)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_{n,k} |a_{nk}| < \infty$.*

3.4.3. Tétel. *$A \in (\ell^1 : c)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_{n,k} |a_{nk}| < \infty$ és A oszlopai c-beliek.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 3.4.2 Tételt, és használjuk, hogy c zárt altere ℓ^∞-nek, illetve, hogy ℓ^1 (AK) tér, tehát alkalmazható a 3.3.8 Tétel. ∎

3.4.4. Tétel. *$A \in (\ell^1 : c_0)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_{n,k} |a_{nk}| < \infty$ és A oszlopai c_0-beliek.*

Bizonyítás. Mivel c_0 zárt altere c-nek és ℓ^1 (AK) tér, ezért alkalmazható a 3.3.8 Tétel, és így a 3.4.3 Tétellel pont az állítást kapjuk. ∎

3.4.5. Tétel. *$A \in (\ell^1 : bs)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_{k,m} |\sum_{n=1}^m a_{nk}| < \infty$.*

3.4.6. Tétel. *$A \in (\ell^1 : cs)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_{k,m} |\sum_{n=1}^m a_{nk}| < \infty$ és $\sum_n a_{nk}$ konvergens minden k-ra, azaz A oszlopai cs-beliek.*

Bizonyítás. A 3.3.8 Tételt használjuk, hiszen cs zárt altere bs-nek, illetve ℓ^1 (AK) tér, ekkor a 3.4.5 Tétel szerint az állítást kapjuk. ■

3.4.7. Tétel. *$A \in (\ell^1 : cs_0)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_{m,k} |\sum_{n=1}^m a_{nk}| < \infty$ és $\sum_n a_{nk} = 0$ minden k-ra, azaz A oszlopai cs_0-beliek.*

Bizonyítás. Mivel $cs_0 \subseteq cs$ zárt altér, és ℓ^1 (AK) tér, alkalmazhatjuk a 3.3.8 Tételt, tehát a 3.4.6 Tétel szerint készen vagyunk. ■

3.4.8. Tétel. *$A \in (\ell^1 : bv)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_k \sum_{n=1}^\infty |a_{nk} - a_{(n-1)k}| < \infty$*

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló.

Az elégségességhez azt kellene belátnunk a 3.4.1 Tétel szerint, hogy

$$\sup_k \{\lim_{n\to\infty} |a_{nk}| + \sum_{n=1}^\infty |a_{nk} - a_{(n+1)k}|\} < \infty.$$

Legyen $K = \sup_k \sum_{n=1}^\infty |a_{nk} - a_{(n-1)k}| < \infty$ és $k, m \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor

$$|a_{mk}| \leq |a_{mk} - a_{1k}| + |a_{1k}| \leq |a_{1k}| + \sum_{n=1}^{m-1} |a_{nk} - a_{(n+1)k}| \leq \sum_{n=1}^\infty |a_{nk} - a_{(n-1)k}| \leq K.$$

Ebből viszont

$$\sup_k \{\lim_{n\to\infty} |a_{nk}| + \sum_{n=1}^\infty |a_{nk} - a_{(n+1)k}|\} \leq 2K < \infty.$$

■

3.4.9. Tétel. *$A \in (\ell^1 : bv_0)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_k \sum_{n=1}^\infty |a_{nk} - a_{(n-1)k}| < \infty$ és A oszlopai c_0-beliek.*

Bizonyítás. A 3.3.8 és 3.4.8 Tételeket alkalmazzuk azzal, hogy bv_0 zárt altere bv-nek, $bv_0 = bv \cap c_0$ és ℓ^1 (AK) tér. ■

3.4.10. Tétel. *$A \in (\ell^1 : \ell^p)$ $(1 \leq p < \infty)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_k \sum_{n=1}^\infty |a_{nk}|^p < \infty$.*

Ezt a tételt $p = 1$ esetén Lorentz-Knopp tételnek nevezik.

3.5. $(bv_0 : Y)$ és $(bv : Y)$ típusú mátrixok

3.5.1. Tétel. *Legyen Y (FK) tér, $A \in (bv_0 : Y)$ pontosan akkor, ha $\{\sum_{k=1}^m a^k : m \in \mathbb{N}\}$ korlátos halmaz Y-ban. Továbbá $A \in (bv : Y)$ akkor és csak akkor, ha $A \in (bv_0 : Y)$ és $A\mathbf{1} \in Y$.*

Bizonyítás. Mivel a 3.1.17 Tétel szerint $\{P_m\mathbf{1} : m \in \mathbb{N}\}$ meghatározó halmaza bv_0-nak, ezért a 3.3.7 Tételt alkalmazva és felhasználva, hogy $AP_m\mathbf{1} = \sum_{k=1}^m A\delta^k = \sum_{k=1}^m a^k$, azonnal adódik az első állítás. A második állítás nyilvánvaló következménye a 3.3.9 Állításnak, hiszen $bv = bv_0 \oplus \mathbf{1}$. ∎

A következő tételek a 3.5.1 Tétel közvetlen következményei Y konkrét megválasztásával. Ezért a bizonyítások majdem minden esetben magától értetődőek, ha a konkrét esetre felírjuk a 3.5.1 Tételt, és esetleg a 3.3.8 Tételt alkalmazzuk alkalmas szereposztásban, felhasználva, hogy bv_0 (AK) tér.

3.5.2. Tétel. *$A \in (bv_0 : \ell^\infty)$ pontosan akkor, ha $\sup_{m,n} |\sum_{k=1}^m a_{nk}| < \infty$.*

3.5.3. Tétel. *$A \in (bv_0 : c_0)$ pontosan akkor, ha $\sup_{m,n} |\sum_{k=1}^m a_{nk}| < \infty$ és A oszlopai c_0-beliek.*

3.5.4. Tétel. *$A \in (bv_0 : c)$ pontosan akkor, ha $\sup_{m,n} |\sum_{k=1}^m a_{nk}| < \infty$ és A oszlopai c-beliek.*

3.5.5. Tétel. *$A \in (bv_0 : bs)$ pontosan akkor, ha $\sup_{m,n} |\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ik}| < \infty$.*

3.5.6. Tétel. *$A \in (bv_0 : cs)$ pontosan akkor, ha $\sup_{m,n} |\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ik}| < \infty$ és $\sum_{n=1}^\infty a_{nk}$ konvergens minden $k \in \mathbb{N}$-re, azaz A oszlopai cs-beliek.*

3.5.7. Tétel. *$A \in (bv_0 : cs_0)$ pontosan akkor, ha $\sup_{m,n} |\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ik}| < \infty$ és $\sum_{n=1}^\infty a_{nk} = 0$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, azaz A oszlopai cs_0-beliek.*

3.5.8. Tétel. *$A \in (bv_0 : bv)$ pontosan akkor, ha $\sup_m \sum_{n=1}^\infty \left|\sum_{k=1}^m a_{nk} - a_{(n-1)k}\right| < \infty$.*

Bizonyítás. A bizonyítás teljesen analóg a 3.4.8 Tételével, sőt gyakorlatilag elismételhető arra a B mátrixra, amelyre $b_{nk} = \sum_{j=1}^k a_{nj} - a_{(n-1)j}$. ∎

3.5.9. Tétel. *$A \in (bv_0 : bv_0)$ pontosan akkor, ha $\sup_m \sum_{n=1}^\infty \left|\sum_{k=1}^m a_{nk} - a_{(n-1)k}\right| < \infty$ és A oszlopai c_0-beliek.*

3.5.10. Tétel. *$A \in (bv_0 : \ell^p)$ $(1 \le p < \infty)$ pontosan akkor, ha $\sup_m \sum_{n=1}^\infty |\sum_{k=1}^m a_{nk}|^p < \infty$.*

3.5.11. Megjegyzés. A (bv, Y) típusú mátrixok jellemzéséhez az előző tételeket használjuk a 3.5.1 Tétel második állítása szerint $A\mathbf{1} \in Y$ feltétellel kiegészítve. Tehát például:

3.5.12. Tétel. *$A \in (bv : \ell^p)$ $(1 \le p < \infty)$ pontosan akkor, ha $\sup_m \sum_{n=1}^\infty |\sum_{k=1}^m a_{nk}|^p < \infty$ és $A\mathbf{1} \in \ell^p$, azaz $\sum_{n=1}^\infty |\sum_{k=1}^\infty a_{nk}|^p < \infty$.*

3.6. $(c:Y)$, $(c_0:Y)$ és $(\ell^\infty:Y)$ típusú mátrixok

3.6.1. Tétel. *$(c_0:\ell^\infty)=(c:\ell^\infty)=(\ell^\infty:\ell^\infty)$, és $A\in(\ell^\infty:\ell^\infty)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_n\sum_{k=1}^\infty|a_{nk}|<\infty$.*

Bizonyítás. Az első állítást már láttuk a 3.3.11 Tétel bizonyításában, hiszen $\ell^\infty=(\ell^1)^\beta$ és ℓ^1 $(\mathsf{BK})+(\mathsf{AK})$ tér. A második állításhoz a 3.3.12 Következményt fogjuk használni, ehhez tekintsük a 3.4.10 Tételt $p=1$ esetén, A^T-re alkalmazva. Ezzel pont az állítást kapjuk, hiszen $(\ell^\infty)^\beta=\ell^1$. ∎

A következő tételekben a 3.3.8 Tétel és a 3.3.9 Állítás eredményével egészítjük ki a 3.6.1 Tételt, így a bizonyítások magától értetődőek.

3.6.2. Tétel. *$A\in(c_0:c)$ pontosan akkor, ha $\sup_n\sum_{k=1}^\infty|a_{nk}|<\infty$ és A oszlopai c-beliek.*

3.6.3. Tétel. *$A\in(c_0:c_0)$ pontosan akkor, ha $\sup_n\sum_{k=1}^\infty|a_{nk}|<\infty$ és A oszlopai c_0-beliek.*

3.6.4. Tétel. *$A\in(c:c_0)$ pontosan akkor, ha $\sup_n\sum_{k=1}^\infty|a_{nk}|<\infty$, A oszlopai c_0-beliek és $A\mathbf{1}\in c_0$.*

Az alábbi tételt szokták Silvermann-Toeplitz tételnek is nevezni.

3.6.5. Tétel (Kojima-Schur). *$A\in(c:c)$ pontosan akkor, ha $\sup_n\sum_{k=1}^\infty|a_{nk}|<\infty$, A oszlopai c-beliek és $A\mathbf{1}\in c$.*

A következő három tételben használjuk az $a_k=\lim_{n\to\infty}a_{nk}$ jelölést, ekkor értelemszerűen $a\in\omega$.

3.6.6. Tétel (Silvermann-Toeplitz). *$A\in(c:c)$ és $\lim_{n\to\infty}(Ax)_n=\lim_{n\to\infty}x_n$ minden $x\in c$ vektor esetén, akkor és csak akkor ha $\sup_n\sum_{k=1}^\infty|a_{nk}|<\infty$, $a_k=0$ minden $k\in\mathbb{N}$-re és $\lim_{n\to\infty}(A\mathbf{1})_n=1$.*

Bizonyítás. A szükségesség azonnal következik a 3.6.5 Tételből és abból, hogy $a_{nk}=(A\delta^k)_n$.

Az elégségességhez tekintsük a következőket. Legyen $f_n(x)=(Ax)_n$, ekkor $f_n:c\to\mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál, hiszen A folytonos és c (FK) tér. Ekkor a 3.1.2 Banach-Steinhaus tétel szerint $f=\lim_{n\to\infty}f_n$ is folytonos. Ezért a 3.1.9 Tételt alkalmazva kapjuk, hogy $f(x)=c\lim_{n\to\infty}x_n+bx$, alkalmas $b\in\ell^1$ vektorral és $c=c(f)=f(\mathbf{1})-\sum_{k=1}^\infty f(\delta^k)$ számmal. Ebből $f(\delta^k)=b_k$, azaz $b_k=a_k=0$, illetve $c=1$. Ezeket összevetve látható, hogy $\lim_{n\to\infty}(Ax)_n=f(x)=\lim_{n\to\infty}x_n$. ∎

3.6.7. Tétel. *$A\in(\ell^\infty:c)$ akkor és csak akkor, ha A oszlopai c-beliek és a következő, ekkor ekvivalens feltételek valamelyike teljesül: (i) $\sum_{k=1}^\infty|a_{nk}|$ n-ben egyenletesen konvergens. (ii) A sorai illetve az a vektor ℓ^1-hez tartoznak és $\sum_{k=1}^\infty|a_{nk}-a_k|\to0$ $(n\to\infty)$. (iii) $\sum_{k=1}^\infty|a_{nk}|$, $\sum_{k=1}^\infty|a_k|$ konvergensek és $\sum_{k=1}^\infty|a_{nk}|\to\sum_{k=1}^\infty|a_k|$ $(n\to\infty)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy A oszlopai c-beliek. Először a három feltétel ekvivalenciáját látjuk be. *(i)⇒(ii)* A sorai nyilvánvalóan ℓ^1-beliek. Az egyenletes konvergencia miatt választhatjuk $M\in\mathbb{N}$-et olyan nagynak, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\sum_{k=M}^\infty |a_{nk}|<1$. Ekkor tehát $\sum_{k=1}^\infty |a_{nk}|\le\sum_{k=1}^{M-1}|a_{nk}|+1$. $\sum_{k=1}^{M-1}|a_{nk}|$ konvergens $(n\to\infty)$, tehát korlátos. Következésképp $\sup_n\sum_{k=1}^\infty |a_{nk}|\le K<\infty$. Legyen $m\in\mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor $\sum_{k=1}^m |a_k| = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^m |a_{nk}|\le K$ minden $m\in\mathbb{N}$-re, ami mutatja, hogy $a\in\ell^1$.

$\sum_{k=1}^\infty |a_{nk}|$ egyenletes konvergenciájából $\sum_{k=1}^\infty |a_{nk}-a_k|$ egyenletes konvergenciája következik. Ugyanis ha $\varepsilon>0$ tetszőleges és m olyan nagy, hogy minden $n\in\mathbb{N}$-re $\sum_{k=m}^\infty |a_{nk}|<\varepsilon$ és $\sum_{k=m}^\infty |a_k|<\varepsilon$, akkor a háromszög egyenlőtlenségből $\sum_{k=m}^\infty |a_{nk}-a_k|<2\varepsilon$. Most legyen $m\in\mathbb{N}$ tetszőleges, mivel az A oszlopaira tett feltétel szerint $\sum_{k=1}^m |a_{nk}-a_k|$ konvergens $(n\to\infty)$, ezért az egyenletes konvergencia miatt a következőkben valóban felcserélhetőek a limeszek. Tehát

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^m |a_{nk}-a_k| = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^m \lim_{n\to\infty}|a_{nk}-a_k| = 0.$$

Így valóban $\sum_{k=1}^\infty |a_{nk}-a_k|\to 0$.

(ii)⇒(iii) A szereplő sorok konvergenciája nyilvánvaló. A háromszög egyenlőtlenségből pedig $|\sum_{k=1}^\infty |a_{nk}| - \sum_{k=1}^\infty |a_k||\le\sum_{k=1}^m |a_{nk}-a_k|\to 0$ $(n\to\infty)$.

(iii)⇒(i) Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges, ehhez válasszuk $m\in\mathbb{N}$-et olyan nagyra, hogy $\sum_{k=m}^\infty |a_k|<\varepsilon$. Nyilván *(iii)*-ból következik az is, hogy $\sum_{k=m}^\infty |a_{nk}|\to\sum_{k=m}^\infty |a_k|$, hiszen A oszlopai konvergensek. Legyen tehát N olyan nagy, hogy $n>N$ esetén $\sum_{k=m}^\infty |a_{nk}|<\varepsilon$. Ha most M-et úgy választjuk, hogy $M>m$ és minden $n\in\mathbb{N}$, $n\le N$ esetén $\sum_{k=M}^\infty |a_{nk}|<\varepsilon$, akkor minden $n\in\mathbb{N}$-re $\sum_{k=M}^\infty |a_{nk}|<\varepsilon$. Ezzel pedig beláttuk, hogy $\sum_{k=1}^\infty |a_{nk}|$ n-ben egyenletesen konvergens.

Tegyük most fel, hogy A oszlopai c-hez tartoznak és *(i)* teljesül (ekkor persze *(ii)* is), belátjuk, hogy $A\in(\ell^\infty:c)$. Legyen ugyanis $x\in\ell^\infty$, ekkor mivel a feltétel szerint $\sum_{k=1}^m a_{nk}$ n-ben egyenletesen konvergens $(m\to\infty)$, ezért $y_{nm}=\sum_{k=1}^m a_{nk}x_k$ is egyenletesen konvergens $(m\to\infty)$. A oszlopaira tett feltételből következik, hogy $\lim_{n\to\infty} y_{nm}$ létezik. *(ii)* miatt $\sum_{k=1}^\infty a_k x_k$ értelmes, ezért az egyenletes konvergenciából következik, hogy a következő egyenlőségsorozatban a limeszek felcserélhetőek (és persze léteznek is a kettős limeszek). Tehát

$$\sum_{k=1}^\infty a_k x_k = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^m x_k\lim_{n\to\infty}a_{nk} = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}y_{nm} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}y_{nm}.$$

Ezzel beláttuk, hogy $\sum_{k=1}^\infty a_{nk}x_k$ konvergens $(n\to\infty)$.

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy ha $A\in(\ell^\infty:c)$, akkor A oszlopai c-hez tartoznak, és a három feltétel közül valamelyik teljesül. Ha $A\in(\ell^\infty:c)$, akkor $A\in(c:c)$ tehát a 3.6.5 Tétel szerint $\sup_n\sum_{k=1}^\infty |a_{nk}|=K<\infty$ és A oszlopai konvergensek. Sőt *(i)⇒(ii)* bizonyításában azt is beláttuk, hogy $\sup_n\sum_{k=1}^\infty |a_{nk}|=K<\infty$ maga után vonja $a\in\ell^1$ fennállását.

Három esetet különböztetünk meg: A valós mátrix és $a_k=0$ minden $k\in\mathbb{N}$-re, A valós illetve A komplex mátrix. Tegyük fel először, hogy A valós és $a_k=0$ minden $k\in\mathbb{N}$-re. Indirekt bizonyítjuk *(iii)* fenállását. Tegyük fel, hogy *(iii)* nem teljesül. A feltevésünk szerint $\sum_{k=1}^\infty |a_k|=0$, és van végtelen sok $n\in\mathbb{N}$, hogy $\sum_{k=1}^\infty |a_{nk}|>\delta$, valamely pozitív δ számmal.

Az A mátrix azon sorait törölve, amelyekre $\sum_{k=1}^\infty |a_{nk}| \le \delta$ és $\frac{1}{\delta}$-val szorozva a megmaradó sorokat elérhetjük, hogy $\sum_{k=1}^\infty |a_{nk}| > 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Legyen most $m_0 = n_0 = 0$ és $n_1 \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor $\sum_{k=1}^\infty |a_{n_1 k}| > \frac{1}{2}$, megválaszthatjuk $m_1 \in \mathbb{N}$-et tehát úgy, hogy $\sum_{k=1}^{m_1} |a_{n_1 k}| > \frac{1}{2}$ és $\sum_{k=m_1+1}^\infty |a_{n_1 k}| < \frac{1}{8}$. Tegyük fel, hogy $n_{j-1}, m_{j-1} \in \mathbb{N}$ számokat már megválasztottuk $2 \le j \in \mathbb{N}$, ekkor a következőképpen járunk el: mivel A oszlopai nullsorozatok, ezért választható $n_j \in \mathbb{N}$ olyan nagynak, hogy $\sum_{k=1}^{m_{j-1}} |a_{n_j k}| < \frac{1}{8}$, és persze ekkor $\sum_{k=m_{j-1}+1}^\infty |a_{n_j k}| > \frac{1}{2}$. Ezután $m_j \in \mathbb{N}$-et válasszuk meg úgy, hogy $m_j > m_{j-1}$ és $\sum_{k=m_{j-1}+1}^{m_j} |a_{n_j k}| > \frac{1}{2}$ és $\sum_{k=m_j+1}^\infty |a_{n_j k}| < \frac{1}{8}$.

Tekintsük a következő x vektort: $x_k = (-1)^{j-1}\mathrm{sgn}(a_{n_j k})$, ha $m_{j-1} < k \le m_j$. $x \in \ell^\infty$, hiszen $|x_k| = 1$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. A feltevés szerint ekkor $Ax \in c$, azonban a háromszög egyenlőtlenséget használva a következőt kapjuk:

$$(-1)^{j-1}(Ax)_{n_j} \ge (-1)^{2(j-1)} \sum_{k=m_{j-1}+1}^{m_j} |a_{n_j k}| - \sum_{k=1}^{m_{j-1}} |a_{n_j k}| - \sum_{k=m_j+1}^{\infty} |a_{n_j k}| > \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Ezzel azt kaptuk, hogy Ax nem konvergens sorozat, és ekkor ellentmondásra jutottunk.

Legyen most $A \in (\ell^\infty : c)$ tetszőleges valós mátrix. Legyen $b_{nk} = a_{nk} - a_k$, mint korábban megjegyeztük $a \in \ell^1$, ezért nyilvánvaló, hogy $B \in (\ell^\infty : c)$. Alkalmazható tehát az előző eset, hiszen $b_k = 0$ minden $k \in \mathbb{N}$-re. Így B-re teljesül *(iii)*, azaz $\sum_{k=1}^\infty |a_{nk} - a_k| \to 0$ $(n \to \infty)$. Az, hogy A sorai ℓ^1-beliek, nyilvánvalóan teljesül, hiszen például az $\mathbf{1} \in \ell^\infty$ vektor ezt bizonyítja. Ezzel beláttuk, hogy A-ra teljesül *(ii)*.

Az utolsó eset, amikor $A \in (\ell^\infty : c)$ tetszőleges komplex mátrix. Bontsuk fel az A mátrixot $A = B + \imath C$ alakban, ahol B, C valós mátrixok. Ha most $x \in \ell^\infty$ valós vektor, akkor $Bx, Cx \in c$, hiszen $Bx = \Re Ax$ és $Cx = \Im Ax$. Az előzőek szerint, ekkor B és C kielégíti *(i)*-et, amiből nyilvánvalóan következik, hogy A-ra is teljesül *(i)*. ■

3.6.8. Tétel. *$A \in (\ell^\infty : c_0)$ pontosan akkor, ha $\sum_{k=1}^\infty |a_{nk}|$ n-ben egyenletesen konvergens és A oszlopai c_0-beliek. (Nyilván az első feltétel helyettesíthető a 3.6.7 Tételbeli feltételek bármelyikével.)*

Bizonyítás. A feltételek szükségessége nyilvánvaló a 3.6.7 Tételből és abból, hogy $A\delta^k$ éppen az A mátrix k-adik oszlopa.

Az elégségességhez tekintsük a 3.6.7 Tétel bizonyításának azt a részét, amelyben *(ii)* fennállásából $A \in (\ell^\infty : c)$ teljesülését bizonyítottuk. Ott beláttuk, hogy tetszőleges $x \in \ell^\infty$ esetén $\lim_{n\to\infty}(Ax)_n = \sum_{k=1}^\infty a_k x_k$, most viszont $a = \mathbf{0}$, tehát valóban $Ax \in c_0$. ■

3.6.9. Tétel. *Legyen Y (FK) tér, ekkor $A \in (c_0 : Y)$ pontosan akkor, ha $\{A(\sum_{k\in\kappa} \delta^k) : \kappa \in \mathcal{N}\}$ korlátos halmaz Y-ban. $A \in (c : Y)$ akkor és csak akkor, ha $\{A(\sum_{k\in\kappa} \delta^k) : \kappa \in \mathcal{N}\}$ korlátos halmaz Y-ban és $A\mathbf{1} \in Y$.*

Bizonyítás. Legyen $B \subseteq \omega$ az $\mathcal{N}$-beli halmazok karakterisztikus függvényeiből álló halmaz. A tétel első állításának feltétele pontosan $A(B)$ korlátosságát jelenti. Mivel B korlátossága egyenértékű $\mathbb{U}B$ korlátosságával, ezért $A(B)$ és $A(\mathbb{U}B)$ ugyanakkor korlátos. A $D = \{x : x \in \phi, \forall k \in \mathbb{N}(x_k \ne 0 \Rightarrow |x_k| = 1)\}$ halmaz a 3.1.18 Állítás szerint meghatározó halmaza c_0-nak. Mivel $D \subseteq (\mathbb{U}B - \mathbb{U}B) + \imath(\mathbb{U}B - \mathbb{U}B)$ és $B \subseteq D$, ezért $A(D)$ és $A(\mathbb{U}B)$ (és így $A(B)$)

ugyanakkor lesz korlátos. Ez bizonyítja az első állítást a 3.3.7 Tétel szerint, hiszen c_0 (AK) tér. A második kijelentés bizonyításához a 3.3.9 Állítást alkalmazzuk, hiszen $c = c_0 \oplus \mathbf{1}$. ■

3.6.10. Tétel. *$(c_0 : bv) = (c : bv) = (\ell^\infty : bv)$, továbbá $A \in (c_0 : bv)$ pontosan akkor, ha $\sup\{\sum_{n=1}^\infty \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{(n-1)k}\right| : \kappa \in \mathcal{N}\} < \infty$.*

Bizonyítás. Az első állításhoz tekinthetjük a 3.3.11 Tételt, hiszen $c^{\beta\beta} = c_0^{\beta\beta} = (\ell^\infty)^{\beta\beta} = \ell^\infty$.

A második állításhoz tulajdonképpen azt kellene belátnunk, hogy

$$\sup\{\sum_{n=1}^\infty \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{(n-1)k}\right| : \kappa \in \mathcal{N}\} < \infty$$

egyenértékű

$$\sup\{\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk}\right| + \sum_{n=1}^\infty \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{(n+1)k}\right| : \kappa \in \mathcal{N}\} < \infty$$

teljesülésével, hiszen ez utóbbi egyenlőtlenség ekvivalens $A \in (c_0 : bv)$ fennállásával a 3.6.9 Tétel szerint. Ezen egyenlőtlenségek ekvivalenciáját a 3.4.8 Tétel bizonyításához hasonlóan mutathatjuk meg. ■

3.6.11. Tétel. *$A \in (c_0 : bv_0)$ pontosan akkor, ha A minden oszlopa bv_0-beli és $\sup\{\sum_{n=1}^\infty \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{(n-1)k}\right| : \kappa \in \mathcal{N}\} < \infty$. Emellett $(c_0 : bv_0) = (c : bv_0) = (\ell^\infty : bv_0)$.*

Bizonyítás. A 3.6.10 és 3.3.8 Tételekből következik az első állítás. A másodikhoz tekintsük a következőket: $(c_0 : bv) = (\ell^\infty : bv)$ a 3.6.10 Tétel szerint, tehát $(c_0 : bv_0) \subseteq (c_0 : bv) = (\ell^\infty : bv) \subseteq (\ell^\infty : c)$. Nyilvánvalóan $(c_0 : bv_0) \subseteq (c_0 : bv) \cap (c_0 : c_0) \subseteq (\ell^\infty : c) \cap (c_0 : c_0)$. Azonban $(\ell^\infty : c) \cap (c_0 : c_0) = (\ell^\infty : c_0)$ a 3.6.7 és 3.6.8 Tételek szerint. Tehát $(c_0 : bv_0) \subseteq (\ell^\infty : bv) \cap (\ell^\infty : c_0) = (\ell^\infty : bv_0)$. Az $(\ell^\infty : bv_0) \subseteq (c_0 : bv_0)$ tartalmazás triviális, így $(\ell^\infty : bv_0) = (c_0 : bv_0)$. Végül $(\ell^\infty : bv_0) \subseteq (c : bv_0) \subseteq (c_0 : bv_0) = (\ell^\infty : bv_0)$, ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

3.6.12. Tétel. *$A \in (c_0 : \ell^p)$ $(1 \le p < \infty)$ pontosan akkor, ha $\sup\{\sum_{n=1}^\infty \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk}\right|^p : \kappa \in \mathcal{N}\} < \infty$. Ezenkívül $(c_0 : \ell^p) = (c : \ell^p) = (\ell^\infty : \ell^p)$ minden $1 \le p < \infty$ esetén.*

Bizonyítás. Az első állítás a 3.6.9 Tételből azonnal adódik, a második állítás a 3.3.11 Tételből következik $Y = \ell^p$ választással, felhasználva, hogy $c_0^{\beta\beta} = c^{\beta\beta} = (\ell^\infty)^{\beta\beta} = \ell^\infty$. ■

3.6.13. Tétel. *$(c_0 : bs) = (c : bs) = (\ell^\infty : bs)$, továbbá $A \in (\ell^\infty : bs)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_m \sum_{k=1}^\infty |\sum_{n=1}^m a_{nk}| < \infty$.*

Bizonyítás. Az első állítást már beláttuk a 3.3.11 Tételnél, ha ott $Y = bs$, hiszen bv_0 (BK) + (AK) tér és $bs = bv_0^\beta$. A második állításhoz használjuk a 3.3.13 Következményt. Eszerint $A \in (\ell^\infty : bs)$ akkor és csak akkor, ha $A^{\mathsf{T}} \in (bv_0 : \ell^1)$. Ez utóbbira a 3.5.10 Tétel ad szükséges és elégséges feltételt $p = 1$ választással. ■

A következő négy tétel a 3.3.8 és a 3.3.9 Tételek felhasználásával nyerhető az előző erdeményekből.

3.6.14. Tétel. *$A \in (c_0 : cs)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_m \sum_{k=1}^\infty |\sum_{n=1}^m a_{nk}| < \infty$ és A oszlopai cs-beliek.*

3.6.15. Tétel. *$A \in (c : cs)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_m \sum_{k=1}^\infty |\sum_{n=1}^m a_{nk}| < \infty$, A oszlopai cs-beliek és $A\mathbf{1} \in cs$, azaz $\sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty a_{nk}$ konvergens.*

3.6.16. Tétel. *$A \in (c_0 : cs_0)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_m \sum_{k=1}^\infty |\sum_{n=1}^m a_{nk}| < \infty$ és A oszlopai cs_0-beliek.*

3.6.17. Tétel. *$A \in (c : cs_0)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_m \sum_{k=1}^\infty |\sum_{n=1}^m a_{nk}| < \infty$, A oszlopai cs_0-beliek és $A\mathbf{1} \in cs$, azaz $\sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty a_{nk}$ konvergens.*

3.6.18. Lemma. *Legyen A tetszőleges, B pedig az a mátrix, amelyre $b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{jk}$. Ekkor $\omega_A = \omega_B$, és minden $x \in \omega_A$ esetén $(Bx)_n = \sum_{j=1}^n (Ax)_j$.*

Bizonyítás. Ha $x \in \omega_A$, akkor

$$(Bx)_n = \sum_{k=1}^\infty b_{nk}x_k = \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^n a_{jk}x_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^\infty a_{jk}x_k = \sum_{j=1}^n (Ax)_j,$$

tehát $x \in \omega_B$, és az állításban megfogalmazott egyenlőség is fennáll. Legyen most $x \in \omega_B$, ekkor

$$(Bx)_n - (Bx)_{n-1} = \sum_{k=1}^\infty (b_{nk} - b_{(n-1)k})x_k = \sum_{k=1}^\infty a_{nk}x_k = (Ax)_n,$$

így $x \in \omega_A$ is teljesül. ∎

3.6.19. Tétel. *$A \in (\ell^\infty : cs)$ akkor és csak akkor, ha $\sum_{k=1}^\infty \left|\sum_{j=n}^\infty a_{jk}\right| \to 0$ $(n \to \infty)$.*

Bizonyítás. Legyen B az a mátrix, amelyre $b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{jk}$, ekkor a 3.6.18 Lemma szerint $\omega_A = \omega_B$, és $Ax \in cs$ pontosan akkor, ha $Bx \in c$. Ezek szerint $A \in (\ell^\infty : cs)$ akkor és csak akkor, ha $B \in (\ell^\infty : c)$, ez utóbbira a szükséges és elégséges feltétel a 3.6.7 Tételből olvasható ki. Eszerint $B \in (\ell^\infty : c)$ akkor és csak akkor, ha B oszlopai c-beliek, B sorai és a b vektor ℓ^1-hez tartoznak és $\sum_{k=1}^\infty |b_{nk} - b_k| \to 0$. A tétel feltétele hallgatólagosan magában foglalja, hogy $\sum_{j=n}^\infty a_{jk}$ konvergens minden $k, n \in \mathbb{N}$ esetén, ebből speciálisan következik, hogy $\lim_{n\to\infty} b_{nk}$ létezik minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, azaz B oszlopai konvergensek. Kellene még, hogy $\sum_{k=1}^\infty |b_{nk}| = \sum_{k=1}^\infty \left|\sum_{j=1}^n a_{jk}\right| < \infty$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített, nyilvánvalóan $\sum_{k=1}^\infty \left|\sum_{j=n}^\infty a_{jk}\right| \leq K < \infty$ minden $n \in \mathbb{N}$-re alkalmas $K > 0$ számmal, ebből

$$\sum_{k=1}^\infty \left|\sum_{j=1}^{n-1} a_{jk}\right| \leq \sum_{k=1}^\infty \left|\sum_{j=n}^\infty a_{jk}\right| + \sum_{k=1}^\infty \left|\sum_{j=1}^\infty a_{jk}\right| \leq 2K < \infty.$$

Tehát B sorai valóban ℓ^1-beliek, és $b \in \ell^1$ is nyilvánvalóan következik. A B-re megkövetelt utolsó feltétel triviálisan teljesül, hiszen $\sum_{j=n+1}^\infty a_{jk} = b_k - b_{nk}$. Ezzel beláttuk, hogy $B \in (\ell^\infty : c)$ pontosan akkor, ha az állítás feltétele teljesül, és már csak ez hiányzott a teljes bizonyításhoz. ∎

3.6.20. Tétel. *$A \in (\ell^\infty : cs_0)$ akkor és csak akkor, ha $\sum_{k=1}^\infty \left|\sum_{j=n}^\infty a_{jk}\right| \to 0$ $(n \to \infty)$ és A oszlopai c_0-hoz tartoznak.*

Bizonyítás. Ha a B mátrixra $b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{jk}$, akkor a 3.6.18 Lemma következtében $\omega_A = \omega_B$ és nyilván $Ax \in cs_0$ pontosan, akkor ha $Bx \in c_0$. Tehát $A \in (\ell^\infty : cs_0)$ akkor és csak akkor, ha $B \in (\ell^\infty : c_0)$. Ha most a 3.6.8 Tételt használjuk, akkor azt kapjuk (a 3.6.19 Tétel bizonyításának mintájára), hogy $B \in (\ell^\infty : c_0)$ pontosan akkor, ha $\sum_{k=1}^\infty \left|\sum_{j=n}^\infty a_{jk}\right| \to 0$ $(n \to \infty)$ és $b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{jk} \to 0$ $(n \to \infty)$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Ez utóbbi azonban nyilvánvalóan ekvivalens azzal, hogy A oszlopai cs_0-hoz tartoznak, ami a másik feltétel mellett egyenértékű azzal, hogy A oszlopai c_0-hoz tartoznak. ∎

3.7. $(bs : Y)$, $(cs : Y)$ és $(cs_0 : Y)$ típusú mátrixok

3.7.1. Tétel. *$A \in (cs : \ell^\infty)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_n \sum_{k=1}^\infty \left|a_{nk} - a_{n(k-1)}\right| < \infty$.*

Bizonyítás. A 3.3.12 Következmény szerint $A \in (cs : \ell^\infty)$ pontosan akkor, ha $A^\mathsf{T} \in (\ell^1 : bv)$, ez utóbbi pedig ekvivalens a feltétellel a 3.4.8 Tétel szerint. ∎

A most következő két tétel a szokásos módon bizonyítható a 3.3.8 Tétel felhasználásával.

3.7.2. Tétel. *$A \in (cs : c)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_n \sum_{k=1}^\infty \left|a_{nk} - a_{n(k-1)}\right| < \infty$ és A oszlopai c-beliek.*

3.7.3. Tétel. *$A \in (cs : c_0)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_n \sum_{k=1}^\infty \left|a_{nk} - a_{n(k-1)}\right| < \infty$ és A oszlopai c_0-beliek.*

3.7.4. Tétel. *$A \in (cs : bs)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_m \sum_{k=1}^\infty \left|\sum_{n=1}^m a_{nk} - a_{n(k-1)}\right| < \infty$.*

Bizonyítás. A 3.3.13 Következmény szerint $A \in (cs : bs)$ pontosan akkor, ha $A^\mathsf{T} \in (bv_0 : bv)$, ez utóbbi a 3.5.8 Tétel szerint a tétel feltételével ekvivalens. ∎

3.7.5. Tétel. *$A \in (cs : cs)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_m \sum_{k=1}^\infty \left|\sum_{n=1}^m a_{nk} - a_{n(k-1)}\right| < \infty$ és A oszlopai cs-beliek, azaz $\sum_{n=1}^\infty a_{nk}$ konvergens minden $k \in \mathbb{N}$-re.*

Bizonyítás. A 3.3.8 és 3.7.4 Tételek kövekezménye, hiszen cs (AK) tér és zárt altere bs-nek. ∎

A 3.6.6 Silvermann-Toeplitz tételhez analóg módon értelmes azt kérdezni, hogy mi annak a szükséges és elegendő feltétel, hogy minden $x \in cs$-re $\sum_{n=1}^\infty (Ax)_n = \sum_{n=1}^\infty x_n$ teljesüljön. Erre a kérdésre az alábbi tétel ad választ.

3.7.6. Tétel. *Egy A végtelen mátrixra, $\sum_{n=1}^\infty (Ax)_n = \sum_{n=1}^\infty x_n$ minden $x \in cs$ esetén akkor és csak akkor, ha $A \in (cs : cs)$ és $\sum_{n=1}^\infty a_{nk} = 1$ minden $k \in \mathbb{N}$-re.*

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló a 3.7.5 Tételből és abból, hogy $A\delta^k = \sum_{n=1}^\infty a_{nk}$ minden $k \in \mathbb{N}$-re.

Megfordítva, az $A \in (cs:cs)$ feltétel miatt $f(x) = \sum_{n=1}^\infty (Ax)_n$ értelmes minden $x \in cs$-re, és persze f folytonos lineáris funkcionál, a 3.1.2 BANACH-STEINHAUS tétel és A folytonossága miatt. Mivel cs (AK) tér, ezért

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k f(\delta^k) = \sum_{k=1}^\infty x_k \sum_{n=1}^\infty a_{nk} = \sum_{k=1}^\infty x_k.$$

■

3.7.7. Tétel. *$A \in (cs:cs_0)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_m \sum_{k=1}^\infty \left|\sum_{n=1}^m a_{nk} - a_{n(k-1)}\right| < \infty$ és A oszlopai cs_0-beliek, azaz $\sum_{n=1}^\infty a_{nk} = 0$ minden $k \in \mathbb{N}$-re.*

Bizonyítás. A 3.3.8 és 3.7.5 Tételek követkeménye, hiszen cs_0 zárt altere cs-nek, és cs (AK) tér. ■

3.7.8. Lemma. *Ha Y (FK) tér és A mátrix, akkor $A \in (cs_0:Y)$ ekvivalens azzal, hogy A sorai c-beliek és $\hat{A} \in (c_0:Y)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A \in (cs_0:Y)$. Mivel $cs = cs_0 \oplus \delta^1$, ezért $cs \subseteq \omega_A$, amiből következik, hogy A sorai cs^β-ban vannak. Persze $cs^\beta = bv \subseteq c$, tehát valóban A sorai c-beliek. Legyen most $y \in c_0$ és $x_n = y_n - y_{n-1}$, persze ekkor $x \in cs_0$, ezért Ax értelmes. A sorai korlátosak, hiszen konvergensek, ezért a 3.3.16 Lemma (ii) része szerint $\hat{A}y = Ax \in Y$.

A megfordításhoz legyen most $x \in cs_0$ és $y_k = \sum_{j=1}^k x_j$. Ekkor $y \in c_0$, tehát $\hat{A}y$ értelmes, és ismét a 3.3.16 Lemma (ii) része szerint $Ax = \hat{A}y \in Y$. ■

3.7.9. Tétel. *Legyen Y (FK) tér. $A \in (cs:Y)$ akkor és csak akkor, ha A sorai c-beliek, A első oszlopa Y-beli és $\hat{A} \in (c_0:Y)$.*

Bizonyítás. $\delta^1 \in cs$, és $A\delta^1$ pontosan az A első oszlopa. A 3.7.8 Lemmát és a 3.3.9 Állítást alkalmazva és felhasználva, hogy $cs = cs_0 \oplus \delta^1$, a tétel állítása azonnal adódik. ■

3.7.10. Tétel. *$A \in (cs:\ell^p)$ $(1 \le p < \infty)$ pontosan akkor, ha*
$\sup\{\sum_{n=1}^\infty \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k-1)}\right|^p : \kappa \in \mathcal{N}\} < \infty$

Bizonyítás. a^1 az A mátrix első oszlopa. A 3.7.9 Tétel szerint $A \in (cs:\ell^p)$ pontosan akkor, ha $\hat{A} \in (c_0:\ell^p)$, $a^1 \in \ell^p$ és A sorai konvergensek.

$$\sup\{\sum_{n=1}^\infty \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k-1)}\right|^p : \kappa \in \mathcal{N}\} \le$$
$$\le \sup\{\sum_{n=1}^\infty \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k-1)}\right|^p : \kappa \in \mathcal{N}, 1 \notin \kappa\} + \|a^1\|_p^p =$$
$$= \sup\{\sum_{n=1}^\infty \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k+1)}\right|^p : \kappa \in \mathcal{N}\} + \|a^1\|_p^p < \infty.$$

Az utolsó egyenlőtlenség a 3.6.12 Tételből és $a^1 \in \ell^p$ fennállásából következik. Ezzel a szükségességet beláttuk.

$\kappa = 1$ választása a szuprémumban mutatja, hogy $a^1 \in \ell^p$. A feltétel szerint létezik K, hogy $\left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k-1)}\right|^p < K$ minden $\kappa \in \mathcal{N}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén. Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített, $b_k = \Re(a_{nk} - a_{n(k-1)})$ és $c_k = \Im(a_{nk} - a_{n(k-1)})$. Rögzítsünk egy $m \in \mathbb{N}$ számot és vezessük be a következőket $\kappa_1 = \{j : b_j \geq 0, j \leq m\}$, $\kappa_2 = \{j : b_j < 0, j \leq m\}$, $\kappa_1' = \{j : c_j \geq 0, j \leq m\}$, $\kappa_2' = \{j : c_j < 0, j \leq m\}$.

$$\sum_{k=1}^{m} |a_{nk} - a_{n(k-1)}| \leq \sum_{k=1}^{m} |b_k| + \sum_{k=1}^{m} |c_k| = \sum_{k\in\kappa_1} b_k - \sum_{k\in\kappa_2} b_k + \sum_{k\in\kappa_1'} c_k - \sum_{k\in\kappa_2'} c_k \leq 4K^{\frac{1}{p}}$$

minden $m \in \mathbb{N}$-re. Az utolsó egyenlőtlenségben azt használtuk fel, hogy tetszőleges $\kappa \in \mathcal{N}$ esetén

$$\left|\Re \sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k-1)}\right| \leq \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k-1)}\right| < K^{\frac{1}{p}},$$

illetve

$$\left|\Im \sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k-1)}\right| \leq \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k-1)}\right| < K^{\frac{1}{p}}.$$

Végül is azt kaptuk, hogy A sorai bv-ben vannak, tehát konvergensek. $\hat{A} \in (c_0 : \ell^p)$ is teljesül, hiszen ez a 3.6.12 Tétel szerint ekvivalens $\sup\{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k+1)}\right|^p : \kappa \in \mathcal{N}\} < \infty$ fennállásával, ez pedig most nyilvánvalóan teljesül. Tehát a 3.7.9 Tételt alkalmazva az elégségességet is bebizonyítottuk. ■

3.7.11. Tétel. *$A \in (cs : bv)$ pontosan akkor, ha*
$\sup\{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k-1)} - a_{(n-1)k} + a_{(n-1)(k-1)}\right| : \kappa \in \mathcal{N}\} < \infty$.

Bizonyítás. A bizonyítás teljesen analóg a 3.7.10 Tételével. Lényegében a 3.7.9 Tételt használjuk. A szükségességnél ismét két esetet különböztetünk meg, $1 \in \kappa$, illetve $1 \notin \kappa$ esetét. Így a bizonyítás szinte szóról-szóra ugyanaz mint a 3.7.10 Tételnél, persze mindenhol $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k-1)}\right|^p$ helyett a $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k-1)} - a_{(n-1)k} + a_{(n-1)(k-1)}\right|$ összeget használjuk, és persze a 3.6.12 Tétel helyett a 3.6.10 Tételt alkalmazzuk. ■

3.7.12. Tétel. *$A \in (cs : bv_0)$ pontosan akkor, ha A oszlopai c_0-beliek és*
$\sup\{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k-1)} - a_{(n-1)k} + a_{(n-1)(k-1)}\right| : \kappa \in \mathcal{N}\} < \infty$.

Bizonyítás. A 3.7.11 Tételből azonnal következik a 3.3.8 Tétel felhasználásával, hiszen $bv_0 = bv \cap c_0$ zárt altere bv-nek, és cs (AK) tér. ■

3.7.13. Tétel. *$A \in (bs : \ell^\infty)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{n(k-1)}| < \infty$ és A sorai c_0-beliek.*

Bizonyítás. A 3.3.12 Következmény szerint $A \in (bs : \ell^\infty)$ akkor és csak akkor, ha $A^\mathsf{T} \in (\ell^1 : bv_0)$, az erre vonatkozó feltételt a 3.4.9 Tételből olvashatjuk ki. Ezzel pedig A-ra pontosan tételünk feltételét kapjuk. ■

3.7.14. Tétel. *$A \in (bs:bs)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_m \sum_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{n=1}^{m} a_{nk} - a_{n(k-1)}\right| < \infty$ és A minden sora c_0-hoz tartozik.*

Bizonyítás. A 3.3.13 Következmény szerint $A \in (bs:bs)$ pontosan akkor, ha $A^{\mathsf{T}} \in (bv_0, bv_0)$, erre azonban a 3.5.9 Tétel ad szükséges és elégséges feltételt, amit A-ra átfogalmazva éppen tételünk feltételét nyerjük. ■

3.7.15. Tétel. *Legyen Y (FK) tér. $A \in (bs:Y)$ pontosan akkor, ha $\hat{A} \in (\ell^\infty : Y)$ és A sorai c_0-beliek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A \in (bs:Y)$, ekkor $bs \subseteq \omega_A$, ami azt jelenti, hogy A sorai $bs^\beta = bv_0$-beliek, ebből azonban következik, hogy A sorai nullsorozatok is. Legyen $y \in \ell^\infty$ és $x_n = y_n - y_{n-1}$, ekkor $x \in bs$, következésképp Ax értelmes. De ekkor a 3.3.16 Lemma (i) része szerint $\hat{A}y$ is értelmes és $\hat{A}y = Ax$, persze $Ax \in Y$, tehát a szükségességet beláttuk.

Ha most $x \in bs$, akkor legyen $y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$. Nyilvánvaló, hogy $y \in \ell^\infty$, ezért $\hat{A}y$ értelmes, és $\hat{A}y \in Y$. A 3.3.16 Lemma (i) része szerint viszont $Ax = \hat{A}y$, ami bizonyítja a szükségességet. ■

3.7.16. Tétel. *$A \in (bs:cs)$ pontosan akkor, ha $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{j=n}^{\infty} a_{jk} - a_{j(k+1)}\right| \to 0$ $(n \to \infty)$, és A sorai c_0-beliek.*

Bizonyítás. A 3.7.15 Tétel szerint $A \in (bs:cs)$ akkor és csak akkor, ha A sorai c_0-beliek és $\hat{A} \in (\ell^\infty : cs)$. Ekkor viszont alkalmazhatjuk a 3.6.19 Tételt $\hat{A}$-ra, ez pedig azzal a feltétellel együtt, hogy A sorai c_0-beliek, pontosan az állítást adja. ■

3.7.17. Tétel. *$A \in (bs:cs_0)$ pontosan akkor, ha $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{j=n}^{\infty} a_{jk} - a_{j(k+1)}\right| \to 0$ $(n \to \infty)$, és A sorai és oszlopai c_0-beliek.*

Bizonyítás. A 3.7.15 Tétel szerint $A \in (bs:cs_0)$ akkor és csak akkor, ha A sorai c_0-beliek és $\hat{A} \in (\ell^\infty : cs_0)$. Ha A oszlopai c_0-beliek, akkor $\hat{A}$ oszlopai is c_0-hoz tartoznak, így a 3.6.20 Tételt alkalmazva $\hat{A}$-ra, és kiegészítve az A soraira vonatkozó feltétellel, látható, hogy az elégségesség teljesül.

A szükségességhez ismét a 3.7.15 és 3.6.20 Tételeket használjuk. Ezek szerint csak azt kell belátnunk, hogy A oszlopai c_0-hoz tartoznak. Mivel $\delta^m \in bs$, ezért $A\delta^m \in cs_0 \subseteq c_0$. Ebből látható, hogy A m-edik oszlopa c_0-beli. ■

3.7.18. Tétel. *$A \in (bs:bv)$ akkor és csak akkor, ha A sorai c_0-beliek és $\sup\{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k+1)} - a_{(n-1)k} + a_{(n-1)(k+1)}\right| : \kappa \in \mathcal{N}\} < \infty$.*

Bizonyítás. A 3.7.15 Tétel szerint $A \in (bs:bv)$ pontosan akkor, ha A sorai c_0-beliek és $\hat{A} \in (\ell^\infty : bv)$. Ez utóbbi azonban a 3.6.10 Tétel szerint éppen az állítással ekvivalens. ■

3.7.19. Tétel. *$A \in (bs:bv_0)$ akkor és csak akkor, ha A sorai és oszlopai c_0-beliek valamint $\sup\{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k+1)} - a_{(n-1)k} + a_{(n-1)(k+1)}\right| : \kappa \in \mathcal{N}\} < \infty$.*

Bizonyítás. A 3.7.15 Tétel szerint $A \in (bs : bv_0)$ akkor és csak akkor, ha $\hat{A} \in (\ell^\infty : bv_0)$ és A sorai c_0-hoz tartoznak. Tegyük fel, hogy a tétel feltételei teljesülnek, megmutatjuk, hogy $A \in (bs : bv_0)$. A 3.7.18 Tétel bizonyításából látható, hogy $\hat{A} \in (c_0 : bv)$. Másrészt, mivel A oszlopai c_0-beliek, ezért $\hat{A}$ oszlopai is c_0-hoz tartoznak. Ekkor viszont a 3.3.8 Tételt alkalmazva, $\hat{A} \in (c_0 : bv_0)$ adódik, hiszen c_0 (AK) tér. A 3.6.11 Tétel szerint $(c_0 : bv_0) = (\ell^\infty : bv_0)$, tehát $\hat{A} \in (\ell^\infty : bv_0)$, ebből pedig a 3.7.15 Tételt alkalmazva, látható, hogy $A \in (bs : bv_0)$.

A megfordításhoz csak azt kell megmutatnunk, hogy A oszlopai c_0-hoz tartoznak, hiszen a 3.7.18 Tételből a másik két feltétel következik. Alkalmazzuk a 3.3.16 Lemma (i) részét $x = \delta^m$ választással, ekkor az ottani jelölést megtartva, $y \in \ell^\infty$ és $A\delta^m = \hat{A}y$. Mivel $A \in (bs : bv_0)$, ezért a 3.7.15 Tétel szerint $\hat{A} \in (\ell^\infty : bv_0)$, viszont ekkor $A\delta^m = \hat{A}y \in bv_0 \subseteq c_0$, ami azt jelenti, hogy A m-edik oszlopa c_0-hoz tartozik. ■

3.7.20. Tétel. *$A \in (bs : \ell^p)$ $(1 \le p < \infty)$ akkor és csak akkor, ha A sorai c_0-hoz tartoznak és $\sup\{\sum_{n=1}^\infty \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k+1)}\right|^p : \kappa \in \mathbb{N}\} < \infty$.*

Bizonyítás. A 3.7.15 Tétel szerint $A \in (bs : \ell^p)$ akkor és csak akkor, ha $\hat{A} \in (\ell^\infty : \ell^p)$ és A sorai c_0-beliek, ekkor azonban a 3.6.12 Tételt alkalmazva, éppen az állítást kapjuk. ■

3.7.21. Tétel. *$A \in (bs : c)$ akkor és csak akkor, ha $\sum_{k=1}^\infty \left|a_{nk} - a_{n(k+1)}\right|$ n-ben egyenletesen konvergens, A sorai c_0-beliek és oszlopai c-beliek.*

Bizonyítás. A 3.7.15 Tétel szerint, $A \in (bs : c)$ akkor és csak akkor, ha A sorai nullsorozatok és $\hat{A} \in (\ell^\infty : c)$. Ha most a 3.6.7 Tételt alkalmazzuk $\hat{A}$-ra, akkor éppen az állítás elégségesség részét kapjuk.

A szükségességhez tegyük fel, hogy $A \in (bs : c)$, ekkor $\hat{A} \in (\ell^\infty : c)$ és A sorai c_0-hoz tartoznak. Meg kell mutatnunk, hogy A oszlopai konvergensek. Alkalmazzuk a 3.3.16 Lemma (i) részét $x = \delta^m$ választással, ekkor tehát a lemma jelöléseit megtartva $A\delta^m = \hat{A}y$ $(y \in \ell^\infty)$, mivel $\hat{A}y \in c$, ezért $A\delta^m \in c$. ■

3.7.22. Tétel. *$A \in (bs : c_0)$ akkor és csak akkor, ha $\sum_{k=1}^\infty \left|a_{nk} - a_{n(k+1)}\right|$ n-ben egyenletesen konvergens, A sorai és oszlopai c_0-beliek.*

Bizonyítás. A 3.7.21 Tétel bizonyítása szinte szóról-szóra átvihető, azzal a módosítással, hogy a 3.6.7 Tétel helyett a 3.6.8 Tételre hivatkozunk. ■

A $(cs_0 : Y)$ típusú mátrixokról a következő tételek állíthatóak. Ezek bizonyításához mindig a 3.7.8 Lemmát és $\hat{A}$-ra a megfelelő, $(c_0 : Y)$ típusú mátrixokra vonatkozó tételt kell használni.

3.7.23. Tétel. *$A \in (cs_0 : \ell^\infty)$ pontosan akkor, ha $\sup_n \sum_{k=1}^\infty |a_{nk} - a_{n(k+1)}| < \infty$ és A sorai c-beliek.*

3.7.24. Tétel. *$A \in (cs_0 : c)$ pontosan akkor, ha $\sup_n \sum_{k=1}^\infty |a_{nk} - a_{n(k+1)}| < \infty$ és A sorai c-hez tartoznak és $(a_{nk} - a_{n(k+1)})_{n=1,\dots}$ konvergens minden $k \in \mathbb{N}$-re.*

3.7.25. Tétel. *$A \in (cs_0 : c_0)$ pontosan akkor, ha $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{n(k+1)}| < \infty$ és A sorai c-hez tartoznak és $\lim_{n\to\infty}(a_{nk} - a_{n(k+1)}) = 0$ minden $k \in \mathbb{N}$-re.*

3.7.26. Tétel. *$A \in (cs_0 : \ell^p)$ $(1 \leq p < \infty)$ pontosan akkor, ha A sorai c-beliek és $\sup\{\sum_n \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k+1)}\right|^p : \kappa \in \mathcal{N}\} < \infty$.*

3.7.27. Tétel. *$A \in (cs_0 : bv)$ pontosan akkor, ha A sorai c-beliek és $\sup\{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k+1)} - a_{(n-1)k} + a_{(n-1)(k+1)}\right| : \kappa \in \mathcal{N}\} < \infty$.*

3.7.28. Tétel. *$A \in (cs_0 : bv_0)$ pontosan akkor, ha A sorai konvergensek, $\lim_{n\to\infty}(a_{nk} - a_{n(k+1)}) = 0$ minden $k \in \mathbb{N}$-re és $\sup\{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{k\in\kappa} a_{nk} - a_{n(k+1)} - a_{(n-1)k} + a_{(n-1)(k+1)}\right| : \kappa \in \mathcal{N}\} < \infty$.*

3.7.29. Tétel. *$A \in (cs_0 : bs)$ pontosan akkor, ha $\sup_m \sum_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{n=1}^{m} a_{nk} - a_{n(k+1)}\right| < \infty$ és A sorai c-beliek.*

3.7.30. Tétel. *$A \in (cs_0 : cs)$ pontosan akkor, ha $\sup_m \sum_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{n=1}^{m} a_{nk} - a_{n(k+1)}\right| < \infty$, A sorai konvergensek és $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{nk} - a_{n(k+1)})$ konvergens minden $k \in \mathbb{N}$-re.*

3.7.31. Tétel. *$A \in (cs_0 : cs_0)$ pontosan akkor, ha $\sup_m \sum_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{n=1}^{m} a_{nk} - a_{n(k+1)}\right| < \infty$, A sorai c-hez tartoznak és $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{nk} - a_{n(k+1)}) = 0$ minden $k \in \mathbb{N}$-re.*

3.8. $(\ell^p : Y)$ típusú mátrixok

3.8.1. Tétel. *$A \in (\ell^p : \ell^\infty)$ pontosan akkor, ha $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^q < \infty$.*

Bizonyítás. Felhasználva, hogy $(\ell^p)^\beta = \ell^q$, a 3.3.12 Következmény szerint $A \in (\ell^p : \ell^\infty)$ akkor és csak akkor, ha $A^\mathsf{T} \in (\ell^1 : \ell^q)$. Ez azonban a 3.4.10 Tétel szerint pontosan az állítást adja. ■

A következő két tétel bizonyításához a 3.3.8 és a 3.8.1 Tételeket használhatjuk, hiszen c és c_0 zárt altere ℓ^∞-nek, és persze ℓ^p (AK) tér.

3.8.2. Tétel. *$A \in (\ell^p : c)$ pontosan akkor, ha $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^q < \infty$ és A oszlopai c-beliek.*

3.8.3. Tétel. *$A \in (\ell^p : c_0)$ pontosan akkor, ha $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^q < \infty$ és A oszlopai c_0-beliek.*

3.8.4. Tétel. *$A \in (\ell^p : bs)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_m \sum_{k=1}^{\infty} |\sum_{n=1}^{m} a_{nk}|^q < \infty$.*

Bizonyítás. A 3.3.13 Következmény szerint $A \in (\ell^p : bs)$ pontosan akkor, ha $A^\mathsf{T} \in (bv_0 : \ell^q)$, hiszen $(\ell^p)^\beta = \ell^q$ és $bs^\beta = bv_0$. Viszont $A^\mathsf{T} \in (bv_0 : \ell^q)$ fennállására a 3.5.10 Tétel ad szükséges és elégséges feltételt, ezt A-ra átfogalmazva, éppen az állítást kapjuk. ■

3.8.5. Tétel. *$A \in (\ell^p : cs)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_m \sum_{k=1}^{\infty} |\sum_{n=1}^{m} a_{nk}|^q < \infty$ és A oszlopai cs-beliek, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}$ konvergens minden $k \in \mathbb{N}$-re.*

Bizonyítás. Ez a 3.8.4 és 3.3.8 Tételek következménye, hiszen cs zárt altere bs-nek, és ℓ^p (AK) tér. ∎

3.8.6. Tétel. *$A \in (\ell^p : cs_0)$ akkor és csak akkor, ha $\sup_m \sum_{k=1}^{\infty} |\sum_{n=1}^{m} a_{nk}|^q < \infty$ és A oszlopai cs-beliek, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} = 0$ minden $k \in \mathbb{N}$-re.*

Bizonyítás. A 3.8.5 és 3.3.8 Tételekből azonnal adódik, hiszen cs_0 zárt altere cs-nek, és ℓ^p (AK) tér. ∎

3.8.7. Tétel. *$A \in (\ell^p : \ell^1)$ pontosan akkor, ha $\sup\{\sum_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{n\in\nu} a_{nk}\right|^q : \nu \in \mathcal{N}\} < \infty$.*

Bizonyítás. A 3.3.15 Következmény szerint $A^{\mathsf{T}} \in (c_0 : \ell^q)$ akkor és csak akkor, ha $A = (A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} \in (\ell^p : \ell^1)$. A^{T}-ra alkalmazva a 3.6.12 Tételt éppen az állítást kapjuk. ∎

3.8.8. Tétel. *$A \in (\ell^p : bv)$ akkor és csak akkor, ha $\sup\{\sum_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{n\in\nu} a_{nk} - a_{(n-1)k}\right|^q : \nu \in \mathcal{N}\} < \infty$.*

Bizonyítás. $A \in (\ell^p : bv)$ ekvivalens $A^{\mathsf{T}} \in (cs : \ell^q)$ fennállásával a 3.3.14 Következmény szerint. Erre azonban a szükséges és elégséges feltételt a 3.7.10 Tétel adja meg, ezzel pedig pont az állítást kapjuk. ∎

3.8.9. Tétel. *$A \in (\ell^p : bv_0)$ akkor és csak akkor, ha $\sup\{\sum_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{n\in\nu} a_{nk} - a_{(n-1)k}\right|^q : \nu \in \mathcal{N}\} < \infty$ és A oszlopai c_0-beliek.*

Bizonyítás. A 3.8.8 és 3.3.8 Tételeket használjuk, hiszen $bv_0 = bv \cap c_0$ zárt altere bv-nek, és ℓ^p (AK) tér. ∎

Az $(\ell^p : \ell^r)$ típusú mátrixok jellemzése mai napig sem teljes, bár többféle eredmény ismert. Talán a legegyszerűbbnek tűnhet az $(\ell^2 : \ell^2)$ eset, mégis csak 1971-ben találta L.Crone a következő tételt.

3.8.10. Tétel (L. Crone, 1971). *$A \in (\ell^2 : \ell^2)$ akkor és csak akkor, ha a következők teljesülnek: (i) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 < \infty$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. (ii) az $(A^*A)^n$ szorzat értelmes minden $n \in \mathbb{N}$-re (iii) $\sup_n \sup_i |[(A^*A)^n]_{ii}|^{\frac{1}{n}} = K < \infty$*

3.8.11. Lemma. *Ha az A mátrix sorai és oszlopai ℓ^2-ben vannak, akkor $A \in (\ell^2 : \ell^2)$ ekvivalens $\sup_n \|P_n \circ A^*A \circ P_n\| < \infty$ fennállásával.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az A mátrixra tett feltevés szerint A^*A létezik. $P_n \circ A^*A \circ P_n \in (\ell^2 : \ell^2)$ nyilvánvalóan teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. A 3.2.3 Tétel szerint az $A \in (\ell^2 : \ell^2)$ leképezés folytonos. ϕ sűrű ℓ^2-ben, és ℓ^2 teljes, ezért $A \in (\ell^2 : \ell^2)$ ekvivalens azzal, hogy $A\restriction_\phi : \langle \phi, \|\cdot\|\rangle \to \ell^2$ korlátos leképezés.

Legyen most $x \in \phi$ és $n_0 \in \mathbb{N}$ olyan nagy, hogy minden $n \geq n_0$-ra $P_n x = x$, ekkor

$$\|Ax\|^2 = (Ax)^*Ax = x^*(A^*A)x = x^*P_n \circ A^*A \circ P_n x. \tag{3.2}$$

Nyilvánvaló, hogy most teljesül az asszociativitás, hiszen abszolút konvergens sorok jelennek meg a mátrix szorzásnál, azok pedig átrendezhetőek. Ha most $A : \phi \to \ell^2$ korlátos leképezés, akkor az előző egyenlőség szerint $\sup_n \|P_n \circ A^*A \circ P_n\| \leq \|A\|^2 < \infty$.

Ha $\sup_n \|P_n \circ A^*A \circ P_n\| = K < \infty$ és $x \in \phi$ és $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $P_n x = x$, akkor a fenti (3.2) egyenlőség szerint $\|Ax\|^2 \leq K\|x\|^2$, tehát $A : \phi \to \ell^2$ korlátos. ∎

3.8.12. Lemma. *Tegyük fel, hogy az A mátrix sorai és oszlopai ℓ^2-ben vannak. $\sup_n \|P_n \circ A^*A \circ P_n\| < \infty$ akkor és csak akkor, ha $A^*A \in (\ell^2 : \ell^2)$.*

Bizonyítás. Ha $A^*A \in (\ell^2 : \ell^2)$, $x \in \phi$ és $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $P_n x = x$, akkor

$$\|P_n \circ A^*A \circ P_n x\| = \|P_n(A^*Ax)\| \leq \|A^*Ax\| \leq \|A^*A\|\|x\|,$$

felhasználva, hogy $\|P_n\| \leq 1$.
Ebből $\sup_n \|P_n \circ A^*A \circ P_n\| \leq \|A^*A\| < \infty$ azonnal következik.

A megfordításhoz legyen $x \in \phi$ és $n_0 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $P_n x = x$, ekkor $\|P_n(A^*Ax)\| = \|P_n \circ A^*A \circ P_n x\| \leq K\|x\|$. Mivel ez minden elég nagy n-re teljesül, ezért $A^*Ax \in \ell^2$ és persze $\|A^*Ax\| \leq K\|x\|$, tehát $A^*A\restriction_\phi \colon \phi \to \ell^2$ korlátos leképezés, ekkor pedig valóban $A^*A \in (\ell^2 : \ell^2)$. ■

3.8.13. Lemma. *Legyen B $n \times n$-es, pozitív, szimmetrikus mátrix, továbbá legyen C végtelen mátrixra $C_{ij} = B_{ij}$, ha $i, j \leq n$ egyébként pedig legyen $C_{ij} = 0$. Ekkor $\sup_i |C_{ii}| \geq \frac{1}{n}\|C\|$.*

Bizonyítás. Nyilvánvalóan $\|B\| = \|C\|$, és a 0.2.14 Tétel szerint, B legnagyobb sajátértéke $\|B\|$. Létezik U unitér mátrix, amelyre $B = UDU^*$, ahol $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ és $\lambda_i \geq 0$ a B mátrix sajátértékei. Legyen mondjuk $\lambda_k = \|C\|$. Felhasználva, hogy U unitér, tehát $\sum_{i=1}^n |u_{ik}|^2 = 1$ kapjuk, hogy valamely j-re $|u_{jk}|^2 \geq \frac{1}{n}$. Ebből

$$b_{jj} = \sum_{i=1}^n |u_{ji}|^2 \lambda_i \geq \frac{1}{n}\lambda_k = \frac{1}{n}\|C\|.$$

■

Bizonyítás. (3.8.10 Tétel) Tegyük fel, hogy $A \in (\ell^2 : \ell^2)$, ekkor a 3.3.5 Tétel szerint A sorai és oszlopai ℓ^2-ben vannak. 3.8.11 Lemma és 3.8.12 Lemma összevetéséből, látható, hogy $A^*A \in (\ell^2 : \ell^2)$. Ismét a 3.3.5 Tétel szerint A^*A sorai és oszlopai ℓ^2-ben vannak. n-re vonatkozó teljes indukcióval, felhasználva, hogy $(A^*A)^* = A^*A$ látható, hogy *(ii)* teljesül. *(iii)* is szükséges ugyanis $|[(A^*A)^n]_{ii}| \leq \|(A^*A)^n\| \leq \|A^*A\|^n$. Az első egyenlőtlenség azért igaz, mert $|[(A^*A)^n]_{ii}| = |\delta^i(A^*A)^n\delta^i| \leq \|(A^*A)^n\|$.

A megfordításhoz tegyük fel, hogy teljesülnek a feltételek. Vegyük észre, hogy *(ii)*-ből következik, hogy A oszlopai ℓ^2-ben vannak. $P_n \circ (A^*A)^2 \circ P_n - (P_n \circ A^*A \circ P_n)^2$ pozitív operátor, ezért $\|P_n \circ (A^*A)^2 \circ P_n\| \geq \|P_n \circ A^*A \circ P_n\|^2$. Indukcióval könnyen látható, hogy $\|P_n \circ (A^*A)^{2^k} \circ P_n\| \geq \|P_n \circ A^*A \circ P_n\|^{2^k}$ minden $k \in \mathbb{N}$-re. Tehát minden $k \in \mathbb{N}$-re

$$\|P_n \circ A^*A \circ P_n\| \leq \|P_n \circ (A^*A)^{2^k} \circ P_n\|^{2^{-k}} \leq n^{2^{-k}} \sup_i \|[(A^*A)^{2^k}]_{ii}\|^{2^{-k}} \leq n^{2^{-k}} K.$$

Itt a *(iii)* feltételt és a 3.8.13 Lemmát használtuk $C = P_n \circ (A^*A)^{2^k} \circ P_n$ választással. Ebből $\|P_n \circ A^*A \circ P_n\| \leq K$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, azaz $\sup_n \|P_n \circ A^*A \circ P_n\| \leq K$ és a 3.8.11 Lemma szerint készen vagyunk, hiszen *(i)* szerint A sorai ℓ^2-beliek, és mint megállapítottuk A oszlopai is ℓ^2-höz tartoznak. ■

A következő három tételt bizonyítás nélkül említjük csak meg. Az első tétel igazából nem is tartozik szorosan a témakörhöz, a másodikhoz és harmadikhoz viszont azért nem adunk bizonyítást, mert meglehetősen hosszadalmas gondolatmenetre lenne szükség.

3.8.14. Tétel (H.R. Pitt). *Legyen $p > r$, ekkor minden $A \in (\ell^p : \ell^r)$ kompakt operátor.*

A most következő két tételhez be kell vezetnünk néhány jelölést. Legyen A végtelen mátrix, $1 < r < \infty$ és s olyan, hogy $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, továbbá legyenek

$$\alpha_m = \sup_{\nu \in \mathcal{N}, |\nu| \leq m} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{n \in \nu} a_{nk} \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}}, \qquad \beta_m = \sup_{\kappa \in \mathcal{N}, |\kappa| \leq m} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k \in \kappa} a_{nk} \right|^r \right\}^{\frac{1}{r}}$$

3.8.15. Tétel (W.L.C. Sargent, 1960). *Ha A végtelen mátrixra $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \alpha_{n-1}|^r < \infty$, vagy $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n - \beta_{n-1}|^q < \infty$, akkor $A \in (\ell^p : \ell^r)$.*

3.8.16. Tétel (W.L.C. Sargent, 1960). *Ha $A \in (\ell^p : \ell^r)$, akkor $\sup_n \frac{\alpha_n}{n^{\frac{1}{s}}} < \infty$ és $\sup_n \frac{\beta_n}{n^{\frac{1}{p}}} < \infty$.*

Látható, hogy e két utolsó tétel egy szükséges és egy elégséges feltételt fogalmaz meg arra, hogy egy A mátrix $(\ell^p : \ell^r)$-ben legyen. Olyan eredmény nem ismeretes, amely az $(\ell^p : \ell^r)$ típusú mátrixok ekvivalens jellemzését adná. A két tétel bizonyítása [14]-ben található meg. Az ott adott, általánosabb módszer segítségével más sorozatterek esetén is tudunk jellemezni végtelen mátrixokat. Speciálisan, szükséges és elégséges feltételt kapunk az $(\ell^1 : \ell^p)$, $(\ell^\infty : \ell^p)$, $(\ell^p : \ell^1)$ és az $(\ell^p : \ell^\infty)$ típusú mátrixokra.

3.9. Összefoglalás

A dolgozatban a legismertebb és talán a legfontosabb sorozatterek esetében jellemeztük azon végtelen mátrixokat, melyek egy adott térből, egy másik adott térbe képeznek. Egyes esetekben, ahol ez értelmes volt, annak is szükséges és elégséges feltételét adtuk, hogy a mátrix valamilyen értelemben megőrizze a sorozatok limeszeit. A bizonyítások, azon a tényen alapultak, hogy az előforduló terek mind egy speciális tér családba tartoztak, nevezetesen (FK) terek, sőt (BK) terek voltak. Az (FK) terek elméletének legalapvetőbb eredményeivel már jellemezni tudtuk a megfelelő típusú végtelen mátrixokat. A dolgozatban megemlített sorozatterek közötti mátrixleképezéseknek szinte teljes jellemzését adtuk. További sorozatterekre vonatkozó tételek találhatóak [16]-ban.

Az alábbi táblázat a különböző típusú mátrixok jellemzését megadó tételek számait tartalmazza. Az egyes sorokban egy adott (FK) tér esetén, a különböző terekbe képező mátrixokra vonatkozó hivatkozásokat találjuk. Analóg módon, az oszlopokban pedig különböző terekből, egy rögzített térbe képező mátrixokra vonatkozó tételek számait soroltuk fel. Tehát például a $(c : c_0)$ típusú mátrixok jellemzése a 3.6.4 Tételben található meg. Nem minden esetben adtunk a dolgozatban az adott típusú mátrixra jellemzést, ilyenkor igyekeztünk a kérdéses tételhez „legközelebbi” eredményre utalni.

	Y	ω	ℓ^∞	c	c_0	ℓ	ℓ^r	bv	bv_0	bs	cs	cs_0
X	3.3.5	3.3.1	3.3.12			3.3.15	3.3.15	3.3.14		3.3.13		
ℓ^∞		3.3.1	3.6.1	3.6.7	3.6.8	3.6.12	3.6.12	3.6.10	3.6.11	3.6.13	3.6.19	3.6.20
c	3.6.9	3.3.1	3.6.1	3.6.5	3.6.4	3.6.12	3.6.12	3.6.10	3.6.11	3.6.13	3.6.15	3.6.17
c_0	3.6.9	3.3.1	3.6.1	3.6.2	3.6.3	3.6.12	3.6.12	3.6.15	3.6.11	3.6.13	3.6.14	3.6.16
ℓ	3.4.1	3.3.1	3.4.2	3.4.3	3.4.4	3.4.10	3.4.10	3.4.8	3.4.9	3.4.5	3.4.6	3.4.7
ℓ^p	3.3.15	3.3.1	3.8.1	3.8.2	3.8.3	3.8.7	3.8.10	3.8.8	3.3.16	3.8.4	3.8.5	3.8.6
bv	3.5.1	3.3.1	3.5.11	3.5.11	3.5.11	3.5.12	3.5.12	3.5.11	3.5.11	3.5.11	3.5.11	3.5.11
bv_0	3.5.1	3.3.1	3.5.2	3.5.4	3.5.3	3.5.10	3.5.10	3.5.8	3.5.9	3.5.5	3.5.6	3.5.7
bs	3.7.15	3.3.1	3.7.13	3.7.21	3.7.22	3.7.20	3.7.20	3.7.18	3.7.19	3.7.14	3.7.16	3.7.17
cs	3.7.9	3.3.1	3.7.1	3.7.2	3.7.3	3.7.10	3.7.10	3.7.11	3.7.12	3.7.4	3.7.5	3.7.7
cs_0	3.7.8	3.3.1	3.7.23	3.7.24	3.7.25	3.7.26	3.7.26	3.7.27	3.7.28	3.7.29	3.7.30	3.7.31

Irodalomjegyzék

[1] D.G. Bourgin. *Linear Topological Spaces.* Amer. J. Math., vol. 65, (1943), pp. 637–659.

[2] L. Crone. *A Characterization of Matrix Operators on ℓ^2.* Math. Z., vol. 123, (1971), pp. 315–317.

[3] L. Czách. *Topologikus vektorterek.* Jegyzet (1998).

[4] M.M. Day. *The spaces L^p with $0 < p < 1$.* Bull. Amer. Math. Soc., vol. 46, (1940), pp. 816–823.

[5] P.R. Halmos. *Mértékelmélet.* Gondolat (1984).

[6] V.L. Klee. *Separation properties of convex cones.* Proc. Amer. Math. Soc., vol. 6, (1955), pp. 313–318.

[7] V.L. Klee. *An Example in the Theory of topological linear Spaces.* Arch. Math., vol. 7, (1956), pp. 362–366.

[8] V.L. Klee. *Two examples in the theory of topological linear spaces.* Studia Math., vol. 25, (1965), pp. 385–390.

[9] G. Köthe. *Topological Vector Spaces I.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag (1979).

[10] A.E. Livingston. *The space H^p, $0 < p < 1$, is not normable.* Pacific J. Math., vol. 3, (1953), pp. 613–616.

[11] L. Nachbin. *Topological Vector Spaces Of Continuous Functions.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., vol. 40, (1954), pp. 471–474.

[12] S. Rolewicz. *On a certain class of linear metric spaces.* Bull. Acad. Polon. Sci., vol. 5, (1957), pp. 471–473.

[13] W.H. Ruckle. *Sequence spaces.* Research Notes in Mathematics. Pitman Publishing Inc. (1981).

[14] W.L.C. Sargent. *Some sequence spaces related to the ℓ^p spaces.* J. London Math.Soc., vol. 35, (1960), pp. 161–171.

[15] H. H. SCHAEFER. *Topological Vector Spaces*. Graduate Text in Mathematics. Springer-Verlag (1971).

[16] M. STIEGLITZ & H. TIETZ. *Matrixtransfomationen von Folgenräumen, Eine Ergebnisübersicht*. Math. Z., vol. 154, (1977), pp. 1–16.

[17] S.S. WALTERS. *The space H^p with* $0 < p < 1$. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 1, (1950), pp. 800–805.

[18] A. WILANSKY. *Summability through Functional Analysis*. North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science Publishers B.V. (1984).