Élek leemelése és csúcsok szétszedése irányítatlan gráfokban

SZAKDOLGOZAT

Fleiner Balázs
az ELTE végzős matematikus hallgatója

Témavezető: Frank András
egyetemi tanár

1996.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Jelen szakdolgozat speciális gráfelméleti konstrukciókkal és azok felhasználásával foglalkozik. A kombinatorikus optimalizálás témakörében számos olyan probléma merült fel, melyek megoldásában tipikus eljárások nyomaira bukkanhatunk. Közelebbről néhány élösszefüggőséggel kapcsolatos kérdéssel, és a megválaszolásukban szereplő ún. élleemelési konstrukciókkal ismerkedünk meg.

Gráfoknak sokat vizsgált alapvető tulajdonsága az élösszefüggőség, amely egy k-élösszefüggő gráf esetében azt jelenti, hogy legalább k élt kell elhagyni a gráfból, hogy több komponensre essen. A különböző optimalizálási feladatokhoz nélkülözhetetlen a fokfüggvény beható vizsgálata. Ez a függvény azt írja le, hogy a gráf csúcsainak adott részhalmazához hány olyan él van, amely egyaránt tartalmaz a halmazból és a komplementeréből csúcsot. Az derült ki,hogy a legfontosabb tulajdonság a szubmodularitás, amely lehetővé teszi a kibontakozó elmélet poliéderes eszközökkel történő megközelitését. Ezzel az eljárással kombinatorikus optimalizálási feladatokat akár költségfüggvénnyel nehezített esetekben is tudunk kezelni. Mindazonáltal más hatékony eszközök is ismertek. Ilyen lehet egy olyan egyszerű változtatás a gráfon, amelynek az élösszefüggőségre gyakorolt hatását jól nyomon követhetjük, de iterált alkalmazása gyökeresen változtathat a gráf egyéb tulajdonságain.

Az s pontra illeszkedő su és sv él törlését és uv él behúzását az su, sv élpár s-ről történő leemelésének mondjuk. Lovász [2] tétele $k \geq 2$ esetben olyan leemelések létezését igazolja, amely az s-től különböző csúcsok halmazára megtartja a k-élösszefüggést. Ez a tétel komoly feladatok megoldásához járul hozzá. Ilyen pl. a 2-élösszefüggő gráfok előállítására használt fülfelbontás $2k$-élösszefüggő gráfok előállítására vonatkozó általánosítása [2]. Poliéderes megfontolások helyett leemelések alkalmazásával is bizonyítható Nash-Williams eredménye [4], mely szerint minden $2k$-élösszefüggő irányítatlan gráfnak van k-élösszefüggő irányítása. Gráfok k-élösszefüggővé növelésének minimális élszám igényét is Lovász tételével lehet igazolni [6]. Mindez igen hatékony eszköz abban az esetben, ha a csúcsokra fokszám előírás is adott.

Ha az éleken szereplő költségfüggvény alapján szeretnénk optimalizálni, akkor könnyen NP-teljes problémákba botlunk. Amennyiben az élek költségét végpontokon értelmezett függvény definiálja, a leemelés technika és a mohó algoritmus együttes alkalmazása vezethet minket sikerre.

Bevezetünk egy újabb leemelés fogalmat, nevezetesen a 3-csillag leemelését. Ez az su, sv, sz élek törlését és az s^*u, s^*v, s^*z élek behúzását jelenti, ahol s^* egy extra pont. Erre a leemelésre Lovász tételével rokon tétel igaz, mellyel a már kitaposott utat követve a régi eredmények új kiterjesztését nyerhetjük. A 3-csillag leemelés és az élpár leemelés tulajdonságait kihasználva egyszerű eljutni a nagyobb fokú csillagok k-élösszeföggést megtartó leemeléséhez is. Mindezek a tételek $k \geq 2$ esetre érvényesek, $k = 1$ esetben a megfelelő állítás és bizonyítás általában különböző, esetleg triviális. Mindezek alapján dolgozatunk felépítése a következő:

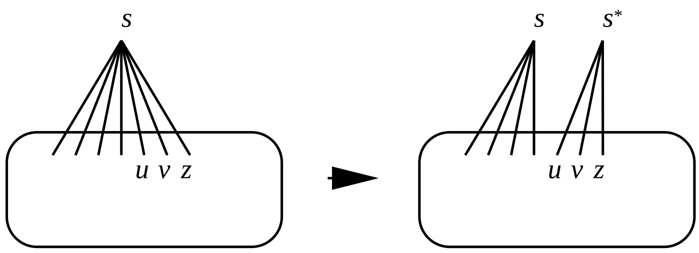
A szükséges definíciók után megvizsgáljuk, hogy mikor lehet egy 3-csillagot a k-élösszefüggőség megtartásával leemelni. Ezt az eredményt kiterjesztjük több 3-csillag leemelésére 2-3 hipergráfokban.

Külön fejezet foglalkozik az alkalmazásokkal, ahol az élpár leemelés következményeivel analóg állításokat mondunk ki. Az élösszefüggőség növelés hurokélektől mentes változatát is leírjuk, majd igazoljuk a tetszőleges méretű csillagok leemelésével foglalozó alapvető tételt. Utóbbi felhasználásának új fejezetet szentelünk, melyben rámutatunk Nash-Williams szétszedés elméletéhez fűződő kapcsolatára. Végezetül a bizonyitott tételekkel kapcsolatos lokál-élösszefüggőség megtartó leemelésről fogalmazunk meg sejtést.

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Frank Andrásnak, aki mindvégig részletesen figyelemmel kísérte munkámat, ellátott a szükséges irodalommal és fontos szakmai útmutatásokat adott. Köszönöm még Hidvégi Zoli rendszergazda segítségét is, aki lelkiismeretesen oldotta meg a munkámat nehezítő számítástechnikai jellegű problémákat. Nem utolsó sorban Varga Dánielnek és Wiener Gábornak jár még köszönet, hogy megkönnyítették a szövegszerkesztés nehézségeinek leküzdését.

2. Definíciók, jelölések, alapvető állítások

$G = (V, E)$ irányítatlan gráfot jelöl. $s \in V$ **leemelése** az su, sv, sz élek törlése és az s^*u, s^*v, s^*z élek behúzása, ahol s^* egy újonnan felvett pont. Az u, v, z végpontú 3-csillagot $\{u, v, z\}$ módon jelöljük.



Egy $X \subset V$ halmaz az a, b pontokat **elválasztja**, ha $a \in X \not\ni b$ vagy $b \in X \not\ni a$. Azt mondjuk, hogy $\{a, b, c\}$ 3-csillag vagy egy él **lefog** egy $X \in V$ halmazt, ha X az a, b, c illetve az él végpontjai közül kettőt elválaszt.

$X \subset V$ halmaz fokát $d(X)$ jelöli és azokat az éleket számolja, amelyek X-et lefogják. Ha X-re illeszkednek hurokélek, akkor minden egyes példány az X fokát 2-vel növeli.

$x, y \in V$ pontokra $\lambda(x, y)$ **lokális élösszefüggőséget**

$$\lambda_G(x,y) := \lambda(x,y) := \min\{d(X) \ : \ x \in X \not\ni y\}$$

definiálja, míg a globálisat:

$$\lambda(G) := \min\{\lambda(x,y) \ : \ x, y \in V\}.$$

Egy s csúcs és a tőle diszjunkt X halmaz közötti éleket $d(X,s)$ jelöli. Utóbbi jelöléseknél ha szükséges jelezni, hogy a G gráfban értelmezett fogalomról van szó, akkor ezt $d_G(X)$ módon tesszük. Szóhasználatunkban az s középponttal rendelkező 3-csillag **leemelhető** az s pontról, ha a leemeléssel kapott G' gráfban $x,y \in V-s$ pontokra $\lambda_G(x,y) = \lambda_{G'}(x,y)$.

A gráfra, amelyet G-ből az s csúcs és a belőle induló élek elhagyásával kapunk, a $G-s$ jelölést használjuk. Az s szompszédjait $N(s) := \{x \ : \ x \in V, \ sx \in E\}$ jelöli.

2-3 hipergráfon olyan hipergráfot értünk, amely élei 2 ill. 3 pontú élek. Ebben az értelemben tehát a hagyományos gráfok is 2-3 hipergráfok.

2.1. Lemma. (Szubmodularitási lemma) *$G = (V,E)$ gráf vagy hipergráf. A $d : 2^V \to \mathbb{N}$ függvény szubmoduláris, azaz*

$$d(X) + d(Y) \geq d(X \cap Y) + d(X \cup Y),$$

ahol $X, Y \subset V$.

biz. Az éleket csoportosíthatjuk aszerint, hogy pontjaik az $X-Y$, $Y-X$, $X \cap Y$ és $V - X \cup Y$ halmazok közül melyekbe esnek. Könnyű ellenőrizni, hogy az ilyen értelemben azonos típusú éleket az egyenlőtlenség bal oldala legalább annyiszor számolja, mint a jobb. ☺

Három halmazra is létezik hasznos egyenlőtlenség:

2.2. Lemma. *$G = (V,E)$ irányítatlan gráf (nem hipergráf!), $X, Y, Z \subset V$. Az igaz, hogy*

$$\begin{aligned} d(X) + d(Y) + d(Z) \geq d(X \cap Y \cap Z) \ &+ \ d(X - (Y \cup Z)) + \\ &+ \ d(Y - (Z \cup X)) + \\ &+ \ d(Z - (X \cup Y)) + 2d(X \cap Y \cap Z, V - (X \cup Y \cup Z)). \end{aligned}$$

☺

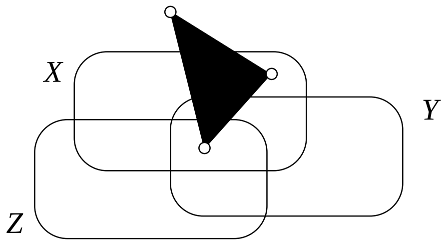
Ez az egyenlőtlenség kulcsszerephez jutott Lovász tételének bizonyításában és a bemutatásra kerülő tételeknél is alapvető lesz. 2-3 hipergráfokra csak a gyengítése igaz:

2.3. Lemma. *$G(V,E)$ 2-3 hipergráf, $X, Y, Z \subset V$.*

$$\begin{aligned} d(X) + d(Y) + d(Z) \geq d(X \cap Y \cap Z) \ &+ \ d(X - (Y \cup Z)) + \\ &+ \ d(Y - (Z \cup X)) + \\ &+ \ d(Z - (X \cup Y)) + d(X \cap Y \cap Z, V - (X \cup Y \cup Z)). \end{aligned}$$

☺

Utóbbi két lemmának a bizonyítása a szubmodularitási lemma bizonyításában mutatott eljárással történik. A két lemma közötti különbséget az indokolja, hogy ha egy 3-hiperél $X-(Y\cup Z)$, $X\cap Y\cap Z$, $V-(X\cup Y\cup Z)$-beli pontokra illeszkedik, akkor őt a 2.2. lemma bal oldala kevesebbszer számolja, mint a jobb.



A szubmodularitási lemma, mint látni fogjuk, olyan halmazokon alkalmazható eredményesen, amelyekre $X-Y$, $Y-X$, $X\cap Y$ és $V-X\cup Y$ halmazok egyike sem üres. Ekkor X, Y **keresztező** halmazok. Ha $V-(X\cup Y)=\emptyset$ megengedett, akkor X, Y halmazok csak **metszőek**. Ez utóbbi halmazpár típusra egy másik egyenlőtlenség lesz jól használható:

2.4. Lemma. *$X, Y\subset V$ esetén*

$$d(X)+d(Y)\geq d(X-Y)+d(X-Y).$$

biz. A $d:2^V\to\mathbb{N}$ függvény nyilván szimmetrikus, vagyis $d(X)=d(V-X)$. A szubmodularitással együtt használva:

$$\begin{aligned}
d(X)+d(Y) &= d(V-X)+d(Y)\geq\\
&\geq d((V-X)\cap Y)+d((V-X)\cup Y)=\\
&= d(Y-X)+d(V-(X-Y))=\\
&= d(Y-X)+d(X-Y)
\end{aligned}$$

☺

3. Leemelünk egy 3-csillagot

Kiindulásul az élpár leemelésekre vonatkozó alapvető tételt mondjuk ki:

3.1. Tétel. (Lovász [2]) *s a $G=(V,E)$ irányítatlan gráf egy pontja, $d(s)\neq 3$ és minden $V-s$-beli x,y-ra $\lambda(x,y)\geq k\geq 2$, akkor s-nél van leemelhető élpár.* ☺

Egy 3-csillag leemeléséhez szigorítani kell a gráffal kapcsolatos elvárásainkat:

3.2. Tétel. *$G=(V,E)$ irányítatlan gráf, $s\in V$ pontra nem illeszkedik hurokél, $d(s)\geq 5$ és minden $x,y\in V-s$ pontpárra $\lambda(x,y)\geq k\geq 2$. Pontosan akkor van leemelhető 3-csillag, ha $\lambda(G-s)\geq k-\left\lfloor\frac{d(s)-1}{2}\right\rfloor$.*

Bizonyítás. Először a szükségességet látjuk be. T.f.h. a leemelés után kapott G' gráfra $\lambda(G') \geq k$, míg s a harmadfokú s_1 és s_0 pontokra bomlik. $G-s$ egy minimális vágásának két partja az s_1 és s_0 pontokból induló éleket két-két nyalábba sorolja. Az említett minimális vágás éleit kiegészítve az s_1 és s_0 pontok kisebbik nyalábjaival a G' gráf egy vágásának élhalmazát kapjuk. Mivel a két kisebbik nyalábban összesen legfeljebb $\left\lfloor\frac{3}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{d(s)-3}{2}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{d(s)-1}{2}\right\rfloor$ darab él volt, így rátérhetünk az elégségesség bizonyítására.

Indirekt bizonyítunk. T.f.h. bármely 3-csillag leemelése rossz. Így minden leemeléssel keletkezik G'-ben egy k-nál kisebb vágás. s_0-t és s_1-t a vágás mindenképpen elválasztja, mert különben ezt a két pontot összehúzva azt kapnánk, hogy G-ben van k-nál kisebb vágás. Az sem lehet, hogy a leemelt 3-csillag végpontjait egy k-nál kisebb X vágás s_1-től elválasztja, mert ekkor $\lambda(X\Delta\{s_1\}) \leq k-3 < k$ is igaz lenne és $X\Delta\{s_1\}$ nem választja el s_0 és s_1 pontokat. Ezen megfontolások miatt tetszőleges 3-csillag leemelésekor a következő esetek valamelyikének kell teljesülnie:

1. Van olyan $X \subsetneqq V-s$ halmaz, amelyre $d_G(X) = k$ és X a 3-csillagnak legalább két végpontját tartalmazza.

2. Van olyan $X \subsetneqq V-s$ halmaz, amelyre $d_G(X) \leq k+2$ és X a 3-csillagnak mindhárom végpontját tartalmazza, azaz X *fedi* a 3-csillagot.

Azokat a 3-csillagokat, amelyeknél az 1. eset nem fordul elő, *legális* 3-csillagnak nevezzük. Tekintsük a következő halmazrendszert:

$$\mathcal{K} = \{X : X \subsetneqq V-s,\ d_G(X) = k,\ d(X,s) \geq 1\}\,.$$

Nyilvánvaló, hogy egy 3-csillag pontosan akkor legális, ha nincsen olyan $\mathcal{K}$-beli halmaz, ami legalább két végpontját tartalmazza.

Felmerül a kérdés, hogy létezik-e legális 3-csillag. Mivel minden G-ben k-fokú halmaz $G-s$-ben legalább $k-\left\lfloor\frac{d(s)-1}{2}\right\rfloor$ fokú, ezért két $\mathcal{K}$-beli nem tartalmazhatja $2\left\lfloor\frac{d(s)-1}{2}\right\rfloor$-nél több s-ből induló él végpontját. Így két maximális $\mathcal{K}$-beli halmaz nem lehet metsző, mert akkor az előzőek szerint egyúttal keresztezőek is lennének, és ekkor az uniójuk egy nagyobb $\mathcal{K}$-beli lenne a szokásos $k+k \geq d_G(X)+d_G(Y) \geq d_G(X\cup Y)+d_G(X\cap Y) \geq k+k$ szubmodularitási egyenlőtlenség miatt. Ezek szerint a maximális $\mathcal{K}$-beliek diszjunktak és kettővel nem lehet lefedni az összes s-ből induló él végpontját.

Ezentúl csak legális 3-csillagokkal foglalkozunk, amelyekre a fentiek szerint a 2. eset áll fent. Legyen $\mathcal{G}$ egy olyan halmazrendszer, hogy minden legális 3-csillaghoz van $X \in \mathcal{G}$ halmaz, hogy a 3-csillagot fedi az X és $d_G(X) \leq k+2$. Az indirekt feltevés miatt $\mathcal{G}$ jóldefiniált. Feltehető, hogy $|\mathcal{G}|$ minimális és ezen belül $\sum_{X\in\mathcal{G}}|X|$ maximális.

3.3. Állítás. *Ha $X \in \mathcal{G}$ és $Y \in \mathcal{K}$ és $d_G(X\cap Y, s) \geq 1$, akkor $Y \subset X$.*

biz. Nyilván $X \cap Y \neq \emptyset$. Ha $X \cup Y = V-s$ lenne, akkor $d(X,s) \leq \left\lfloor\frac{d(s)-1}{2}\right\rfloor + 2$, $d(Y,s) \leq$ $\leq \left\lfloor\frac{d(s)-1}{2}\right\rfloor$ miatt $d(X\cup Y, s) \leq 2\left\lfloor\frac{d(s)-1}{2}\right\rfloor + 1$. Tehát $d(X\cup Y,s) = d(s)$ akkor lehet, ha az előzőekben mindenhol egyenlőség szerepel. Ekkor $d_{G-s}(X) = d_{G-s}(Y) = k-\left\lfloor\frac{d(s)-1}{2}\right\rfloor$, így ha X, Y metszők, akkor $d_{G-s}(X) + d_{G-s}(Y) \geq d_{G-s}(X-Y) + d_{G-s}(Y-X)$ egyenlőtlenségből $d_{G-s}(Y-X) = k-\left\lfloor\frac{d(s)-1}{2}\right\rfloor$ adódna, ahonnan $d_G(Y-X) \leq k-1$, hiszen $Y-X$-ben legfeljebb eggyel kevesebb s-ből induló él végződik, mint Y-ban. Ez ellentmondás.

Emiatt, a következő szubmodularitási egyenlőtlenségben szereplő becslések helytállóak:

$$\underbrace{d_G(X)}_{k+2\geq} + \underbrace{d_G(Y)}_{k=} \geq \underbrace{d_G(X \cap Y)}_{\geq k} + \underbrace{d_G(X \cup Y)}_{\geq k}.$$

Így $d_G(X \cup Y) \leq k + 2$. $\mathcal{G}$ választása miatt $Y \subset X$ szükséges. ☺

3.4. Lemma. *Ha $X \in \mathcal{G}$, akkor $d(X, s) = 3$.*

Bizonyítás. $d(X, s) \geq 3$ triviális, hiszen X fedi valamelyik 3-csillagot. Először is belátjuk, hogy nem diszjunkt $\mathcal{G}$-beliek metszete legfeljebb két darab s-ből induló él végpontját tartalmazhatja, ui. legyenek X, Y $\mathcal{G}$-beli halmazok, amelyekre $d(X \cap Y) \geq 2$. ($\mathcal{G}$ választása miatt X és Y valódi metsző halmazok.)

$$d_{G-s}(X) + d_{G-s}(Y) \geq d_{G-s}(X - Y) + d_{G-s}(Y - X) \tag{1}$$

Feltehető, hogy pl. $d_{G-s}(X) \geq d_{G-s}(X - Y)$. Ekkor

$$k + 2 \geq d_G(X) = d_{G-s}(X) + d(X - Y, s) + d(X \cap Y, s) \geq$$

$$\geq d_{G-s}(X - Y) + d(X - Y, s) + 2 \geq d_G(X - Y) + 2 \geq k + 2.$$

Mivel mindenhol egyenlőség teljesül, ezért

$$d(X \cap Y, s) = 2 \text{ és } d_G(X - Y) = k. \tag{2}$$

Vegyük észre, hogy $d_{G-s}(X) = d_{G-s}(X - Y)$-ból következik (1) figyelembe vételével, hogy $d_{G-s}(Y) \geq d_{G-s}(Y - X)$ is igaz, ahonnan a fenti módon levezethető

$$d_G(Y - X) = k$$

is.

Legyen tehát $X \in \mathcal{G}$, és $\{a, b, c\}$ egy olyan legális 3-csillag végpontjai, amelyre $\{a, b, c\} \subset X$ ($\mathcal{G}$ definiciója miatt van ilyen). Mivel $d(X, s) \leq \left\lfloor \frac{d(s)-1}{2} \right\rfloor + 2 < d(s)$ (mert $d(s) \geq 5$),ezért az X-en kívül van s-ből induló élnek végpontja. Legyen d egy ilyen pont. Ekkor 3.3. állítás miatt és $\{a, b, c\}$ legalitása miatt $\{a, b, d\}$ legális, azaz semelyik két végét nem fedi $\mathcal{K}$-beli. Az indirekt feltevés szerint van $\mathcal{G}$-beli Y, amely fedi $\{a, b, d\}$-t. Mivel $a, b \in X \cap Y$, ezért (2) miatt $c \in X - Y$. Hasznos észrevétel, hogy a 3.3. állítás miatt $\{c, a, d\}$ legális. Ezt fedi egy $Z \in \mathcal{G}$ halmaz. Mivel $d_G(X - Y) = k$ és $c \in X - Y$, ezért $X - Y \in \mathcal{K}$, tehát a 3.3. állítás miatt $X - Y \subset Z$. Mindezek miatt:

$$2 = d(Z \cap X, s) = d(Z \cap (X - Y), s) + d(Z \cap (X \cap Y), s) = \underbrace{d(\overbrace{X - Y}^{c\in}, s)}_{\geq 1} + \underbrace{d(\overbrace{Z \cap (X \cap Y)}^{a\in}, s)}_{\geq 1}.$$

Mivel mindenhol egyenlőség teljesül, $d(X - Y, s) = 1$. Felidézve, hogy $d(X \cap Y, s) = 2$, kapjuk, hogy $d(X, s) = 3$. ☺

A 3.4. lemma miatt $\{a, b, c\}$ legális 3-csillagot fedő $\mathcal{G}$-beli X-en kívül még legalább két s-ből induló él végpontja megtalalható, legyenek ezek d és e. $\{a, b, c\}$-n túl a 3.3. állítás miatt $\{a,b,d\}$ és $\{a,b,e\}$ is legális 3-csillagok és a 3.4. lemma miatt $d \neq e$. Az említett csillagokhoz tartozó $\mathcal{G}$-beli halmazok legyenek X, Y és Z. Az is igaz, hogy $d_G(X \cap Y \cap Z) \neq k$, mert különben $X \cap Y \cap Z \in \mathcal{K}$ lenne, amiből a 3.3. állítás miatt következne, hogy a $\{a,c,d\}$ legális 3-csillagot fedő $\mathcal{G}$-beli W halmazra $d(W,s) \geq 4$ teljesülne, ami ellentmondás. A 3.4. lemma miatt és felhasználva, hogy bármelyik kettő halmaz metszete a-t és b-t mindenképpen tartalmazza, a három halmaz közül semelyik kettő uniója nem tartalmazhatja a harmadikat, így a következő általános érvényű egyenlőtlenségben nem szerepelnek üres halmazok:

$$(k+2)+(k+2)+(k+2) \geq d_G(X)+d_G(Y)+d_G(Z) \geq \tag{3}$$

$$\geq d_G(\overbrace{X \cap Y \cap Z}^{a,b\in}) + d_G(\overbrace{X-(Y \cup Z)}^{c\in}) + d_G(\overbrace{Y-(Z \cup X)}^{d\in}) + d_G(\overbrace{Z-(X \cup Y)}^{e\in}) +$$

$$+2d(\overbrace{X \cap Y \cap X}^{a,b\in}, \overbrace{V-(X \cup Y \cup Z)}^{s\in}) \geq (k+1)+k+k+k+4.$$

Innen pedig $k \leq 1$ adódik. ☺

Megjegyzés. Amennyiben illeszkedik az s pontra hurokél, könnyű dolgunk van, hiszen Lovász tétele biztosít egy leemelhető élpárt, aminek a középső pontjához bekötve a hurokél egyik végét, jó leemelést kapunk. A fenti bizonyítás kis módosítással akkor is érvényes, ha $G-s$ 2-3 hipergráf, ugyanis a fokfüggvény hipergráfokon is szimmetrikus és szubmoduláris. Változtatást csak a (3) egyenlőtlenségben kell tenni, ahol is a $d(X \cap Y \cap Z, V-(X \cup Y \cup Z))$ tagot csak egyszeres együtthatóval kell szerepeltetni. Ekkor persze $k \leq 3$ adódik, és a $k=2,3$ esetekben a 3-hiperéleket 3-csillagokra kell cserélni. Látni fogjuk, hogy ha egy hiperélt így módosítunk, akkor a 2- ill. 3-élösszefüggőség megörződik, és a cserék után kapott gráfban egy leemelhető 3-csillag az eredeti 2-3 hipergráfban is leemelhető lesz. . Ezentúl a 3.2. tételnek ez utóbbi, hipergráfos változatát fogjuk használni.

4. Többszörös leemelés

Az említett Lovász-féle tételnek megvan az a jó tulajdonsága, hogy iterálható, azaz ha egy élpár leemelése után még marad 3-nál több él, akkor mindig leemelhetünk egy újabb párt.

Amennyiben a 3-csillag leemeléseket kívánjuk ismételni, új fajta problémákat kell áthidalnunk. Meg kell vizsgálnunk, hogy a 3.2. tételben a $\lambda(G-s)$-re vonatkozó feltétel miképpen változik a leemelések során és ez mit jelent a kezdeti gráfra vonatkozóan. Ezután persze igazolni kell, hogy az így kapott feltétel elégséges is az ismételt leemelések elvégzéséhez. Egy másik nehézség abból adódik, hogy egy adott helyzetben az addig leemelt 3-csillagok középső pontjaira nyilván nincs olyan megkötésünk, hogy bármely másik pontból k darab éldiszjunk út vezet hozzá. Mivel egy leemelt csillag középső pontja 3 fokú, ezért $k \geq 4$ esetekben erre a pontra biztosan sérül a k-élösszefüggőségi követelmény. Megnyugtató, hogy $k=2,3$-ra a leemelt csillagok középpontjaira nézve is teljesül a 2- ill. 3-élösszefüggőség. Ez szinte nyilvánvaló, hiszen megtehetjük, hogy egyenként emeljük le a csillagokat. Ekkor pedig indukcióval bizonyítunk:

Legyen a leemelt csillag középpontja s_1. Mivel a leemelés megtartotta $V-s-s_1$ pontpárjaira a 2- ill. 3-élösszefüggőséget, ezért csak azokat a vágásokat kell ellenőrizni, amelyek az egyik partjukon nem tartalmaznak $V-s-s_1$-ből pontot. Ilyen vágásból csak kettő van, az egyik az $\{s_1\}$ egy pontú vágás, ami ugye 3-fokú, a másik pedig az $\{s, s_1\}$ vágás, amely ráadásul legalább 5-fokú, hiszen a leemelés előtt s-nek ennyi volt a foka.

Célunk az, hogy a már bizonyított 3.2. tételre hivatkozzunk, de ez csak akkor lehetséges, ha nincsenek a gráfban a k-élösszefüggőségre vonatkozóan kivételes pontok. Az említett baj orvoslására hasznos észrevétel, hogy egy leemelt 3-csillag helyettesíthető a 3 végpontja által meghatározott 3-hiperéllel. Feltéve, hogy G-ben az $\{a, b, c\}$ 3-csillagot helyettesítve az abc 3-hiperéllel a H gráfhoz jutunk, tekintsünk H-ban egy olyan Z_H vágást, amely elválasztja az x, y pontokat, melyekre $\lambda_G(x,y) \geq k$ megkötés érvényes. Amennyiben abc szerepel a Z_H vágásban, akkor az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $x, a \in Z_H \not\ni y, b, c$. Ekkor G-ben a Z_H-nak megfelelő, az $\{a, b, c\}$ 3-csillag középpontját nem tartalmazó Z_G vágás olyan, hogy x, y-t elválasztja és $d_H(Z_H) = d_G(Z_G)$. Innen következik, hogy $\lambda_G(x,y) = \lambda_H(x,y)$. Ezzel beláttuk, hogy a hiperél becserélése megtartja a lényeges pontpárok közötti élösszefüggést. Az ellentétes irányú csere élösszefüggést megörző tulajdonsága is hasonlóan látható.

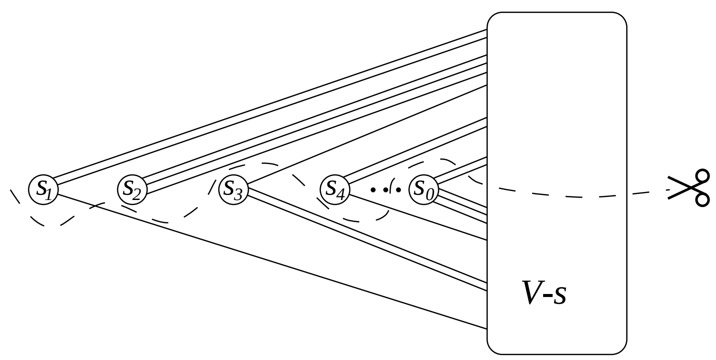
Ezt az eljárást most csak $k \geq 4$-re alkalmazzuk, mert $k = 2, 3$ esetben a fentiek szerint ez szükségtelen, másrészt csak a (3) egyenlőtlenség fog $k \leq 1$-gyel ellentmondást adni, míg a hipergráfokra vonatkozó (5)-ös gyengítés $k \leq 3$ következménye semmitmondó lenne.

Megjegyzés. A vázolt egyenértékűség csak a 3-csillag és 3-hiperél között van, egy 4- vagy annál nagyobb csillagot a végpontok által meghatározott hiperélre cserélve romolhat a minimális vágás mérete.

4.1. Tétel. *$G = (V, E)$ irányítatlan 2-3 hipergráf, $s \in V$ pontra nem illeszkedik hurokél és 3-hiperél, $d(s) \geq 3p + 2$ és minden $x, y \in V - s$ pontpárra $\lambda(x,y) \geq k \geq 2$. Pontosan akkor van p darab leemelhető 3-csillag, ha $\lambda(G - s) \geq k - \left\lfloor \frac{d(s)-p}{2} \right\rfloor$.*

Bizonyítás. $k = 2, 3$ esetben feltehető, hogy a gráf nem tartalmaz 3-hiperélt, mert a 3-hiperéleket 3-csillagokra cserélve a 2- ill. 3-élösszefüggőség megmarad. A kapott gráfban egy jó leemelés az eredeti hipergráfban is jó a már leírt 3-hiperél — 3-csillag egyenértékűség alapján.

Megint a szükségesség belátása az egyszerűbb. T.f.h. p darab 3-csillag leemelhető és a G' gráfot kapjuk. A 3-csillagok középpontjai legyenek $s_1, \ldots, s_p$, míg a maradék s-ből induló él közös végpontja legyen s_0. A 3.2. tétel bizonyításához hasonlóan most is G'-nek azt a vágását vizsgáljuk, amit $G - s$ egy minimális vágása és az általa meghatározott kisebbik nyalábokban szereplő élek jelölnek ki. Az utóbbiakból legfeljebb $p \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{d(s)-3p}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{d(s)-p}{2} \right\rfloor$ sok van, így $G - s$-nek legalább $k - \left\lfloor \frac{d(s)-p}{2} \right\rfloor$ db. él szerepel egy vágásában.



A tétel feltételének elégségességét p-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. $p = 1$-re az állítás nem más, mint a 3.2. tétel. Feltesszük, hogy $p = 1, 2, \ldots, (p_0 - 1)$-re igaz az állítás, szeretnénk p_0-ra belátni. Ekkor a feltétel szerint $\lambda(G - s) \geq k - \left\lfloor \frac{d(s)-p_0}{2} \right\rfloor$. Amennyiben p_0 db. 3-csillag leemelhető, akkor ezt úgy is megtehetjük, hogy leemelünk egyet (így kapjuk a G' gráfot), majd a többi $p_0 - 1$ darabot. Az indukciós feltétel miatt ez akkor tehető meg, ha

$$\lambda(G' - s) \geq k - \left\lfloor \frac{(d(s) - 3) - (p_0 - 1)}{2} \right\rfloor = k - \left\lfloor \frac{d(s) - p_0}{2} \right\rfloor + 1 \tag{4}$$

Az egyszerűbb írásmód kedvéért a továbbiakban $\Delta := \left\lfloor \frac{d(s)-p_0}{2} \right\rfloor$ jelöléssel élünk.

$\lambda(G-s) > k-\Delta$ esetén könnyű dolgunk van, hiszen az első 3-csillag leemelésekor $\lambda(G-s)$ nem csökkenhet, így a (4) feltétel automatikusan teljesül.

$\lambda(G - s) = k - \Delta$ esetben az első 3-csillag leemelésekor nem csak a k-élösszefüggőség megtartására kell ügyelnünk, hanem $\lambda(G - s)$-t is muszáj 1-gyel növelni.
Ezen növelés nyomon követése céljából vegyük szemügyre az alábbi halmazrendszert:

$$\mathcal{B} = \{B : B \subsetneqq V - s,\ d_{G-s}(B) = k - \Delta, \text{ és ezen tulajodonságokra } B \text{ minimális}\}$$

4.2. Állítás. *$\mathcal{B}$ elemei diszjunkt halmazok és $|\mathcal{B}| = 2$ vagy $|\mathcal{B}| = 3$*

biz. Legyenek $X, Y \in \mathcal{B}$ és $X \cap Y \neq \emptyset$. Mivel X, Y tovább nem szűkíthető legkisebb vágások $V - s$-ben, ezért $X - Y \neq \emptyset$ és $Y - X \neq \emptyset$.

$$2\,(k - \Delta) = d_{G-s}(X) + d_{G-s}(Y) \geq$$

$$\geq d_{G-s}(X - Y) + d_{G-s}(Y - X) \geq 2\,(k - \Delta)$$

(Az utóbbi egyenlőtlenség $\lambda(G - s) \geq k - \Delta$ miatt igaz.)

Azt kaptuk, hogy $d_{G-s}(Y-X) = k-\Delta$, ellentétben X szűkíthetetlenségével, így $X \cap Y = \emptyset$ kell, hogy legyen.

$|\mathcal{B}| \geq 2$ rögtön látszik, hiszen ha $X \in \mathcal{B}$, akkor $d_{G-s}(\overline{X}) = k - \Delta$, így $\overline{X}$ tartalmaz $\mathcal{B}$-beli elemet.

$|\mathcal{B}| \geq 4$ nem lehet, mert felhasználva, hogy $\mathcal{B}$ elemei diszjunktak és $X \in \mathcal{B}$ halmazra $d_G(X) \geq k$, látható, hogy X legalább Δ db. s-ből induló él végpontját tartalmazza, így azon s-ből induló élek száma, amelyek végpontjai négy különböző $\mathcal{B}$-belibe esnek, legalább

$$4\Delta \geq 4\left(\frac{d(s) - p_0}{2}\right) - 2 = d(s) + (d(s) - 2p_0 - 2) \geq d(s) + p_0 > d(s).$$

Ez lehetetlen. ☺

Nyilvánvaló, hogy az első 3-csillag akkor növeli eggyel $\lambda(G-s)$-t, ha $G-s$ legkisebb vágásait lefogja, speciálisan a $\mathcal{B}$-beli halmazokat is. Mivel egy legkisebb vágás és az ő komplementere tartalmaz $\mathcal{B}$-beli halmazt, ezért elegendő olyan 3-csillagot találnunk, amely lefogja a $\mathcal{B}$-belieket és leemelése a k-élösszefüggőséget megtartja. A $\mathcal{B}$-belieket lefogó 3-csillagokat *lefogó-csillagnak* nevezzük.

Most is felhasználjuk a 3.2. tételben bevezetett $\mathcal{K}$ és $\mathcal{G}$ halmazrendszereket. Ismét indirekt bizonyítunk, azaz feltesszük, hogy a lefogó-csillagokat vagy egy $\mathcal{G}$-beli tartalmazza, vagy legalább két végpontja egy $\mathcal{K}$-belibe esik. Azon lefogó-csillagokat, amelyekre ez utóbbi nem teljesül, *legális* csillagnak hívjuk. Fő törekvésünk most is az, hogy olyan $\mathcal{G}$-beli X, Y, Z halmazokat találjunk, amelyekre $k \geq 4$-re a 3.2. tétel bizonyításánál is jól bevált

$$d_G(X) + d_G(Y) + d_G(Z) \geq \tag{5}$$

$$\geq d_G(X \cap Y \cap Z) + d_G(X - (Y \cup Z)) + d_G(Y - (Z \cup X)) + d_G(Z - (X \cup Y)) +$$

$$+ d_G(X \cap Y \cap Z, V - (X \cup Y \cup Z))$$

2-3 hipergráfokra érvényes egyenlőtlenség érdemben alkalmazható ill. $k \leq 3$-ra ennek erősebb, (3) formája. Ehhez az kell, hogy (5)-ben a d_G függvény argumentumában sehol sem szerepelnek üres halmazok. Ekkor $k \geq 4$ esetben $k \leq 4$ adódna, sőt, $d_G(X \cap Y \cap Z) \geq k+1$ esetén megint $k \leq 3$ adna ellentmondást. A másik esetben, tehát amikor $k \leq 3$ és nem hipergráffal dolgozunk, $k \leq 1$-t kapnánk. Ezen program végigviteléhez a $\mathcal{K}, \mathcal{G}$ és $\mathcal{B}$ halmazrendszerek viszonyait fogjuk feltárni.

4.3. Lemma. *Ha $Y \in \mathcal{K}$ és $B \in \mathcal{B}$ és $d(B \cap Y, s) \geq 1$, akkor Yés B nem metszők, vagyis $Y \subset B$ vagy $B \subset Y$.*

biz. Mi van, ha mégis valódi metszők?

$$\underbrace{d_{G-s}(Y)}_{k-\Delta\leq} + \underbrace{d_{G-s}(B)}_{k-\Delta=} \geq \underbrace{d_{G-s}(Y-B)}_{k-\Delta\leq} + \underbrace{d_{G-s}(B-Y)}_{k-\Delta\leq}$$

Innen azt kapjuk, hogy $d_{G-s}(Y) \geq d_{G-s}(Y - B)$, ahonnan $d_G(Y) = k$ és $d(B \cap Y, s) \geq 1$ miatt ellentmondásul $d_G(Y - B) \leq k - 1$ adódik. ☺

Megjegyzés. A 4.3. lemma $d(B \cap Y, s) \geq 1$ feltétele felesleges, mert $d(B \cap Y, s) = 0$ esetben következő módon jutunk ellentmondásra:

$$\underbrace{d_G(Y)}_{k=} + \underbrace{d_G(B)}_{k\leq} \geq \underbrace{d_G(Y-B)}_{k\leq} + \underbrace{d_G(B-Y)}_{k\leq}$$

tehát $d_G(B) \geq d_G(B - Y)$ és $d(B \cap Y, s) = 0$ miatt $d_{G-s}(B - Y) \leq k - \Delta$, viszont B a legkisebb vágások között nem volt szűkíthető.

4.4. Lemma. *Ha $Y \in \mathcal{K}$ és $X \in \mathcal{G}$ és $d(X \cap Y, s) \geq 1$, akkor $Y \subset X$.*

biz. Pont ugyanaz, mint a 3.3. állítás bizonyítása, csak itt még egyszerűbb $X \cup Y \neq V - s$ igazolása, mert $X \cup Y$ összesen legfeljebb $\Delta + \Delta + 1 < d(s)$ darab s-ből induló él végpontját tartalmazhatja, mert $p_0 \geq 2$. ☺

4.5. Állítás. *Nincsen két olyan $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ halmaz, amelyekre $d_G(B_1) = d_G(B_2) = k$.*

biz. Indirekt bizonyítunk, azaz legyenek $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ olyan halmazok, amelyekre $d_G(B_1) = d_G(B_2) = k$. Ekkor $B_1, B_2 \in \mathcal{K}$.

Vegyünk egy olyan lefogó-csillagot, amelynek a végpontjai rendre B_1, B_2 és $\overline{B_1 \cup B_2}$ halmazokba esnek. (Mivel $B_1 \cup B_2$ nem tartalmazhatja az összes s-ből induló él végpontját, ilyen lefogó-csillag létezik.) Az így megválasztott lefogó-csillag egyben legális is, mert ha két végpontját egy $Y \in \mathcal{K}$ halmaz lefogja , akkor a 4.3. lemma miatt pl. $B_1 \subset Y$ teljesül, így $d(Y,s) \geq \Delta + 2$, azaz $d_{G-s}(Y) \leq k - \Delta - 2$, ellentmondva $\lambda(G-s) \geq k - \Delta$-nak.

Ezt a legális csillagot tartalmazza egy $X \in \mathcal{G}$ halmaz, és 4.4. lemma miatt $B_1, B_2 \subset X$, azaz $d(X,s) \geq \Delta + \Delta + 1 \geq \Delta + 3$, következésképpen $d_{G-s}(X) \leq k - \Delta - 1$; és ez ismét ellentmondás. ☺

4.6. Állítás. $|\mathcal{B}| = 2$

biz. Feltéve, hogy $B_1, B_2, B_3 \in \mathcal{B}$ különböző halmazok, a 4.5. állítás miatt

$$d(s) \geq d(B_1,s) + d(B_2,s) + d(B_3,s) \geq (\Delta+1) + (\Delta+1) + \Delta \geq 3\Delta + 2 > 3\frac{d(s) - p_0}{2} > d(s),$$

ami nyilván lehetetlen. ☺

4.5. állítás alapján feltehető, hogy $d_G(B_1) > k$, ami ugyanaz, mint $d(B_1,s) > \Delta$ Megmutatjuk, hogy választható olyan legális csillag, amelynek B_1-ben két végpontja is van. (Nyilván a harmadiknak B_2-be kell esnie.) Ehhez a következő lemmát kell igazolni:

4.7. Lemma. *Minden $a \in B_1$ ponthoz van $b \in B_1$ pont, hogy a, b-t nem tartalmazza $\mathcal{K}$-beli halmaz.*

biz. Tegyük fel az ellenkezőjét! Ez azt jelenti, hogy van olyan $\mathcal{K}$-beliekből álló $\mathcal{K}_{B_1}$ halmazrendszer, hogy bármely B_1-beli pontpárhoz van $X \in \mathcal{K}_{B_1}$ halmaz, amely őket tartalmazza. Feltehető, hogy $|\mathcal{K}_{B_1}|$ minimális. A gyakran alkalmazott kikeresztezési eljárással megmutatjuk, hogy $|\mathcal{K}_{B_1}| = 1$.

Legyen $a \in B_1$ rögzített. Amennyiben az összes $a, b \in B_1$ párt ugyanaz az $X \in \mathcal{K}_{B_1}$ halmaz fedi, rögtön készen vagyunk, hiszen ekkor $B_1 \subset X$. Különben van olyan $b, c \in B_1$ pontpár, hogy az a, b-t ill. a, c-t fedő X_b ill. X_c halmazok különböznek. $\mathcal{K}_{B_1}$ választása miatt ez a két halmaz nem tartalmazkodó. Továbbá a 4.3. lemma miatt $X_b, X_c \subset B_1$ és természetesen $a \in X_b \cap X_c$ Mindezeket összegezve az adódik, hogy X_b és X_c keresztező halmazok, így az alábbi egyenlőtlenség teljesül rájuk:

$$k + k = d_G(X_b) + d_G(X_c) \geq d_G(X_b \cap X_c) + d_G(X_b \cup X_c) \geq k + k$$

Rögtön látható, hogy $d_G(X_b \cup X_c) = k$, tehát $\mathcal{K}_{B_1}$-ben X_b és X_c lecserélhető $X_b \cup X_c$-re, ellentmondva $\mathcal{K}_{B_1}$ megválasztásának.

Így van olyan $K \in \mathcal{K}$ halmaz, amelyre $B_1 \subset K$. Mivel $d(B_1,s) > \Delta$, ezért $d(K,s) > \Delta$, ami nem lehet $K \in \mathcal{K}$ miatt. ☺

Ha minden $c \in N(s) \cap B_2$ ponthoz van olyan $C \in \mathcal{G}$ halmaz, hogy $B_1 \subset C$ és $c \in C$, akkor készen vagyunk, hiszen $x, y, z \in N(s) \cap B_2$ pontokhoz a megfelelő $X, Y, Z \in \mathcal{G}$-t kiválasztva olyan halmazokat kapunk, amelyek az (5) egyenlőtlenséghez kívánatosak. Ehhez persze látni kell, hogy pl. $d(X \cap B_1, s) \geq \Delta + 1$ miatt $d(X \cap B_2, s) \leq 1$ és hasonlóan $d(Y \cap B_2, s) \leq$ $\leq 1, d(Z \cap B_2, s) \leq 1$. Ezen tulajdonságokból következik, hogy $x \in X$ és $x \notin Y \cup Z$ és az analóg állítások igazak az y és z pontokra.

(5)-höz még az is jól jött, hogy $d_G(X \cap Y \cap Z) \geq k + 1$, ami most azért igaz, mert $B_1 \subset X \cap Y \cap Z$ miatt $d(X \cap Y \cap Z, s) > \Delta$. Baj csak akkor van, ha az előbb említett kézenfekvő módon nem választhatunk X, Y, Z halmazokat. Hívjuk ezt az esetet nehéz esetnek. További megfigyeléseket kell tennünk:

4.8. Állítás. *Nincsen olyan $X \in \mathcal{K}$ halmaz, amelyre $X \subset B_1$ és $d(X,s) \geq 2$ teljesül.*

biz. Ha mégis, akkor legyen $\{a,b,c\}$ olyan legális 3-csillag, amelyre $a \in X$, $b \in B_1$. A 4.7. lemma szerint ez megtehető. Mivel a nehéz esetben vagyunk, $c \in B_2$ megválasztható úgy, hogy az $\{a,b,c\}$ csillagot fedő $C \in \mathcal{G}$ halmazra $B_1 \not\subset C$ teljesüljön. A 4.4. lemma miatt $X \subset C$. $B_2 \subset C$ nem lehet, különben $d(C,s) \geq d(B_2,s) + d(C \cap B_1, s) \geq \Delta + 3$, azaz $d_{G-s}(C) \leq k - \Delta - 1$. Tehát C és B_2 keresztező halmazok, azaz

$$\underbrace{d_{G-s}(C)}_{k-\Delta\leq} + \underbrace{d_{G-s}(B_2)}_{k-\Delta=} \geq \underbrace{d_{G-s}(C \cap B_2)}_{k-\Delta\leq} + \underbrace{d_{G-s}(C \cup B_2)}_{k-\Delta\leq} \tag{6}$$

egyenlőtlenség alapján $d_{G-s}(C) \geq d_{G-s}(C \cap B_2)$. Mivel $d(C \cap B_1, s) \geq 3$, az is teljesül, hogy $d(C \cap B_2, s) \leq d(C,s) - 3$. $d_G(C) = d(C,s) + d_{G-s}(C) \leq k+2$-ből kapjuk:

$$d_G(C \cap B_2) = d(C \cap B_2, s) + d_{G-s}(C \cap B_2) \leq d(C,s) - 3 + d_{G-s}(C) \leq d_G(C) - 3 \leq k - 1.$$

Ez lehetetlen. ☺

4.9. Állítás. *Legyen $\{a,b,c\}$ legális-csillag, melynek végpontjaira $a, b \in B_1$, $c \in B_2$. Ekkor a megfelelő $C \in \mathcal{G}$ halmazra $d(C \cap B_2, s) = 1$ teljesül.*

biz. $B_2 \subset C$ nem fordulhat elő, mert ekkor $a, b \in C$ és $d(B_2, s) \geq \Delta$ miatt $d(C,s) \geq \Delta + 2$ lenne. Felhasználva, hogy $d_G(C) = d_{G-s}(C) + d(C,s) \leq k+2$, azt kapjuk, hogy $d_{G-s}(\overline{C}) = = d_{G-s}(C) = k - \Delta$.

Az viszont rögtön látszik $B_2 \subset C$ és $B_1 \cap C \neq \emptyset$ miatt, hogy $\overline{C}$ nem tartalmaz $\mathcal{B}$-belit, ami ellentmond $\mathcal{B}$ definíciójának. Tehát $B_2 \not\subset C$.

$B_1 \subset C$ esetén készen vagyunk, mert $d(B_1,s) \geq \Delta + 1$, így $d(C \cap B_2, s) \leq 1$ szükséges $d(C,s) \leq \Delta + 2$-höz.

Maradék esetben tehát $B_1, B_2 \not\subset C$, ami annyit tesz, hogy B_1 és C keresztezőek. (6)-t B_2 helyett B_1-re alkalmazva adódik, hogy $d_{G-s}(C) \geq d_{G-s}(C \cap B_1)$, és $d(C \cap B_2, s) \geq 2$-ből $d_G(C \cap B_1) \leq k$, tehát $C \cap B_1 \in \mathcal{K}$. Mivel $a, b \in C \cap B_1$, ez nem lehet a 4.8. állítás miatt. ☺

A 4.9. állítás megadja a kulcsot az X, Y, Z halmazok megtalálásához. $p_0 \geq 2$ miatt $\Delta \geq 3$, így rögzítve az $a, b \in B_1$ pontokat, B_2-ben van három pont — x, y és z —, hogy az $\{a,b,x\}$, $\{a,b,y\}$ és $\{a,b,z\}$ csillagok legálisak. A 4.9. állítás miatt az őket fedő $X, Y, Z \in \mathcal{G}$ halmazok a kívánt tulajdonságúak. A 4.8. állítás és a 4.3. lemma miatt $d_G(X \cap Y \cap Z) = k$ nem fordulhat elő. Végezetül $k \geq 4$ esetben (5) egyenlőtlenségből $k \leq 3$ eredményre jutunk,$k \leq 3$-ra pedig (3)-ból $k \leq 1$, ami ellentmondás. ☺

A 4.1. tétel alkalmazásakor előfordulhat, hogy feltételként $k - \left\lfloor \frac{d(s)-p}{2} \right\rfloor \leq 0$ adódik. Mivel ez nem jelent érdemi feltételt $\lambda(G-s)$-re, ekkor a p db. 3-csillag leemelése biztosan elvégezhető.

Az előzőekben bizonyított 4.1. tétel és Lovász tétele akár egyszerre is használható. Például ha egy s pontból élpárokat és 3-csillagokat egyaránt le kell emelnünk, akkor az ehhez szükséges és elégséges feltételt könnyen megadhatjuk. A 4.1. tétel akkor is igaz, ha az s-en kívüli gráf 2-3 hipergráf. Jó lenne tudni, hogy ez élpár leemelése esetén feltehető-e. A 4.1. bizonyítása során alkalmazott technikák ismételt bevetésével könnyen igazolható, hogy Lovász tétele akkor is igaz, ha a gráfban vannak s-en kívül 3-hiperélek. Mindez azon múlik, hogy Lovász tétel bizonyításában használt összefüggések hipergráfokra is igazak, kivételt megint a

(3) egyenlőtlenség jelent. $k \leq 3$ esetén a 3-hiperéleket 3-csillagra cserélve, $k \geq 4$-re pedig a (3) helyett a hipergráfokra vonatkozó (5) egyenlőtlenséget alkalmazva az eredeti bizonyítás 2-3 hipergráfokra is működőképes lesz. A későbbiekben Lovász tételének ezen általánosabb alakjára fogunk hivatkozni.

4.1. Néhány szó a hurokélekről

Hátra van még annak a tisztázása, hogy ha s pontra illeszkedik hurokél, akkor a $\lambda(G-s)$-re tett megkötés miképpen változik. Azt fogjuk tapasztalni, hogy ekkor egyszerű konstrukciókkal a leemelések elvégezhetőek és a $\lambda(G-s)$-re tett feltételeket sem kell szigorítani. Mindezek a megfigyelések a $k=2,3$ esetekben is igazak lesznek. A vázolt eljárásoknál az előzőekben általánosított Lovász tételre fogunk támaszkodni.

Jelölje az s pontra illeszkedő hurokélek számát h. Két esetet lehet megkülönböztetni aszerint, hogy sok vagy kevés hurokél van a leemelni kívánt 3-csillagok számához képest.

1. eset: $2h < p$. Mivel egy hurokél legfeljebb 2 darab 3-csillaghoz járulhat hozzá, ezért legalább $p-2h$ darab olyan csillag van, amely szárai nem hurokélekből származnak. Feltéve, hogy a p darab leemelés elvégezhető, következik, hogy elhagyva a h darab hurokélt, van $p-2h$ darab leemelhető 3-csillag. Ennek pedig a 4.1. tétel szerint szükséges feltétele, hogy $\lambda(G-s) \geq k - \left\lfloor \frac{(d(s)-2h)-(p-2h)}{2} \right\rfloor = k - \left\lfloor \frac{d(s)-p}{2} \right\rfloor$ legyen, ami formáját tekintve ugyanaz, mint a 4.1. tétel előírása. Az elégségesség bizonyítása a 2. esethez tartozik.

2. eset: $2h \geq p$. $p=1$ esetén Lovász tétele garantál egy leemelhető élpárt, amely nem hurokélekből keletkezik, feltéve, hogy $d(s, V-s) \neq 3, 1$, mert s-ből $k \geq 2$ miatt nem indulhat elvágó él. Ezen élpár közös pontját s-sel összekötve és egy s-re illeszkedő hurokélt törölve éppen jó leemelést kapunk.

   $d(s, V-s) = 3$ esetben a három darab nem hurokél közül tetszőleges kettőt leemelve, majd közös végpontjaikat s-sel összekötve és egy s-beli hurokélt törölve megint szabályos leemelés adódik.

   $d(s, V-s) = 1$-re még könnyebb dolgunk van, hiszen ekkor $d(s) \geq 5$ miatt két hurkél is illeszkedik s-re. Ezeknek két végét és a nem hurokél s-beli végét egy új s_1 pontba kötve ismét egy jó leemelést mutattunk.

   Feltéve, hogy $p \geq 2$, indukcióval bizonyítunk, és olyan eljárást adunk, melynek során egy vagy kettő 3-csillagot emelünk le. A leemelés elvégzése után a megmaradó hurokélek és a továbbiakban leemelendő 3-csillagok száma alapján mindannyiszor a 2. esetben maradunk.

   $d(s, V-s) \geq 6$ feltevéssel élve Lovász tétele megad 2 darab hurokéleket nem tartalmazó leemelhető élpárt. Ezeknek közös pontjait összekötve és egy s-re illeszkedő hurokélt törölve éppen két darab 3-csillag megkívánt tulajdonságú leemeléséhez jutottunk. A maradék esetekben csak egy leemelést hajtunk végre. $d(s, V-s) = 1, 2, 3, 5$-re a $p=1$ esetben leírtak alapján járunk el. $d(s, V-s) = 4$-re $d(s) \geq 8$ miatt úgy is leemelhetünk, hogy Lovász tételével leemelünk egyy élpárt, aminek közös pontját egy hurokél törlése után s-sel összekötjük.

   Mindegyik esetben könnyen igazolható, hogy ha még maradt leemelendő 3-csillag, akkor a 2. esetben vagyunk, így az indukciós bizonyítást befejeztük.

Mint az az előzőekből is látható, hurokélek jelenléte esetén nagyon könnyű leemelhető 3-csillagot találnunk, sőt, gyakran több kézenfekvő megoldás is kínálkozik. A leírt eljárások szándékosan olyanok voltak, hogy leemelt 3-csillag nem tartalmazott hurokélt és a gráf összefüggő maradt. Későbbi alkalmazásokkal számolva ennél erősebb, technikai jellegű követeléseket is teljesíthetünk. Ha a leemelések után $d(s, V - s)$ az eredetihez képest csökkent és s-re még illeszkedik hurokél, akkor ezen helyzeten javíthatunk. Ekkor ugyanis egy s_i középpontú 3-csillagból megy él $V - \bigcup_{j=0}^{p}\{s_j\}$ halmazba. Ezt az élt az s_i helyett s-be kötve, egy hurokélt s-ből törölve , majd ss_i élt behúzva szintén jó leemelést kapunk.

Mindezek alapján feltehető, hogy a p darab leemelt 3-csillag nem tartalmaz hurokélt, a kapott gráf összefüggő maradt és s-re csak akkor illeszkedik hurokél, ha a leemelések során $d(s, V - s)$ nem változott. A továbbiakban mindig ilyen leemeléseket tartunk szem előtt.

Összefoglalásul megállapíthatjuk, hogy $2h < p$ esetén a 4.1. tétel változtatás nélkül igaz, $2h \geq p$ esetben pedig p darab leemelés mindig elvégezhető.

5. Alkalmazások

5.1. Élösszefüggőség növelés fokszám előírással

Adott gráfban úgy szeretnénk új éleket elhelyezni, hogy a kapott gráf k-élösszefüggő legyen, és minden $v \in V$ csúcsra $m(v)$ új él illeszkedjen, ahol $m : V \to \mathbb{N}$ függvény, amit $\emptyset \neq X \subset V$ halmazra a szokott módon terjesztünk ki: $m(X) := \sum_{x \in X} m(x)$.

A következő tétel igaz:

5.1. Tétel. *$G = (V, E)$ irányítatlan gráf, $k \geq 2$, $m : V \to \mathbb{N}$ függvény. Pontosan akkor létezik $H = (V, F)$ gráf, amelyre $\forall v \in V : d_H(v) = m(v)$ és $G + H = (V, E \cup F)$ k-élösszefüggő, ha*

(i) $2 \mid m(V)$
(ii) $m(X) \geq k - d_H(X)$ *minden* $\emptyset \neq X \subset V$ *halmazra.*

☺

Az általánosabb tétel kimondása előtt a tisztánlátás végett megjegyezzük, hogy az 5.1. tétel által garantált élbővítésben előfordulhat, hogy egy újonnan berakott él hurokél. Ez az él a megfelelő csúcs fokszám követelményéhez kettővel járul hozzá. 3-hiperéleknél is előfordulhatnak hurokszerű jelenségek. Például ha egy új 3-hiperél csak két különböző pontból áll, de az egyik pontot kétszeres multiplicitással használja, akkor ez utóbbi pont fokszám előírását kettővel elégíti ki. Hasonló a helyzet akkor is, ha a hiperél csak egy pontot használ háromszoros multiplicitással. Ebben az esetben a pont fokszámához a hozzájárulása három. Ezeket a konvenciókat nem elfelejtve általánosítjuk az előző tételt:

5.2. Tétel. *$G = (V, E)$ 2-3 hipergráf, $k \geq 2$, $m : V \to \mathbb{N}$ függvény. Pontosan akkor van p db. 3-hiperélt tartalmazó $H = (V, F)$ gráf, amelyre $\forall v \in V : d_H(v) = m(v)$ és $G + H = (V, E \cup F)$ k-élösszefüggő, ha*

(i) $3p \leq m(V)$
(ii) $2 \mid m(V) - 3p$
(iii) $m(X) \geq k - d_H(X)$ *minden* $\emptyset \neq X \subset V$ *halmazra*
(iv) $\lambda(G) \geq k - \left\lfloor \frac{m(V) - p}{2} \right\rfloor$.

Bizonyítás. Az *(i)* feltétel azt mondja ki, hogy az új 3-hiperélek fokszám igénye kisebb, mint a teljes fokszám készlet, *(ii)* pedig azt, hogy a nem 3-hiperélek fokszám igényeinek összege páros. Mindezek triviálisan szükségesek. *(iii)* annyit jelent, hogy egy adott hiányos, azaz k-nál kisebb fokú halmaz k-fokúvá tehető olyan élek behúzásával, amelyek a halmazon belüli fokszám előírást nem haladják meg. Ez is elengedhetetlen feltétel.

(ii) miatt *(iv)*-ben az egészrész akár el is hagyható, és ekkor *(iv)* úgy is írható, hogy $\lambda(G) \geq$ $\geq k - \left(\frac{m(V)-3p}{2} + p\right)$. Ez a feltétel nyilvánvalóan szükséges, hiszen a zárójelen belüli kifejezés a felhasznált új élek száma, és egy új él behúzása legfeljebb eggyel növelheti az élösszefüggőséget.

Az elégségesség bizonyításához adjunk a gráfhoz egy új s pontot, amelyből minden egyes addigi $v \in V$ ponthoz $m(v)$ db. élt húzunk.

A kapott gráfban minden $\emptyset \neq X \subset V$ halmaz foka $d(X) + m(X)$ lesz, ez *(iii)* miatt legalább k. Ezek szerint olyan gráfhoz jutottunk, amelyre alkalmazható a 4.1. tétel, mely szerint az s pontból p db. 3-csillag leemelhetőségének a feltétele, hogy $\lambda(G) \geq k - \left\lfloor \frac{m(V)-p}{2} \right\rfloor$ legyen, amit *(iv)* biztosít. A leemelt 3-csillagokat 3-hiperélekre cseréljük. A maradék éleket Lovász tételével páronként leemelve megkapjuk a fokszám előírt bővítés nem hiperéleit. A konstrukcióból látható, hogy a bevett élek eleget tesznek a fokszám előírásnak. ☺

5.1.1. Egy esztétikai igény kielégítése

Jogos elvárás lehet, hogy a bővítésben szereplő élek ne legyenek elfajulóak, azaz ne forduljon elő közöttük hurkolódó él. Ez egy újabb feltételt követel az 5.2. tételben, ami triviálisan szükséges, de nem nyilvánvalóan elégséges. Ez a feltétel alkalmas lesz arra is, hogy leírja azokat a gráfokat, amelyekre a 4.1. ill. Lovász tétel által biztosított teljes leemelések akár olyanok is lehetnek, hogy egy leemelt 3-csillag ill. élpár végpontjai különbözőek. Lássuk a medvét!

5.3. Kiegészítés. *Amennyiben az 5.2. tétel feltételein kívül még az is igaz, hogy*

(v) minden $v \in V$ *pontra* $m(v) \leq \frac{m(V)-p}{2}$,

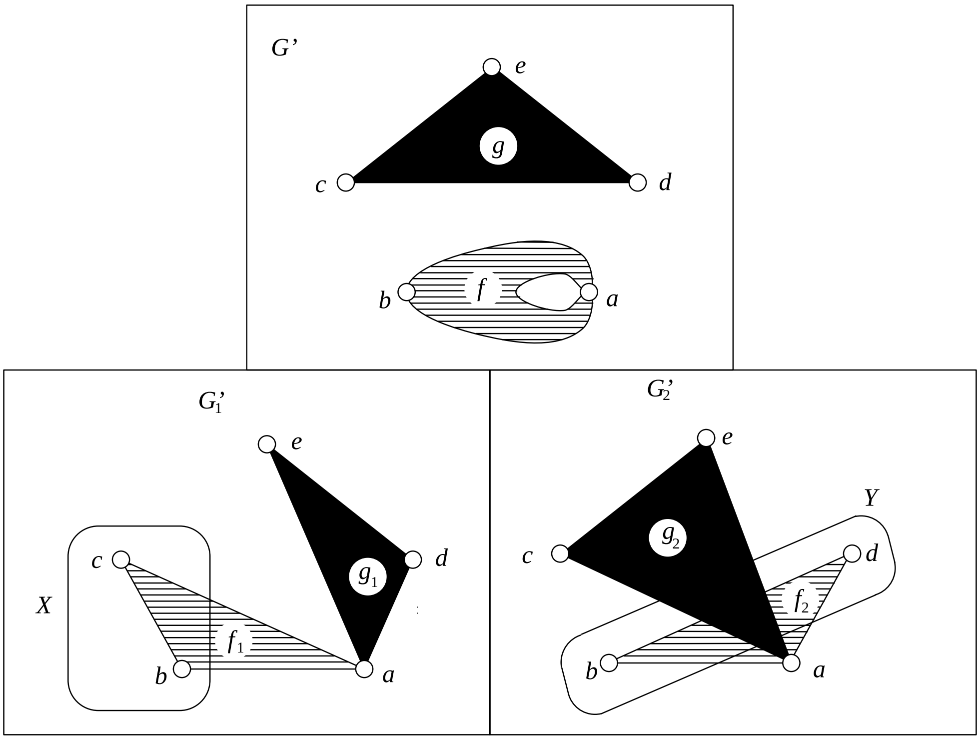
akkor az 5.2. tétel által garantált fokszám előírt bővítés megválasztható olyannak is, hogy az új élek ne hurkolódjanak.

biz. Már láttuk, hogy $\frac{m(V)-p}{2}$ éppen az új élek száma. Feltéve, hogy egy pontnak ennél nagyobb az igénye, egy szabályos bővítéskor mindenképpen lesz egy olyan él, amelyik erre a pontra hurkolódik, azaz többszörösen használja.

Nem ennyire könnyű az elégségesség megmutatása. Belátjuk, hogy ha egy bővítés tartalmaz hurkolódó élt, akkor a bővítés során bekerült élek össz*súlya* növelhető, ahol egy él *súlya* az általa használt különböző pontok száma. A bővített gráfot G' jelöli. Legyen f egy olyan hurkolódó él, amely az a pontot többször is használja. *(v)* miatt van a bővítéssel bevett élek között az a pontot elkerülő él. Legyen ez g, melynek az egyik csúcsa c. Ügyes cseréket hajtunk végre:

Az f él multiplicitását az a ponton eggyel csökkentjük és a c ponton eggyel növeljük. A fokszám előírás betartása végett az f élnek a multiplicitását a c-n eggyel csökkentjük, az a-n pedig eggyel növeljük. A G_1' gráfhoz és f_1, g_1 élekhez jutottunk. Ha f és g valamelyike egy pontú volt, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy nincsen olyan vágás, aminek az értéke csökkent volna, azaz G_1' k-élösszefüggő. Ellenkező esetben az f és g él két–két különböző pontot is használ. A még el nem nevezett pontok legyenek b, ami az f élhez és d, ami a g élhez tartozik.

Ha g nem hurkolódó 3-hiperél, akkor még tartalmaz egy e pontot. Feltesszük, hogy a csere sikertelen volt, azaz van olyan X vágás, amelynek értéke k alá esett.



X vágás értéke csak akkor csökkenhetett, amikor a g él multiplicitását a c-n csökkentettük. Ez azt jelenti, hogy X a c pontot a d és e pontoktól elválasztja. Amikor a-t a g-hez adtuk, az X vágás értéke nem növekedett, ezért az a és d pontokat az X nem választja el. Ezek után még látni kell, hogy X az a és b pontokat elválasztja, mert különben a konstrukció miatt $d_{G'}(X) = d_{G'_1}(X) < k$ lenne, ami tagadja G' k-élösszefüggőségét. Esetleges komplementálással mindezek alapján feltehető, hogy $c, b \in X \not\ni a, d, e$.

Próbáljunk ki G'-n egy másik javítási eljárást, ami az előzőtől csak abban különbözik, hogy a c és d pontok szerepét felcseréljük. G'_2-höz jutunk. Ha ez sem jó, akkor G'_2-ben van egy Y vágás, amely értéke k alá esett és az előző gondolatmenet alapján $b, d \in Y \not\ni a, c, e$.

Az X és Y vágások értéke az egyes eljárások során legfeljebb eggyel csökkenhetett, tehát $d_{G'_1}(X) = d_{G'_2}(Y) = k-1$, azaz $d_{G'}(X) = d_{G'}(Y) = k$. Legyen G'_{-f} az a gráf, amelyik G'-ből az f él elhagyásával keletkezik. Így $\lambda(G'_{-f}) = k-1$ és $d_{G'_{-f}}(X) = d_{G'_{-f}}(Y) = k-1$.

X és Y az a, b, c, d, e ismertetett elhelyezkedése alapján keresztező, ezért $d_{G'_{-f}}(X \cap Y) = = k-1$. No de az f él elkerüli $X \cap Y$-t, ami miatt $d_{G'}(X \cap Y) = k-1 < k$, meghazudtolva G' k-élösszefüggőségét. ☺

Ez utóbbi eredmény rámutat arra is,hogy a 4.1. tételben megadott gráfokban mikor lehet olyan *teljes* leemmelés, amelyikben minden leemelt csillagra teljesül, hogy a végpontjai különbözőek. Az egységes szóhasználat miatt egy leemelt élpárt is csillagnak teekintünk — 2-csillagnak —, és egy *teljes* leemelés olyan leemelést jelent, ahol az s pont 2- és 3-fokú csúcsokra bomlik. A 4.1. és Lovász tételének szintéziséből, valamint az 5.3 kiegészítésből a következő tétel nyilvánvaló:

5.4. Tétel. *$G = (V, E)$ 2-3 hipergráf, $s \in V$ pontra nem illeszkedik hurokél és 3-hiperél, $d(s) = 3p + 2b$ és minden $x, y \in V - s$ pontpárra $\lambda(x, y) \geq k \geq 2$. Pontosan akkor van p 3-csillagot és b élpárt tartalmazó teljes leemelés, amelyben minden egyes leemelt csillag különböző végpontokat használ, ha*

(i) $\lambda(G - s) \geq k - \left\lfloor \frac{d(s)-p}{2} \right\rfloor$

(ii) Minden $v \in V$ pontra $d(v, s) \leq b + h$. ☺

5.2. Élösszefüggőség növelése adott számú éllel

Élpár leemeléssek segítségével válaszolható meg az a kérdés, hogy adott gráf hány új él hozzáadásával tehető k-élösszefüggővé . Az idevágó tétel kimondásához szükségünk van egy definícióra:

5.5. Definíció. *$\{X_1, \dots, X_t\}$ halmazrendszer a V halmaz* **részpartíciója***, ha $\emptyset \neq X_i \subset V$ minden i-re és $X_i \cap X_j = \emptyset$ $i \neq j$.*

5.6. Tétel. (Watanabe-Nakamura [6]) *$k \geq 2$ esetén egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf pontosan akkor tehető γ él hozzávételével k-élösszefüggővé, ha*

$$2\gamma \geq \sum_i (k - d(X_i))$$

V minden $\{X_1, \dots, X_t\}$ részpartíciójára. ☺

Ezt a tételt külön nem bizonyítjuk, hanem rögtön a 2-3 hipergráfokra vonatkozó általánosítását látjuk be. A bizonyításból egyszerűen kiolvasható Watanabe-Nakamura tételére adható standard bizonyítás.

5.7. Tétel. *$G = (V, E)$ 2-3 hipergráf pontosan akkor tehető γ új él és p új 3-hiperél hozzáadásával k-élösszefüggővé ($k \geq 2$), ha*

(i) $\lambda(G) \geq k - \left\lfloor \frac{2\gamma+3p-p}{2} \right\rfloor = k - (\gamma + p)$

(ii) $2\gamma + 3p \geq \sum_i (k - d(X_i))$ minden V-beli $\{X_1, \dots, X_t\}$ részpartícióra.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy egy új él hozzávételével a gráf élösszefüggősége legfeljebb eggyel növekedhet, továbbá egy 3-hiperél illetve egy (2-hiper)él legfeljebb 3 illetve 2 diszjunkt hiányos halmaz fokszámához járulhat hozzá. Ezek szerint az *(i)* és *(ii)* feltételek szükségesek.

Az elégségesség bizonyítását az 5.2. tételre szeretnénk visszavezetni. $m : V \to \mathbb{N}$ legyen olyan függvény, amelyre $m(V)$ minimális és minden $\emptyset \neq X \subset V$ halmazra

$$k - d(X) \leq m(X).$$

5.8. Lemma. *$m(V) \leq 2\gamma + 3p$*

Bizonyítás. Egy $X \subset V$ halmazt *pontos* halmaznak hívunk, ha $k - d(X) = m(X)$. m-t úgy választottuk, hogy minden v pontot, ammelyre $m(v) > 0$, tartalmaz egy pontos halmaz. Ezeknek a v pontoknak megfeleltetjük a legszűkebb, v-t tartalmazó Y_v pontos halmazt. Megmutatjuk, hogy $\{Y_v \ : \ m(v) > 0\}$ lamináris halmazrendszer. Legyen Y_u, Y_v két metsző halmaz. Ekkor

$m(Y_u)+m(Y_v)=k-d(Y_u)+k-d(Y_v)\leq k-d(Y_u-Y_v)+k-d(Y_v-Y_u)\leq m(Y_u-Y_v)+$
$+m(Y_v-Y_u)=m(Y_u)+m(Y_v)-2m(Y_u\cap Y_v)\leq m(Y_u)+m(Y_v)$.

Tehát az egyenlőtlenségek egyenlőséggel teljesülnek, azaz $m(Y_u\cap Y_v)=0$ és Y_u-Y_v valamint Y_v-Y_u pontos halmazok. Mindez rácáfol Y_u és Y_v választására.

Vegyük szemügyre az $\{Y_i\}$ halmazrendszer maximális $X_1,\ldots,X_t$ tagjait! Ezek lefedik az összes v pontot, amelyre $m(v)>0$ és a laminaritás miatt diszjunktak. Így a *(ii)* feltétel alapján $m(V)=\sum_i m(X_i)=\sum_i(k-d(X_i))\leq 2\gamma+3p$. ☺

Amennyiben $m(V)<2\gamma+3p$, egy v ponton növeljük meg $m(v)$ értékét annyira, hogy hogy $m(V)=2\gamma+3p$ legyen. Ekkor az 5.2. tétel minden követelménye teljesül, így a garantált H gráfnak éppen γ éle és p 3-hiperéle van. ☺

Most könnyen biztosítható, hogy az új élek között ne legyenek hurkolódó élek, mert a fokszámok előírásának hiánya miatt egy hurkolódó él kicserélhető olyan élre, amelyik több csúcsot használ, feltéve, hogy $|V|\geq 3$.

Watanabe-Nakamura tételének ekvivalens formája a következő:

5.9. Tétel. *Azon élek minimális száma, melyek hozzáadásával $G=(V,E)$ k-élösszefüggővé tehető, nem más, mint*

$$\max_{\{X_i\}\text{a } V \textit{ részpartíciója}}\left\lceil\frac{\sum_i(k-d(X_i))}{2}\right\rceil.$$

☺

Tegyük fel, hogy most kizárólag 3-hiperéleket szeretnénk a bővítés során felhasználni. Ekkor az 5.7. tétel alapján egy újabb tétel adódik:

5.10. Tétel. *$G=(V,E)$ 2-3 hipergráf k-élösszefüggővé tételéhez szükséges 3-hiperélek minimális száma*

$$\max\left\{\max_{\{X_i\}\text{a } V \textit{ részpartíciója}}\left\lceil\frac{\sum_i(k-d(X_i))}{3}\right\rceil, k-\lambda(G)\right\}.$$

☺

5.11. Tétel. *$G=(V,E)$ irányítatlan 2-3 hipergráf, $s\in V$ csúcsra nem illeszkedik hurokél és 3-hiperél és minden $x,y\in V-s$ pontpárra $\lambda(x,y)\geq k\geq 2$. Feltéve, hogy $d(s)=d_1+d_2+$ $+\ldots+d_t$, ahol $2\leq d_i\in\mathbb{N}$ $\forall i$; pontosan akkor emelhető le s-ről egy d_1-csillag és egy d_2-csillag ... és egy d_t-csillag, ha*

$$\lambda(G-s)\geq k-\sum_i\left\lfloor\frac{d_i}{2}\right\rfloor.$$

Bizonyítás. A szükségességet a 3.2. és 4.1. tételek bizonyításában mutatott gondolatmenet itt is igazolja.

Az elégségesség megmutatása az eddigiek után nem okoz nehézséget. Feltehető, hogy $2\nmid d_i$, ha $i\leq p$ és $2\mid d_i$, ha $p<i\leq t$. A tétel feltétele másképpen felírva:

$$\lambda(G-s)\geq k-\frac{\sum_i d_i-p}{2}=k-\left\lfloor\frac{d(s)-p}{2}\right\rfloor,$$

ahol az egészrész kiírása puszta formalitás. Jól látszik, hogy a 4.1. tétel alkalmazható, azaz p db. 3-csillag leemelhető. A 3-csillagokat 3-hiperélekre cserélve a maradék s-ből induló páros sok élt a 2-3 hipergráfokra vonatkozó Lovász tétellel párokba rendezzük és leemeljük. A hiperélek behozatalára csak a Lovász tétel alkalmazhatósága miatt volt szükség, ezért ez a lépés igazából felesleges. Az i-edik leemelt 3-csillag közös pontját $\frac{d_i-3}{2}$ leemelt élpár közös pontjával összehúzva kapjuk a leemelt d_i-csillagot $i \le p$-re, miközben a gráf élösszefüggősége nem csökkent. $i > p$ esetben pedig csak $\frac{d_i}{2}$ db. leemelt élpár közös pontját kell összehúzni a keresett d_i-csillag megkonstruálásához. ☺

Most is igaz, hogy ha $k - \sum_i \left\lfloor \frac{d_i}{2} \right\rfloor$ nem pozitív érték, akkor ez nem jelent semmiféle megkötést a $\lambda(G-s)$ értékre. Ekkor a t db. d_1-, d_2-, $\dots d_t$-csillag leemelése elvégezhető (persze ez nem jelenti azt, hogy tetszőleges leemelés jó is lesz). A hurokélekre vonatkozó 4.1. fejezetbeli megjegyzések alapján, ha s-re illeszkednek hurokélek, akkor csak olyan leemeléseket veszünk figyelembe, amelyben csak az s_1 középponttal rendelkező leemelt csillagra illeszkedhet hurokél, de rá is csak akkor, ha $d_{G'}(s_1, V - \bigcup_{i=1}^{t} s_i) = d_G(s, V - s)$, ahol G' a leemelések elvégzésével keletkezett gráfot jelöli. Ez esetben 5.11. úgy módosul, hogy h db. s-re illeszkedő hurokél esetén a csillagok leemelései a $\lambda(G-s)$-re tett feltételek nélkül is elvégezhetőek, ha $2h \ge p$.

6. Szétszedések

Az 5.11. tétel általánosítja a 3.2. és 4.1. tételeket. Alkalmazásával olyan ismert erdményekre adhatunk új bizonyítást, amelyeknél Lovász tétele nem használható.

Nash-Williams több cikkében is foglalkozik gráfok szétszedésével [5]. $G = (V, E)$ gráfban egy $v \in V$ **csúcs szétszedése** nem más, mint a v csúcsot helyettesítünk a $v_1, \dots, v_t$ csúcsokkal, és minden v-re illeszkedő élt a $v_1, \dots, v_t$ csúcsok valamelyikébe kötjük. Hurokélekből ezáltal keletkezhetnek nem hurokélek. Legyen $g : V \to \mathbb{N}$ egy függvény. A D gráf a G **gráfnak a g-szétszedése**, ha D előáll a G csúcsainak olyan szétszedésével, ahol a G minden v csúcsa $g(v)$ új csúcsra bomlik. Amennyiben az is adott, hogy

$$(d(v_1), \dots, d(v_t)) = (\zeta_v^1, \dots, \zeta_v^t) = \zeta_v \quad (\zeta_v^i \in \mathbb{N} \quad \sum_i \zeta_v^i = g(v))$$

legyen, akkor $\{\zeta_v : v \in V\}$ a G-nek **g-fokszám specifikációja** és a definiált szétszedés a G $\{\zeta_v : v \in V\}$-szétszedése.

Ebben a terminológiában elemi gráfelméleti tételek fogalmazhatóak újra. Euler tétele alkalmas megszövegezésben így szól:

6.1. Tétel. (Euler) *$G = (V, E)$ gráfnak pontosan akkor van összefüggő szétszedése melyben minden $v \in V$ csúcs $\frac{d(v)}{2}$ db. 2-fokú pontra oszlik, ha G összefüggő és $2 \mid d(v)$ $(\forall v \in V)$.* ☺

A megfogalmazás több általánosítási lehetőséget sugall:

Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy G-nek legyen olyan k-élösszefüggő szétszedése, hogy $v \in V$ csúcs adott számú, megadott fokú csúcsra bomlik? $k = 1$-re vonatkozó tételt bizonyítás nélkül közöljük:

6.2. Tétel. (Nash-Williams [5]) *$G = (V, E)$ gráfnak pontosan akkor van összefüggő g-szétszedése, ha minden $X \subset V$ halmazra*

$$g(X) + c(G - X) \le d(X, V) + 1,$$

ahol $c(G - X)$ az X elhagyásával létrejött gráf komponenseinek száma, $d(X, V)$ pedig azon élek száma, amelyek X-beli pontot V-belivel kötnek össze. ☺

A bizonyítás Edmonds matroid metszet tételét használja ki. $k \ge 2$-re a feltétel és a bizonyítás is más. A tételt most [5]-től eltérő, az eddigi leemelési eredményeket kihasználó bizonyítással mondjuk ki:

6.3. Tétel. (Nash-Williams) *$G = (V, E)$ irányítatlan gráf, $|V| \ge 2$ és $k \ge 2$ egész szám. G-nek pontosan akkor van k-élösszefüggő g-szétszedése, ha G maga is k-élösszefüggő és $d(v) \ge$ $\ge k \cdot g(v)$ minden $v \in V$ csúcsra, és nem fordulnak elő a következő esetek:*

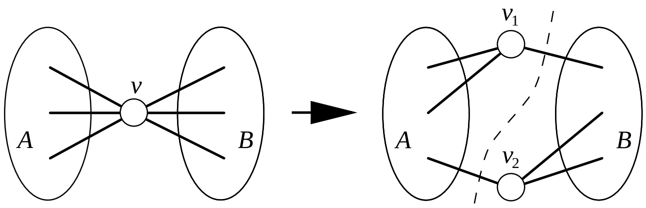
(i) k páratlan és G-nek van egy v elvágó csúcsa, hogy $d(v) = 2k$ és $g(v) = 2$.

(ii) k páratlan és $|V| = 2$, $|E| = 2k$, G-ben nincsenek hurokélek és $g(v) = 2$ $\forall v \in V$.

Továbbá ha G k-élösszefüggő, $d(v) \ge k \cdot g(v)$ minden $v \in V$ csúcsra és az (i) és (ii) esetek nem fordulnak elő, és ha $\{\zeta_v : v \in V\}$ olyan g-fokszám-specifikációja G-nek, hogy minden v-re ζ_v minden tagja $\ge k$, akkor G-nek van k-élösszefgg $\{\zeta_v : v \in V\}$-szétszedése.

Bizonyítás. Ha G-nek valamely szétszedettje k-élösszefüggő, akkor G is az kell, hogy legyen. A g-re ill. ζ-ra tett előírások is szükségesek, mert k-élösszefüggő gráf minden csúcsa legalább k-fokú.

Megmutatjuk, hogy *(i)* esetben a G gráfnak nincsen k-élösszefüggő g-széteszedése. A v pont elhagyásával a gráf A, B összefüggő komponensekre esik. Azért nem többre, mert a k-élösszefüggőség miatt $d(A, s) \ge k$ és $d(B, s) \ge k$, és v-nek csak $2k$ a foka. Ebből az is következik, hogy v-re nem illeszkedik hurokél. Szedjük szét a v pontot teszőlegesen a k-fokú v_1 és v_2 pontokra. A és B a v_1-ből és v_2-ből induló éleket két–két nyalábba sorolja. Vegyük a v_1-hez tartozó kisebbikben és a v_2-höz tartozó kisebbikben szereplő éleket. k páratlansága miatt k-nál kevesebb élt választottunk ki, melyek elhagyásával a gráf szétesik. Tehát a szétszedéssel kapott gráf nem lehet k-élösszefüggő.



(ii) esetben a gráf egyik pontját szétszedve 3 csúcsú gráfot kapunk, és az egyik csúcs olyan lesz, amelyre *(i)* teljesül, tehát itt sincs g-szétszedés.

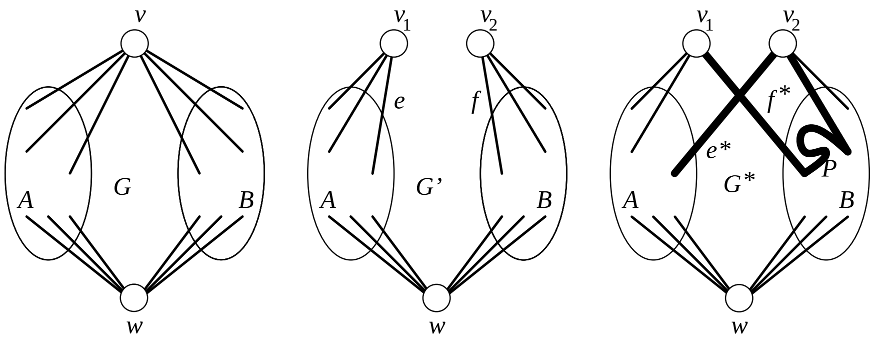
Az elégségesség igazolásához induktív eljárást mutatunk. Vesszük a gráfnak az egyik v csúcsát és szétszedjük a ζ_v előírásnak megfelelő fokú csúcsokra. Mindezt úgy csináljuk, hogy k-élösszefüggő gráfot kapjunk, amire *(i)* és *(ii)* nem teljesül. Kezdetben azokat a v csúcsokat szedjük szét, amelyekre $d(v) = 2k$ és $g(v) = 2$.

Ha egy ilyen v csúcs v_1 és v_2-re történő szétszedése után keletkezik egy elvágó $2k$-fokú w csúcs, akkor javítunk. A szétszedés után a $G^{'}$ gráfhoz jutunk, mely w elhagyásával az A és B összefüggő komponensekre bomlik, és a v_1-ből induló összes él az A-ban, a v_2-ből indulók pedig a B-ben végződnek. A $G^{'}$ gráfot úgy módosítjuk, hogy az egyik v_1-ből induló e élt v_1

helyett v_2-be kötjük, míg egy másik tetszőleges v_2-ből induló f élt v_2 helyett v_1-be kötünk. Azt kéne belátni, hogy az így barkácsolt G^* gráf k-élösszefüggő és nem tartalmaz $2k$-fokú α elvágó pontot, amelyre $g(\alpha) = 2$.

6.4. Állítás. *G^* k-élösszefüggő.*

biz. T.f.h. G^* tartalmaz egy X vágást, amelyre $d_{G^*}(X) < k$. Az A halmazt az X vágás nem vágja ketté, mert ha mégis ketté vágná, akkor tekintsük G^*-nak azt a feszített részgráfját, melyet az A halmaz és a v_1, w pontok feszítenek. Vegyük még ehhez a gráfhoz a G^*-beli e^* és f^* éleket, valamint az f^* B-beli végpontja és v_2 között vezető B-beli P utat. Mivel B feszített részgráfja összefüggő, ezért ilyen P út van. A kapott gráfban az e^*, f^* és P álatal alkotott utat lecserélve a v_1-t e^* A-beli végpontjával összekötő élre egy olyan G_A^* gráfot kapunk, amelyet az X halmaz elvág, és $d_{G_A^*}(X) < k$. Vegyük észre, hogy ez azért lehetetlen, mert G_A^* izomorf a G'-ben lévő, a w és v_1 pontok valamint az A által feszített részgráffal. Ez pedig k-élösszefüggő, mert egy k-élösszefüggő gráfban egy elvágó pont elhagyásával keletkezett komponens és az elvágó pont k-élösszefüggő gráfot feszít.



X nem vághatja ketté a B halmazt sem az előbbi gondolatmenet miatt. Az sem lehet, hogy az X a w pontot elválasztja az A és B halmazok valamelyikétől, mert ekkor pl. $k > > d_{G^*}(X) \geq d_{G^*}(w, A) \geq k$ lenne. Így az X halmaz vagy a komplementere a $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{v_1, v_2\}$ halmazok közül kerülhet ki. Ez a három halmaz viszont láthatóan semmiképpen sem kisebb fokú, mint k, és ez megint ellentmondás. ☺

6.5. Állítás. *G^*-ban nincsen olyan elvágó α pont, amelyre $d_{G^*}(\alpha) = 2k$ és $g(\alpha) = 2$.*

Bizonyítás. Kihasználva, hogy A és B feszített részgráfjai összefüggőek, a konstrukció miatt w, v_1 és v_2 egyike sem lehet elvágó pont. Mivel az A és B által feszített részgráfok összefüggőek, ezért a w és v_1 között két pontdiszjunkt út is van. Ugyanez igaz a w, v_2 pontpárra. Ezek szerint G^* egy α elvágópontját elhagyva a w, v_1 és v_2 pontok egy komponensbe kerülnek. Emiatt a v_1 és v_2 pontokat egy ponttá összehúzva semelyik két komponens sem egyesül, azaz α már G-ben is $2k$ fokú elvágó pont volt, ami ellentmond az indukciós feltevésnek. ☺

Végezetül azt kell megmutatni, hogy a $2k$-nál nagyobb fokú pontok szétszedhetőek a k-él-összefüggőség megtartásával. Mivel a $2k$ fokú pontok szétszedésén túl vagyunk, a maradék pontok szétszedése után nem kerülhetünk az *(i)* vagy *(ii)* által jellemzett bajos esetekbe.

Válasszunk egy $2k$-nál nagyobb fokú s pontot, és az 5.11. tétel felhasználásával emeljünk le róla a g-fokszám-specifikáció által meghatározott méretű csillagokat! Ennek feltétele, hogy

$$\lambda(G - s) \geq k - \sum_{i=1}^{t} \left\lfloor \frac{\zeta_s^i}{2} \right\rfloor$$

és $\lambda(G-s)$ értelmezhetősége miatt $|V| \geq 3$ legyen. Mivel $\zeta_s^i \geq k$ $\forall i$ és $\sum_i \zeta_s^i = d(s) > 2k$, ezért a feltétel jobb oldala ≤ 0, tehát az 5.11. tétel által garantált leemelések elvégezhetőek. $|V| = 2$-re könnyen ellenőrizhető, hogy mivel nem az *(i)* eset áll fent, ezért az egyik csúcs szétszedhető úgy, hogy ne jussunk a *(ii)* bajos esetbe.

Egyenként leemelve a csillagokat mindig k-élösszefüggő gráfhoz jutunk, mert egy X vágás vagy elválaszt két $V-s$-beli pontot és ekkor az 5.11. tétel miatt X legalább k-fokú, vagy pedig X, esetleg a komplementere az $\{s_1\}$, $\{s_2\}$, $\{s_1, s_2\}$ halmazok valamelyike. Felhasználva, hogy ζ_s minden tagja k-nál nagyobb és figyelembe véve az 5.11. tétel bizonyítása után a hurokélekkel kapcsolatos megjegyzést, könnyen látható, hogy X legalább k-fokú. Ezzel a bizonyítást befejeztük. ☺

7. Sejtések

Lovász tételének létezik komoly általánosítása is, melyet Mader bizonyított:

7.1. Tétel. (Mader [3]) *G=(V,E) irányítatlan gráf, $s \in V$ pontra nem illeszkedik elvágó él és $d(s) \neq 3$. Ekkor s-nél van olyan leemelhető élpár, hogy a leemelésével előálló G' gráfban $\lambda_{G'}(x,y) = \lambda_G(x,y)$ $\forall x, y \in V-s$.* ☺

Ezek szerint nem csak a globális, hanem a lokális élösszefüggőséget is meg lehet tartani egy élpár leemelésével.

Másik érzékletes példája a globális és lokális tételpároknak Nash-Williams két irányítási tétele :

7.2. Tétel. (Nash-Williams gyenge irányítási tétele [4]) *$G = (V,E)$ irányítatlan $2k$-élösszefüggő gráfnak van k-élösszefüggő $\vec{G}$ irányítása.* ☺

7.3. Tétel. (Nash-Williams erős irányítási tétele [4]) *$G = (V,E)$ irányítatlan gráfnak van olyan $\vec{G}$ irányítása, melyre $\lambda_{\vec{G}}(x,y) \geq \left\lfloor \frac{\lambda_G(x,y)}{2} \right\rfloor$.* ☺

Mader és Nash-Williams lokális tételei az

$$R(X) := \max\{\lambda(x,y) \ : \ x \in X \not\ni y\} \ \ (X \subsetneq V)$$

függvény vizsgálatával bizonyíthatóak hatékonyan ([1]). R legfontosabb tulajdonsága a *ferde szupermodularitás*, azaz $X, Y \subsetneq V$ halmazokra

$$\begin{aligned} R(X) + R(Y) &\leq R(X \cap Y) + R(X \cup Y) \text{ vagy} \\ R(X) + R(Y) &\leq R(X - Y) + R(Y - X) \end{aligned}$$

teljesül. A 3-csillag leemelésekre is megfogalmazható lokális változat:

7.4. Sejtés. *$G = (V,E)$ irányítatlan 2-3 hipergráf, $s \in V$, $d(s) \geq 3p+2$, és s-re nem illeszkedik 3-hiperél és hurokél. Pontosan akkor van p db. leemelhető 3-csillag, amelyek leemelése a lokális élösszefüggőséget $x, y \in V-s$ pontpárokra megőrzi, ha*

$$\lambda_{G-s}(x,y) \geq \lambda_G(x,y) - \left\lfloor \frac{d(s)-p}{2} \right\rfloor .$$

Eme sejtésből és Mader tételének felhasználásából következik az alábbi sejtés. Az 5.11. tétel bizonyításában mutatott módon csak Mader tétele és a 7.4. sejtés által biztosított élpárokat és 3-csillagokat kéne a d_i-csillagok megkonstruálásához felhasználni. Ezek alapján az előző sejtés ekvivalens a következővel.

7.5. Sejtés. *A $G = (V, E)$ 2-3 hipergráf egy $s \in V$ pontjára nem illeszkedik elvágó él és 3-hiperél, $d(s) = d_1 + \ldots + d_t$, $2 \leq d_i \in \mathbb{N}$ $\forall i$. Akkor és csak akkor szedhető szét az s pont d_1-, … ,d_t-fokú csillagokra a többi pontpárra vonatkozó lokális élösszefüggőség megtartásával, ha*

$$\lambda_{G-s}(x, y) \geq \lambda_G(x, y) - \sum_i \left\lfloor \frac{d_i}{2} \right\rfloor \quad (\forall x, y \in V - s).$$

Mindkét sejtés szükségességét a már többször használt vágásmegválasztással lehet igazolni.

Mivel Mader tétele a lokális élösszeüggőséget őrzi meg, ezért nem baj, hogy 2-3 hipergráffal állunk szemben, mert Mader tétel alkalmazásához a 3-hiperéleket 3-csillagokra cseréljük, és az élpár leemelések elvégzése után őket visszacseréljük. Mint láttuk, ez az élösszefüggésre nincs kedvezőtlen hatással. Az s-re illeszkedő h db. hurokél esetén az eddigiekkel összhangban mondhatjuk, hogy $2h < p$-re a közölt sejtések nem változnak. $2h \geq p$ esetben a leemelések biztosan elvégezhetőek, mert a 4.1. fejezetben vázolt konstrukciók most is alkalmasak, ha Lovász tétele helyett Mader tételét alkalmazzuk.

Irodalom

[1] A. Frank: *Applications of submodular functions*, Report No. 93806 Research Institute for Discrete Mathematics, Institute for Operation Research, University of Bonn 1993.

[2] L. Lovász: Combinatorial Problems and Exercises, North-Holland 1979.

[3] W. Mader: *A reduction method for edge-connectivity in graphs*, Ann. Discrete Math., Vol.3, 1978, pp. 145-164.

[4] C. St J. A. Nash-Williams: *On orientations, connectivity and odd vertex pairings in finite graphs*, Canad. J. Math., Vol.12, 1960, pp. 555-567.

[5] C. St J. A. Nash-Williams: *Connected detachments of graphs and generalized Euler trails*, J. London Math. Soc., Vol.31, 1985, pp. 17-29.

[6] T. Watanabe and A. Nakamura: *Edge-connectivity augmentation problems*, J. Comp. System Sci., Vol.35, 1987, pp. 96-144.