Diszkrét és folytonos az analízisben

June 22, 2005

A diplomamunkát készítette: Naszódi Gergely.

Témavezető: Buczolich Zoltán.

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar

Köszönetnyilvánítás

Ezúton mondok köszönetet Buczolich Zoltánnak, témavezetőmnek, aki írásos és elektronikus segédanyagokkal segítette munkámat, továbbá köszönetet mondok Fehér Lászlónak és Kristóf Jánosnak a dolgozat áttekintéséért.

Bevezetés

A szakdolgozatom matematikai tartalmát tekintve négy fejezetből áll, ami valójában három fő részre bomlik. A fejezetek az alábbi címeket kapták: A belső pont fogalma a diszkrétben és a folytonosban, Euklideszi terek analízisbeli különbségei, Vágásmértékek, Gyenge N-integrálok. Az első fejezet kivételével mindegyik rész saját ötleteken alapuló tételeket mutat be. Ezek közül a második fejezet az [N] TDK dolgozatomat tartalmazza, amellyel a Kari Diák Konferencián III. helyezést sikerült elérnem, míg az Országos Tudományos Diákköri Konferencián különdíjat kaptam érte.

A dolgozatom több szempontból közelíti meg az analízisbeli diszkrét-folytonos fogalompárt. Vagy arról van szó, hogy a folytonos világban megismert fogalom analogonját keressük a diszkrét világban, vagy éppen ellenkezőleg a diszkrét esetben ismert fogalmat akarjuk átültetni a folytonos világba. Harmadik lehetőség az, hogy olyan bizonyítási technikát használunk, mely eredendően diszkrétnek számít, csak valamilyen értelemben folytonosítani tudjuk azt.

A belső pont fogalma a diszkrétben és a folytonosban. Ez a fejezet azzal foglalkozik, hogy hogyan lehet a belső pont fogalmát diszkrét esetben is megfogalmazni úgy, hogy az eredményül kapott fogalom értelmessége bizonyítható legyen azáltal, hogy egy, a belsőpont fogalmát használó tétel átvihető legyen a diszkrét világba az új fogalom segítségével.

Euklideszi terek analízisbeli különbségei. Ez a fejezet Brouwer egy tételén keresztül kapcsolódik az előző fejezethez. Ennek a fejezetnek a motivációja kettős volt. Egyrészt felkeltette érdeklődésemet a dimenzió invarianciájával foglalkozó témakör, s szerettem volna egy saját bizonyítással rendelkező tételt adni erre a témakörre. Ugyanakkor az is célként lebegett a szemem előtt, hogy lehetőleg rövidebb, és minél szemléletesebb bizonyítást adjak, mivel a tételkör ismertebb változatai terjedelmes bizonyítással rendelkeznek.

Vágásmértékek, Gyenge N-integrálok. Az analízisben megismert mértékelméletet kívántam vegyíteni gráfelméleti tulajdonságokkal. Új fogalmakat vezetek be. Példákat is mutatok. A mértékelméletben ismert egyszerűbb kiterjesztési tételek igazak maradnak, továbbá létre lehet hozni az úgynevezett félszorzat konstrukciót. Valamivel érdekesebb az, hogy itt is létezik a megfelelő integrálfogalom, s ennek egy nagyon egyszerű változatát mutatom meg, ami a Riemann-integrálra emlékeztet, ez a gyenge N-integrál. Az ilyen típusú integrálás nem lineáris, létezik nem gyenge N-integrálható függvény, és az egyszerűbb integrálási tulajdonságok átvihetők erre az esetre is.

Jelölések

Az $\uplus$ szimbólum segítségével jelöljük diszjunkt halmazokból álló halmazrendszerek unióját, mint például $A = \uplus_{i \in I} A_i$ kifejezésben.

A többszörös indexelést elkerülendő használunk *karaktersorozatokat* is akár *változók*, illetve *halmazok* jelölésére, mint például helyesnek tartjuk az alábbi kifejezéseket: $ik \in I_k$, $B_k = \uplus_{\tau\kappa \in Tk} B_{\tau\kappa}$.

N_n jelöli az első n legkisebb pozitív egész szám halmazát.

Euklideszi terek esetén $B(x, r)$ jelöli az x középű r sugarú *zárt* gömböt.

Euklideszi terek esetén $S(x, r)$ jelöli $B(x, r)$ határát.

$\mathbb{N}$ jelöli a természetes számok halmazát.

$\mathbb{R}$ jelöli a valós számok halmazát, $\overline{\mathbb{R}}$ jelöli a valós számok $+\infty$ és $-\infty$ szimbólumokkal való kiterjesztését.

$Mat(m \times m)$ jelöli a valós m-edrendű négyzetes mátrixok terét.

Egy $M \in Mat(m \times m)$-re M[i,j] jelöli az M i-edik sorának j-edik elemét.

Az m-edrendű négyzetes mátrixok almátrixainak egy sorrendjét rögzíthetjük mátrixtól függetlenül. Egy ilyen sorrend szerint egy $M \in Mat(m \times m)$-re $M \propto j$ jelöli az M mátrix j-edik almátrixának determinánsát.

A belső pont fogalma a diszkrétben és a folytonosban

Ebben a fejezetben Buczolich Zoltán gondolatait és tételét vázoljuk, melyek avval foglalkoznak miként lehet párhuzamot vonni az analízisben megszokott belsőpont fogalommal és a diszkrét világgal. Elsőként az a kérdés merülhet fel, hogy mért van erre egyáltalán szükség. Az ok filozófiai jellegű. Gondoljuk el azt, hogy előttünk van egy alma, amit fel kellene ruházni topológiai jellegű struktúrával. A nehézség abban rejlik, hogy az alma valójában atomokból áll, így egy diszkrét halmazt kell elképzelnünk, a valós három dimenziós világunkban. Az előbbi mondat már előre is vetíti a későbbi meghatározásunk egyik lényegét, azt, hogy olyan módon kell topológiai analógot találni az olyan fogalmakra, mint a belsőpont, melyek figyelembe veszik, hogy a vizsgált diszkrét halmazunk már be van ágyazva egy térbe, nevezetesen $\mathbb{R}^3$-be. Ugyanekkor az, hogy diszkrét halmazt vizsgálunk egyben lehetővé teszi, sőt meg is követeli, hogy valamilyen értelemben paraméterezzük a topologikus tulajdonságokat. Itt ha vissza akarunk térni a szemléletünkhöz, akkor azt kell megfontolni, hogy például az almahéj, mint fogalom létezik, de valójában senki se tudná megmondani, hogy hol van az az éles határ, amikortól kezdve már nem az alma héjáról, hanem annak belsejéről beszélünk.
Megemlítjük, hogy némileg túlmegyünk az almához hasonló, véges sok pontból összetett alakzatokon, és itt $\mathbb{R}^m$ lokálisan véges részhalmazairól lesz szó.

Definíció 1. *Egy $S \subseteq \mathbb{R}^m$ halmaz lokálisan véges, ha $B(0, R) \cap S$ véges minden $R > 0$-ra.*

Definíció 2. *Egy $\mathbb{R}^m$-ben lokálisan véges S halmazt egy (h, x, r)-palacsintának nevezünk, ha egyrészt $r > h$, másrészt minden $B(y, h) \subseteq B(x, r)$ gömbre $B(y, h) \cap S \neq \emptyset$.*

Ez a második definíció azt mondja, hogy a szóban forgó S halmaznak x egy (h, r) paraméterrel leírt belső pontja, vagyis ha veszünk egy r sugarú gömböt x körül, akkor nem lehet akkora lyuk S-ben, mely benne van e gömbben és legalább h sugarú. Az elnevezést pontosítjuk az alábbi definícióban.

Definíció 3. *Legyenek adottak az $r > h > 0$ valós számok, továbbá egy $S \subseteq \mathbb{R}^m$ lokálisan* *véges halmaz. Azt mondjuk, hogy az $x \in S$ pont (h, r) belsőpontja S-nek, ha S egy (h, x, r)-palacsinta.*

Példa 1. *Legyen $h' = h/2\sqrt{m}$, ekkor $S = \{(k_1h', k_2h', ..., k_mh') : k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, ..., m\}$ egy (h, x, r) palacsinta minden $x \in \mathbb{R}^m, r > h$ esetén. Az $S \cap B(0, 1)$ egy $(h, 0, 1)$ palacsinta minden $1 > h$-ra.*

Annak megmutatására, hogy a fenti definíciók használhatóak, megvizsgáljuk egy topológiai tétel diszkrét analogonját. A tétel Brouwernek a tartomány változatlansága néven ismert tétele, mely megtalálható [HW] 95. oldalán a IV. Fejezet 6. pontjában, s így szól:

Tétel 1 (Brouwer tétele a tartomány változatlanságáról). *Legyen X, $\mathbb{R}^n$ egy tetszőleges részhalmaza és h legyen annak egy homeomorfizmusa valamely $h(X)$, $\mathbb{R}^n$ -beli halmazra. Ekkor az x pont pontosan akkor belső pontja X-nek, ha $h(x)$ is belső pontja $h(X)$-nek. Speciálisan, ha A és B homeomorf részhalmazai $\mathbb{R}^n$-nek, akkor ha A nyílt halmaz, akkor B is.*

Ahhoz, hogy megfogalmazzuk e tétel diszkrét változatát, keresni kell egy alkalmas fogalmat, mely a homeomorfizmusnak felel meg. Itt a bi-Lipschitz leképezésekkel fogunk foglalkozni, az ehhez tartozó emlékeztető definíciót lejjebb adjuk meg. Már utaltunk rá, hogy a diszkrét esetben szükség van valamilyen paraméterezésre is, ezért a definíciót ehhez igazítjuk.

Definíció 4. *A szokásos euklideszi norma mellett $A \subseteq \mathbb{R}^m$ és $M > 1$ mellett egy $f : A \to \mathbb{R}^m$ transzformációt M-bi-Lipschitz leképezésnek nevezünk, ha*

$$||x - y||/M \leq ||f(x) - f(y)|| \leq M||x - y||$$

minden $x, y \in A$-ra. Ha nem akarjuk hangsúlyozni az M paramétert, akkor csak annyit mondunk, hogy f bi-Lipschitz.

Mégegyszer visszatérve a paraméter jelenlétének indoklására, ha A egy véges halmaz, akkor bármely injektív leképzés megfelelően nagy M mellett egy (M-)bi-Lipschitz leképzés.

Nézzük most Brouwer tételének parametrizált, diszkrét változatát.

Tétel 2 ([B] kézirat). *Tetszőleges $m \in \mathbb{N}$, $M > 1$-re és $\eta \in (0, 1/M)$-hez létezik egy $h > 0$ szám, hogy ha $r > 0$ és f az S, $\mathbb{R}^m$-beli (hr, x_0, r)-palacsintán értelmezett M-bi-Lipschitz leképezése, akkor $f(S)$ egy $(\eta r, f(x_0), r/M)$-palacsinta.*

Az előbbi tétel valóban annak a Brouwer-tételbeli állításnak felel meg, hogy belső pont képe belső pont.

A bizonyítást vázoljuk. Az indirekt bizonyítás határátmenettel a diszkrét esetet a folytonosra vezeti vissza. Az első észrevétel az, hogy egyszerű transzformációkkal elérhetjük, hogy csak olyan M-bi-Lipschitz leképezésekkel kelljen foglalkozni, ahol $x_0 = 0 = f(x_0)$, továbbá az is igaz, hogy a tétel ekvivalens azon alakjával, amikor feltesszük, hogy $r = 1$. Ezzel a tételt kanonikus alakra lehet hozni, s a továbbiakban csak ez utóbbit kell bizonyítani.

A bizonyítás indirekt. Vegyük észre, hogy egy (h, x, r)-palacsinta rögzített x és r mellett egyben egy (k, x, r)-palacsinta is, ha $h \leq k$. Indirekt feltesszük, hogy létezik (h_n) monoton csökkenően nullához tartó, csupa pozitív elemű számsorozat, és (S_n) palacsinta sorozat, ahol az n-edik tag éppen $(h_n, 0, 1)$-paraméterű, továbbá M-bi-Lipschitz leképezések egy (f_n) sorozata, ahol az n-edik tag éppen S_n-en definiált, és ennek ellenére $f_n(S_n)$ semmilyen n-re sem egy $(\eta, 0, 1/M)$- palacsinta. Megadhatunk egy (y_n) pontsorozatot, hogy $B(y_n, \eta) \subseteq B(0, \frac{1}{M})$, $B(y_n, \eta) \cap f_n(S_n) = \emptyset$. Nyilvánvalóan y_n-nek létezik egy részsorozata, mely konvergál egy y ponthoz, úgy, hogy $B(y, \eta) \subseteq B(0, 1/M)$.

Vegyünk egy megszámlálható, a nyílt egységgömbben mindenütt sűrű V halmazt. Például megfelelő az $int\, B(0, 1)$-beli racionális koordinátájú pontok halmaza. f_n-et most kiterjesztjük erre a halmazra, úgy, hogy az értékkészlet egyezzen meg a korábbival. Rendezzük sorba V elemeit, azaz legyen $V = \{q_k : k = 1, 2...\}$. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ha $q_k \in S_n$, akkor $f_n(q_k)$-t definiáltuk. Ha $q_k \notin S_n$, akkor választhatunk egy $B(z, h_n)$ gömböt, hogy $q_k \in B(z, h_n)$ és $B(z, h_n) \subseteq B(0, 1)$. Mivel S_n az egy $(h_n, 0, 1)$-palacsinta, ezért vehetünk egy $x_{n,k} \in S_n \cap B(z, h_n)$ pontot. Legyen $f_n(q_k) = f_n(x_{n,k})$.

Az egyszerűség kedvéért jelölje f_n e fenti kiterjesztését is f_n. Mivel f_n, S_n-re vett megszorítása M-bi-Lipschitz, ezért f_n értékészlete $B(0,M)$-be esik. Választhatunk tehát $n(i)$-nek egy olyan $n(1,i)$-vel jelölt részsorozatát, hogy $f_{n(1,i)}(q_1)$ konvergál egy $f(q_1)$-el jelölt számhoz, amint $i \to \infty$. Tegyük fel, hogy az $n(k,i)$ sorozatot már minden i-re definiáltuk. Akkor választhatunk $n(k,i)$-nek egy olyan $n(k+1,i)$-vel jelölt részsorozatát, hogy $f_{n(k+1,i)}(q_{k+1})$ konvergál egy $f(q_{k+1})$-el jelölt értékhez. Vegyük észre, hogy így definiáltunk egy $f : V \to B(0,M)$ függvényt. Megmutatható, hogy a kapott f egy M-bi-Lipschitz leképezés. Ezek után kiterjesztjük f-et $B(0,1)$-re, hogy az M-bi-Lipschitz maradjon. Jelölje a kiterjesztést is f. Megmutatható, hogy $int(B(y,\eta)) \cap f(B(0,1)) = \emptyset$. Mivel $f(0) = 0 \in B(0,1/M)$ és $B(y,\eta) \subseteq B(0,1/M)$, ezért $B(0,1/M)$ belseje tartalmazza $f(B(0,1))$ egy határpontját. Mivel $B(0,1)$ kompakt, ezért folytonos, s így bi-Lipschitz képe is kompakt azaz korlátos és zárt. Így létezik egy $x \in B(0,1)$, hogy $f(x) \in int(B(0,1/M))$ és $f(x)$ határpontja $f(B(0,1))$-nek. Mivel f M-bi-Lipschitz, ezért ha $p \in S(0,1)$, akkor $||f(p) - f(0)|| = ||f(p) - 0|| \geq 1/M$. Vagyis $B(0,1)$ határa $\mathbb{R}^m - int(B(0,1/M))$-be képződik. Így létezik egy $x \in int(B(0,1))$, hogy $f(x) \in int(B(0,1/M))$ és $f(x)$ határpontja $f(B(0,1))$-nek. Ez azonban ellentmond Brouwer fenti tételének.

Euklideszi terek analízisbeli különbségei

A matematika egyik alapfeladata, annak vizsgálata, hogy két matematikai struktúra tulajdonságaiban mennyire azonos, illetve mennyire tér el egymástól. Amint a cím is mutatja, itt a különböző dimenziós euklideszi terek analízissel kapcsolatos különbségeiről lesz szó. Ezt a témát már többen feldolgozták amint azt a következő három tétel mutatja. Mi egy, a többitől eltérő gondolatmenetet követünk, mely annyiban is kapcsolódik a szakdolgozatom címéhez, hogy egy diszkrét eljárás, a Gauss-elimináció egy "folytonos" alkalmazását mutatja meg.
Ez a része a dolgozatnak az [N] TDK dolgozatomat tartalmazza, amivel III. helyezést értem el a Kari Diák Konferencián, és mely különdíjjal lett jutalmazva az Országos Tudományos Diák Konferencián.

Ahogy említettük első lépésként más szerzők eredményeit soroljuk fel, melyek az eredeti témával kapcsolatosak. Ide tartozik, a már fentebb ismertetett, Brouwer a tartomány változatlansága néven ismert tétele, (1. Tétel).

Algebrai topológiai eszközökkel is bizonyítható az alábbi tétel, melynek két bizonyítása is megtalálható [H]-ban.

Tétel 3. *A szokásos topológiák mellett, ha $U \subseteq \mathbb{R}^m$ nyílt, nemüres halmaz és $V \subseteq \mathbb{R}^m$ szintén nyílt, nemüres halmaz, akkor U és V nem homeomorfak.*

Mi az 5. Tételben a 3. Tételnél kevesebbet fogunk megmutatni, azzal, hogy folytonosan differenciálható függvényekről látjuk majd be, hogy nem lehetnek injektívek. A folytonosan differenciálható függvényekkel kapcsolatban említünk meg mégegy tételt, mely [E] 111. oldalán, a II. Fejezet 5. pontjában található meg, s így szól:

Tétel 4. *Tegyük fel, hogy a $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés folytonosan differenciálható. Ha M azon $x \in S = G^{-1}(0)$ pontok halmaza, melyeknél $G'(x)$ rangja m, akkor M egy $(n-m)$ dimenziós sokaság. Adott $a \in M$-re a $\nabla G_1(a), ..., \nabla G_m(a)$, a G komponensfüggvényeinek gradiens vektorai, merőlegesek az M a-beli érintősíkjára.*

Megjegyezzük, hogy ebben a formában a legutóbbi tétel néha nem alkalmazható annak megmutatására, hogy bizonyos függvények nem injektívek. Tekintsük ugyanis a három dimenziós euklideszi téren az $(a, b, c) \to (sin\, a, a, 0)$ hozzárendeléssel értelmezett függvényt. Világos, hogy a képtér csak olyan euklideszi térbe foglalható bele, ami legalább 2 dimenziós, ugyanakkor a derivált minden pontban legfeljebb egy rangú. Nem kizárt azonban, hogy az előbb kimondott tétel módosítható úgy, hogy alkalmazható legyen az 5. Tétel bizonyítására.

Az alábbiakban feltesszük mindig, hogy $m > n$ nemnegatív egészek. Az alábbiakban nyílt halmazon mindig nemüres halmazt értünk. Mi is ki fogunk mutatni különbséget $\mathbb{R}^m$ és $\mathbb{R}^n$ között, tételünk következménye lesz az, hogy $\mathbb{R}^m$ és $\mathbb{R}^n$ két nyílt halmaza között nem létezik C^1osztályú diffeomorfizmus. Mi az alábbit látjuk be.

Tétel 5. *Legyen $G \subseteq \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz. Legyen $Dom(\psi) = G$, $\psi : G \to \mathbb{R}^n$ egy C^1 osztályú függvény, ekkor ψ nem lehet injektív.*

A bizonyítás egy részét magyarázhatja az alábbi szemlélet. Ha G-ben ψ valamennyi komponensfüggvényének gradiensére egyidejűleg mozgunk merőlegesen (a komponensfüggvények hiperszintfelületein), akkor mozgásgörbénk mentén konstans lesz a függvényünk értéke. Mivel nagyobb dimenziós térből képezünk alacsonyabb dimenziósba, ezért várhatóan lesz legalább egy szabadsági fokunk a mozgásgörbénkre, vagyis a görbénk nem csak egy pontból fog állni. Vigyázni kell azonban, amint az $f((x, y)) = x^2 + y^2$ és $f((0, 0)) = 0$ érték mutatja, hogy bár értelmezési tartományunk minden nyílt részhalmazában található megfelelő mozgásgörbe, de nem feltétlenül halad át minden ponton ilyen.

Az alábbiakban, ahogy szokás az $m \times m$-es, vagy más néven m-ed rendű (négyzetes) mátrixok terét kanonikus módon azonosítjuk az $\mathbb{R}^m$-ből $\mathbb{R}^m$-be képező lineáris leképzések terével. E teret $Mat(m \times m)$ jelöli. $Mat(m \times m)$-et a szokásos topológiával látjuk el. Egy $M \in Mat(m \times m)$ i-edik sorának j-edik elemét $M[i, j]$-vel jelöljük.

Az alábbiakban a bizonyítást úgy irányítjuk, hogy csak négyzetes mátrixokkal kelljen foglalkozni.

Belátunk két segédállítást, melyekből következni fog a fenti tétel.

Egy w pont környezetén olyan nyílt halmazt értünk, mely összefüggő és $w \in U_w$.

Segédállítás 1. *Legyen G, R^m-beli nyílt halmaz, $V : G \to Mat(m \times m)$ folytonos leképezés. Minden $p \in G$-re legyen $detV(p) = 0$, de létezzen $q \in G$, amire $V(q) \neq 0$. Ekkor van olyan $w \in G$, és annak egy U_w környezete, amire létezik r egész, hogy $1 \leq r < m$ és minden $p \in U_w$-re teljesül, hogy $rangV(p) = r$.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy F, $m \times m$-es táblázatot, melyre gondolhatunk úgy, mint egy mátrixra, ami nics kitöltve. Tekintsük ennek az összes $F(1), ..., F(k)$ altáblázatát, melyre gondolhatunk úgy, mint a kitöltetlen mátrix összes almátrixára. Egy $M \in Mat(m \times m)$-re az $F(j)$-hez tarozó aldeterminánst jelölje $M \propto j$. Definiálunk egy $q(j)$ pont- és egy ahhoz tartozó U_j, $q(j)$-környezetsorozatot. $q(0) := q$. Mivel $V(q) \neq 0$, ezért van q-nak olyan $U_0 = U_q$ környezete, hogy minden $p \in U_q$ mellett $V(p) \neq 0$, azaz $rangV(p) \geq 1$, viszont $detV(p) = 0$, ezért $rangV(p) < m$. Ha már $q(j-1)$ és U_{j-1} ismert, akkor vegyük $V(q(j)) \propto j$-t. Két fő esetet különböztetünk meg, mely összesen három alesetre bomlik.

1.) $V(q(j-1)) \propto j = 0$.

1.a) Ha egyben az U_{j-1} környezet minden s pontjára $V(s) \propto j = 0$, akkor $q(j) := q(j-1)$, $U_j := U_{j-1}$.

1.b) $V(q(j-1)) \propto j = 0$, de létezik $s \in U_{j-1}$, melyre $V(s) \propto j \neq 0$. Legyen ekkor $q(j)$ egy ilyen s, ekkor a folytonosság miatt van olyan $U_j \subseteq U_{j-1}$ környezete $q(j)$-nek, hogy minden $t \in U_j$-re $V(t) \propto j \neq 0$.

2.) $V(q(j-1)) \propto j \neq 0$. Legyen ekkor $q(j) := q(j-1)$, a folytonosság miatt van olyan $U_j \subseteq U_{j-1}$ környezete $q(j)$-nek, hogy minden $t \in U_j$ mellett teljesül $V(t) \propto j \neq 0$.

Mindhárom esetben vagy minden $t \in U_j$ mellett teljesül $V(t) \propto j = 0$, vagy minden

$t \in U_j$ mellett teljesül $V(t) \propto j \neq 0$. $U_k \subseteq U_j$ $(j = 0, ..., k)$, ezért $s \in U_k$-ra az, hogy nulla-e, az s-től függetlenül csak j-től függ. Mivel egy mátrix rangja legnagyobb rendű el nem tűnő determinánsú almátrixának rendje, ezért $w := q(k)$, $U_w := U_k$ alkalmas választás. $\square$

Elevenítsük fel a Gauss-eliminációval kapcsolatos ismereteinket. Legyen adva egy $B \in Mat(m \times m)$. Tekintsük azt a $C_{i,j} \in Mat(m \times m)$-et, mely csak annyiban tér el az egységmátrixtól, hogy i-edik sorának j-edik oszlopában, valamint j-edik sorának i-edik oszlopában 1-es áll, és az i-edik sorának i-edik oszlopában, valamint j-edik sorának j-edik oszlopában 0 áll. Az a mátrix, mely B-ből úgy áll elő, hogy i-edik és j-edik oszlopát felcseréljük, az előáll $BC_{i,j}$ alakban, míg az a mátrix, mely B-ből úgy áll elő, hogy i-edik és j-edik sorát felcseréljük, az előáll $C_{i,j}B$ alakban. Világos, hogy a $C_{i,j}$ típusú mátrixok invertálhatók, így ilyenek T szorzata is. Ismert, hogy rögzített i, j mellett megadható $L_{i,j} : R \rightarrow Mat(m \times m)$ folytonos függvény, hogy $BL_{i,j}(k)$ mátrix úgy áll elő B-ből, hogy i-edik oszlopának k-szorosát levonjuk a j-edik oszlopból.

Segédállítás 2. *Legyen adva egy $w \in \mathbb{R}^m$ pont és annak egy $U_w \subseteq R^m$ környezete, legyen továbbá V egy olyan leképzés, melyre $U_w \subseteq Dom(V)$, $Range(V) \subseteq Mat(m \times m)$ és a V leképezés U_w-re való megszorítása folytonos. Adott továbbá egy r egész, hogy $1 \leq r < m$ és minden $p \in U_w$ mellett teljesül, hogy $rang(V(p)) = r$. Nyilvánvalóan alkalmas $C_{i,j}$ mátrixok T szorzatával $V(w)T$ első r oszlopa független. Definiáljuk az $E : U_w \rightarrow Mat(m \times m)$, $E(q) = V(q)T$ leképezést. Ekkor létezik w-nek olyan W környezete, és egy $D : W \rightarrow R^m$ sehol sem nullvektor értékű folytonos leképezés, hogy minden $q \in W$ mellett teljesül, hogy $E(q)D(q) = 0$.*

Bizonyítás. A bizonyítás a jól ismert Gauss elimináció folytonosítása lévén történik. A folytonosított Gauss eliminációt r darab lépésre bontjuk. Mindegyik i lépéshez definiálunk egy W_i, w-környezetet úgy, hogy $q \in W_i$ mellett az $E(q)$ alakú mátrixokra valamilyen értelemben folytonosan fog működni az első i lépés végrehajtása, továbbá $W_0 = U_w$ jelöléssel az íly kibővített halmazsorozat szűkülő. Az i-edik lépés végrehajtása után kapunk két folytonos függvényt:

$E^i : W_i \to Mat(m \times m)$ arra szolgál, hogy leírja a Gauss elimináció i-edik lépésének hatását minden $q \in W_i$ ponthoz rendelt $E(q)$ mátrixra, a másik függvény a Gauss elimináció i-edik lépésének transzformációs képletét adja meg úgy, hogy $F^i : W_i \to Mat(m \times m)$ és $E^i(q) = E(q)F^i(q)$. Ahogy szoktuk, sorozatunkat kibővítjük $E^0 = E$-vel és $F^0 \equiv I$-vel, ahol I jelöli az m-edrendű identitás mátrixot. Definiálni fogunk még egy $S(i)$ sorozatot is, mely mátrixok sorainak megjelölésére szolgál majd. Tekintsük az $E^0(w)$ mátrixot, melyen a folytonosított eljárás fog alapulni. Vegyük $E^0(w)$-ben az első oszlopot, keressük meg fentről az első sort, melyet a továbbiakban $S(1)$-edik sornak nevezünk úgy, hogy az $S(1)$-edik sor első oszlopában nem nulla szám áll, ezt valóban megtehetjük, a segédállításunk rangra vonatkozó feltétele miatt. A folytonosított eljárás első lépésében először megválasztjuk W_1-et. Mivel $B_1 = \{M \in Mat(m \times m) : M[S(1), 1] \neq 0\}$ nyílt halmaz, s mivel E^0 folytonos a W_0 nyílt halmazon, ezért létezik $W_1 \subseteq W_0$, w-környezet, hogy ott $E(q) \in B_1$. Tekintsük az első lépést és vonjuk le egyszerre az első oszlop alkalmas k-szorosait a többi oszlopból, legyen tehát $q \in W_1$-re

$$F^1(q) := F^0(q) \prod_{j \neq 1} L_{1,j}(\frac{E^0(q)[S(1), j]}{E^0(q)[S(1), 1]}),\ E^1 := E^0 F^1.$$

Világos, hogy W_1-ben E^1, F^1 folytonos függvények. Folytassuk az eljárást, és ha már megvan az $i-1$-edik lépés eredménye és $i \leq r$, akkor tekintsük $E^{i-1}(w)$-t, és i-edik oszlopában keressük meg fentről az első sort, melyet a továbbiakban $S(i)$-edik sornak nevezünk, hogy az $S(i)$-edik sor i-edik oszlopában nem nulla szám áll. A folytonosított eljárás i-edik lépésében először megválasztjuk W_{i-1}-t. Mivel $B_i = \{M \in Mat(m \times m) : M[S(i), i] \neq 0\}$ nyílt halmaz, s mivel E^{i-1} folytonos a W_{i-1} nyílt halmazon, ezért létezik w-nek $W_i \subseteq W_{i-1}$ környezete, hogy ott $E(q) \in B_i$. Tekintsük az i-edik lépést, és vonjuk le egyszerre az i-edik oszlop alkalmas k-szorosait a többi oszlopból, legyen tehát $q \in W_1$-re

$$F^i(q) := F^{i-1}(q) \prod_{j \neq i} L_{i,j}(\frac{E^{i-1}(q)[S(i), j]}{E^{i-1}(q)[S(i), i]}),\ E^i := E^0 F^i.$$

Világos, hogy W_i-ben E^i, F^i folytonos függvények. Tekintsük az eljárásunk r-edik lépése után kapott eredményt. $q \in W_r$-re olyan $E^r(q)$ mátrixot kapunk, melynek az $S(i)$-edik sorok és az összes oszlop által meghatározott mátrixban csak az $S(i)$-edik sor i-edik oszlopában $i \leq r$ mellett áll nem nulla, továbbá az említett sorok és oszlopok elvételével nyert almátrix minden eleme 0, ismerve a Gauss elimináció tulajdonságait és lévén $W_r \subseteq U_w$. Legyen tehát $W := W_r$. Vegyünk most egy m-dimenziós J oszlopvektort, melynek minden $i \leq r$-re: $S(i)$-edik sorában 0 áll, és a többiben 1-es. Az $L_{i,j}(k)$ típusú mátrixok invertálhatóak, ezért $F^r(q)J$ minden $q \in W$-re nem nulla vektor. Legyen $D : W \to \mathbb{R}^m$, $q \to F^r(q)J$, ami sehol sem nulla folytonos függvény. Ekkor minden $q \in W$ mellett teljesül, hogy $0 = E^r(q)J = E^0(q)F^r(q)J = E(q)D(q)$. $\square$

Az 5. Tétel bizonyítása. Tegyük fel indirekten, hogy ψ injektív. Jelölje $\iota : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a természetes beágyazást, s legyen $\varphi = \iota \circ \psi$, ami szintén injektív és C^1-osztályú függvény. Belátjuk, hogy ez lehetetlenség.

Amint az könnyen látható, a beágyazás tulajdonságai miatt G minden x pontjában $\varphi'(x)$ mátrix utolsó sora csupa nulla. Jelölje V a φ Jacobi mátrixát. Ha $V \equiv 0$ a G-n, akkor φ konstans G-n, és így nem lenne injektív, tehát ezt az esetet kizártuk. Feltehetjük így, hogy V értéke nem az azonosan nulla mátrix.

Alkalmazzuk most egymás után a két segédállításunkat, s tekintsük az utóbbi eredményét. Nézzük a $\gamma'(t) = D(\gamma(t))$ differenciálegyenletet, ennek a Peano-Tonelli tétel értelmében létezik megoldása, vagyis van egy 0-t tartalmazó I nyílt intervallum és egy rajta értelmezett $\gamma(t)$ differenciálható függvény, amely teljesíti a differenciálegyenletet. Mivel D sehol sem tűnt el, ezért $\gamma(t)$ nem lehet konstans. Tekintsük a $\delta = \varphi \circ \gamma$ függvényt, ami differenciálható és a láncszabály értelmében $\delta'(t) = \varphi'(\gamma(t))\gamma'(t) = E(\gamma(t))D(\gamma(t)) = 0$, tehát I-n δ konstans, s mivel φ injektív volt, ezért ez csak úgy lehet, ha γ konstans, ami ellentmondás. $\square$

Vágásmértékek

Az alábbiakban mértékelméleti fogalmakat fogunk a gráfelmélettel, illetve a gráfelméletben ismertté vált vágáselmélettel vegyíteni. A továbbiakban mindig lerögzítünk egy X nemüres alaphalmazt, s ehhez kapcsolódó különböző tulajdonságokkal rendelkező halmazfüggvényekkel fogunk foglalkozni.

A kiindulási ötlet a mértékelmélet additív függvényeinek (addíciók) és a kombinatorikában használt szub- illetve szupermoduláris függvények tulajdonságainak összevetéséből ered. Emlékeztetőül felelevenítünk pár definíciót, tételt.

Definíció 1 (szubmodularitás). *Legyen X egy véges halmaz. Egy $B : 2^X \to \mathbb{R}$ függvényt teljesen szubmodulárisnak nevezünk, ha tetszőleges $L, K \subseteq X$-re fennáll, hogy*

$$B(L \cap K) + B(L \cup K) \leq B(L) + B(K). \tag{1}$$

Definíció 2 (szupermodularitás). *Legyen X egy véges halmaz. Egy $P : 2^X \to \mathbb{R}$ függvényt teljesen szupermodulárisnak nevezünk, ha tetszőleges $L, K \subseteq X$-re fennáll, hogy*

$$P(L \cap K) + P(L \cup K) \geq P(L) + P(K). \tag{2}$$

Definíció 3 (félgyűrű). *Legyen X egy nemüres alaphalmaz. Egy $\mathscr{P} \subseteq 2^X$ halmazrendszert félgyűrűnek nevezünk, ha az alábbi két feltétel teljesül.*

1.) Minden $A, B \in \mathscr{P}$-re $A - B$ előáll véges sok diszjunkt $\mathscr{P}$-beli elem egyesítéseként.

2.) $\mathscr{P}$ metszetre zárt.

Definíció 4 (félgyűrűn értelmezett addíció). *Legyen egy X alaphalmazon adott a $\mathscr{P}$ félgyűrű. Legyen $\mu : \mathscr{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ olyan, hogy a*

$$\mu(A) = \sum_{i \in I} \mu(A_i)$$

formula értelmes és fennáll az egyenlőség mindig, valahányszor I véges indexhalmaz, $A \in \mathscr{P}$, $A_i \in \mathscr{P}$ $(i \in I)$ és $A = \uplus_{i \in I} A_i$

Definíció 5 (gyűrű). *Legyen X egy nemüres alaphalmaz. Egy $\mathscr{R} \subseteq 2^X$ halmazrendszert gyűrűnek nevezünk, ha az alábbi két feltétel teljesül.*

1.) $\mathscr{R}$ halmazkülönbségre zárt.

2.) $\mathscr{R}$ unióra zárt.

Minden gyűrű nyilván félgyűrű. Az alábbi tétel, amely azt mondja ki, hogy gyűrű esetén egyszerűbben is belátható az, hogy egy függvény rendelkezik az addíció tulajdonsággal.

Tétel 1. *Legyen $\mu : \mathscr{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, ahol $\mathscr{R}$ gyűrű. μ akkor és csak akkor additív $\mathscr{R}$-en, ha $\mu(\emptyset) = 0$ és $L, K \in R,\ L \cap K = \emptyset$ esetén*

$$\mu(L \uplus K) = \mu(L) + \mu(K).$$

Ezt a tételt már könnyű átformálni olyanra, hogy a szub- illetve szupermoduláris függvényekhez hasonló jellemzést kapjunk.

Tétel 2. *Legyen $\mu : \mathscr{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, ahol $\mathscr{R}$ gyűrű. μ akkor és csak akkor additív $\mathscr{R}$-en, ha $\mu(\emptyset) = 0$ és $L, K \in R,\ L \cap K = \emptyset$ esetén*

$$\mu(L \cap K) + \mu(L \cup K) = \mu(L) + \mu(K). \tag{3}$$

Szemmel látható, hogy (1), (2) és (3) között szoros összefüggés van. Két kérdés is természetes módon merül fel. Mértékelméletben, az additív függvényeknek fontos speciális esetei a σ-additív függvények. Létezik-e olyan definíció, mely a szub- vagy szupermoduláris függvények és σ-additív függvények közös analogonja? A kombinatorika szemszögéből szemlélődve lehetséges-e az, hogy olyan kombinatorikus tételeknél, ahol szub- vagy szupermoduláris függvények jönnek elő, létezik a megfelelő tételeknek olyan általánosítása, ahol a szóban forgó függvények "σ-megfelelői" jönnek elő? Ezek a kérdések nagyon általánosaknak tűnnek, ezért, ha egyáltalán létezik valamilyen eredmény is e téren, célszerű lenne azt valamilyen nagyon leegyszerűsített esetben megkísérelni kimutatni.

Jelölés 1. *Gyakran lesz szükségünk az alábbi jelölésekre, halmaz önmagával vett direktszorzata esetén: I halmaz esetén jelölje $(I \times I)^* = \{(i,j) \in I \times I : i \neq j\}$, és $\mathscr{P}$ halmazrendszer esetén: $(\mathscr{P} \times \mathscr{P})' = \{(A,B) \in \mathscr{P} \times \mathscr{P} : A \cap B = \emptyset\} \cup \{(A,A) : A \in \mathscr{P}\}$.*

A kiindulás egy $\mathscr{P} \subseteq 2^X$ félgyűrű, valamint egy (μ, d) függvénypár, ahol a függvénypár két tagjára teljesül, hogy $\mu : \mathscr{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ és $d : (\mathscr{P} \times \mathscr{P})' \to \overline{\mathbb{R}}$. Az ilyen esetekben azt mondjuk, hogy a (μ, d) függvénypár a $\mathscr{P}$ félgyűrűhöz kapcsolt.

Definíció 6. *Egy $\mathscr{P}$ félgyűrűhöz kapcsolt (μ, d) függvénypárt vágásaddíciónak nevezünk, ha teljesülnek az alábbiak, véges I és J indexhalmazok mellett:*

$$\mu(\emptyset) = 0$$

és

$$\text{minden } X \in \mathscr{P}\text{-re } d(X,X) = 0.$$

Ha $A,\ A_i \in \mathscr{P}$ $(i \in I)$ mellett $A = \uplus_{i \in I} A_i$, akkor mindig értelmes és igaz az úgynevezett pontosság:

$$\mu(A) = \sum_{i \in I} \mu(A_i) + \sum_{(i,j) \in I \times I} d(A_i, A_j) \tag{4}$$

Ha még $B,\ B_j \in \mathscr{P}$, $(j \in J)$, $A \cap B = \emptyset$ mellett $B = \uplus_{j \in J} B_j$, akkor értelmes és igaz az úgynevezett addíció:

$$d(A,B) = \sum_{(i,j) \in I \times J} d(A_i, B_j). \tag{5}$$

Megjegyzés 1. *Alapvető észrevétel, hogy rögzített félgyűrű mellett, a hozzákapcsolt véges értékű vágásaddíciók vektorteret alkotnak a szokásos műveletekkel.*

Megjegyzés 2. *A (4) egyenlőségben a második összegzés alatt helyesebbnek tűnne $I \times I$ helyett $(I \times I)^*$. Azonban a $*$ jelet azért hagyhatjuk el, mert a $d(A_i, A_i)$ alakú tagok definíció szerint nullák.*

Megjegyzés 3. *Amint majd később kiderül, egy vágásaddíciót nem csupán* (μ, d)*-vel fogunk jelölni. Például, ha a vágásaddíciónk nem csupán egy félgyűrűhöz, hanem egy gyűrűhöz kapcsolt, akkor inkább az* (M, D) *jelölést használjuk.*

Példák 1. *Itt felsorolunk néhány példát vágásaddícióra.*

1.1.(triviális és nem feltétlen diszkrét) Legyen $(\mu, d) = (\mu, 0)$*, ahol* μ *a* $\mathscr{P}$ *feletti valós, additív függvény.*

1.2. Legyen adva egy Z *alaphalmazon egy* $\mathscr{S}\mathscr{A}$*,* σ*-algebra, és tekintsük ennek önmagával vett zárójeles szorzat által, mint félgyűrű által generált* σ*-algebrát. Jelölje ez utóbbit* $\mathscr{S}$*. Tekintsünk egy* $\mathscr{S}$*-en értelmezett,* $Z \times Z$ *alaphalmazú* μ *mértéket. Ezek után megadjuk a* $Z \times Z$ *halmazhoz kapcsolt (M,D) párt. Először is legyen* $D(X, X) = 0$ *minden* $X \in \mathscr{S}\mathscr{A}$*-ra. Legyen továbbá* $M(A) = \mu(A \times A)$ *minden* $A \in \mathscr{S}\mathscr{A}$*-ra. Diszjunkt* $A, B \in \mathscr{S}\mathscr{A}$ *mellett definiáljuk* $D(A, B)$*-t az előbbihez hasonló módon:* $D(A, B) := \mu(A \times B)$*. Itt megjegyezzük, hogy D(A,B) definiálásához nincs szükség* A, B *diszjunktságára, ám definiálni már csak ilyenekre kellett D-t. A Példa vágásmértékre címszó alatt igazoljuk, hogy valóban vágásmértéket kapunk így. Néhány további példa ennek a példának lesz speciális esete, de érdemes érdekességük miatt rájuk külön felhívni a figyelmet.*

Speciális esetek:

1.3.(diszkrét) Vegyünk egy véges gráfot. Az alaphalmaz legyen a gráf alaphalmaza, a félgyűrű pedig a hatványhalmaz. $M(X)$ *jelölje az* X *által feszített élek halmazának számosságát, tehát azon élek halmazának számosságát, melyeknek mindkét végük a halmazban van. Diszjunkt* A, B *halmazokra jelölje* $d(A, B)$ *az* A *és* B *halmazok közt haladó élek számának felét (nem baj, ha nem egész). Illetve* $d(X, X) := 0$ *definíció szerint.*

Közvetlen számolással ellenőrizzük (4) és (5) teljesülését. Tekintsük az igazolandó (4)-et. Tekintsünk egy e élt, melyet X *feszít. Ha e mindkét vége ugyanabba az* X_i *osztályba*

esik, akkor a jobboldal pontosan egyszer számolja, méghozzá az $M(X_i)$-ben. Ha e két vége különböző X_i, X_j osztályokba esik, akkor a jobboldal kétszer veszi figyelembe ezt az élt, de mindkétszer $\frac{1}{2}$ súllyal, méghozzá a $d(X_i, X_j)$, $d(X_j, X_i)$ tagokban. Azt is megfigyelhetjük, hogy a jobboldal csak az X által feszített éleket számolja pozitív súllyal. Evvel beláttuk (4)-et.
(5)-öt is belátjuk közvetlen meggondolással. Vegyünk egy e élt, melynek végpontjati a diszjunkt A, B halmazokban fekszenek. Ekkor pontosan egy (i, j) pár van, amire e végpontjai A_i, B_j-ben fekszenek. Ezért (5) jobboldala pontosan egyszer veszi figyelembe ($\frac{1}{2}$ súlyozással) e-t, méghozzá $d(A_i, B_j)$-ben, s a baloldal is pont $\frac{1}{2}$ súlyozással veszi azt egyszer figyelembe. (5) jobboldala csak olyan élt vesz pozitív súllyal figyelembe, ami A és B halmaz közt húzódik.

1.4.(diszkrét) Vegyünk egy véges irányított gráfot. Az alaphalmaz legyen a gráf alaphalmaza, a félgyűrű pedig a hatvány halmaz. $M(X)$ jelölje a 3.példához hasonló módon az X által feszített élek halmazának számosságát. Diszjunkt A, B-re jelölje $D(A, B)$ az A-ból B-be vezető irányított élek számát. Megint D(X,X):=0, definíció szerint.

Egy későbbi tétel szerint további nemtriviális vágásaddíciók készíthetők, sőt vágásmértékek (ennek definíciója később szerepel) is az 1-3, 1-4 kombinációkkal.

Az első lépés a vágásaddíció kiterjesztése lesz egy bővebb halmazrendszerre, nevezetesen a félgyűrűt tartalmazó legszűkebb gyűrűre. A félgyűrű által generált gyűrű struktúrája mivel ismert, ezért csak megemlítjük az idevonatkozó tételt.

Tétel 3 (Félgyűrű által generált gyűrű). *Egy $\mathscr{P}$ félgyűrű által generált $\mathscr{R}(\mathscr{P})$ gyűrű azonos a $\mathscr{P}$ -beli halmazok összes véges diszjunkt egyesítéseiből álló halmazrendszerrel.*

Tétel 4 (Vágásaddíció gyűrűre való kiterjesztési tétele). *Ha $\mathscr{P}$ egy félgyűrű* *és (μ, d) egy hozzá kapcsolt vágásaddíció, akkor az alábbi feltételek bármelyikének teljesülésekor létezik annak egyetlen kiterjesztése, mely a $\mathscr{P}$ által generált gyűrűhöz kapcsolt vágásaddíció:*

a) μ és d mindketten véges értékűek.

b) μ és d mindketten nem negatívok.

c) μ és d mindketten nem pozitívak.

Bizonyítás. Nézzük először meg, hogy ha előre ismernénk az (M, D)-vel jelölt kiterjesztést, akkor az milyen alapvető következménnyel járna. Bármely $A \in \mathscr{R}(\mathscr{P})$ halmaz előáll véges I indexhalmaz mellett

$$A = \uplus_{i \in I} A_i^1, \ A_i^1 \in \mathscr{P}$$

alakban. Tekintsünk most még egy A-tól diszjunkt $B \in R(P)$-beli halmazt is, és annak is vegyük egy véges J indexhalmaz melletti

$$B = \uplus_{j \in J} B_j^1, \ B_j^1 \in \mathscr{P}$$

felbontását (a felső indexek azt fejezik ki, hogy itt egy lehetséges felbontásról van szó). Ilyen esetre is fennállnak (M, D) vágásaddíciós tulajdonságai, vagyis (4)-nek és (5)-nek megfelelően

$$D(A, B) = \sum_{(i,j) \in I \times J} D(A_i^1, B_j^1) = \sum_{(i,j) \in I \times J} d(A_i^1, B_j^1) \tag{6}$$

$$M(A) = \sum_{i \in I} M(A_i^1) + \sum_{(i,j) \in I \times I} D(A_i^1, A_j^1) = \sum_{i \in I} \mu(A_i^1) + \sum_{(i,j) \in I \times I} d(A_i^1, A_j^1) \tag{7}$$

fennállnak. Meg kell mutatni, hogy $D(A, B)$ és $M(A)$ nem függ az A_i^1 és B_j^1 felbontás választásától. Vegyünk tehát még egy-egy előállítást, melyekhez a véges K és L indexhalmazok tartoznak.

$$A = \uplus_{k \in K} A_k^2, \ A_k^2 \in \mathscr{P},$$

$$B = \uplus_{l \in L} B_l^2, \ B_l^2 \in \mathscr{P}.$$

Először azt fogjuk megnézni, hogy hogyan igazolható az, hogy a fenti képletekkel D jól, azaz egyértelműen definiált. A (6) és (7) egyenlőségek jobboldalán álló összeg értelmes (helyénvaló az állítás, hiszen a), b) vagy c) feltételek bármelyikéből következik, hogy nem lép fel az összegben két ellentétes előjelű tag.) Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} d(A_i^1, B_j^1) = \sum_{(i,k,j,l)\in I\times K\times J\times L} d(A_i^1\cap A_k^2, B_j^1\cap B_l^2) = \sum_{(k,l)\in K\times L} d(A_k^2, B_l^2)$$

miatt $D(A,B)$ valóban jól definiált.

Megmutatjuk, hogy M is definiálható a fentiek alapján. Tartsuk meg korábbi jelölésünket, és $A \in \mathscr{R}(\mathscr{P})$-re igazoljuk az állítást. Írjuk fel a

$$\mu(A_i^1) = \sum_{j\in J} \mu(A_i^1 \cap A_j^2) + \sum_{(s,t)\in J\times J} d(A_i^1\cap A_s^2, A_i^1\cap A_t^2) \tag{8}$$

és különböző $i, j \in I$-re a

$$d(A_i^1, A_j^1) = \sum_{(s,t)\in J\times J} d(A_i^1\cap A_s^2, A_j^1\cap A_t^2) \tag{9}$$

egyenlőségeket. Ezekből összegzéssel kapjuk az alábbiakat, úgy hogy a (8) típusú képleteket I-re, míg a (9) típusú képleteket $(I\times I)^*$-ra összegezzük.

$$\sum_{i\in I} \mu(A_i^1) + \sum_{(i,j)\in I\times I} d(A_i^1, A_j^1) =$$

$$= \Bigg[\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \mu(A_i^1\cap A_j^2) +$$

$$+ \sum_{i\in I}\sum_{(s,t)\in J\times J} d(A_i^1\cap A_s^2, A_i^1\cap A_t^2)\Bigg] + \sum_{(i,j)\in (I\times I)^*}\sum_{(s,t)\in J\times J} d(A_i^1\cap A_s^2, A_j^1\cap A_t^2) =$$

$$= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \mu(A_i^1\cap A_j^2) +$$

$$+\Big[\sum_{i\in I}\sum_{(s,t)\in J\times J} d(A_i^1\cap A_s^2, A_i^1\cap A_t^2)+\sum_{(i,j)\in(I\times I)^*}\sum_{(s,t)\in J\times J} d(A_i^1\cap A_s^2, A_j^1\cap A_t^2)\Big]=$$

$$=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\mu(A_i^1\cap A_j^2)+\sum_{(i,j)\in(I\times I)}\sum_{(s,t)\in J\times J} d(A_i^1\cap A_s^2, A_j^1\cap A_t^2),$$

s ez az alak már szimmetrikus mindkét felbontás szerint.

Belátjuk D additivitását is. Legyen $A, B\in\mathscr{R}(\mathscr{P})$ két diszjunkt halmaz, és

$$A=\uplus_i A_i,\ B=\uplus_j B_j,\ A_i\in\mathscr{R}(\mathscr{P}),\ B_j\in\mathscr{R}(\mathscr{P}).$$

A gyűrűstruktúra tétel miatt minden $i\in I$-hez léteznek véges I_k indexhalmazok, melyek egymástól diszjunktak, és minden $j\in J$-hez léteznek véges J_l indexhalmazok, melyek egymástól diszjunktak, úgy, hogy

$$A_i=\uplus A_{ik},\ A_{ik}\in\mathscr{P},\ ik\in I_k$$

$$B_j=\uplus B_{jl},\ B_{jl}\in\mathscr{P},\ jl\in J_l$$

Az előbbiekben szó volt arról, hogy bizonyos i indexekhez hozzárendeltünk bizonyos I_k indexhalmazokat. Ezért helyesebb lenne I_k helyett $I_k(i)$-t írni, azonban az indexzsúfolás elkerülése miatt mégsem írjuk ki az i paramétert. Hasonlóan járunk el a J_l-ek értelmezésénél.

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$K:=\cup_{i\in I}I_k,$$

$$L:=\cup_{j\in J}J_l.$$

D definíciója miatt:

$$D(A,B)=\sum_{(ik,jl)\in K\times L}D(A_{ik},B_{jl}),$$

$$D(A_i,B_j)=\sum_{(ik,jl)\in I_k\times J_l}D(A_{ik},B_{jl}).$$

Ez utóbbit összegezve i-re j-re, kapjuk az állítást.

Belátjuk a pontosság teljesülését is. Legyen $A \in \mathscr{R}(\mathscr{P})$, $A = \uplus_{i \in I} A_i$, ahol $A_i \in \mathscr{P}$, $i \in I$ egy lehetséges felbontás. A pontosság tulajdonság szerint

$$M(A) = \sum_{i \in I} M(A_i) + \sum_{(i,j) \in (I \times I)^*} D(A_i, A_j).$$

Legyen ugyanekkor

$$A = \uplus_{k \in K} B_k$$

egy olyan felbontás, amire

$$B_k \in \mathscr{R}(\mathscr{P}),\ k \in K.$$

Ez azt jelenti, hogy az itt szóba kerülő gyűrűelemek is előállnak félgyűrűbeli elemekből, így:

$$B_k = \uplus_{\tau\kappa \in Tk} B_{\tau\kappa}.$$

Legyen

$$Z = \sum_{k \in K} M(B_k) + \sum_{(k,l) \in (K \times K)^*} D(B_k, B_l).$$

Azt kellene megmutatni, hogy $Z = M(A)$. Ezt két alapvető egyenlőségtípus segítségével látjuk be. Itt meg kell jegyeznünk, hogy egy halmaz karaktersorozattal való jelölésének és egy változó elemének karaktersorozattal való jelölésének nem kell egymáshoz kötődőnek lennie, mint az alábbiakban használni fogjuk a Tk halmazjelölést, s annak változó elemeire mind a $\tau\lambda$, mind a $\tau\kappa$ jelet.

$$M(B_k) = \sum_{\tau\kappa \in Tk} M(B_{\tau\kappa}) + \sum_{(\tau\kappa, \tau\lambda)\ \in (Tk \times Tk)^*} D(B_{\tau\kappa}, B_{\tau\lambda})$$

$$D(B_k, B_l) = \sum_{(\tau\kappa, \tau\lambda) \in Tk \times Tl} D(B_{\tau\kappa}, B_{\tau\lambda}).$$

Ebből

$$Z = \sum_{k\in K}\Bigg(\sum_{\tau\kappa\in Tk} M(B_{\tau\kappa}) + \sum_{(\tau\kappa,\tau\lambda)\in(Tk\times Tk)^*} D(B_{\tau\kappa},B_{\tau\lambda})\Bigg)+$$

$$+\sum_{(k,l)\in(K\times K)^*}\Bigg(\sum_{(\tau\kappa,\tau\lambda)\in(Tk\times Tl)} D(B_{\tau\kappa},B_{\tau\lambda})\Bigg).$$

Ez utóbbi szummákból álló összeget felírhatjuk

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

alakban, ahol

$$Z_1 = \sum_{k\in K}\sum_{\tau\kappa\in Tk} M(B_{\tau\kappa})$$

$$Z_2 = \sum_{k\in K}\sum_{(\tau\kappa,\tau\lambda)\in(Tk\times Tk)^*} D(B_{\tau\kappa},B_{\tau\lambda})$$

$$Z_3 = \sum_{(k,l)\in(K\times K)^*}\sum_{(\tau\kappa,\tau\lambda)\in Tk\times Tl} D(B_{\tau\kappa},B_{\tau\lambda}).$$

Írjuk le a pontosságot Z_1-re:

$$Z_1 = \sum_{k\in K}\sum_{\tau\kappa\in Tk}\sum_{i\in I} M(B_{\tau\kappa}\cap A_i) + \sum_{k\in K}\sum_{\tau\kappa\in Tk}\sum_{(i,j)\in(I\times I)^*} D(B_{\tau\kappa}\cap A_i, B_{\tau\kappa}\cap A_j)$$

Használjuk $Z2$ és $Z3$ ra az addíciótulajdonságot. Kapjuk:

$$Z_2 = \sum_{k\in K}\sum_{(\tau\kappa,\tau\lambda)\in(Tk\times Tk)^*}\sum_{(i,j)\in I\times I} D(B_{\tau\kappa}\cap A_i, B_{\tau\lambda}\cap A_j).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$Z_3 = \sum_{(k,l)\in(K\times K)^*}\sum_{(\tau\kappa,\tau\lambda)\in Tk\times Tl}\sum_{(i,j)\in I\times I} D(B_{\tau\kappa}\cap A_i, B_{\tau\lambda}\cap A_j).$$

Az alábbi formális számolásnak a lényege az lesz, hogy az A_i halmazoknak többféle részfelbontásait vesszük figyelembe. Bontsuk kéttagú összegekre a $Z_1,\ Z_2,\ Z_3$ mennyiségeket.

$$Z_1 = \sum_{i\in I}\sum_{k\in K}\sum_{\tau\kappa\in Tk} M(B_{\tau\kappa}\cap A_i) + \sum_{(i,j)\in(I\times I)^*}\sum_{k\in K}\sum_{\tau\kappa\in Tk} D(B_{\tau\kappa}\cap A_i, B_{\tau\kappa}\cap A_j) = Z_{1a} + Z_{1b}$$

$$Z_2 = \sum_{i\in I}\sum_{k\in K}\sum_{(\tau\kappa,\tau\lambda)\in(Tk\times Tk)^*} D(B_{\tau\kappa}\cap A_i, B_{\tau\lambda}\cap A_i)+$$

$$+\sum_{(i,j)\in(I\times I)^*}\sum_{k\in K}\sum_{(\tau\kappa,\tau\lambda)\in(Tk\times Tk)^*} D(B_{\tau\kappa}\cap A_i, B_{\tau\lambda}\cap A_j) = Z_{2a} + Z_{2b}$$

$$Z_3 = \sum_{(i,j)\in I\times I}\sum_{(k,l)\in(K\times K)^*}\sum_{(\tau\kappa,\tau\lambda)\in Tk\times Tl} D(B_{\tau\kappa}\cap A_i, B_{\tau\lambda}\cap A_j)+$$

$$+\sum_{(i,j)\in(I\times I)^*}\sum_{(k,l)\in(K\times K)^*}\sum_{(\tau\kappa,\tau\lambda)\in Tk\times Tl} D(B_{\tau\kappa}\cap A_i, B_{\tau\lambda}\cap A_j) = Z_{3a} + Z_{3b}$$

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 =$$

$$= (Z_{1a}+Z_{1b}) + (Z_{2a}+Z_{2b}) + (Z_{3a}+Z_{3b}) = (Z_{1a}+Z_{2a}+Z_{3a}) + (Z_{1b}+Z_{2b}+Z_{3b}) =$$

$$= \Bigg[\sum_{i\in I}\sum_{k\in K}\sum_{\tau\kappa\in Tk} M(B_{\tau\kappa}\cap A_i) + \sum_{i\in I}\sum_{k\in K}\sum_{(\tau\kappa,\tau\lambda)\in(Tk\times Tk)^*} D(B_{\tau\kappa}\cap A_i, B_{\tau\lambda}\cap A_i)+$$

$$+\sum_{(i,j)\in I\times I}\sum_{(k,l)\in(K\times K)^*}\sum_{(\tau\kappa,\tau\lambda)\in Tk\times Tl} D(B_{\tau\kappa}\cap A_i, B_{\tau\lambda}\cap A_j)\Bigg]+$$

$$+\Bigg[\sum_{(i,j)\in(I\times I)^*}\sum_{k\in K}\sum_{\tau\kappa\in Tk} D(B_{\tau\kappa}\cap A_i, B_{\tau\kappa}\cap A_j)+$$

$$+\sum_{(i,j)\in(I\times I)^*}\sum_{k\in K}\sum_{(\tau\kappa,\tau\lambda)\in(Tk\times Tk)^*} D(B_{\tau\kappa}\cap A_i, B_{\tau\lambda}\cap A_j)+$$

$$+\sum_{(i,j)\in(I\times I)^*}\sum_{(k,l)\in(K\times K)^*}\sum_{(\tau\kappa,\tau\lambda)\in Tk\times Tl} D(B_{\tau\kappa}\cap A_i, B_{\tau\lambda}\cap A_j)\Bigg] =$$

$$= \sum_{i\in I} M(A_i) + \sum_{(i,j)\in(I\times I)^*} D(A_i, A_j) = M(A).$$

$\square$

Következmény 1. *Ha egy $\mathscr{P}$ félgyűrűhöz kapcsolt (μ, d) vágásaddíció rendre vagy* *véges, vagy nemnegatív, akkor ugyanilyen az $\mathscr{R}(\mathscr{P})$-re való kiterjesztése is.*

Abban az esetben amikor egy vágásaddíció már nem csupán egy félgyűrűhöz, hanem egy $\mathscr{R}$ gyűrűhöz kapcsolt, akkor a vágásaddíciós tulajdonságok máshogy is megfogalmazhatók, és igaz az alábbi tétel.

Tétel 5 (Gyűrűn értelmezett véges értékű vágásaddíció). *Pontosan akkor beszélünk egy $\mathscr{R}$ gyűrűhöz kapcsolt (M, D) véges értékű vágásaddícióról, ha teljesülnek az alábbi feltételek:*

$$M(\emptyset) = 0,$$

$$\textit{Minden } X \in \mathscr{R}\textit{-re } D(X, X) = 0.$$

Legyen K és J egy-egy kételemű halmaz. Ha $A,\ A_i \in \mathscr{R}$ $(i \in K)$ mellett $A = \uplus_{i\in K} A_i$, akkor mindig értelmes és igaz az úgynevezett pontosság:

$$M(A) = \sum_{i\in K} M(A_i) + \sum_{i\neq j} D(A_i, A_j). \tag{10}$$

Ha még $B,\ B_i \in \mathscr{R}$ $(i \in J)$, $A \cap B = \emptyset$ mellett $B = \uplus_{j\in J} B_j$, akkor értelmes és igaz az úgynevezett addíció :

$$D(A, B) = \sum_{(i,j)\in K\times J} D(A_i, B_j). \tag{11}$$

Bizonyítás. A kis és nagybetűk használatától eltekintve, azt kell megmutatni, hogy gyűrűkön (4) és (5) ekvivalens (10) és (11)-gyel. Világos, hogy (10) és (11), (4) és (5) speciális esete. Mielőtt a fordított irány belátására térnénk rá tegyünk pár megjegyzést. Minden félgyűrűnek és gyűrűnek eleme az $\emptyset$. (11)-ből következik, hogy tetszőleges $X \in \mathscr{R}$-re $D(\emptyset, X) = 0$, ugyanis (11)-nek megfelelően formálisan írhatjuk, hogy $D(\emptyset, X) = D(\emptyset \uplus \emptyset, X \uplus \emptyset) = D(\emptyset, X) + D(\emptyset, X) + D(\emptyset, \emptyset) + D(\emptyset, \emptyset)$. Itt az utolsó két összeadandó definíció szerint nulla, így azt kapjuk, hogy $D(\emptyset, X) = 2D(\emptyset, X)$, mivel D véges értéket vesz fel, ez csak úgy lehet, ha $D(\emptyset, X) = 0$. Hasonlóan bizonyítható, hogy $D(X, \emptyset) = 0$. Ebből már le tudjuk vezetni, hogy $D(A, B \uplus C) = D(A, B) + D(A, C)$, $A, B, C \in \mathscr{R}$ esetén. Ugyanis $D(A, B \uplus C) = D(A \uplus \emptyset, B \uplus C)$, ami (11) kifejtés szerint nem más, mint $D(A,B)+D(A,C)+D(\emptyset,B)+D(\emptyset,C)=D(A,B)+D(A,C)+0+0=D(A,B)+D(A,C)$. Hasonlóan látható be, hogy $D(A \uplus B, C) = D(A,C)+D(B,C)$, tetszőleges $A,B,C \in \mathscr{R}$ mellett.

A fordított irány belátásához az indexhalmazok méretére vonatkozó teljes indukciót használunk. Ha (10) és (11)-ből vezetjük le (4)-et, akkor ez az alábbiak szerint történik. Használjuk a (4)-beli jelöléseket. Ha I elemszáma 1, akkor (4) a triviális $M(A)=M(A)$ azonosságba megy át. Ha I elemszáma 2, akkor (10) éppen a (4) alakot ölti. Tegyük fel, hogy (4) teljesülését igazoltuk már abban az esetben, amikor I elemszáma $n \geq 2$. Belátjuk (4) teljesül akkor is, ha I elemszáma $n+1$. Vegyük ekkor I két elemét, mondjuk x-et és y-t. Legyen $I' := I - \{y\}$. Legyen $I'' := I - \{x,y\}$. Legyen minden $i \in I''$-re $B_i := A_i$, $B_x := A_x \uplus A_y$. Ekkor A-nak egy diszjunkt gyűrűbeli felbontása $\{B_i : i \in I'\}$, ezért az indukció szerint $M(A) = \sum_{i\in I'} M(B_i)+\sum_{(i,j)\in I'\times I'} D(B_i,B_j) = \sum_{i\in I''} M(B_i)+\sum_{(i,j)\in I''\times I''} D(B_i,B_j)+M(B_x)+\sum_{i\in I''} D(B_i,B_x)+\sum_{j\in I''} D(B_x,B_j) = \sum_{i\in I''} M(A_i)+\sum_{(i,j)\in I''\times I''} D(A_i,A_j)+M(A_x \uplus A_y)+\sum_{i\in I''} D(A_i, A_x \uplus A_y)+\sum_{j\in I''} D(A_x \uplus A_y, A_j) = \sum_{i\in I''} M(A_i) + \sum_{(i,j)\in I''\times I''} D(A_i,A_j) + M(A_x) + M(A_y) + D(A_x,A_y) + D(A_y,A_x) + \sum_{i\in I''} D(A_i,A_x)+\sum_{i\in I''} D(A_i,A_y)+\sum_{j\in I''} D(A_x,A_j)+\sum_{j\in I''} D(A_y,A_j) = \sum_{i\in I} M(A_i)+\sum_{(i,j)\in I\times I} D(A_i,A_j)$, ami bizonyítandó volt. Az utolsó előtti egyenlőségnél $M(A_x \uplus A_y)$-ra alkalmaztuk (10)-et, és (11) fenti megjegyzésünk szerinti következményét használtuk többször.

Mutassuk meg, most, hogy (10) és (11)-ből levezethető (5). Használjuk (5) jelöléseit. (11)-ből és a fenti megjegyzésünkből következik, hogy ha I és J számossága legfeljebb 2, akkor készen vagyunk. Megmutatjuk, hogy minden más esetben, hogyan lehet csökkenteni I vagy J számosságát, vagyis visszavezetni esetünket egy korábbi esetre. Tehát $|I|+|J|$ szerinti indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel például, hogy I számossága legalább 3. Ekkor létezik $x,y \in I$ elem. Legyen $I' := I - \{y\}$. Legyen $I'' := I - \{x,y\}$. Legyen minden $i \in I''$-re $C_i := A_i$, $C_x := A_x \uplus A_y$. Ekkor az I', J indexhalmazokra és $\{C_i : i \in I'\}$ valamint $\{B_j : j \in J\}$ rendszerekre alkalmazva (5)-öt, majd többször a fenti megjegyzésünket kapjuk, hogy $D(A,B) = \sum_{(i,j)\in I'\times J} D(C_i,B_j) = \sum_{(i,j)\in I''\times J} D(C_i,B_j)+\sum_{j\in J} D(A_x \uplus A_y, B_j) = \sum_{(i,j)\in I''\times J} D(A_i,B_j)+\sum_{j\in J} D(A_x,B_j)+$

$\sum_{j\in J} D(A_y, B_j) = \sum_{(i,j)\in I\times J} D(A_i, B_j)$, ami a bizonyítandó volt. $\square$

Felhívjuk azonban a figyelmet, hogy e fenti rövid formulákat általános félgyűrűk esetén nem tudjuk használni.

Jelölés 2. *Legyen adva két halmazrendszer* A, B. *Ekkor* $A(\times)B = \{a\times b : a\in A, b\in B\}$ *halmazrendszert nevezzük a két halmazrendszer szorzatának.*

Tétel 6 (Félgyűrűk szorzata). *Két félgyűrű szorzata félgyűrű.*

Definíció 7. *Legyen adva egy* $\mathscr{P}$ *illetve egy* $\mathscr{Q}$ *félgyűrűhöz kapcsolt* (M, D) *vágás addíció, illetve egy* N *(közönséges) addíció. A félgyűrűk félgyűrű szorzatához, mint félgyűrűhöz kapcsolt szorzat vágás addíciót értelmezünk, ami a vágásaddíció és a közönséges addíció félszorzata lesz. Azt, hogy ez valóban vágásaddíciót eredményez a 7. Tételben látjuk be, melyhez felhasználandó az 1. Lemma is. Legyen*

$$A\times B, C\times D \in \mathscr{P}(\times)\mathscr{Q}$$

mellett

$$(M\times N)(A\times B) := M(A)N(B),$$

továbbá

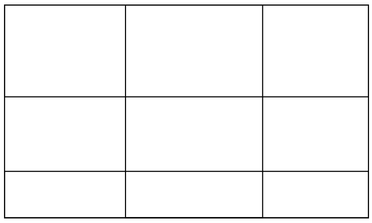
$$A\times B\cap C\times D = \emptyset \tag{12}$$

mellett

$$(D\star N)(A\times C, B\times D) := D(A,B)N(C\cap D),$$

s ez utóbbit értsük úgy, hogy ha D *nem volt értelmezve az* (A, B) *párra, azaz ha* $A\cap B \neq \emptyset$, $A\neq B$, *amiből* (12) *szerint* $C\cap D = \emptyset$. *Akkor terjesszük ki az* (A, B) *párra* D*-t nullaként, összhangban avval hogy a* $(D\star N)$ *definíciójában ekkor* $N(C\cap D)$ *úgy is nulla, vagyis zéróvá teszi a szorzatot.*

Idézzük fel a következő tetszőleges félgyűrűn érvényes lemmát.



Ábra 1: Tégla rácsszerű felbontása

Lemma 1. *Ha $\mathscr{P}$ egy tetszőleges félgyűrű, akkor bármely $P_i, i \in I$, P-beli halmazokhoz léteznek olyan $A_j, j \in J$ páronként diszjunkt $\mathscr{P}$-beli halmazok, amelyekre fennállnak az alábbiak:*

$$\cup_{i \in I} P_i = \uplus_{j \in J} A_j$$

Mindegyik P_i halmaz előáll az A_j halmazok közül néhánynak az egyesítéseként, pontosabban P_i egyesítése az általa tartalmazott A_j-knek, a többi A_j-t pedig nem metszi.

Tétel 7 (Vágásaddíció és addíció félszorzata). *Az előző definíció jelöléseivel, ha M, N, D mind véges értékűek, vagy mind nemnegatívak akkor $((M \times N), (D \star N))$ vágásaddíció a $\mathscr{P}(\times)\mathscr{Q}$ félgyűrűn.*

Bizonyítás. Először az addíciós tulajdonságot bizonyítjuk be speciális esetben. A specialitás abban mutatkozik meg, hogy $(D \star N)$ két argumentumának az alaphalmazok direktszorzatának megfelelően, csak speciális rácsszerű felbontását vesszük figyelembe, ld. ábra. Feltesszük, adott

$$A \times C, B \times D \in \mathscr{P}(\times)\mathscr{Q},$$

s ezek diszjunktak. Adott továbbá ezek rácsszerű felbontása, ahol a felbontást leírják az alábbi halmazok, mint a felbontáshoz tartozó vetületek:

$$A = \uplus_{i \in I} A_i$$

$$B = \uplus_{j \in J} B_j$$

$$C = \uplus_{k \in K} C_k$$

$$D = \uplus_{l \in L} D_l$$

Ekkor kihasználva $A \times C$ és $B \times D$ diszjunktságát, valamint N additivitást azt kapjuk, hogy

$$\sum_{(i,k) \in I \times K} \sum_{(j,l) \in J \times L} (D \star N)(A_i \times C_k, B_j \times D_l) = \sum_{(i,j) \in I \times J} \sum_{(k,l) \in K \times L} D(A_i, B_j) N(C_k \cap D_l) =$$

$$= D(A, B) \sum_{(k,l) \in K \times L} N(C_k \cap D_l) = D(A, B) N(C \cap D) = (D \star N)(A \times C, B \times D),$$

ami éppen a vágásaddíciót bizonyította a speciális esetben. Ezt a speciális esetet fogjuk felhasználni az általános esethez. Tegyük fel, adottak az

$$A \times C, B \times D \in \mathscr{P}(\times)\mathscr{Q}$$

halmazok, s ezeknek adott az

$$A \times C = \uplus_{i \in I} A_i \times C_i,$$

illetve a

$$B \times D = \uplus_{j \in J} B_j \times C_j$$

$\mathscr{P}(\times)\mathscr{Q}$-beli felbontása. A Lemma 1-et is használva léteznek és igazak az

$$A = \cup_{i \in I} A_i = \uplus_{k \in K} T_k$$

$$C = \cup_{i \in I} C_i = \uplus_{l \in L} S_l$$

$$B = \cup_{j \in J} B_j = \uplus_{e \in E} R_e$$

$$D = \cup_{j \in J} D_j = \uplus_{f \in F} Z_f$$

$\mathscr{P}$-beli és $\mathscr{Q}$-beli felbontások. Igaz továbbá, hogy

$$A \times C = \uplus_{(k,l) \in K \times L} T_k \times S_l \tag{13}$$

$$B \times D = \uplus_{(e,f) \in E \times F} R_e \times Z_f. \tag{14}$$

A már belátott speciális esetet használhatjuk, hiszen láthatjuk, hogy (13), (14)-ben rácsszerű felbontásról van szó:

$$(D \star N)(A \times C, B \times D) = \sum_{(k,l,e,f) \in K \times L \times E \times F} (D \star N)(T_k \times S_l, R_e \times Z_f). \tag{15}$$

Legyen

$$G := [T_k \subseteq A_i, S_l \subseteq C_i, R_e \subseteq B_j, Z_f \subseteq D_j].$$

Most az $(A_i \times C_i, B_j \times D_j)$ téglát bontjuk kisebb téglákra, s ebből adódik

$$(D \star N)(A_i \times C_i, B_j \times D_j) = \sum_G (D \star N)(T_k \times S_l, R_e \times Z_f). \tag{16}$$

Ekkor a (16) típusú egyenleteket az I, J indexhalmazokon összegezve, a (15)-öt is felhasználva kapjuk az állítást.

Maradjunk eddigi jelöléseink mellett, belátjuk megint a speciális esetben a vágásaddíció tulajdonság teljesülését. A speciális eset alatt azt értjük, hogy azzal az esettel foglalkozunk, amikor adott egy direktszorzat (tégla) alakú halmaz, s annak olyan felbontását vesszük, ami rácsszerű.

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} (M \times N)(A_i \times B_j) + \sum_{(i,j) \neq (k,l)} (D \star N)(A_i \times B_j, A_k \times B_l) =$$

$$= \sum_{(i,j) \in I \times J} M(A_i) N(B_j) + \sum_{(i,j) \neq (k,l)} D(A_i, A_k) N(B_j \cap B_l) =$$

$$= \sum_{(i,j) \in I \times J} M(A_i) N(B_j) + \sum_{j=l} N(B_j \cap B_l) \sum_{i \neq k} D(A_i, A_k) =$$

$$= \sum_{(i,j)\in I\times J} M(A_i)N(B_j) + \sum_{j=l} N(B_j \cap B_l)[M(A) - \sum_k M(A_k)] =$$

$$= M(A)N(B) = (M \times N)(A \times B).$$

A második egyenlőségben azt használjuk ki, hogy csak a nemnulla összeadandókat kell figyelembe venni, vagyis elég azokat, ahol N argumentumában, nem az üreshalmaz áll, s ez a rácsszerű felbontásnál pontosan akkor következik be, ha $A \times B$ felbontásában szereplő $A_i \times B_j$, valamint $A_k \times B_l$ téglák megfelelő B_j és B_l vetületeti egybeesnek.

Az általános eset megint a fenti technikával bizonyítható, vagyis egy általános felbontásból generálunk egy rácsszerű felbontást, a rácsszerű felbontásra alkalmazzuk az eddigi eredményünket, mivel a rácsszerű felbontás adja az általános felbontás tégláinak rácsszerű felbontását, megint alkalmazzuk a már belátott eredményünket, majd ha összeadjuk az általános téglákhoz tartozó mennyiségeket, akkor azt látjuk, hogy az tulajdonképpen a rácsfelbontáshoz tartozó mennyiségek összege, ami kiadja $M(A\times B)$-t. □

Tétel 8 (Monotonitás gyűrűn). *Legyen adva egy $\mathscr{R}$ gyűrűhöz kapcsolt (M, D) vágásaddíció, ami nemnegatív abban az értelemben, hogy M és D értékkészlete nemnegatív. Legyenek adva az $A, B \in \mathscr{R}$ halmazok úgy, hogy $A \subseteq B$. Ekkor teljesül, hogy $M(A) \leq M(B)$. Legyen adva még egy B-től diszjunkt $F \in \mathscr{R}$ halmaz, valamint egy $E \subseteq F$ halmaz, úgy, hogy $E \in \mathscr{R}$. Ekkor teljesül a $D(A, E) \leq D(B, F)$ egyenlőtlenség.*

Bizonyítás. Legyen $C = B - A$, $\mathscr{R}$-beli halmaz. Ekkor $M(B) = M(A) + [M(C) + D(A, C) + D(C, A)]$, ami már bizonyítja az első állítást. Tartsuk meg jelöléseinket, és vezessük be $G = F - E$, $\mathscr{R}$-beli halmazt. Fennáll, hogy $D(B, F) = D(A, E) + [D(A, G) + D(C, E) + D(C, G)]$, ami kiadja a bizonyítandó második felét is. □

Definíció 8. *A $\mathscr{P}$ félgyűrűhöz szokásos módon kapcsolt (M, D) nemnegatív függvénypárról azt mondjuk, hogy σ-szupervágásaddíció, ha*

$$M(\emptyset) = 0,$$

$$\textit{minden } X \in \mathscr{P}\textit{-re } D(X, X) = 0,$$

továbbá bármely esetben, amikor értelmes az alábbi kifejezés, egyben az is teljesül, hogy ha I megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz és $A = \uplus_{i\in I} A_i$, akkor

$$M(A) \geq \sum_{i\in I} M(A_i) + \sum_{(i,j)\in(I\times I)^*} D(A_i, A_j).$$

Legyen J megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz, ekkor ha $A \cap B = \emptyset$ és $B = \uplus_{j\in J} B_j$, akkor

$$D(A,B) \geq \sum_{(i,j)\in I\times J} D(A_i, B_j),$$

amennyiben az egyenlőtlenség mindkét oldala értelmes.

Definíció 9. *A $\mathscr{P}$ félgyűrűhöz szokásos módon kapcsolt (M, D) nemnegatív függvénypárról azt mondjuk, hogy σ-szubvágásaddíció, ha*

$$M(\emptyset) = 0,$$

$$\text{minden } X \in \mathscr{P}\text{-re } D(X,X) = 0,$$

továbbá bármely esetben, ha I megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz és $A \subseteq \uplus_{i\in I} A_i$, ahol $A_i \in \mathscr{R}$, akkor

$$M(A) \leq \sum_{i\in I} M(A_i) + \sum_{(i,j)\in(I\times I)^*} D(A_i, A_j).$$

Legyen továbbá J megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz, ekkor ha $A \cap B = \emptyset$, $B \subseteq \uplus_{j\in J} B_j$, ahol $B_j \in \mathscr{R}$ és minden $i \in I$, $j \in J$ mellett $A_i \cap B_j = \emptyset$, akkor

$$D(A,B) \leq \sum_{(i,j)\in I\times J} D(A_i, B_j).$$

Definíció 10. *A $\mathscr{P}$ félgyűrűhöz szokásos módon kapcsolt (M, D) nemnegatív függvénypárról azt mondjuk, hogy vágásmérték, ha*

$$M(\emptyset) = 0,$$

$$\text{minden } X \in \mathscr{P}\text{-re } D(X,X) = 0,$$

továbbá bármely esetben, ha I legfeljebb megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz és $A = \uplus_{i\in I} A_i$, ahol $A, A_i \in \mathscr{R}$, akkor

$$M(A) = \sum_{i\in I} M(A_i) + \sum_{(i,j)\in I\times I} D(A_i, A_j).$$

Legyen továbbá J szintén legfeljebb megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz, ekkor ha $A \cap B = \emptyset$, $B \subseteq \uplus_{j\in J} B_j$, ahol $B, B_j \in \mathscr{R}$ akkor

$$D(A, B) = \sum_{(i,j)\in I\times J} D(A_i, B_j).$$

Lemma 2. *Ha adott egy $\mathscr{P}$ félgyűrűhöz kapcsolt nemnegatív vágásaddíció, akkor az egyben σ-szupervágásadditív is.*

Bizonyítás. Vegyük I-nek tetszőleges véges T részhalmazát. Terjesszük ki a vágásaddíciónkat a generált gyűrűre. A monotonitás miatt $M(\uplus_{t\in T} A_t) \leq M(A)$ ugyanakkor $M(\uplus_{t\in T} A_t) = \sum_{t\in T} M(A_t) + \sum_{(t,s)\in(T\times T)^*} D(A_t, A_s)$. Tehát ilyenek szuprémuma sem nőheti túl $M(A)$-t. Vegyük I-nek és J-nek tetszőleges véges T illetve V részhalmazát. A monotonitás miatt $D(\uplus_{t\in T} A_t, \uplus_{v\in V} B_v) \leq D(A, B)$, ugyanakkor $D(\uplus_{t\in T} A_t, \uplus_{v\in V} B_v) = \sum_{(t,v)\in T\times V} D(A_t, B_v)$. Tehát ilyenek szuprémuma sem nőheti túl $D(A, B)$-t.

□

Tétel 9 (Vágásmérték gyűrűre való elemi kiterjesztése). *Legyen adva egy félgyűrűhöz kapcsolt vágásmérték. Ekkor ez egyértelműen terjeszthető ki a generált gyűrűre a vágásmérték tulajdonság megtartásával.*

Bizonyítás. A bizonyítás szó szerint a Vágásaddíció gyűrűre való kiterjesztési tételének bizonyítása, azzal a különbséggel, hogy az indexhalmazokat le kell cserélni legfeljebb megszámlálhatóan végtelen számosságú halmazokra, másrészt kihasználni az összegzések felcserélésénél a nemnegativitást. □

Tétel 10 (A vágásmérték σ-szubvágásadditív). *Legyen adva egy $\mathscr{P}$ félgyűrűhöz kapcsolt (M, D) vágásmérték, ekkor ez egyben a félgyűrűhöz kapcsolt σ-szubvágásaddíció.*

Bizonyítás. Legyen $A \in \mathscr{P}$ egy tetszőleges halmaz, I egy legfeljebb megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz, $A_i \in \mathscr{P}$, $i \in I$ diszjunkt rendszer, továbbá $A \subseteq \uplus_{i\in I} A_i$. Legyen $B_i := A \cap A_i$, $A = \uplus_{i\in I} B_i$. A vágásmérték tulajdonságából

$$M(A) = \sum_{i\in I} M(B_i) + \sum_{(i,j)\in(I\times I)^*} D(B_i, B_j).$$

Használjuk ki a monotonitás tulajdonságot úgy, hogy $B_i \subseteq A_i$, s nyerjük a bizonyítandó állítás egyik felét. A megmaradt rész belátásához vegyünk $A, B \in \mathscr{P}$ tetszőleges, de egymástól diszjunkt halmazokat. Legyen I, J két legfeljebb megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz. Legyenek adva az $\{A_i : i \in I\}$ és a $\{B_j : j \in J\}$ halmazrendszerek, ahol a két halmazrendszerből akárhogyan is veszünk két példányt (esetleg mindkettőt ugyanabból), a kapott halmazok diszjunktak lesznek. Feltesszük azt is, hogy a halmazrendszerek elemei mind $\mathscr{P}$-ből valók. Legyen $X_i := A \cap A_i$ és $Y_j := B \cap B_j$. Ekkor $A = \uplus_{i\in I} X_i$, $B = \uplus_{i\in I} Y_i$. A vágásmérték tulajdonságból

$$D(A, B) = \sum_{(i,j)\in(I\times J)} D(X_i, Y_j),$$

majd használjuk ki a monotonitás tulajdonságot úgy, hogy $X_i \subseteq A_i$, $Y_j \subseteq B_j$, s nyerjük a bizonyítandó állítás második felét.

$\square$

Felmerülhet az a kérdés, hogy honnan lehet előteremteni félgyűrűn értelmezett vágásmértéket, és ami még fontosabb nem triviálisat. A fejezet elején a Példák 1. alatt felsoroltam négy példát, arra vonatkozólag, hogy honnan teremtsünk elő vágásaddíciót. A 3. és 4. példa a végesség miatt egyben példa vágásmértékre is. Szerepelt a vágásaddíció és addíció félszorzata című 7. Tétel, melynek bizonyításában, az összegzési indexekről csupán annyit követelünk meg, hogy legfeljebb megszámlálható számosságú. Ha nemnegatív vágásaddícóra és egy félgyűrű feletti mértékre alkalmazzuk e tételt azt kapjuk, hogy a félszorzat egy félgyűrűn értelmezett vágásmérték. A 3. példából és egy tetszőleges félgyűrűn értelmezett mértékből tehát legyárthatunk egy nemtriviális vágásmértéket a szorzat félgyűrűn.

Példa 1. *Tekintsük az* $\{1,2,3\}$ *alaphalmazon vett teljes* 3 *csúcsú gráfot, s tekintsük az általa meghatározott vágásmértéket. Vegyük még a valós számegyenes Lebesgue mérhető halmazain a Lebesgue mértéket. A kettő félszorzatát véve, kapunk egy* (M,D) *vágásmértéket. Ez a vágásmérték sem olyan szempontból nem triviális, hogy a munkánk elején felsorolt példabeli lenne, sem úgy, hogy van amikor megfelelő halmaz felbontása során végtelen sok nem nulla érték szerepel. Valóban, legyen* $A := \{1,2\},\ C := \{3\}$. *Legyen minden* k *egészre* $B_k := [2k-1, 2k+1),\ D_k := [2k, 2k+2)$ *Tekintsük az* $\{A \times B_k\}$ $\{C \times D_k\}$ *halmazrendszereket. Ekkor*

$$D(\uplus_k A \times B_k, \uplus_j C \times D_j) = \sum_{(k,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} D(A \times B_k, C \times D_j)$$

egy nemtriviális felbontás, továbbá ha $M((\uplus_k A \times B_k) \uplus (\uplus_j C \times D_j))$ *formulát kifejtük a pontosságnak megfelelően, akkor szintén egy nemtriviális felbontást kapunk.*

Megjegyzés 1. *Az előző példában egy gráfon vett vágásmértéket és egy* σ*-algebrán vett mértéket kombináltunk. Vegyük észre, hogy a gráf pontjainak végessége miatt ekkor a szorzatban nem csupán egy félgyűrűt, hanem egy általa generált* σ*-algebrára kiterjeszthető vágásmértéket kapunk, ugyanis a félgyűrű által generált gyűrű lesz a* σ*-algebra vagyis a végeredményként kaphatunk akár egy* σ*-algebrához kapcsolt vágásmértéket is.*

Példa vágásmértékre 1. *Az 1.2.példánk vágásaddícióra egyben vágásmérték*

Bizonyítás. Tartsuk meg az 1.2.példa jelöléseit. $D(X,X) = 0$ definíció szerint teljesül minden $X \in \mathscr{S}\mathscr{A}$ mellett. Legyen most I egy legfeljebb megszámlálható számosságú indexhalmaz, és legyenek adva $A, A_i \in \mathscr{S}\mathscr{A}$ $(i \in I)$ halmazok, úgy, hogy $A = \uplus_{i\in I} A_i$. Ekkor $M(A) = \mu(A \times A) = \mu(\uplus_{i\in I} A_i \times \uplus_{i\in I} A_i) = \sum_{(i,j)\in I\times I} \mu(A_i \times A_j) = \sum_{i\in I} \mu(A_i \times A_i) + \sum_{(i,j)\in(I\times I)^*} \mu(A_i \times A_j) = \sum_{i\in I} M(A_i) + \sum_{(i,j)\in I\times I} D(A_i, A_j)$.

Legyen most I és J két legfeljebb megszámlálható számosságú indexhalmaz, és legyenek adva az $A, A_i \in \mathscr{S}\mathscr{A}$ $(i \in I)$ és a $B, B_j \in \mathscr{S}\mathscr{A}$ $(j \in J)$ halmazok úgy, hogy $A \cap B = \emptyset$ és $A = \uplus_{i \in I} A_i$, $B = \uplus_{j \in J} B_j$. Ekkor $D(A, B) = \mu(A \times B) = \mu(\uplus_{i \in I} A_i, \uplus_{j \in J} B_j) = \sum_{(i,j) \in (I \times J)} \mu(A_i \times B_j) = \sum_{(i,j) \in (I \times J)} D(A_i, B_j)$, s ezzel beláttuk, a bizonyítandó állítást. $\square$

Gyenge N-integrálok

Már sikerült megismernünk a félszorzat konstrukciót. Ennek alapján először a Riemann-integrálhoz hasonló konstrukciót szeretnénk kitalálni. Az egyváltozós Riemann-integrálnál szükségünk volt egy közönséges típusú mértékre a számegyenesen. Keresnünk kell ezért a számegyenesen egy közönséges vágásmértéket. Ez a vágásmérték nem lesz más, mint a kétdimenziós Lebesgue mérték által definiált vágásmérték úgy, ahogy ezt a 2. példánkban bemutattuk. A Riemann-integrálnál geometriai szemlélet kapcsolta össze az integrálás fogalmát, a függvény görbéhez rajzolt téglalapos közelítéssel. Ugyanis az integrált közelítő téglalaprendszerek előjeles összterületével közelítettük. Most is a függvény görbe által meghatározott síkidomot közelítjük téglalapok kvázidiszjunkt uniójával. Ezután a téglalapok unióját tekintjük, aminek már ki tudjuk számolni az előjeles vágásmértékét. Majd vesszük az így kapott értékek limeszét, ha lehet, egyre finomodó felbontás esetén. A Riemann-integrál analógját gyenge N-integrálnak nevezzük. Előbb azonban bevezetünk egy kétváltozós függvényt.

Definíció 1. *Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ valós számokra jelölje $a \triangle b$ a nemnagyobb abszolútértékűt, ha a két szám előjele megegyezik, és 0-t, ha a két szám ellenkező előjelű, vagy egyikük nulla.*

Most már rátérhetünk a gyenge N-integrálközelítő összeg definíciójára.

Definíció 2. *Legyen f egyváltozós függvény, $[a, b] \subseteq Dom(f)$, Φ az $[a, b]$ intervallumnak egy felosztása, az $x_0 = a$, $x_n = b, x_i < x_{i+1}$ osztópontokkal, és legyen minden szóban forgó i-re $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Az f függvénynek a ϕ felosztáshoz és a ξ_i helyekhez tartozó N-közelítő összegén a*

$$\sigma = \sum_{(i,j) \in N_n \times N_n} (f(\xi_i) \triangle f(\xi_j))(x_i - x_{i-1})(x_j - x_{j-1})$$

összeget értjük.

Definíció 3. *Legyen f egyváltozós függvény, $[a, b] \subseteq Dom(f)$. Az f integrandus gyenge N-integrálja az $[a, b]$ intervallumon az $I(f)$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan*

$\delta > 0$, hogy az előző definíció jelölésével

$$|\sigma - I(f)| < \varepsilon,$$

valahányszor σ egy δ-nál finomabb Φ felosztáshoz tartozik.

Amint látni fogjuk, nem igaz, hogy minden $[a, b]$-ben értelmezett f függvényhez létezzen egy fenti $I(f)$ szám; így az előző definíciót egészíti ki az alábbi.

Definíció 4. *Az egyváltozós f függvényt gyengén N-integrálhatónak mondjuk az $[a, b]$ intervallumban, ha $[a, b] \subseteq Dom(f)$, és létezik $[a, b]$-ben az f gyenge N-integrálja.*

Például bármely c állandó gyengén N-integrálható bármely $[a, b]$ intervallumban, hiszen tetszőleges felosztás és ξ_i kiszemelt helyek mellett

$$\sigma = \sum_{(i,j)\in N_n\times N_n} (c \bigtriangleup c)(x_i - x_{i-1})(x_j - x_{j-1}) = \sum_{(i,j)\in N_n\times N_n} c(x_i - x_{i-1})(x_j - x_{j-1}) =$$

$$= c(\sum_{i\in N_n} (x_i - x_{i-1}))^2 = c(b - a)^2,$$

s így $I = c(b-a)^2$ megfelel a fenti definíció feltételeinek. Ebből levonhatunk két egyszerű következtetést, egyrészt nem a Riemann-integrált kaptuk vissza, másrészt a gyenge N-integrálás nem lineáris.

Ha átvesszük a Riemann-integrál elméletéből a végtelenül finomodó felosztás sorozat fogalmát, akkor szó szerint átvehetjük az alábbi tétel bizonyítását:

Tétel 1. *Legyen $[a, b] \subseteq Dom(f)$. Az f függvény $[a, b]$-beli integrálja pontosan akkor $I(f)$, ha $\sigma_k \to I(f)$, valahányszor (Φ_k) végtelenül finomodó felosztássorozat, σ_k pedig f-nek egy Φ_k-hoz tartozó közelítő összege.*

Ezek alapján példát tudunk mondani olyan függvényre, ami egyetlen $[a, b]$, $a < b$ intervallumban sem gyengén N-integrálható. Ilyen függvény például a Dirichlet függvény, mely 0-t vesz fel a racionális pontokban és 1-et az irracionális helyeken. Hiszen bármely felosztáshoz lehet olyan kiszemelt helyeket választani, hogy mindegyik helyen a függvény

0 legyen, és olyat is, hogy mindegyik helyen 1 legyen. Az első esetben a közelítő összeg 0, míg a másodikban $(b-a)^2$, így nincsen olyan I szám, melyhez (σ_k) konvergál, valahányszor σ_k egy végtelenül finomodó felosztássorozat k. tagjához tartozik.

Az előző tétel alapján kimondhatjuk az alábbi tételt, figyelembe véve, hogy a számsorozat határértéke egyértelmű.

Tétel 2. *Ha f gyengén N-integrálható $[a,b]$-ben, akkor N-integrálja egyértelműen meghatározott.*

Jelölés 1. *Az f függvény $[a,b]$-n vett gyenge N-integráljának jelölésére az*

$$I(f) = w_N \int_a^b f(x)dx$$

szimbólumot választjuk.

Fent példát láttunk nem gyengén N-integrálható függvényre. További például szolgálhat bármely nem korlátos függvény.

Tétel 3. *Ha f gyengén N-integrálható $[a,b]$-ben, akkor itt korlátos is.*

Bizonyítás. Legyen $I(f) = w_N \int_a^b f(x)dx$ és $\varepsilon = 1$-hez legyen $\delta > 0$ úgy megválasztva, hogy $[a,b]$-nek tetszőleges δ-nál finomabb felosztása esetén a fenti jelöléssel vett σ összeg legalább ε-nyira közelítse meg I-t. Legyen Φ $[a,b]$-nek egy δ-nál finomabb felosztása. A felosztás osztópontjai legyenek x_i-k, ahol $i \in N_n$. Legyen most $j \in N_n$ rögzített. Rögzítsünk minden $i = j$ kivételével egy-egy $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ helyet, ξ_j-t pedig változtassuk $[x_{j-1}, x_j]$-ben. Ekkor a

$$\sigma = \sum_{(i,k)\in N_n\times N_n} (f(\xi_i) \bigtriangleup f(\xi_k))(x_i - x_{i-1})(x_k - x_{k-1})$$

összeg állandóan eleget tesz a $|\sigma - I(f)| < 1$ egyenlőtlenségnek, azaz σ korlátos, és σ tagjai legfeljebb egy -az $f(\xi_j) \bigtriangleup f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j-1})$- kivételével, korlátosak. Ebből következik, hogy $f(\xi_j) = \frac{1}{x_j - x_{j-1}}(\sigma - \sum_{(i,k)\in(N_n\times N_n)-\{(j,j)\}})$ korlátos. Eszerint f korlátos a Φ-hez tartozó részintervallumok mindegyikén, s akkor $[a,b]$-ben is. $\square$

E fenti tételre való tekintettel a gyengén N-integrálható függvények elméletében nem jelenti az általánosság megszorítását, ha eleve csak korlátos függvényekkel foglalkozunk egy rögzített $[a, b]$ intervallum mellett.

Korlátos függvényekre szorítkozva mód nyílik arra, hogy a gyenge N-integrálnak újabb, az eredeti definícióhoz képest több előnyt nyújtó jellemzését adjuk meg. Ehhez először további elnevezéseket kell bevezetnünk.

Definíció 1. *Legyen f az $[a, b]$ intervallumban korlátos függvény.*

$$\Phi = \{[x_{i-1}, x_i] : i \in N_n\}$$

$[a, b]$-nek egy felosztása a szokásos

$$x_0 = a,\ x_n = b,\ x_{i-1} < x_i (i \in N_n)$$

jelölésekkel, és

$$m_i = inf\ f[[x_{i-1}, x_i]],$$

$$M_i = sup\ f[[x_{i-1}, x_i]].$$

Ekkor az

$$s = \sum_{(i,j) \in N_n \times N_n} (m_i \triangle m_j)(x_i - x_{i-1})(x_j - x_{j-1})$$

összeget a Φ felosztáshoz tartozó alsó összegnek, az

$$S = \sum_{(i,j) \in N_n \times N_n} (M_i \triangle M_j)(x_i - x_{i-1})(x_j - x_{j-1})$$

összeget pedig a a Φ felosztáshoz tartozó felső összegnek nevezzük.

Megjegyezzük, hogy míg folytonos esetben mindig, addig a nem folytonos esetben nem feltétlenül lesz az alsó, illetve felső összeg egyben közelítő összeg is.

Valamivel lazább kapcsolat azonban mindenképpen megadható az adott felosztáshoz tartozó alsó felső és közelítő összegek között.

Tétel 4. *Legyen f korlátos $[a,b]$-ben Φ, $[a,b]$ egy felosztása, s és S pedig a Φ-hez tartozó alsó és felső összeg. Ekkor a Φ-hez tartozó összes közelítő összegek halmazának alsó, illetve felső határa s illetve S.*

E tétel bizonyításához szükségünk lesz két könnyen bizonyítható állításra.

Állítás 1. *Ha $x, a, b \in \mathbb{R}$ és $x \leq a$, akkor $x \bigtriangleup b \leq a \bigtriangleup b$.*

Következmény 1. *Ha $y, a, b \in \mathbb{R}$ és $y \geq a$, akkor $y \bigtriangleup b \geq a \bigtriangleup b$.*

Következmény 2. *Ha $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, és $a \leq x$, $b \leq y$, akkor $a \bigtriangleup b \leq x \bigtriangleup y$.*

Állítás 2. *Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, akkor $(a-\varepsilon) \bigtriangleup b \geq (a \bigtriangleup b) - \varepsilon$.*

Következmény 3. *Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, akkor $(a+\varepsilon) \bigtriangleup b \leq (a \bigtriangleup b) + \varepsilon$.*

Tétel 4. bizonyítása. A szokott jelölésekkel tetszőlegesen választva a ξ_i kiszemelt helyeket, nyilván

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$$

minden i-re, így felhasználva 2.Következményt kapjuk, hogy

$$s = \sum_{(i,j)\in N_n \times N_n} (m_i \bigtriangleup m_j)(x_i - x_{i-1})(x_j - x_{j-1}) \leq$$

$$\leq \sigma = \sum_{(i,j)\in N_n \times N_n} (f(\xi_i) \bigtriangleup f(\xi_j))(x_i - x_{i-1})(x_j - x_{j-1}) \leq$$

$$\leq S = \sum_{(i,j)\in N_n \times N_n} (M_i \bigtriangleup M_j)(x_i - x_{i-1})(x_j - x_{j-1}).$$

Másrészt tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz választhatjuk a $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ helyeket úgy, hogy

$$f(\xi_i) > M_i - \frac{\varepsilon}{(b-a)^2}$$

legyen. Ekkor kétszer felhasználva 2.Állítást kapjuk, hogy

$$\sigma = \sum_{(i,j)\in N_n \times N_n} (f(\xi_i) \bigtriangleup f(\xi_j))(x_i - x_{i-1})(x_j - x_{j-1}) \geq$$

$$\geq \sum_{(i,j)\in N_n\times N_n}((M_i-\frac{\varepsilon}{(b-a)^2})\bigtriangleup(M_j-\frac{\varepsilon}{(b-a)^2}))(x_i-x_{i-1})(x_j-x_{j-1})\geq$$

$$\geq \sum_{(i,j)\in N_n\times N_n}(M_i\bigtriangleup M_j)(x_i-x_{i-1})(x_j-x_{j-1})-2\frac{\varepsilon}{(b-a)^2}\sum_{(i,j)\in N_n\times N_n}(x_i-x_{i-1})(x_j-x_{j-1})\geq$$

$$\geq S-2\varepsilon.$$

Ebből látszik, hogy a σ közelítő összegek felső határa S, és ugyanígy igazolható, hogy alsó határuk s. □

Az alábbi tétel értelme az, hogy be tudjuk látni, hogy korlátos függvény esetén létezik az alsó illetve felső összegeknek határértéke.

Tétel 5. *Legyen f korlátos $[a,b]$-ben Φ és Φ', $[a,b]$-nek két felosztása, a megfelelő összegek s, s', illetve S, S'. Ha Φ' finomítása Φ-nek, akkor*

$$s\leq s'\leq S'\leq S.$$

Bizonyítás. Az $s'\leq S'$ egyenlőtlenség evidens. Az $s\leq s'$ egyenlőtlenség igazolására nyilván elég azt az esetet tekinteni, amikor Φ' úgy áll elő, hogy Φ osztópontjaihoz egyetlen új osztópontot veszünk hozzá; mondjuk legyenek a Φ felosztáshoz tartozó osztópontok x_i-k, ahol $i\in N_n$, továbbá Φ' új osztópontja $y\in[x_{i-1},x_i]$. Legyenek $m=inf\ f([x_{i-1},x_i])$, $m_1=inf\ f([x_{i-1},y])$, $m_2=inf\ f([y,x_i])$, $k_j=inf\ f([x_{j-1},x_j])$, $(j\in N_n)$ a megfelelő infimumok.

$$s'=\sum_{(j,l)\in(N_n-\{i\}\times N_n-\{i\})}(k_j\bigtriangleup k_l)(x_j-x_{j-1})(x_l-x_{l-1})+$$

$$+2\sum_{j\in N_n-\{i\}}(k_j\bigtriangleup m_1)(x_j-x_{j-1})(y-x_{i-1})+2\sum_{j\in N_n-\{i\}}(k_j\bigtriangleup m_2)(x_j-x_{j-1})(x_i-y)+$$

$$+2(m_1\bigtriangleup m_2)(y-x_{i-1})(x_i-y)+$$

$$+(m_1\bigtriangleup m_1)(x_i-y)(x_i-y)+(m_2\bigtriangleup m_2)(y-x_{i-1})(y-x_{i-1})\geq$$

$$\geq \sum_{(j,l)\in(N_n-\{i\}\times N_n-\{i\})}(k_j\bigtriangleup k_l)(x_j-x_{j-1})(x_l-x_{l-1})+$$

$$+2\sum_{j\in N_n-\{i\}}(k_j \bigtriangleup m)(x_j-x_{j-1})(y-x_{i-1})+2\sum_{j\in N_n-\{i\}}(k_j \bigtriangleup m)(x_j-x_{j-1})(x_i-y)+$$

$$+2(m \bigtriangleup m)(y-x_{i-1})(x_i-y)+$$

$$+(m \bigtriangleup m)(x_i-y)(x_i-y)+(m \bigtriangleup m)(y-x_{i-1})(y-x_{i-1})=s,$$

s így valóban $s \leq s'$, és ugyanígy igazolható $S \geq S'$.

□

Tétel 6. *Legyen f folytonos az [a,b] intervallumon. Ekkor f gyengén N-integrálható.*

Bizonyítás. A 4.és 5.Tétel szerint elég belátni azt, hogy ha az intervallum tetszőleges Φ_k, végtelenül finomodó felosztássorozatát vesszük, akkor az ahhoz tartozó alsó illetve felső összegek különbsége tart nullához, hiszen a függvény folytonos lévén, egyben korlátos is, ezért könnyen látható módon az alsó és felső összegek korlátosak. Tudjuk azt is, hogy adott végtelenül finomodó felosztássorozat mellett, az alsó és felső összegek sorozata monoton, tehát létezik határértékük. Ezért ha az alsó és felső közelítő összegek különbségének határértéke nulla, akkor tetszőleges Φ_k esetén a felső és alsó összegeknek ugyanaz a határértéke. Az 5.Tételt és a megszokott közös finomítás gondolatát felhasználva nem nehéz belátni, hogy ez a határérték független a Φ_k választásától. A 4.Tétel szerint ekkor létezik a gyenge N-integrál. Szokásos jelöléseinket megtartva vegyünk egy Φ_k felosztást, de az f egyenletes folytonossága szerint már olyan finomat, hogy a felosztáshoz tartozó kis intervallumokban f minimuma és maximuma legfeljebb $\varepsilon > 0$-nal térjen el egymástól. Az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumban legyen f minimuma m_i, maximuma M_i. Ekkor

$$s_k=\sum_{(i,j)\in N_n\times N_n}(m_i \bigtriangleup m_j)(x_i-x_{i-1})(x_j-x_{j-1}) \leq$$

$$\sum_{(i,j)\in N_n\times N_n}(M_i \bigtriangleup M_j)(x_i-x_{i-1})(x_j-x_{j-1})=S_k \leq$$

$$\leq \sum_{(i,j)\in N_n\times N_n}(m_i \bigtriangleup m_j)(x_i-x_{i-1})(x_j-x_{j-1})+\sum_{(i,j)\in N_n\times N_n}2\varepsilon(x_i-x_{i-1})(x_j-x_{j-1}) \leq$$

$$\leq s_k+2\varepsilon(b-a)^2,$$

amiből következik, hogy $lim_{k\to\infty}S_k - s_k = 0$, s a fentiek miatt ezért készen vagyunk. $\square$

Irodalomjegyzék

[B] Buczolich Zoltán: A Discrete version of Brouwer's theorem on the invariance of domain, kézirat.

[C] Czách László: Mértékelmélet, gépelt jegyzet.

[Cs] Császár Ákos: Valós analízis I-II. Nemzeti tankönyvkiadó, Budapest.

[E] C. H. Edwards Jr: Advanced Calculus of several Variables.

[H] Allen Hatcher: Algebraic topology. Cambridge University Press, 2002.

[HW] Witold Hurewicz, Henry Wallmann: Dimension Theory. Princeton, New Jersey. Princeton University Press, 1941.

[N] Naszódi Gergely: $\mathbb{R}^m$ és $\mathbb{R}^n$ terek analíziseli különbségei, TDK dolgozat.