EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNY EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Az IBNR számítás sajátosságai az életbiztosításban

DIPLOMAMUNKA

Készítette: Győri Nikolett
matematikus szak

Témavezető: Korándi Márta

Budapest, 2005

Kivonat

A dolgozat az IBNR tartalék számításának témakörével foglalkozik, különös tekintettel az IBNR és az életbiztosítási díjtartalék kapcsolatára. Az IBNR tartalék számításának módja máig nyitott területe az aktuáriusi munkának. Számos különböző módszer ismert rá, amelyeket ismertetni fogok, de tökéletes megoldás a mai napig nem született rá.

Célom egy olyan módszer kidolgozása, ami a lehető legjobban alkalmazható egy speciális esetben: életbiztosítási IBNR számításakor. Életbiztosítások esetében nem lehet ugyanazt a módszert alkalmazni, mint a nem-életbiztosítási ágakban. Ennek az az oka, hogy a megszokott módon számított IBNR tartalék és az életbiztosítási díjtartalék átfedésben van egymással. Mindezek ellenére az életbiztosítási IBNR számítása is hasonlít a nem-életbiztosítási IBNR számításához, ezért szükség van a hagyományos IBNR-meghatározó technikák pontos ismeretére is.

Ennek megfelelően a dolgozatban először az IBNR számítás feladatát és a klasszikus módszereket ismertetetem. Ezután összevetem a funkcióját az életbiztosítási díjtartalékkal. Végül pedig ismertetem azt a technikát, amivel életbiztosítási esetekben is lehetséges az IBNR tartalék képzése.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Egy biztosító életében két alapvető feladat létezik, ami egy matematikust igazán érdekelhet: a biztosítási díjak és a biztosítási tartalékok számítása. A biztosítási díjat egy termék élete során csak egyszer kell kiszámítani. Ezzel szemben tartalékot minden év végén képeznünk kell, méghozzá nem is egy félét. Ezek közül a tartalék fajták közül kettő áll a dolgozat középpontjában: az IBNR tartalék és az életbiztosítási díjtartalék.

Emellett persze számos más tartalék típusról is szót ejtek a dolgozat folyamán. Minden biztosítónak képeznie kell tartalékokat: „A biztonságos üzletmenet érdekében a biztosítónak a mérleg fordulónapján fennálló, várható kötelezettségei teljesítésére, a károk ingadozására, valamint a várható biztosítási veszteségekre biztosítástechnikai tartalékokat kell képeznie” (2003. évi LX. törvény a biztosítókról és a biztosítási tevékenységről). Ezek a tartalékok jelentik annak biztosítékát, hogy a jövőben képes legyen szolgáltatni, vagyis kifizetni a biztosítottjainak a kárát, ha az bekövetkezik.

Nézzük most meg kicsit közelebbről a dolgozat szempontjából legfontosabb két tartalék fajtát!

1.1. Az IBNR tartalék

Az IBNR tartalék számítása egy igen érdekes területe a biztosítási matematikának, ugyanis alig néhány adatból – amelyek között elavultak is lehetnek – kell becslést végeznünk egy hasonló jövőbeli értékre. Rengeteg különböző módszer ismert ennek kiszámítására, amik közül sokat ismertetni is fogok. Természetesen a gyakorlat a jól számolható, lehetőleg számítógépesen programozható technikákat részesíti előnyben, ezért ezek vannak többségben.

Maga az IBNR szó egy angol kifejezés rövidítése: "Incurred But Not Reported", vagyis "bekövetkezett, de nem bejelentett". Tehát az IBNR tartalékot abból a célból képezik a biztosítók, hogy fedezni tudják a későn bejelentett károkat. Ez azt jelenti, hogy ha egy kár bekövetkezik mondjuk 2004 december 28-án, de csak 2005 január 5-

én jelentik be a biztosítónak, akkor 2005-ben még 2004. évi kárt kell a biztosítónak kifizetnie. Ezért a mérlegforduló napján – ami december 31. – a biztosító tartalékot képez azokra a károkra, amik már bekövetkeztek, de még nem szerzett róla tudomást: ez az IBNR tartalék.

Vannak olyan biztosítástípusok, amikor ez különös jelentősséggel bír. Ilyenek például a felelősségbiztosítások, amikor a kár sokszor csak évekkel később derül ki. Ha például egy építkezés során elkövetett hiba miatt 20 év múlva leomlik egy irodaház, azt az építtető felelősségbiztosítója az IBNR tartalékából fizeti ki – legalábbis elvileg.

1.2. Az életbiztosítási díjtartalék

Az életbiztosítási díjtartalék egy sokkal nyilvánvalóbb tartalék típus, mint az IBNR. Egy életbiztosítás során jellemzően az ügyfél bizonyos ideig biztosítási díjat fizet a biztosítónak, aki aztán egy előre meghatározott összeget fizet a kedvezményezettnek a biztosított halálakor.[1] Tehát a biztosítási szolgáltatás díjának kifizetése elválik a szolgáltatás teljesítésétől – ellentétben pl. egy szállodai szolgáltatással, amit akkor fizetek ki, amikor igénybe veszem. Ezért a biztosítónak pénzügyileg kapcsolatot kell teremteni a díjbevételei, és a kötelezettségei között. Ezt a célt szolgálja a díjtartalék.

Az életbiztosítási díjtartalékot tehát oly módon számítjuk ki, hogy a jövőben várható kiadásaink és várható bevételeink különbségével azonos legyen. Így a biztosító nem költheti el a díjbevételeit egyből, amikor megkapja, hanem félre kell tennie egy részét annak érdekében, hogy később – várhatóan – fizető képes legyen, ha a biztosítási esemény bekövetkezik.

1.3. Általában a biztosítási tartalékokról

Távolabbra kitekintve azt láthatjuk, hogy a biztosítók számtalan célból képeznek biztosítástechnikai tartalékokat, amik között vannak komolyabb matematikai apparátust igénylők és gyakorlatiasabb jellegűek egyaránt. [1]

- A **meg nem szolgált díjak tartaléka** azokból az előírt díjakból áll, amit hamarabb szedtek be, mint amikorra a biztosítás szól pl. amiatt hogy a díjbeszedés nem folytonosan, hanem havonta egy összegben történik. Vagyis ha minden hónap tizenötödikén szedi be a biztosító a díjat az ügyféltől, akkor december 31-én a december 15-én beszedett díjnak arányos részét – jelen esetben felét – el kell tartalékolnia a következő évre.

- A **matematikai tartalékok** körébe 4 típus tartozik: az **élet- és betegségbiztosítási díjtartalék** és a **felelősség- és járadékbiztosítási járadéktartalék**. Ezeket

[1] A dolgozatban csak tiszta haláleseti kockázatokkal foglalkozom, elérési esettel nem.

későbbi kifizetés(ek) fedezésére képzik a biztosítók oly módon, hogy a várható nettó ráfordítás jelenértékét teszik tartalékba.

- A **függőkárok tartaléka** a már bekövetkezett, de még ki nem fizetett károk fedezésére szolgál. Két részből áll: Az első a **tételes függőkár tartalék**, amit kárfelmérők minden bejelentett kárra egyesével kiszámítanak. Ezt a tapasztalatok alapján végzik: pl. egy összetört autót megvizsgálva meg tudják becsülni, hogy kb. mekkora kár keletkezhetett benne. A második az **IBNR tartalék**, amit a még be sem jelentett károkra képeznek, ennek értékét statisztikai módszerekkel becsülik meg. Tehát az IBNR a bekövetkezett, de be nem jelentett, a tételes függőkár tartalék pedig a bejelentett, de ki nem fizetett károk tartaléka.

- Az **eredménytől független díjvisszatérítési tartalék** olyan díjvisszatérítéseket fedez, amik a biztosító eredményétől nem, csak az adott szerződés eredményétől függenek. Tipikus példa erre az autóbiztosítások bónusz-málusz rendszere, ahol a díjvissztérítés mértéke attól függ, hogy a biztosított okozott-e balesetet az utóbbi időben.

- Az **eredménytől függő díjvisszatérítési tartalék**ból a biztosító bizonyos összeget visszajuttat a biztosítottaknak, ha a biztosító egy bizonyos szintet meghaladóan nyereséges. Ez leginkább az életbiztosításokra jellemző, ahol a tartalékon elért eredmény egy részét a biztosítónak vissza kell szolgáltatnia a biztosítottaknak.

- A **káringadozási tartalék** és a **nagy károk tartaléka** azt a célt szolgálja, hogy a biztosító felkészüljön a "rossz évekre", pl. egy mezőgazdasági biztosító azokban az években, amikor jó termés van, és ezért nem kell szolgáltatnia, félre tud tenni, hogy az aszályos években fizetni tudjon a biztosítottjainak.

Így áttekintve a főbb tartaléktípusokat láthatjuk, hogy az IBNR tartalék csak egy kis, de igen érdekes szelete a biztosítók által képzett tartalékoknak.

Ha ténylegesen ki akarjuk számítani az IBNR tartalékot, akkor valójában egy statisztikai becslést kell végeznünk. Ennek a becslésnek a legfőbb nehézségét az adja, hogy csak igen szűkös feltevéseink lehetnek a kérdéses valószínűségi változókról.

Nem ismerjük jól az emberek hozzáállását, vagyis hogy miért éppen ennyit késnek a bejelentésekkel, és milyen a késések eloszlása. Kevés a régebbi tapasztalatokból származó információnk is, mert gyakran csak néhány évre visszamenőleg vannak adataink a késői károkról. Tehát könnyen előfordulhat, hogy csak 10-20 db használható "mérési eredményünk" van.

Ezek a nehézségek okozzák azt, hogy máig születnek újabbnál újabb becslések, amik néha csak technikájukban, máskor viszont egész szempontrendszerükben különböznek.

A gyakorlatban ugyanis egyáltalán nem biztos, hogy a statisztikában megszokott, legkisebb szórást produkáló becslést részesítjük előnyben. Ehelyett gyakran előfordul pl. hogy olyan becslést szeretnénk találni, aminél több IBNR tartalékra "biztos" (pontosabban igen nagy valószínűséggel) nem lesz szükség. Ez és más hasonló szempontok a megszokott torzítatlansági, hatásossági követelményeket háttérbe szoríthatják.

Ezért aztán gyakran természetszerű az eltérés a különböző módon számított IBNR tartalékok között. Sőt az eltérő szempontok, eltérő célrendszerek mellett képzett IBNR tartalékok igen nagy különbségei is érthetővé válnak.

2. fejezet

Az IBNR tartalék

Az IBNR tartalékot hasonló szerződésekre, általában biztosítási ágazatokra egyszerre számítjuk. Ezzel ellentétben az életbiztosítási díjtartalékot minden egyes szerződésre külön-külön kell kiszámítani. Ebből adódóan eltérő a két tartalék számításának elve is: az IBNR tartalékot a régebbi adatokból statisztikailag becsüljük, a díjtartalékot viszont egy feltételezett eloszlás alapján határozzuk meg.

Az IBNR tartalék meghatározásához szükséges adatokat természetesen rendszerezni is kell ahhoz, hogy jól tudjuk használni őket. Ez a rendszer az ún. kifutási háromszög, ami a különböző években bekövetkezett, illetve bejelentett károkat tartalmazza. A táblázat (i, j)-edik helyén az i. évben bekövetkezett és éppen az innen számított j. évben bejelentett károk nagysága (vagy néha száma) áll. Ettől a kumulált kifutási háromszög annyiban különbözik, hogy itt a maximum j éven belül bejelentett károk állnak a j. oszlopban.

Tehát láthatjuk, hogy számtalan különböző kifutási háromszöget lehet felírni, de a lényeg nem változik:

1. A sorok jelentik a kár bekövetkeztének évét, az idő föntről lefele telik.

2. Az oszlopok jelentik a kár bejelentésének évét, az idő balról jobbra telik.

3. A táblázat helyein a megfelelő időpontban bekövetkezett és bejelentett károk mennyisége áll.

Különböző módokon mérhetjük a károk mennyiségét: darabra, kifizetett pénzben vagy kárhányadokban (vagyis a kárkifizetéseknek a bekövetkezés évének díjbevételére vonatkozó arányában). A kár bejelentésének éve is jelölheti a pontos évet, vagy a legkésőbbi időpontot egyaránt (éppen ez a különbség a sima és a kumulált kifutási háromszög között).

Még egy változata létezik a kifutási háromszögeknek: ebből már nem csak az IBNR tartalék, hanem az összes függőkár tartalék kinyerhető: Ha az oszlopok most nem a kárbejelentés évét, hanem a kifizetés évét jelölik, akkor a táblázat az IBNR tartalék mellett a tételes függőkár tartalékokat is magában foglalja. Ha ebből bármelyik később ismertetett módszerrel tartalékot képzünk, és ebből levonjuk a tételes függőkár tartalékot, akkor ez is egy becslést ad a szükséges IBNR tartalékra.

A következő két táblázat egy adott biztosító egy biztosítási ágazatára vonatkozó normál és kumulált kifutási háromszögeit tartalmazza. A normál kifutási háromszögben szereplő értékeket mostantól X_i^j-vel, a kumulált értékeket Y_i^j-vel jelölöm.

X_1^1	X_1^2	X_1^3	...	X_1^{k-2}	X_1^{k-1}	X_1^k
X_2^1	X_2^2	X_2^3	...	X_2^{k-2}	X_2^{k-1}	
X_3^1	X_3^2	X_3^3	...	X_3^{k-2}		
...	...	...	...			
X_{k-1}^1	X_{k-1}^2					
X_k^1						

2.1. táblázat. Kifutási háromszög

Y_1^1	Y_1^2	Y_1^3	...	Y_1^{k-2}	Y_1^{k-1}	Y_1^k
Y_2^1	Y_2^2	Y_2^3	...	Y_2^{k-2}	Y_2^{k-1}	
Y_3^1	Y_3^2	Y_3^3	...	Y_3^{k-2}		
...	...	...	...			
Y_{k-1}^1	Y_{k-1}^2					
Y_k^1						

2.2. táblázat. Kumulált kifutási háromszög

Ezeket a táblázatokat persze hosszan lehetne folytatni, és ahogy telik az idő minden érték ki fog derülni. A $k+1$-edik évben azonban éppen az itt jelölt értékeket ismerjük, ezért aztán nekünk most ezekből az értékekből kell becslést adni a táblázat folytatására. Pontosabban csak egyetlen érték érdekel minket: a normál kifutási háromszögben a már megkezdett sorokban levő összes kitöltetlen helyeken szereplő értékek összege:

$$IBNR = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=k-i+2}^{\infty} X_i^j \right)$$

ha éppen a k. évben járunk. Ez éppen az aktuális IBNR tartalék nagyságát adja meg. Ez persze ugyanaz, mint a kumulált kifutási háromszögben

$$IBNR = \lim_{j \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{k} Y_i^j \right) - \sum_{i=1}^{k} Y_i^{k+1-i}$$

Értelemszerűen persze az $1...k$-adik évekhez tartozó összetevőkre is fel lehet bontani az IBNR tartalékot:

$$IBNR_i = \sum_{j=k-i+2}^{\infty} X_i^j = \lim_{j\to\infty} Y_i^j - Y_i^{k+1-i}$$

ahol $IBNR_i$ az i. évben bekövetkezett károkra képzett része az IBNR tartaléknak.

2.1. Az IBNR tartalék kiszámításának gyakorlati eszközei

Legelőször nézzük meg azokat a módszereket, amiket a gyakorlatban is alkalmaznak, mivel könnyen kezelhetőek és gyorsan kiszámíthatóak. Ezek jellemzően a kifutási háromszög adataira támaszkodnak, azok ismeretében gyorsan és könnyen, akár manuálisan is kiszámíthatók. Ezek közé a technikák közé tartozik a jéghegy, a láncszemhányados és a lánc-létra módszer. [1]

Közös jellemzőjük, hogy a kifutási háromszög sorait egy-egy értékkel egészítik ki, ami az abban az évben bekövetkezett, de még mindig be nem jelentett károk valószínű mennyisége. Mivel a rendelkezésre álló adatokat a különböző módszerek különböző képpen használják fel, ezért egészen eltérő eredményeket kaphatunk, ha több metódus segítségével is kiszámítjuk a szükséges IBNR tartalékot.

Szintén hasonlítanak ezek a módszerek abban is, hogy először kiszámítunk a korábbi évekre bizonyos arányokat és ezek segítségével ugyanezeket az arányokat az aktuális évre is becsülni tudjuk. Olyan arányokra van szükségünk, ami megmutatja, hogy a tapasztalatok szerint milyen arányban késnek a bejelentéssel $1, 2, 3 \ldots$ évet.

2.1.1. A jéghegy módszer

Használjuk továbbra is a kárnagyságokat tartalmazó kumulált kifutási háromszög korábbi jelöléseit, és jelöljük Y_i^{k+}-szal az i. év teljes bekövetkezett kárnagyságát (a kifutási háromszögnek k sora és k oszlopa volt). Vagyis $Y_i^{k+} = \lim_{j\to\infty} Y_i^j$. Jelöljük α_i^j-vel $\alpha_i^j = \frac{Y_j^i}{Y_j^{k+}}$-t.

Valójában a táblázatban szereplő évek teljes kárnagyságát fogjuk megbecsülni, ezekből a sorokban szereplő utolsó értéket kivonva az adott évhez tartozó IBNR tartalék becslését kapjuk. Vagyis $IBNR_i = Y_i^{k+} - Y_i^{k+1-i}$ és $IBNR = \sum_{i=1}^{k} IBNR_i$. Ezután a következő számítások szükségesek:

1. A korábbi évek tapasztalatából becslést adunk $\alpha_k^1 = \frac{Y_1^k}{Y_1^{k+}}$-ra. Ha szerencsénk van, akkor ez az érték nagyon közel van 1-hez, vagyis szerencsés esetben elég nagy k-

ra fel tudjuk írni a kifutási háromszöget ahhoz, hogy k évnél többet gyakorlatilag sose késnek a bejelentéssel.

Ehhez a becsléshez olyan évek adatait használjuk fel, amikre már biztos, hogy nem fog további kárbejelentés érkezni, de azért viszonylag friss adatok, tehát relevánsak az idei adatok megbecsléséhez. Tehát a korábbi néhány évre megnézzük, hogy milyen arányban jelentették be k éven belül a károkat.

Ezek közül az arányok közül vagy vesszük egyszerűen a legfrissebbet, vagy az ismert, viszonylag friss adatok valamilyen közepét (tipikusan az átlagot), esetleg a minimumát. A minimumot azért érdemes venni, mert így arra készülünk fel, hogy a tapasztalatainknak megfelelő legnagyobb arányú bejelentés van még hátra, tehát ez a pesszimista szemlélet: felkészülünk a lehető legrosszabbra.

2. α_k^1 becslését ismerve felírhatunk egy becslést Y_1^{k+}-ra: $Y_1^{k+} = \frac{Y_1^k}{\alpha_k^1}$. A többi Y_i^{k+} értéket azonban még nem tudjuk megbecsülni, mert Y_i^k-t nem ismerjük $i > 1$-re. Ezért pl. $i = 2$-re ahhoz, hogy a teljes Y_2^{k+} éves kárnagyságot meg tudjuk becsülni, ahhoz először meg kell becsülnünk $\alpha_{k-1}^2 = \frac{Y_2^{k-1}}{Y_2^{k+}}$-t, mert így már fel tudjuk írni Y_2^{k+}-t is: $Y_2^{k+} = \frac{Y_2^{k-1}}{\alpha_{k-1}^2}$.

3. Az α_{k-1}^2 értéket csak egy féle képpen becsülhetjük meg: $\alpha_{k-1}^1 = \frac{Y_1^{k-1}}{Y_1^{k+}}$-vel. Azonban a későbbi Y_i^{k+}-ok becsléséhez már több adatot is feltudunk használni.

4. Tegyük fel, hogy Y_1^{k+}, ..., Y_{i-1}^{k+} értékeket már megbecsültük, nézzük meg ezek után Y_i^{k+} becslését! Az Y_i^j értékek közül az utolsó, amit ismerünk Y_i^{k+1-i}. Tehát akkor tudnánk megbecsülni Y_i^{k+}-t, ha ismernénk $\alpha_{k+1-i}^i = \frac{Y_i^{k+1-i}}{Y_i^{k+}}$-t. Ekkor ugyanis már fel tudjuk írni a becslést: $Y_i^{k+} = \frac{Y_i^{k+1-i}}{\alpha_{k+1-i}^i}$.

5. Az α_{k+1-i}^i értéket az α_{k+1-i}^1, ..., α_{k+1-i}^{i-1} értékek segítségével becsülhetjük. A jéghegy módszer különböző változatait kapjuk aszerint, hogy egyszerűen az első α_{k+1-i}^1 értékkel becsüljük (ez az eredeti változat), vagy a felsorolt $i-1$ érték valamilyen közepével vagy ezek minimumával – ezzel ismét a legrosszabbra tudunk felkészülni.

Jól látszik, hogy ez a módszer azt feltételezi, hogy az $\frac{Y_i^j}{Y_i^{k+}}$ hányadosok nem függenek i-től, hanem minden évben azonosak. A gyakorlatban persze olyankor is használjuk őket, ha csak gyengén függenek az évtől.

2.1.2. A láncszemhányados módszer

Ez a módszer sok szempontból hasonlít a jéghegy módszerre, viszont itt másik hányadosokat számolunk ki. Most azt tesszük fel, hogy a $\beta_j^i = \frac{Y_i^{j+1}}{Y_i^j}$ hányadosok nem vagy csak gyengén függenek i-től. Természetesen a β_k^i definíciója is hasonló: $\beta_k^i = \frac{Y_i^{k+}}{Y_i^k} = \frac{1}{\alpha_k^i}$. A számítás menete sokban hasonlít a jéghegy módszerhez:

1. Ismét a korábbi évek tapasztalatából adunk egy becslést β_k^1-re, ez – a jéghegy módszerhez hasonlóan – lehet a táblázatban szereplő évek előtti utolsó év hasonló értéke, vagy néhány régebbi érték valamilyen közepe vagy maximuma. Ezután ebből meg tudjuk becsülni Y_1^{k+}-t: $Y_1^{k+} = \beta_k^1 Y_1^k$. De a további Y_i^{k+}-ok ($i > 1$) meghatározásához ismét szükség van további β_x^y értékek ismeretére is.

2. Legelőször is Y_2^{k+} megbecsléséhez szükség van β_{k-1}^2 és β_k^2 ismeretére, mert akkor már $Y_2^{k+} = \beta_k^2\beta_{k-1}^2 Y_2^{k-1}$ formában becslést lehet adni. Ezeket csak egy módon lehet megbecsülni: β_k^2-t ugyanazzal az értékkel becsülöm, mint korábban β_k^1-et, β_{k-1}^2-t pedig β_{k-1}^1-gyel.

3. Tegyük fel most ismét, hogy Y_1^{k+}, ..., Y_{i-1}^{k+} értékeket már sikerült megbecsülni, és most a Y_i^{k+} értékkel próbálkozunk. Mivel az Y_i^j értékek közül $j = k + 1 - i$ a legnagyobb indexű, ezért Y_i^{k+}-t a következő módon tudom becsülni: $Y_i^{k+} = \beta_k^i\beta_{k-1}^i ... \beta_{k+1-i}^i Y_i^{k+1-i}$

   Tehát Y_i^{k+} megbecsléséhez a β_k^i, ..., β_{k+1-i}^i értékek ismerete szükséges. Ezek közül β_k^i-t ugyanazzal az értékkel lehet becsülni, mint amivel β_k^1-t becsültük. $j < k$-ra pedig β_j^i-t a β_j^1, ..., β_j^{k-j} értékek valamilyen közepével vagy a maximumukkal lehet becsülni. (Ismét akkor vesszük a maximumot becslésnek, ha a legrosszabbra akarunk felkészülni.)

4. A szükséges IBNR tartalék nagysága természetesen most is $IBNR = \sum_{i=1}^k IBNR_i$-ként kaphatjuk meg, ahol $IBNR_i = Y_i^{k+} - Y_i^{k+1-i}$.

2.1.3. A lánc-létra módszer

A harmadik módszerünk nem is számít igazán újnak az eddigiekhez képest: a lánc-létra módszer valójában a láncszemhányados módszer egy változata. Úgy kapjuk meg a láncszemhányados módszerből a lánc-létra módszert, ha a β_i^j értékek becslésénél a β_i^1, ..., β_i^{k-i} értékek egy bizonyos súlyozott átlagát használjuk:

$$\beta_i^j = \frac{Y_1^{i+1} + Y_2^{i+1} + ... + Y_{k-i}^{i+1}}{Y_1^i + Y_2^i + ... + Y_{k-i}^i}$$

Ez pedig éppen azonos a β_i^j értékek egy számtani átlagával, mégpedig $a_i^j = Y_j^i$ együtthatókkal:

$$\beta_i^j = \frac{Y_1^i \beta_i^1 + Y_2^i \beta_i^2 + ... + Y_{k-i}^i \beta_i^{k-i}}{Y_1^i + Y_2^i + ... + Y_{k-i}^i}$$

Egyszerűsége miatt ez a legnépszerűbb módszer, de figyelni kell arra, hogy így nem számítjuk ki a β_i^j és α_i^j értékeket, és emiatt előfordulhat, hogy nem veszünk észre valamilyen trendet.

Ugyanis a különböző α_i^j és β_i^j értékek összehasonlítása mutatja meg azt, hogy ezek az arányok tényleg változatlanok-e hosszú távon. Ha pedig ez nem teljesül, akkor a lánc-létra módszer helytelen eredményre vezet, amit viszont nem veszünk észre a számítás során.

2.1.4. Problémák

Mindazzal együtt, hogy a gyakorlatban ezek a legnépszerűbb módszerek, ezek sem tökéletesek. A valóságban a legritkább esetben működik minden olyan szépen, mint ahogy itt le van írva. Hatalmas tévedéseket okozhatnak a kiugró, nagy károk. Vagy akár el is lehetetleníthetik az eddig megismert technikákat az annyira fiatal biztosítási módozatok, ahol még nincs kártapasztalatunk, tehát a kifutási háromszög minden helyén nulla áll – ebből bármelyik eddig ismertetett módszer nulla tartalékot adna eredményül.

Nézzük most meg, hogy mit lehet tenni az ilyen nehézségek felmerülése esetén!

Kiugró értékek

Néha előfordulnak nagy összegű károk is, amiknél igen sokat késnek a bejelentéssel. Ezek tipikusan felelősségbiztosításoknál fordulnak elő: Nézzünk mondjuk egy esetet, ahol egy iskola építésénél felelősségbiztosítást kötnek. Ezután az iskola 10 év múlva összedől, hatalmas anyagi kárt és személyi sérüléseket, akár halált is okozva. Ekkor, ha kiderül, hogy az építkezésnél elkövetett hiba okozta a katasztrófát, akkor az építtető felelősségbiztosítójának kell kifizetnie a kárt. Vagyis hirtelen egy hatalmas összegű, 10 évet késő kárbejelentéssel találja szembe magát a biztosító.

Mivel ezután ez az eset is szerepel a kifutási háromszögekben, ezért hirtelen jóval nagyobb IBNR tartalékot képezne a biztosító, ha pl. a lánc-létra módszert alkalmazná. Ezt azonban nyilvánvaló, hogy egy-egy kiugróan nagy késői kár nem indokolja. Ennek megoldására valahogyan ki kell zárni ezeket a szokatlanul nagy értékeket. Ezt több féle módon is meg lehet tenni.

Egyik lehetőség, hogy a szokásos jéghegy vagy láncszemhányados módszert használjuk, egy speciális módon. A módszerek leírásánál említettük, hogy a α_{k+1-i}^i értéket az α^1_{k+1-i}, ..., α^{i-1}_{k+1-i} értékek valamilyen közepével, a β^i_j-t pedig a β^1_j, ..., β^{k-j}_j értékeknek egy közepével becsüljük. Válasszunk most a szokásos átlag helyett egy nyesett átlagot, vagyis hagyjunk el az értékek közül annyi legkisebbet és legnagyobbat, ahánnyal problémánk volt (ez persze csak 1-2 érték lehet), és a maradéknak számítsuk ki az átlagát. Ez a módszer, természetesen, csak akkor működik, ha így is marad elég átlagolható érték, vagyis ha elég nagy kifutási háromszöget ismerünk.

Másik lehetőség, hogy már a kifutási háromszög felírásakor egyszerűen kihagyjuk azt a késői kárt, ami kiugróan nagynak bizonyult. Ez persze maga után vonja azt, hogy az IBNR tartalék ilyen módon nem biztos, hogy fedezni tudja a kiugróan nagy késői károkat.

Fiatal ágazatok

Egy másik fontos problémát az olyan új biztosítási módozatok okoznak, ahol csak igen kevés vagy egyáltalán semmi tapasztalata nincs a biztosítónak. Ekkor ugyanis gyakran a kifutási háromszögek nem elég nagyok ahhoz, hogy értelmes becslést lehessen belőlük végezni – vagyis nem tudjuk megbecsülni α^1_k-t illetve β^1_k-et, és így el sem tudunk indulni a becslésünkkel.

Az is előfordulhat, hogy habár a kifutási háromszögünk viszonylag nagy már, mégis tele van 0 értékekkel, mert bár évek óta kötünk ilyen típusú szerződéseket, de káreset még gyakorlatilag nem is történt. Ilyenkor joggal feltételezhetjük, hogy ha már lesznek káreseteink, akkor késői káraink is lesznek, de ezt nem tudjuk semmilyen módon megbecsülni a kifutási háromszögből.

Ezek a problémák annyira lényegesek, hogy még a vonatkozó jogszabályban is szerepelnek: csak akkor kell a kifutási háromszögből számítani az IBNR tartalékot, ha már legalább 3 év kártapasztalata van a biztosítónak (B függelék: 8/2001. (II. 22.) PM rendelet a biztosítástechnikai tartalékok tartalmáról, képzésének és felhasználásának rendjéről, **9.** §).

Nézzük most meg, hogy milyen módszereket lehet ilyenkor alkalmazni! Az egyetlen esélyünk az, hogy meg tudjuk becsülni a biztosítási módozat káreloszlását, és ebből becsüljük meg a szükséges IBNR tartalékot is. Naiv kárhányad módszernek nevezik azt a technikát, ahol valamilyen γ_i együtthatókkal feltesszük azt, hogy az i. év díjainak éppen $1-\gamma_i$-ed részét fizeti ki a biztosító a károk fedezésére. Ha az i. év díjbevételét B_i-vel jelölöm (ez valójában a megszolgált díjak nagysága, vagyis, ha 2004 november 15-én kifizet egy biztosított egy havi díjat, akkor ennek csak felét számítom bele a 2004. évi díjbevételbe), akkor az i. évre éppen

$$IBNR_i = (1-\gamma_i)\,B_i - Y_i^{k+1-i}$$

nagyságú IBNR tartalékot kell képezni a k. évben. Tehát a teljes szükséges IBNR tartalék nagysága

$$IBNR = \sum_{i=1}^{k} IBNR_i$$

2.2. A szeparációs módszer

Még egy olyan eljárást ismeretetek, ami a kifutási háromszögeket használja fel, de egészen más módon, mint az eddigi technikák. Ez a módszer azt feltételezi, hogy a nem kumulált, kárnagyságokat tartalmazó kifutási háromszög X_i^j elemei három faktor szorzataként állnak elő:

1. A kérdéses érték sorának megfelelő év teljes kárszáma, ezt $Y_i^{k+(*)} = \sum_{x=1}^{\infty} X_i^{x(*)}$-vel jelöltük. (A szeparációs módszer ismertetése során a $^{(*)}$-gal jelölt értékek a kárszámok, a jelöletlen értékek a kárnagyságok kifutási háromszögének adatait jelölik.)

2. A késések eloszlását minden évben azonosnak feltételezi, d_x-szel jelölöm azoknak a károknak az arányát, amiknél éppen x évet késnek a bejelentéssel. $\sum_{x=1}^{\infty} d_x = 1$.

3. Az inflációt reprezentálja egy-egy μ_y érték, ami a kifizetés évének árszintjét adja meg.

Tehát azt feltételezzük, hogy

$$X_i^j = Y_i^{k+(*)} d_j \mu_{i+j-1}$$

Emellett feltesszük, hogy k év alatt minden kárt bejelentenek, vagyis $\sum_{x=1}^{k} d_x = 1$ és $Y_x^{k+(*)} = Y_x^{k(*)}$.

Először valamelyik eddig ismertetett módszerrel kiszámítjuk az $Y_x^{k+(*)}$ értékeket $x = 1...k$-ra. Ezekkel osszuk el az X_i^j értékeket (mindegyiket azzal, amelyik a szorzat alakban hozzá tartozik), és ezután adjuk össze a k. átlóban levő elemeket:

$$\sum_{x=1}^{k} \frac{X_x^{k+1-x}}{Y_x^{k+(*)}} = \sum_{x=1}^{k} d_{k+1-x}\mu_k = \mu_k \sum_{x=1}^{k} d_{k+1-x} = \mu_k$$

Vagyis sikerült megbecsülnünk a k. évi árszínvonalat. Ebből persze az éppen k évet késő károk arányát is meg tudjuk határozni: $d_k = \frac{X_1^k}{Y_1^{k+(*)}\mu_k}$.

Tegyük most fel, hogy a μ_k, ..., μ_{i+1} és a d_k, ..., d_{i+1} értékeket már megbecsültük, és most μ_i-t és d_i-t akarjuk meghatározni. Nézzük most az $Y_x^{k+(*)}$-okkal leosztott értékek közül az i. átlóban levők összegét!

$$\sum_{x=1}^{i} \frac{X_x^{i+1-x}}{Y_x^{k+(*)}} = \sum_{x=1}^{i} d_{i+1-x}\mu_i = \mu_i \sum_{x=1}^{i} d_{i+1-x} = \mu_i \sum_{x=1}^{i} d_x = \mu_i \left(1 - \sum_{x=i+1}^{k} d_x\right)$$

Tehát így meg tudjuk becsülni – a már ismert értékeket felhasználva – μ_i-t:

$$\mu_i = \frac{\sum_{x=1}^{i} \frac{X_x^{i+1-x}}{Y_x^{k+(*)}}}{\left(1 - \sum_{x=i+1}^{k} d_x\right)}$$

Innen pedig d_i becslése is megvan:

$$d_i = \frac{\sum_{x=i}^{k} d_i \mu_x}{\sum_{x=i}^{k} \mu_x} = \frac{\sum_{x=i}^{k} \frac{X_{x+1-i}^{i}}{Y_{x+1-i}^{k+(*)}}}{\sum_{x=i}^{k} \mu_x}$$

Ez a módszer is könnyen számolható, de azért az eddigieknél valamivel bonyolultabb. Igazából akkor érdemes megnézni a szeparációs módszerrel meghatározott IBNR tartalékot is, és összehasonlítani valamelyik jéghegy vagy láncszemhányados módszerrel kiszámított értékkel, ha erősen inflációs időszakban vagyunk. Ekkor ugyanis az egymás utáni évek adatai között nagy különbség lehet, és ez a kiszámolt IBNR tartalékot eltorzíthatja. Ezt azonban a szeparációs módszer képes kiküszöbölni.

2.3. További módszerek

2.3.1. Az IBNR tartalék, mint egy programozási feladat megoldása

Most hogy a gyakorlatban alkalmazott módszereket már ismerjük, nézzünk meg egy elméletileg tökéletesen megalapozott technikát, amiről azonban hamar ki fog derülni, hogy a gyakorlati alkalmazhatósága erősen kétséges.

A már megismert, gyakorlatból származó módszerekkel összehasonlítva jól fog látszani, hogy hiába tűnik egy módszer statisztikailag korrektebbnek, ha a számítások túl bonyolultak és az alkalmazhatóság feltételei a valóságot túlságosan leegyszerűsítik, akkor a gyakorlatban nem lehet hasznukat venni.

H. Schmitter és E. Straub egy kvadratikus programozási feladat megoldásaként próbálták meghatározni az IBNR tartalékot. A kifutási háromszögekben kárnagyságok helyett kárhányadokat szerepeltettek. Ha az Y_i^j-kből álló háromszög-mátrixot $\mathbf{Y}$-nal jelölöm, akkor az IBNR tartalék meghatározásához éppen a következő várható értékeket kell becsülni [2]:

$$E\left(\lim_{j\to\infty} Y_i^j|\mathbf{Y}\right)$$

minden $i = 1...k$ érték esetén. Ha ezeket a becsléseket m_i-vel jelölöm, akkor az IBNR tartalék szükséges nagysága

$$IBNR = \sum_{i=1}^{k} P_i \left(m_i - Y_i^{k+1-i}\right)$$

ahol P_i az i. év díjbevételeinek nagysága, vagyis $P_i Y_i^j$ jelöli most az (i, j)-edik kárnagyságot, azaz az i. évben bekövetkezett, j éven belül bejelentett károk össznagyságát.

Torzítatlan, hatásos becslést keresünk a következő feltételek mellett:

- Y_i^j és Y_x^y sztochasztikusan függetlenek minden $i \neq x$-re, vagyis a különböző években bekövetkezett károk egymástól függetlenek.
- $E\left(Y_i^j\right) = E^j$ független i-től, vagyis minden évben arányaiban ugyanannyi kárbejelentés késik.
- $P_i Cov(Y_i^j, Y_i^y) = C_{j,y}$ függetlenül i-től.
- $m_i = \sum_{x=1}^{k} \sum_{y=1}^{k+1-x} a_x^y Y_x^y$, vagyis csak lineáris becsléseket keresünk.
- Van egy olyan m, hogy $Y_i^m = Y_i^{m+1} = ... = \lim_{j\to\infty} Y_i^j$ minden i-re, vagyis m év alatt minden kárt bejelentenek.

Ezek mind olyan feltételezések, amik túlságosan leegyszerűsítik a valóságot. Tehát csak olyan esetekben használható ez a módszer, ha közel állunk ezekhez a feltevésekhez. A valóságban azonban számos oka lehet annak, hogy évről évre különböző mértékig késnek a kárbejelentések, vagy pl. az egymást követő évek kárai is összefügghetnek.

Tehát ez a módszer számos olyan egyszerűsítést tartalmaz, ami a gyakorlatban egyáltalán nem biztos hogy helytálló, viszont egy elég könnyen kezelhető kvadratikus programozási alakra hozza a feladatot.

$\frac{k(k+1)}{2}$ ismeretlenünk és egyetlen határfeltételünk van, ezt a rendszert megoldva:

$$m_i = \alpha \sum_{x=1}^{m} P_x \left(e_x^T \beta_x^{-1} Y_x\right) + c_i^T \beta_i^{-1} Y_i$$

és

$$E^m = \alpha \sum_{x=1}^{m} P_x \left(e_x^T \beta_x^{-1} e_x\right) + c_i^T \beta_i^{-1} e_i$$

ahol

$$e_x = \begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ ... \\ E^x \end{pmatrix}, Y_x = \begin{pmatrix} Y_x^1 \\ Y_x^2 \\ ... \\ Y_x^x \end{pmatrix}, \beta_x = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & ... & C_{1,x} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & ... & C_{2,x} \\ ... & ... & ... & ... \\ C_{x,1} & C_{x,2} & ... & C_{x,x} \end{pmatrix} \text{ és } c_x = \begin{pmatrix} C_{m,1} \\ C_{m,2} \\ ... \\ C_{m,x} \end{pmatrix}.$$

Így tehát hogyha ismerem az E^j várható értékét a maximum j évet késő bejelentések arányának és a $C_{i,j}$ kovarianciákat, akkor a második egyenletből az α-t kifejezve és az első egyenletbe behelyettesítve megkapom a keresett m_i becslést. Ezt a becslést akkor lehet viszonylag gyorsan kiszámolni, ha a β_x mátrix könnyen invertálható. Ilyen például ha $Y^{j+1} = Y^j + Z^{j+1}$ vagy $Y^{i+1} = Y^j Z^{j+1}$, ahol Z^{j+1} független Y^j-től [5].

A valóságban persze az E^j és $C_{i,j}$ értékek sem ismertek, tehát ezeket is becsülnünk kell. Ezekre szintén a kifutási háromszög adatai alapján lehet becslést adni.

Tehát azt látjuk, hogy a már eleve lecsupaszított modellt még tovább kell egyszerűsíteni ahhoz, hogy viszonylag könnyen lehessen számolni. De még ez sem elég, mert még mindig marad számtalan érték, amit nem ismerünk (az E^j-k és $C_{i,j}$-k). Tehát ezek becslését kellene felhasználni az IBNR tartalék becsléséhez. Ez rengeteg számolást jelent, amire a gyakorlatban sokszor nincs lehetőség. És még ezután se biztos hogy jobb eredményt ad, mint az egyszerűbb technikák, hiszen ez a módszer is csak egy olyan feltételrendszer esetében működne tökéletetesen, ami a valóságtól nagyon távol áll.

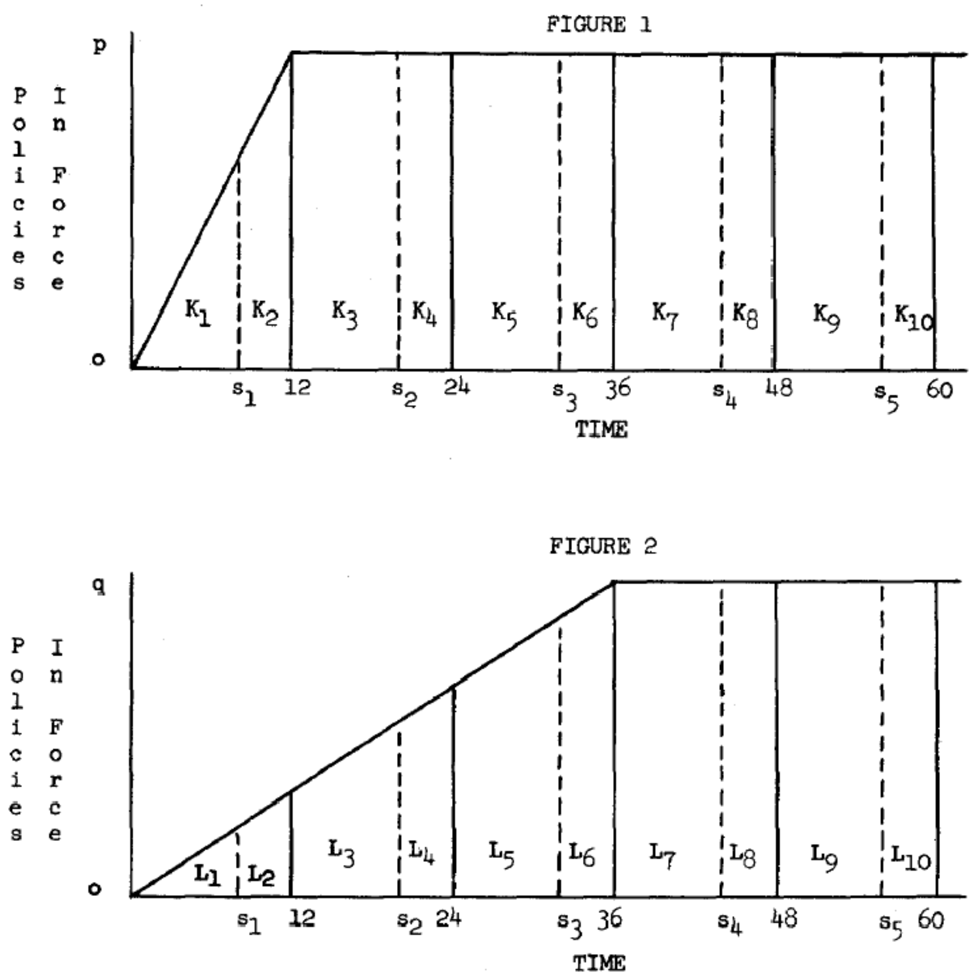
2.3.2. Új ágazatok

LeRoy J. Simon azt a helyzetet vizsgálta, amikor egy biztosító egy új fajta szerződést vezet be [6]. Ilyenkor az IBNR tartalék szükséges nagysága még eltér a későbbiektől, ugyanis eleinte a szerződések mennyisége jóval kevesebb, mint amennyi a módozat beérésekor lesz.

Azt feltételezte, hogy a megfelelő IBNR tartalék mérete arányban áll a meglevő szerződések mennyiségével. A cikkben egy olyan esetet elemzett, amikor 1 és 3 éves kifutási idejű szerződéseket helyettesítenek valamilyen új fajta szerződéstípussal. Az új fajta szerződés állományát mutatja a 2.1. ábra. Itt pl. az 1. év végén $K_1 + K_2$ és $L_1 + L_2$ jelöli az új szerződések állományát, K_1 és L_1 a szükséges IBNR tartalék nagyságát, valamint (az ábrán szereplő jelöléseket használva) $p + q = 1$, mert a régi szerződések kifutása után elért állományt jelölöm 1-gyel.

Amint ez a 2.1. ábrán is látszik, a szerződések lecserélődését lineárisan közelítette Simon és az IBNR tartalékot is a meglévő állománnyal kb. arányosnak gondolta. Ezek mellett B_t-vel jelölte az IBNR-arányt, ami az összes bekövetkezett kár mennyisége osztva a bejelentett károk mennyiségével a t időpontig (t-t hónapokban mérjük).

Az ábrán szereplő s_i értékeket felhasználva ki lehet fejezni p-ből és q-ból a K_i és L_i területeket, majd ezekből meg lehet határozni a B_t értékeket. Ezután jelöljük $B_{c:d}$-vel a B_c becslését, ha csak B_d-t ismerjük. Ezeket is megkaphatjuk a korábbi B_i, s_i értékekből.



2.1. ábra. [6]

Ezek a kifejezések a lineáris közelítés miatt viszonylag egyszerűek. Így becsülni tudjuk az IBNR-arányokat, vagyis az állományok ismeretében a megfelelő IBNR tartalékot is meg tudjuk határozni.

2.3.3. Normális eloszlású logaritmikus növekedések

Joakim Hertig a tengerészeti biztosítások esetében vizsgálta az IBNR tartalékokat [7]. Úgy látta, hogy leginkább a tengerészetben és a felelősségbiztosítások esetében lehet olyan "hosszan elnyúló" esetekkel találkozni, ahol a kárbejelentések akár sok-sok évet is késhetnek. Továbbá azt is felismerte, hogy a viszontbiztosítók számára az IBNR tartalékok becslése még nehezebb, hiszen ők csak aggregált adatokat ismernek egész portfóliókról, és nem tudják, hogy milyen egyedi szerződésekből állnak azok össze.

Ő is a kifutási háromszögek alapján számította az IBNR tartalékot. Ehhez készített egy új háromszöget, amiben a logaritmikus növekedéseket szerepeltette (vagyis ennek eggyel kevesebb oszlopa lett, mint az eredeti kifutási háromszögnek, a benne szereplő értékek: $ln\left(\frac{Y_i^{k+1}}{Y_i^k}\right)$). Ezután minden k-ra kiszámította a bekövetkezés évétől számítva a k. és a $k+1$. év közötti bejelentett károk logaritmikus növekedésének átlagát és szórását a különböző bekövetkezési évek szerint. Vagyis az $ln\left(\frac{Y_i^{k+1}}{Y_i^k}\right)$ $(i = 1, 2, ..., k)$ értékek átlagát és szórását.

Emellett felírta a kárhányadokból álló kifutási háromszöget is, majd erre is felírta a logaritmikus növekedéseket és ezek átlagát és szórását. Ebből azt állapította meg, hogy a kárhányadok esetében jobban szóródnak az éves logaritmikus növekedések, mint a kárnagyságok esetében. Jelöljük $dx_i^j = ln\left(\frac{Y_i^{j+1}}{Y_i^j}\right)$-vel a j. és $j+1$. évek közti logaritmikus növekedését a megismert kárhányadoknak az i. bekövetkezési évre.

A vizsgálatok alapján azt a következtetést vonta le, hogy $dx_i^j \sim N(\xi_j, \sigma_j^2)$ normális eloszlásúak. A ξ_j és σ_j értékeket a következő módon becsülte: $\hat{\xi}_j = \frac{\sum_i dx_i^j}{N_j} \sim N\left(\xi_j, \frac{\sigma_j^2}{N_j}\right)$ és $\hat{\sigma}_j^2 = \frac{\sum_i (dx_i^j - \hat{\xi}_j)^2}{N_j - 1} \sim \sigma_j^2 \frac{\chi^2(f_j)}{f_j}$, ahol $f_j = N_j - 1$ és N_j a j. évről $j+1$. évre történő növekedések megfigyelt száma. A ξ_j és σ_j^2 értékek, természetesen, függetlenek.

Ezekből a becslésekből persze ki lehet fejezni a kifutási háromszög Y_i^∞ elemeit, és így a szükséges IBNR tartalékot is.

2.3.4. Credibility modell

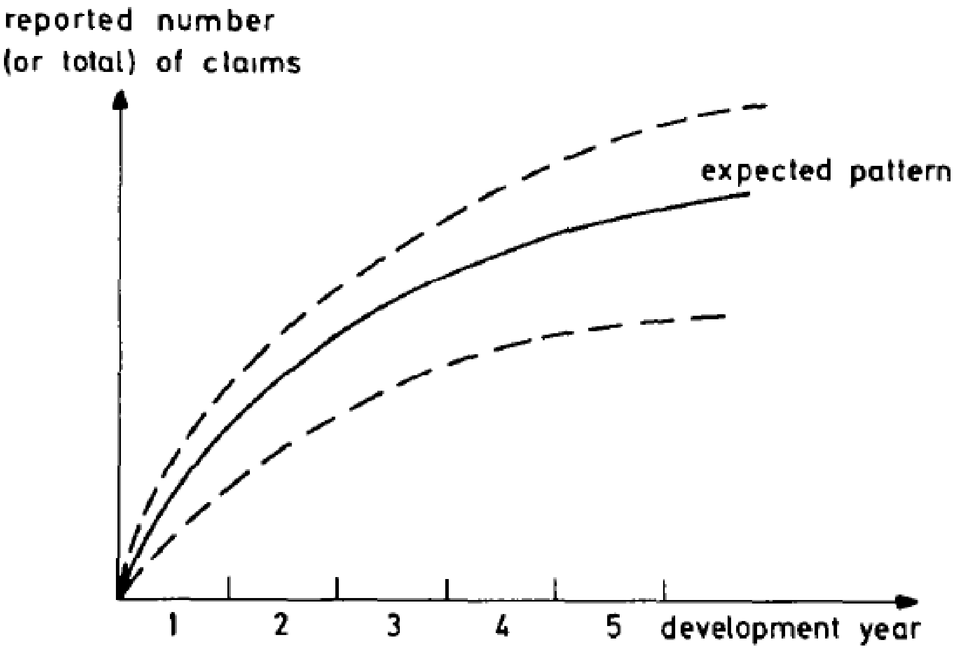
Ole Hesselager és Thomas Witting egy credibilty modellt alkotott az IBNR tartalék meghatározására, amivel kezelni tudták a késések eloszlásának véletlenszerű ingadozásait [8]. A korábbi modellek vizsgálatakor azt látták, hogy azok pozitív korrelációt feltételeznek a bejelentett hányad korai és kései növekedése között. Ezt illusztrálja a 2.2 ábra.

Ezek a modellek nem voltak képesek kezelni pl. a követelések kezelésének vagy az adminisztrációs folyamatoknak a változásait. Ilyen esetekben a bejelentési hányad növekedése inkább úgy néz ki, mint a 2.3 ábrán. Ezért olyan módszert dolgoztak ki, ami a korai és kései növekedések negatív korrelációját is képes kezelni.

$j = 1, ..., n$ a bekövetkezési évek és azt feltételezték, hogy n éven belül minden kárt bejelentenek, vagyis a növekedési évek $i = 1, ..., n$. $\pi_j = (\pi_j^1, ..., \pi_j^n)$ egy véletlen vektor, ahol π_j^i annak a valószínűsége, hogy egy j. évben bekövetkezett kárt éppen i évvel később jelentenek be, vagyis a j. év követeléseinek az a hányada, amit várhatóan az i. évben fognak követelni. Természetesen $\sum_{i=1}^n \pi_j^i = 1$ minden j-re.

Ismét a kifutási háromszög X_i^j értékeiből számolunk, ahol X_i^j kárszámot vagy kárnagyságot jelöl. A következő feltételezéseket teszik:

- A különböző bekövetkezési évekhez tartozó adatok függetlenek.



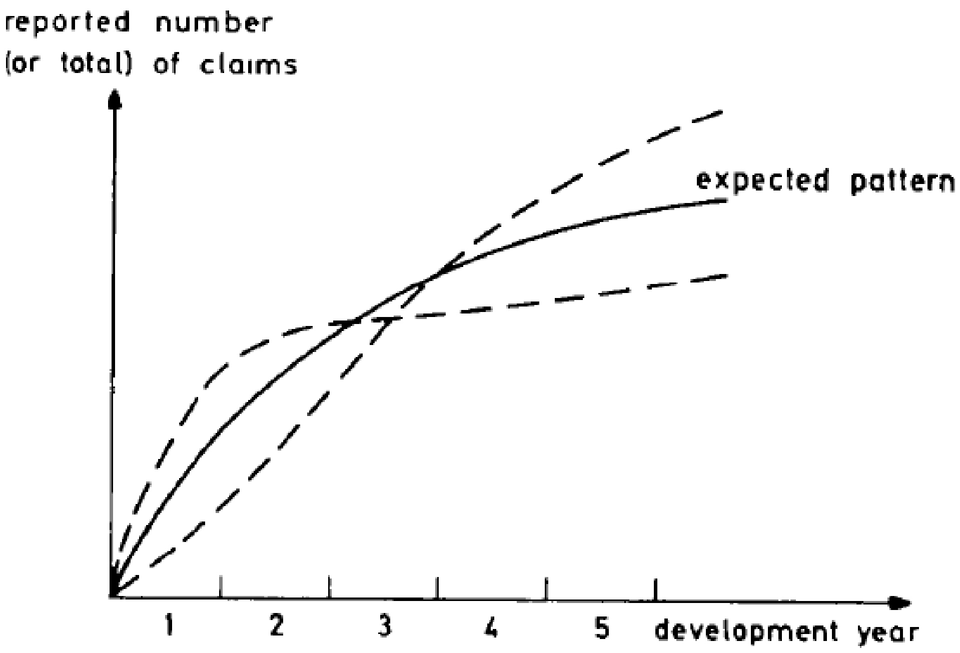
2.2. ábra. [8]

- $\pi_1, ..., \pi_n$ i.i.d. változók $p_i = E\pi_j^i$ első és $c_{i,k} = Cov(\pi_j^i, \pi_j^k)$ második momentumokkal.
- A π_j-re vonatkozó feltételes eloszlások: $E(X_j^i|\pi_j) = \pi_j^i m_j$ és $Cov(X_j^i, X_j^k|\pi_j) = \delta_{i,k} f_j^i(\pi_j)\pi_j^i\pi_j^k d_j$, ahol $m_j \geq 0$ és d_j a bekövetkezéstől eltelt időtől független konstansok, $f_j^i()$ egy adott függvény és $\delta_{i,k}$ a Kronecker szimbólum.

m_j-t, d_j-t és $f_j^i()$-t a modellnek megfelelően választjuk meg. Két tipikus lehetőség van:

- Ha X_j a bekövetkezett károk számát jelöli, akkor legyen $m_j = EX_j$, $d_j = VarX_j - EX_j$, $f_j^i(\pi_j) = \pi_j^i m_j$.
- Ha X_j a bekövetkezett kárnagyságot jelöli, akkor legyen $X_j = b(\theta_j)Z_j$, ahol $b(\theta_j)$ egy véletlen változó, ami független $Z_j = (Z_j^1, ..., Z_j^n)$-től és π_j-től. Valamint feltehetjük, hogy $E(Z_j^i|\pi_j) = V_j\pi_j^i$ és $Cov(Z_j^i, Z_j^k|\pi_j) = \delta_{i,k}V_j r_i^2$. Ekkor legyen $m_j = V_j Eb(\theta_j)$, $d_j = V_j^2 Var b(\theta_j)$, $f_j^i(\pi_j) = V_j r_i^2 E(b(\theta_j)^2)$.

Ebből a következő becslést vezették le: a j. bekövetkezési évre $IB\hat{N}R(j) = (1 - F(\tilde{n}))\left(Z(j)\frac{\dot{Y}_j^{\tilde{n}}}{G(j)} + (1 - Z(j))m_j\right)$ IBNR tartalékot kell képezni, ahol $Z(j) =$



2.3. ábra. [8]

$\frac{G(j)\psi_j}{G(j)\psi_j+1}$, $G(j) = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{p_i^2}{p_i\phi_j+\tau_j^i}$, $F(\tilde{n}) = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} p_i$, $\dot{Y}_j^{\tilde{n}} = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{p_i}{p_i\phi_j+\tau_j^i} X_j^i$. Valamint $\psi_j = Cov\left(\frac{X_j^i}{p_i}, \frac{X_j^k}{p_k}\right) = \frac{\alpha}{1+\alpha} d_j + \frac{1}{1+\alpha}(-m_j^2)$, $\phi_j = \frac{d_j+m_j^2}{1+\alpha}$. π_1, ..., π_n független, azonos Dirichlet eloszlásúak α_1, ..., α_n paraméterekkel, $p_i = E\pi_j^i = \frac{\alpha_i}{\alpha}$, $c_{i,k} = \frac{1}{1+\alpha}(\delta_{i,k}p_i - p_i p_k)$, $\alpha = \alpha_1 + ... + \alpha_{\tilde{n}}$ és $\tilde{n} = n - j + 1$.

2.3.5. Az IBNR tartalék várható értéke és szórása

Farrokh Guiahi a szükséges IBNR tartalék várható értékét és szórását becsülte meg [9]. Ehhez szüksége volt a kárszám eloszlására adott intervallumon (N_i, $i = s, s+1, ..., t$), a károk súlyosságának eloszlására (X_{ij}, $j \leq N_i$, független azonos eloszlásúak, a közös eloszlásuk X_i) és a bejelentések késésének eloszlására (T_{ij}, $j \leq N_i$, független azonos eloszlásúak, a közös eloszlásuk T_i).

Ezek felhasználásával a következő értékeket kapta az IBNR tartalék várható értékére és szórására:

$$E(IBNR) = \sum_{i=s}^{t} w_i B_i$$

és

$$Var(IBNR) = \sum_{i=s}^{t} u_i B_i$$

ahol $w_i = P(T_i > c_i)$, $B_i = E(N_i)E(X_i)$, $u_i = \frac{E(X_i^2)}{E(X_i)}P(T_i > c_i)$ és $c_i = t - i + \frac{1}{2}$.

Ezek segítségével meg tudja határozni, hogy hogyan változik az IBNR tartalék nagysága, ha pl. nőnek a bejelentett károk, megváltozik a késések eloszlása vagy csökken a károk gyakorisága.

2.3.6. Bayes-i formula az IBNR tartalékra

Dr. Ira Robbin az IBNR tartalékot három jól ismert IBNR-számítási formula súlyozott átlagaként próbálta meghatározni [10]. Ez a három formula a következő volt:

- $IBNR$ = Becslés a végtelenig bejelentésre kerülő károkra − A máig bejelentett károk
- $IBNR =$ A máig bejelentett károk $\cdot\, LDF$
- $IBNR =$ Becslés a végtelenig bejelentésre kerülő károkra $\cdot \left(1 - \frac{1}{LDF}\right)$

ahol LDF-fel jelöljük a mától a végtelenig bekövetkező felgyülemlési faktort (azaz a végtelenig bejelentett és a máig bejelentett károk aránya). Ezzel a módszerrel Robbin az IBNR károk számát próbálta megbecsülni, tehát "bejelentett károk" alatt a bejelentett károk számát értette.

Az IBNR kárszám becsléséhez feltette, hogy a j. periódus kárszámeloszlása $N_j \sim Poisson(n_j)$. Legyen továbbá $n = \sum_{j=1}^{\omega} n_j$, $p_j = \frac{n_j}{n}$ és $q_j = p_{j+1} + ... + p_\omega$, ahol ω-val a végtelent (a gyakorlatban ez tipikusan 100 év) jelöljük. Ekkor $M_j = N_1 + ... + N_j \sim Poisson(n \cdot (1 - q_j))$ és az IBNR kárszám $R_j = N_{j+1} + ... + N_\omega \sim Poisson(nq_j)$.

Ezekkel a jelölésekkel a j. periódus IBNR kárszámára az alábbi becslést találta: $IBNR_j = Z_{nj}(E(n) - M_j) + Z_{pj}M_j(LDF_j - 1) + (1 - Z_{nj} - Z_{pj})E(n)\left(1 - \frac{1}{LDF_j}\right)$, ahol Z_{nj} és Z_{pj} az n és q_j eloszlásaiból kifejezhető konstansok.

Ez valóban az előbb említett három módszernek egy súlyozott közepe, ugyanis ezekkel a jelölésekkel az 1. változat éppen $E(n) - M_j$-t jelenti, a 2. változat $M_j(LDF_j - 1)$-et, a 3. változat pedig $E(n)\left(1 - \frac{1}{LDF_j}\right)$-t.

Ezeket a módszereket végignézve látszik, hogy rengeteg különböző módszert lehet alkalmazni az IBNR tartalék meghatározásához. A gyakorlatban azok az eljárások terjedtek el, amik könnyen és gyorsan alkalmazhatók, emellett bármilyen ágazat esetében alkalmazhatók. Emellett léteznek bizonyos konkrét káreloszlást feltételező, speciálisabb módszerek is.

3. fejezet

Az életbiztosításról

Az életbiztosítások alapvetően abban különböznek az egyéb biztosítási formáktól, hogy a kockázat nem egy esemény bekövetkezésében vagy be nem következésében rejtőzik, hanem abban, hogy mikor következik be. Hiszen pl. az autómat vagy feltörik vagy nem, de a haláleset előbb vagy utóbb biztosan bekövetkezik, csak éppen ha tovább élek, akkor tovább fogom fizetni a díjat, és később kell kifizetnie a biztosítónak a biztosítási összeget.

Ezért aztán egy életbiztosítás díjának meghatározásához elegendő ismerni a biztosított halálozási valószínűségét. Ez alapján ugyanis meg tudjuk határozni a várható elhalálozási időpontot, a várható beszedett díjat különböző díjfizetési konstrukciók mellett, és ezáltal azt is, hogy mekkora biztosítási összeget fedezhet egy adott nagyságú díj.

Ahhoz, hogy el tudjuk végezni az ilyen számításokat, szükségünk van az ún. halandósági táblák ismeretére. Ez egy-egy jól körülhatárolható népességcsoportra vonatozik. Sajnos csak elég durva bontásban állnak rendelkezésünkre adatok. Két halandósági táblát ismerünk: egyet a teljes magyar férfi és egyet a teljes magyar női lakosságra vonatkozóan (a férfi halandósági táblát lásd a C függelékben). Ezek a táblázatok mutatják meg, hogy hányan halnak meg az adott sokaságból éppen x éves korukban.

A halandósági táblában szereplő adatok tipikus jelölései a következők:

- l_0 az alapsokaság, általában $l_0 = 100$ ezer fő. Ez az érték demonstrálja a vizsgált népcsoport létszámát.
- l_x az x éves kort túlélők száma,
- $d_x = l_x - l_{x+1}$, vagyis az éppen x éves korban meghalók száma,
- $q_x = \frac{d_x}{l_x}$, vagyis a halálozási valószínűség x éves korban,
- $p_x = 1 - q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$, vagyis a túlélési valószínűség x éves korban,

- ${}_tq_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}$, vagyis a t éven belül történő elhalálozás valószínűsége x éves korban,
- ${}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$, vagyis t év túlélésének valószínűsége x éves korban.

Amikor különböző évekre vonatkozó adatokkal dolgozunk, akkor szükséges, hogy minden kiadást és bevételt azonos évre átszámítsunk, vagyis diszkontáljunk. A diszkonttényezőt a technikai kamatlábból számítjuk, amit i-vel jelölünk, vagyis a diszkonttényező $v = \frac{1}{1+i}$. Ezt felhasználva a halandósági tábla adataiból még további, ún. kommutációs számokat is képezünk, amik a díjak és tartalékok számításánál hasznosak lehetnek:

- $D_x = l_x v^x$
- $N_x = \sum_{k=x}^{\omega} D_k$
- $S_x = \sum_{k=x}^{\omega} N_k$
- $C_x = d_x v^{x+1}$
- $M_x = \sum_{k=x}^{\omega} C_k$
- $R_x = \sum_{k=x}^{\omega} M_k$

Ezekben a képletekben ω a végtelent, vagyis a magyar gyakorlatban a 100 évet jelöli – ennél tovább ugyanis nagyon kevesen élnek. (Ez az érték erősen ország specifikus: egy afrikai országban 100-nál jóval kisebb, Japánban vagy Svédországban viszont 100-nál magasabb értéket használnak ω-nak.).

A halálozási adatokat megfigyelve megpróbálhatunk valamilyen eloszlást illeszteni rá. Vagyis egy olyan $F(t) = P(X < x + t | X \geq x)$ eloszlásfüggvényt keresünk, amire megközelítőleg $F(t) = {}_tq_x$. További fontos adata a halálozási eloszlásoknak a halálozási intenzitás, amit $\mu_{x+t} = \frac{f(t)}{1-F(t)}$-ként definiálunk, ahol $f(t)$ az F eloszlás sűrűségfüggvénye.

A történelem során számos különböző függvényt készítettek ilyen célból, ezek közül a legismertebbek [3]:

- A legrégebbi halálozási eloszlás Moivre nevéhez fűződik: $F(t) = \frac{t}{\omega - x}$, ahol ω ismét gyakorlatilag a végtelent jelenti: olyan kor, amit már senki nem élhet meg. A halálozási intenzitása $\mu_{x+t} = \frac{1}{\omega-(x+t)}$.
- Ennél jobban fedi a valóságot Gompertz eloszlásfüggvénye: $F(t) = 1 - e^{-bc^x(c^t-1)}$, ahol $B > 0$ és $c > 1$. Ennek halálozási intenzitása $\mu_{x+t} = Bc^{x+t}$.

- Gompertz formuláját fejlesztette tovább Makeham: $F(t) = 1 - e^{-at-bc^x(c^t-1)}$ (itt $a > 0$, $B > 0$, $c > 1$). Ennek megfelelően a halálozási intenzitás a következőképpen módosult: $\mu_{x+t} = a + Bc^{x+t}$.

Nézzük most meg konkrétan a leggyakoribb életbiztosítási típusokat, és az ezekhez tartozó nettó díjakat!

3.1. Klasszikus életbiztosítási konstrukciók

Jelöljük a biztosítás megkötésekor a biztosított korát x-szel, n-nel pedig a biztosítás időtartamát (ha nem korlátlan idejű), mindkét adatot években mérjük. Minden díjat nettó várható érték elv alapján számítunk, vagyis éppen annyi díjat kérünk, hogy a beszedett díjak és a kifizetett szolgáltatás várható értéke megegyezzen.

3.1.1. Az elérési biztosítás

Ebben a biztosítási formában a biztosított nem kap semmit, ha az n év alatt meghal, de 1 Ft-ot kap, ha túléli az n évet. Ha ennek teljes díját a biztosítás megkötésének időpontjában fizeti ki, akkor a szükséges díj az az $A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$ érték, amire éppen $l_x A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = l_{x+n} v^n$, hiszen l_x ember fizeti be a díjat és l_{x+n} fogja felvenni az 1 Ft-ot. Vagyis $A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$ a kommutációs számokkal kifejezve.

3.1.2. A haláleseti biztosítás

Ez éppen fordítottja az elérési biztosításnak, vagyis 1 Ft-ot kap a kedvezményezett, ha a biztosított n éven belül meghal, ha viszont életben marad, akkor semmit nem fizet a biztosító. Ennek egyszeri díja $A^1_{x:\overline{n}|}$, ahol $l_x A^1_{x:\overline{n}|} = d_x v + d_{x+1} v^2 + ...d_{x+n-1} v^n$, ezt egyszerűsítve az alábbi képlethez jutunk: $A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$. Ha a haláleseti biztosítást élethosszig kötik, vagyis $n = \omega - x$, akkor nettó egyszeri díja $A_x = \frac{M_x}{D_x}$.

3.1.3. A vegyes életbiztosítás

Ez az előző két biztosítási típus keveréke: a kedvezményezett 1 Ft-ot kap, amikor a biztosított meghal, ha ez n éven belül megtörténik. Ha viszont a biztosított túléli az n évet, akkor a biztosító az n. év végén fizet ki 1 Ft-ot. Ennek nettó egyszeri díja $A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} + A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x}$

3.1.4. A járadékbiztosítások

Ennél a biztosítási típusnál a biztosított n évig minden év elején 1 Ft-ot kap, ha életben van. A nettó egyszeri díját $\ddot{a}_{x:n}$-nel jelöljük, ennek értéke a nettó várható érték elv szerint $l_x\ddot{a}_{x:n} = l_x + l_{x+1}v + ... + l_{x+n-1}v^{n-1}$, vagyis $\ddot{a}_{x:n} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$. Ennek további változatai is gyakoriak. Az élethosszig tartó járadékbiztosításnál $n = \omega - x$, nettó egyszeri díja $\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$.

Szintén gyakori az az eset, amikor nem az év elején, hanem az év végén fizet a biztosító, ha akkor még él az ügyfél. Ennek nettó egyszeri díja $a_{x:n} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n-1}}{D_x}$, ha n évig, és $a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$, ha élethosszig tart. Ez persze – ahogy azt a képlet is mutatja – éppen az egy évvel elhalasztott előleges járadék nettó egyszeri díja.

3.2. Díjszámítás

A 3.1. fejezetben különböző alapvető életbiztosítás-típusok nettó egyszeri díját számítottuk ki. Ennek a díjnak az ismeretében ki lehet számítani a nettó éves, bruttó egyszeri és bruttó éves díjakat is.

3.2.1. Nettó éves díjak

Bármelyik biztosítástípus esetében kiszámíthatjuk az egyszeri díjból az éves díj nagyságát is. Ugyanis a díjfizetés valójában egy időleges életjáradékot jelent a biztosítónak. Tehát ha éppen k évig fizet az ügyfél díjat, és a nettó egyszeri díj $A_{x:n}$ lenne, akkor a nettó éves díj éppen $P_{x:k} = \frac{A_{x:n}}{\ddot{a}_{x:k}}$ kell hogy legyen, hogy a befizetett díjak jelenértéke pontosan az egyszeri díjjal legyen azonos.

3.2.2. A bruttó díjak

Bármelyik eddig ismertetett konstrukcióra ki tudjuk számolni a bruttó díj nagyságát is. Ez annyival magasabb a nettó díjnál, hogy a biztosító egyéb költségeit is fedezze. Ezek az egyéb költségek három kategóriába sorolhatók:

α-költségek: ezek a szerzési költségek. Egyszer merülnek fel: a biztosítás megkötésekor. (pl. orvosi költségek, ügynöki jutalékok).

β-költségek: ezek a díjbeszedési költségek. A díjfizetés során merülnek fel, és a bruttó díjjal arányosak (pl. csekkek, utalások költségei).

γ-költségek: ezek az igazgatási költségek. A biztosítás tartama alatt folyamatosan merülnek fel (pl. alkalmazottak fizetése, rezsi).

Egyszeri díjfizetés

Jelöljük α-val a szerzési költségek nagyságát, β-val a díjbeszedési költségek arányát a bruttó díjhoz képest és γ-val az igazgatási költségek éves nagyságát. A bruttó díjnak fedeznie kell a nettó díjat és mindhárom típusú egyéb költséget. Tehát egyszeri díjfizetés esetén:

$$A^{(b)}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta A^{(b)}_{x:\overline{n}|} + \gamma \ddot{a}_{x:n}$$

ahol $A_{x:\overline{n}|}$ az n évre szóló biztosítás egyszeri nettó díja, $A^{(b)}_{x:\overline{n}|}$ az egyszeri bruttó díja.

Éves díjfizetés

Éves díjfizetés esetén, ha n évre szól a biztosítás és k évig van díjfizetés, $P_{x:k}$ az éves nettó díj és $P^{(b)}_{x:k}$ az éves bruttó díj, akkor

$$\ddot{a}_{x:k} P^{(b)}_{x:k} = \ddot{a}_{x:k} P_{x:k} + \alpha + \beta \ddot{a}_{x:k} P^{(b)}_{x:k} + \gamma \ddot{a}_{x:n}$$

Ezek alapján az egyszeri és az éves bruttó díj nagysága a nettó díjakból kifejezve:

$$A^{(b)}_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma \ddot{a}_{x:n}}{1-\beta}$$

és

$$P^{(b)}_{x:k} = \frac{\ddot{a}_{x:k} P_{x:k} + \alpha + \gamma \ddot{a}_{x:n}}{(1-\beta)\, \ddot{a}_{x:k}}$$

Ezek alapján már lényegében bármilyen életbiztosítási konstrukció díjait ki tudjuk számolni. Először felírjuk az egyszeri nettó díjat a szolgáltatás várható jelenértékeként, majd ebből tudunk éves nettó, egyszeri bruttó és éves bruttó díjat számítani.

3.3. Az életbiztosítási díjtartalék

Miután az életbiztosítások díjszámításának elveit megismertük, nézzük most meg a dolgozat szempontjából lényegesebb részt, a tartalékokat [3]. A biztosítástechnikai tartalékok felsorolásánál szó esett a matematikai tartalékokról, ezek közé tartozik az életbiztosítási díjtartalék is. Az életbiztosítások körébe számtalan különböző konstrukció tartozik, de az életbiztosítási díjtartalékot minden esetben azonos elvek alapján számítják.

Az életbiztosítási díjtartalék feladata az, hogy a jövőbeli kiadásokat és bevételeket összhangba hozza. Vagyis éppen annyit kell tartalékolni ilyen célból, hogy a jövőbeli kiadások és bevételek különbségének várható értéket, más néven a nettó kiadások várható értékét fedezze.

Tehát ha a díjat nettó várható érték elvvel számítjuk, akkor a szerződéskötés pillanatában az életbiztosítási díjtartalék értéke éppen nulla. Később viszont a fizetési konstrukciótól függően változik. Ha például egy összegben, szerződéskötéskor fizetik ki a teljes díjat, akkor egyből igen magas tartalékot kell képezni, hiszen a jövőben bevétele már nem lesz a biztosítónak, kiadása viszont igen – csupán az a kérdés, hogy mikor. Ha viszont havonta fizeti az ügyfél a díjat, akkor ennél jóval alacsonyabb összegű életbiztosítási díjtartalékot képez a biztosító, mert további bevételekre is számíthat.

Akárcsak a díjaknál, most is tovább bonyolítja a helyzetet, ha a kiadások közé az adminisztratív költségeket, az orvosi költségeket, és más hasonló, nem a kockázatból adódó költségeket is figyelembe veszünk, vagyis bruttó tartalékot képzünk. Így a szerződéskötés után egy rövid ideig negatív tartalék is elképzelhető, mert a szerződéskötéskor sok olyan költség merül fel, amit csak a jövőben beszedésre kerülő díjak fedeznek.

3.3.1. Nettó díjtartalékok

Nézzük most meg az eddig megismert alapesetekre a díjtartalék számítását. Egyelőre csak a kockázatot vesszük figyelembe, egyéb költségekkel nem számolunk, tehát nettó díjtartalékot számítunk. Jelöljük $A_{x:n}$-nel a nettó egyszeri és $P_{x:k}$-val a nettó éves díjat, amit korábban már kiszámítottunk (a biztosítás n évre szól, az éves díjat k évig fizeti az ügyfél).

t év elteltével szeretnénk meghatározni a szükséges nettó díjtartalék nagyságát. Jelöljük ezt ${}_tV_{x:n}$-nel.

Egyszeri díjfizetés

Egyszeri díj esetén nagyon könnyű a tartalék kiszámítása, hiszen díjfizetés már nem lesz, csak szolgáltatás:

$${}_tV_{x:n} = A_{(x+t):(n-t)}$$

Éves díjfizetés

Éves díj esetén attól függ a tartalék nagysága, hogy történik-e még díjfizetés, vagy nem. Vagyis

$${}_tV_{x:n} = \begin{cases} A_{(x+t):(n-t)} - \ddot{a}_{(x+t):(k-t)} P_{x:k} & \text{ha } t \leq k \\ A_{(x+t):(n-t)} & \text{ha } t > k \end{cases}$$

3.3.2. Bruttó díjtartalékok

Az eddigiekhez képest most annyit változtatunk, hogy most már tekintettel vagyunk a nem a kockázatból eredő költségekre is, vagyis bruttó díjtartalékot számítunk. Ezeknek a költségek három csoportját ismerjük: α-, β- és γ-költségek.

A β költségekkel a tartalékszámítás során nem kell foglalkoznunk, mert ezek éppen a díjfizetéskor válnak esedékessé, ezért nem szükséges rájuk tartalékot képezni. Egyszeri díjfizetés esetén ugyanez vonatkozik az α-költségekre is, mert ekkor egyben kifizetjük a díjat, ugyanakkor, mint amikor az α-költség keletkezik. Éves díjfizetéskor viszont a biztosító "megelőlegezi" az α-költségeket a biztosítottnak, ezért α-val arányosan csökkenteni kell a bruttó tartalékot. Emiatt a bruttó díjtartalék akár negatívvá is válhat a biztosítás kezdeti szakaszában.

Egyszeri díjfizetés

Tehát egyszeri díjfizetés esetén a bruttó díjtartalék a nettó díjtartalékból és az igazgatási költségtartalékból áll, amit ${}_tU_{x:n}$-nel jelölünk. Az igazgatási költség éppen γ nagyságú évente, a hátralevő $n-t$ évben, vagyis

$${}_tU_{x:n} = \gamma\ddot{a}_{(x+t):(n-t)}$$

tehát a bruttó díjtartalék, amit ${}_tV^{(b)}_{x:n}$-vel jelölünk

$${}_tV^{(b)}_{x:n} = A_{(x+t):(n-t)} + \gamma\ddot{a}_{(x+t):(n-t)}$$

Éves díjfizetés

Éves díjfizetés esetén jóval bonyolultabb a bruttó díjtartalék képlete:

$${}_tV^{(b)}_{x:n} ={}_t V_{x:n} + \gamma\left(\ddot{a}_{(n+t):(n-t)} - \ddot{a}_{x:n}\frac{\ddot{a}_{(x+t):(k-t)}}{\ddot{a}_{x:k}}\right) - \alpha\frac{\ddot{a}_{(x+t):(k-t)}}{\ddot{a}_{x:k}}$$

Ebből a $\gamma\left(\ddot{a}_{(n+t):(n-t)} - \ddot{a}_{x:n}\frac{\ddot{a}_{(x+t):(k-t)}}{\ddot{a}_{x:k}}\right)$ részt igazgatási költségtartaléknak, a ${}_tV_{x:n} - \alpha\frac{\ddot{a}_{(x+t):(k-t)}}{\ddot{a}_{x:k}}$ részt Zillmer-tartaléknak hívjuk.

4. fejezet

IBNR kontra életbiztosítási díjtartalék

4.1. Az IBNR és a díjtartalék számításának elvei

Most, hogy a címben szereplő mindkét tartaléktípust bemutattam, rátérek a kettő közötti kapcsolatra, a köztük levő esetleges átfedésekre is. Érdemes tudni, hogy a nemzetközi gyakorlatban az a jellemző, hogy életbiztosításokra nem számítanak IBNR tartalékot. Ez első ránézésre azt a benyomást kelti, hogy nem lehet, nem szükséges, vagy nem érdemes az IBNR tartalékkal foglalkozni életbiztosítási esetekben. A magyar törvények azonban ezt kötelezővé teszik, tehát a gyakorlat kikényszeríti, hogy mégiscsak megvizsgáljuk a kérdést.

Nézzük most meg matematikai szemszögből, hogy valójában mit számoltunk ki a kétféle tartalék esetében, és ezek alapján hogyan lehet kombinálni a kétféle modellt!

Az életbiztosítási díjtartalék a jövőbeli kiadások és bevételek különbségének várható értéke. Ennek számításakor nem vagyunk tekintettel arra, hogy esetleg nem él már minden szerződésünk, vagyis hogy a biztosítási esemény már bekövetkezhetett, csak mi még nem tudunk róla. Tehát ha kibővítjük a modellünket a későn bejelentett károk lehetőségével, akkor valójában az életbiztosítási díjtartalék egy feltételes várható érték: a jövőbeli nettó kiadások várható értéke, feltéve hogy nincsenek későn bejelentett károk.

Tehát $V = E\left(C_{jovo}|C_{keso} = 0\right) = E\left(C_{jovo} + C_{keso}|C_{keso} = 0\right)$, ahol C_{keso} a későn bejelentett károkból származó költségünk, C_{jovo} a még élő szerződésekből a jövőben bekövetkező nettó költségünk, V pedig az életbiztosítási díjtartalék nagysága. Ezt a tartalékot úgy számítjuk ki, hogy a halandósági tábla (vagyis egy igen nagy minta) alapján megbecsüljük, ahogy azt a 3.3 fejezetben láthattuk.

Ezzel szemben az IBNR tartalék éppen arra az eshetőségre szolgál, hogy későn bejelentett károk márpedig léteznek. Ennek összege kizárólag a későn bejelentett károkból származó nettó kiadások várható értéke. Vagyis $IBNR = E\left(C_{keso}\right)$, ahol $IBNR$ az IBNR tartalék nagysága. Természetesen ezt is csak becsülni tudjuk a múltból származó adatok segítségével. Erre a becslésre számos különböző módszert láthattunk a

2.1. fejezetben.

4.2. IBNR tartalék számítása életbiztosítási esetben, korábbi adatok alapján

Az eddig megismert módszereket felhasználva kidolgoztam egy technikát arra, hogy hogyan lehet IBNR tartalékot számítani olyankor, ha életbiztosítási díjtartalékot már képeztünk! Ha egyszerűen összeadjuk az imént leírt módon számított IBNR és életbiztosítási díjtartalékot, akkor túltartalékoljuk magunkat. Azokra a szerződésekre ugyanis, amiket késve jelentenek be megképezzük az IBNR tartalékot, de emellett – mintha még nem következett volna be a biztosítási esemény – megképezzük rá az életbiztosítási díjtartalékot is. Ez a módszer tehát egészen biztosan nem helyes.

4.2.1. Először gyakorlati szemszögből

Először vizsgáljuk meg a helyzetet matematikai formulák nélkül, csak a kérdés gyakorlati oldalát vizsgálva! A biztosítók számvitelét megismerve feltűnik, hogy a különböző tartalékokat költségként számolják el, majd a tényleges kifizetéseket ezekből a tartalékokból fedezik. (Attól függően hogy milyen típusú a kifizetés, az annak megfelelő tartalékot használják erre.)

Kövessük ezt a gondolatmenetet, és tekintsünk a már megképzett tartalékokra úgy, mint már meglevő kiadásokra! A díjtartalék számításán nem akarunk változtatni, inkább az IBNR tartalékot próbáljuk meg hozzáigazítani a megváltozott helyzethez. Ha a díjtartalékot már megképeztem, akkor a tényleges kifizetés időpontjában csak annyi a kiadásom, amivel a kedvezményezettnek kifizetett összeg a díjtartaléknál nagyobb.

Ennek megfelelően töltsük ki a kifutási háromszögeket úgy, hogy minden biztosítási eseményre a kifizetésnek a díjtartalékkal csökkentett értékét írjuk be! Ezekből a háromszögekből a 2.1. fejezetben ismertetett módon számítsunk tartalékot!

Ha a modellünk helyes, ennek kell lennie az IBNR tartaléknak. Hogy ezt eldönthessük, nézzük most meg ugyanezt a kérdést a valószínűségszámítás eszközeivel!

4.2.2. Utána matematikailag

A célunk az, hogy az IBNR és az életbiztosítási díjtartalék együtt fedezze a várható nettó kiadásainkat, függetlenül attól, hogy vannak-e késői károk. Induljunk ki abból, hogy a díjtartalékot a fent leírt módon számítjuk ki, és nézzük meg hogy mekkora kell hogy legyen az IBNR tartalék nagysága.Vagyis azt az $IBNR^*$ értéket keressük, amivel $V + IBNR^* = E\left(C_{jovo} + C_{keso}\right)$, ha $V = E\left(C_{jovo} + C_{keso} | C_{keso} = 0\right)$.

Az egyes szerződéseket felső indexszel jelölöm, a szerződések száma legyen N. Ekkor tehát

$$IBNR^* = E\left(C_{jovo} + C_{keso}\right) - E\left(C_{jovo} | C_{keso} = 0\right) =$$

$$= E\left(C_{jovo} + C_{keso}\right) - E\left(C_{jovo} | C^1_{keso} = 0 \text{ és ... és } C^i_{keso} = 0 \text{ és ... és } C^N_{keso} = 0\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} E\left(C^i_{jovo} + C^i_{keso}\right) - \sum_{i=1}^{N} E\left(C^i_{jovo} | C^1_{keso} = 0 \text{ és ... és } C^i_{keso} = 0 \text{ és ... és } C^N_{keso} = 0\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} E\left(C^i_{jovo} + C^i_{keso}\right) - \sum_{i=1}^{N} E\left(C^i_{jovo} | C^i_{keso} = 0\right)$$

Azért írhatom át a feltételeket is $C^i_{keso} = 0$-ra $C_{keso} = 0$ helyett, mert egyrészt a késői károm csak úgy lehet 0, ha egyik szerződésből sincs késői károm. Másrészt pedig a különböző szerződéseket egymástól függetlennek tekintem. Ez a valóságot igen jól közelíti. Folytassuk most innen a számítást!

$$IBNR^* = \sum_{i=1}^{N} \left(E\left(C^i_{jovo}\right) + E\left(C^i_{keso}\right) - E\left(C^i_{jovo} | C^i_{keso} = 0\right)\right) = \sum_{i=1}^{N} E\left(C^i_{keso}\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \left(E\left(C^i_{jovo} | C^i_{keso} \neq 0\right) P\left(C^i_{keso} \neq 0\right) - E\left(C^i_{jovo} | C^i_{keso} = 0\right) P\left(C^i_{keso} \neq 0\right)\right)$$

Ugyanis minden i-re

$$E(C^i_{jovo}) - E(C^i_{jovo} | C^i_{keso} = 0) = E(C^i_{jovo} | C^i_{keso} \neq 0) P(C^i_{keso} \neq 0) +$$

$$+ E(C^i_{jovo} | C^i_{keso} = 0) P(C^i_{keso} = 0) - E(C^i_{jovo} | C^i_{keso} = 0) =$$

$$= E(C^i_{jovo} | C^i_{keso} \neq 0) P(C^i_{keso} \neq 0) + E(C^i_{jovo} | C^i_{keso} = 0) \cdot (P(C^i_{keso} = 0) - 1) =$$

$$= E(C^i_{jovo} | C^i_{keso} \neq 0) P(C^i_{keso} \neq 0) - E(C^i_{jovo} | C^i_{keso} = 0) \cdot P(C^i_{keso} \neq 0)$$

Azonban $E\left(C^i_{jovo} | C^i_{keso} \neq 0\right) = 0$, hiszen amelyik biztosítási esemény már bekövetkezett arra a jövőben már nem lesz költségünk, csak későn bejelentett kárból származó költségként fog szerepelni. Ezt felhasználva

$$IBNR^* = \sum_{i=1}^{N} \left(E\left(C^i_{keso}\right) - E\left(C^i_{jovo} | C^i_{keso} = 0\right) P\left(C^i_{keso} \neq 0\right)\right)$$

Ez már viszonylag könnyen kiszámítható, de kicsit átalakítva éppen olyan alakra is lehet hozni, mint milyen az eredeti IBNR tartalék képlete. Legyen $V^i =$

$E\left(C^i_{jovo}|C^i_{keso}=0\right)$ az i. szerződésre megképzett életbiztosítási díjtartalék, és vezessünk be egy új valószínűségi változót:

$$X^i = \begin{cases} C^i_{keso} - V^i & \text{ha } C^i_{keso} \neq 0 \\ 0 & \text{ha } C^i_{keso} = 0 \end{cases}$$

Ezt a változót használva

$$IBNR^* = \sum_{i=1}^{N} \left(E\left(C^i_{keso}\right) - V^i P\left(C^i_{keso} \neq 0\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(E\left(C^i_{keso}|C^i_{keso}=0\right) P\left(C^i_{keso}=0\right) + E\left(C^i_{keso}|C^i_{keso}\neq 0\right) P\left(C^i_{keso}\neq 0\right)\right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{N} V^i P\left(C^i_{keso}\neq 0\right) = \sum_{i=1}^{N} 0 \cdot P\left(C^i_{keso}=0\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} E\left(C^i_{keso}|C^i_{keso}\neq 0\right) P\left(C^i_{keso}\neq 0\right) - \sum_{i=1}^{N} V^i P\left(C^i_{keso}\neq 0\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(E\left(C^i_{keso}|C^i_{keso}\neq 0\right) - V^i\right) P\left(C^i_{keso}\neq 0\right) = \sum_{i=1}^{N} E\left(X^i\right)$$

Így tehát szerződésekre szétbontva sikerült az életbiztosítási IBNR tartalékot ahhoz hasonló formában felírni, mint amilyenben a nem-életbiztosítási IBNR-t: $IBNR = \sum_{i=1}^{N} E\left(C^i_{keso}\right)$ és $IBNR^* = \sum_{i=1}^{N} E\left(X^i\right)$.

4.2.3. A gyakorlat és az elmélet összhangja

Ez a képlet valójában azt a modellt írja le, amit a 4.2.1. részben bemutattam. Értelmezzük úgy a biztosító költségeit, hogy a díjtartalék nagyságát már most ki kell fizetnie, a továbbiakban csak az ezen felüli rész számít költségnek. Ekkor a szükséges IBNR tartalék nagysága is csak a későn bejelentett károk díjtartalékon felüli részéből áll, vagyis úgy kell képezni az IBNR tartalékot, hogy a kifutási háromszögben a kifizetett összegnél annyival kevesebbet írunk, amennyi a későn bejelentett károk alapjául szolgáló szerződésekre már megképzett díjtartalék.

Ebből a kifutási háromszögből bármelyik megismert módszerrel kiszámolhatjuk az IBNR tartalékot. Ha az eredeti módszerrel éppen $IBNR = \sum_{i=1}^{N} E\left(C^i_{keso}\right)$-t becsültük, akkor az új módszerrel pont $IBNR^* = \sum_{i=1}^{N} E\left(X^i\right)$-et becsüljük. Ugyanis

$$C^i_{keso} = \begin{cases} C^i_{keso} & \text{ha } C^i_{keso} \neq 0 \\ 0 & \text{ha } C^i_{keso} = 0 \end{cases}$$

és

$$X^i = \begin{cases} C^i_{keso} - V^i & \text{ha } C^i_{keso} \neq 0 \\ 0 & \text{ha } C^i_{keso} = 0 \end{cases}$$

Vagyis a V^i-vel csökkentett értékekből éppen X^i várható értékét kapjuk. Így tehát világosan látszik, hogy a matematikai levezetés ugyanarra az eredményre vezet, mint az a modell, amit csupán "józan paraszti ésszel" kitaláltunk.

4.3. És ha nincsenek adataink a múltból

A fiatal ágazatok problémája nem csak a nemélet-biztosítási ágazatokban merül föl, hanem az életbiztosításban is. Itt is meg lehet próbálkozni a naiv kárhányad módszerrel, de a halálozási táblákat összevetve a kárbejelentések eloszlásával ennél pontosabb módszert is kidolgozhatunk.

Életbiztosítások esetében azt tapasztaljuk, hogy a kárbejelentés gyakorlatilag mindig bekövetkezik 1 éven belül, de igen nagy valószínűséggel 1 hónapon belül is. Viszont annak a valószínűsége, hogy 1-2 napon bejelentsenek egy esetet gyakorlatilag nulla. Ennek megfelelően egy megfelelően paraméterezett lognormális eloszlással próbáltam becsülni a kárbejelentések eloszlását.

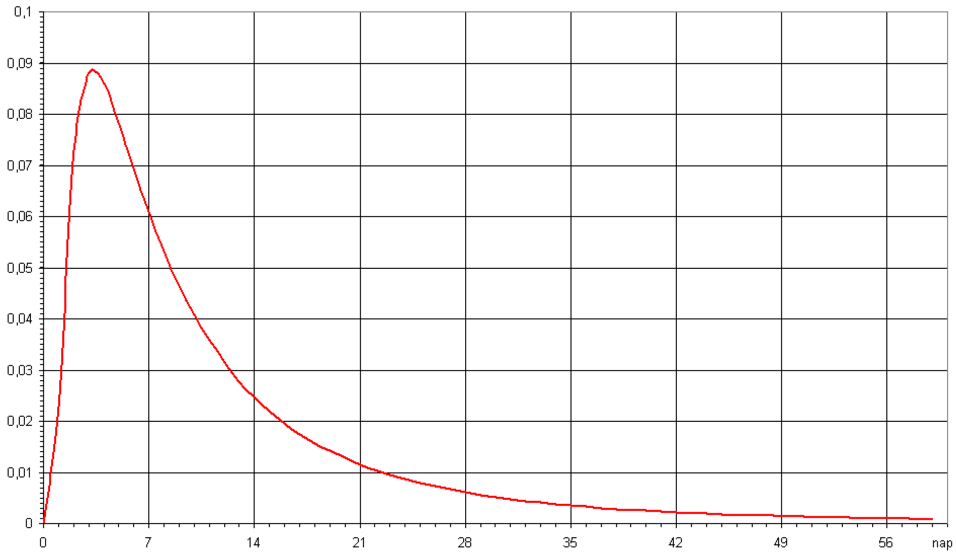
Mivel a kárbejelentések késésének ideje jellemzően néhány nap, ezért a késéseket napokban mérem. Úgy állítottam be a paramétereket, hogy $F(1) < 3\%$, $F(30) > 90\%$, $F(365) > 99,9\%$ és $7 < EX < 14$ legyen. Ezek az értékek jól jellemzik a kárbejelentések késésétől elvárt eloszlást. Ezek alapján az $X \sim lognorm(2.0, 1.0)$ eloszlást választottam. Így $F(1) = 2,28\%$, $F(30) = 91,94\%$, $F(365) = 99,995\%$ és $EX = 12,2$ nap.

A biztosítási események, tehát a halálesetek eloszlását is naponta kellene felírnunk ahhoz, hogy össze tudjuk vetni a kárbejelentések eloszlásával. Ezt az eloszlást azonban a halálozási táblákból ismerjük, ami viszont éves bontásban adja meg a halálozási valószínűséget: egy x éves ember halálozási valószínűségét q_x-szel jelöljük, ez az érték szerepel a halálozási táblákban. Napi bontásban lineárisan közelítjük az elhalálozási valószínűséget: naponta $\frac{q_x}{365}$ a valószínűsége annak, hogy az x éves személy éppen aznap fog meghalni.

Ezek alapján annak a valószínűsége, hogy egy adott szerződésre (amelyben a biztosított x éves) már bekövetkezett a biztosítási esemény, de még nem jelentették be:

$$P(\text{késői kár}) = \frac{q_x}{365} P(\text{min 1 nap késés}) + \frac{q_x}{365} P(\text{min 2 nap késés}) +$$

$$+ \frac{q_x}{365} P(\text{min 3 nap késés}) + ... = \frac{q_x}{365} F(1) + \frac{q_x}{365} F(2) + \frac{q_x}{365} F(3) + ...$$



4.1. ábra. A $lognorm(2.0, 1.0)$ eloszlás

Tudjuk, hogy gyakorlatilag minden kárt bejelentenek 1 éven belül, ezért az ezutáni tagokat elhanyagolhatjuk, vagyis közelítőleg

$$P(\text{késői kár}) \approx \frac{q_x}{365}F(1) + \frac{q_x}{365}F(2) + \frac{q_x}{365}F(3) + ... + \frac{q_x}{365}F(365) =$$

$$= \frac{q_x}{365}\left(F(1) + F(2) + ... + F(365)\right) \approx \frac{q_x}{365}EX = 12,2\frac{q_x}{365}$$

ugyanis $X \sim lognorm(2.0, 1.0)$.

Így tehát azt kaptuk, hogy nem is számít, hogy milyen eloszlású a kárbejelentések késése, az egyetlen lényeges információ a késés várható nagysága. Ezt más, hasonló szerződésekből származó tapasztalattal jól lehet közelíteni. A késések eloszlása nem nagyon függ a konkrét szerződéstípustól: ugyanakkor fogják bejelenteni a halálesetet függetlenül a szerződés feltételeitől.

Tehát az EX értéket a korábbi életbiztosítási tapasztalatunkból becsülhetjük (most már mérjük X-et években, vagyis $P(\text{késői kár}) = EX \cdot q_x$). Ezt az értéket be kell szorozni a biztosítási összeggel, így megkapjuk az IBNR kár várható nagyságát az adott szerződésre. Ezt minden szerződésünkre összegezve kaphatunk egy becslést a szükséges IBNR tartalék nagyságára:

$$IBNR = \sum_{i=1}^{N} \text{Biztosítási összeg}_i \cdot P(\text{késői kár}_i)$$

ha N biztosítottam van. Vagyis

$$IBNR = EX \sum_{i=1}^{N} \text{Biztosítási összeg}_i q_i$$

ahol q_i az $i.$ biztosított tárgyévi elhalálozási valószínűsége (ezt az illető életkora határozza meg). Tehát

$$IBNR = EX \sum_{i=1}^{N} E(\text{tárgyévi kifizetés i. biztosítottnak})$$

azaz

$$IBNR = EX \cdot E(\text{tárgyévi szolgáltatásaim})$$

Az adott évre várt szolgáltatások összesített értéke amúgy is rendelkezésre áll (az adott évi eredmény tervezéséhez is szükséges). Ezt megszorozva a bejelentések késésének várható értékével megkapjuk a szükséges IBNR tartalék nagyságát. Vagyis ez a módszer igen egyszerű megoldást biztosít az IBNR károk várható értékének meghatározására: csupán kevés, könnyen megszerezhető adatra van szükségünk, és ezekkel is csak igen egyszerű számításokat kell végeznünk. Azonban ha már van kártapasztalatunk, a kifutási háromszögön alapuló módszerek sokkal pontosabb eredményt adnak.

5. fejezet

Egy példa

Ebben a fejezetben egy példán szeretném illusztrálni a módszerem gyakorlati alkalmazhatóságát. Egy olyan állományt vizsgáltam meg, amire a valóságban is egyben képezik az IBNR tartalékot.[1] A különböző módszerek eredményei a 5.1 ábrán látszanak. További részletek a D függelékben és a CD-mellékleten található .xls fájlban találhatók.

a díjtartalék fölötti kifizetések tényleges összege:				14,546,629
	átlag	pesszimista	friss(8)	friss(4)
jéghegy:	13,290,894	39,801,498	14,961,619	19,722,374
láncszem:	13,617,831	42,313,266	14,781,486	19,312,746
lánclétra:	13,330,452			
szeparációs:	7,840,593			

5.1. ábra. A különböző módszerek eredményei

A tartalékképzést 2001. december 31-ére végeztem el, így lehetőségem nyílt a különböző becsléseket a tényleges értékkel is összevetni. Az állományt megvizsgálva ugyanis azt tapasztaltam, hogy 3 éven túli késések nem fordulnak elő, tehát a 2001. december 31-éig bekövetkezett károk mára igen nagy valószínűséggel kiderültek. Ezek alapján valódi értéknek a 2001. december 31-ig bekövetkezett és 2004. december 31-ig bejelentett károk, illetve a 2001. december 31-ig bekövetkezett és bejelentett károk különbségét tekintettem.

A kifutási háromszögeket negyedéves adatokból építettem fel, 1998. 3. negyedévétől kezdve. Ezelőttről ugyanis nem ismertek a kárbejelentések időpontjai. Így tehát egy 14×14-es kifutási háromszöggel tudtam dolgozni.

Ebben a fejezetben és a D függelékben szereplő összes kifutási háromszög a díjtartalékkal csökkentett kárkifizetések összegét tartalmazza – a 4. fejezetben ismertetett módszeremnek megfelelően.

[1] Az adatok egy magyarországi biztosító állományából származnak

Az 5.1. és az 5.2 ábrákon a sorokban négy fő IBNR-számítási technika, az oszlopokban pedig ezek különböző változatai szerepelnek. A lánclétra és a szeparációs eljárást csak egy féle képpen lehet végezni, ezért ezek sorában csak $1-1$ érték szerepel. A jéghegy és a láncszemhányados módszert viszont több féle képpen alkalmaztam:

1. Az átlag jelöli azt a módszert, amikor az egyes becslésekhez a felhasználható összes érték számtani átlagát veszem.

2. A pesszimista oszlopban olyan az értékek szerepelnek, amiknek kiszámítása során a felhasználható értékek minimumát (jéghegy módszernél), illetve maximumát (láncszemhányados módszernél) vettem, a pesszimista szemléletnek megfelelően.

3. Végül a friss(4) és a friss(8) oszlopokban szereplő értékeknél a 4, illetve 8 legfrissebb értékek számtani átlagát használtam.

Ezeknek a módszereknek a részletes leírása a 2.1. fejezet megfelelő alfejezeteiben szerepel.

5.1. Az eredmények értékelése

Legelőször nézzük meg a különböző módszerekkel kiszámított tartalék eltérését a tényleges értéktől! A 5.2. ábrán láthatóak a százalékos eltérések.

	átlag	pesszimista	friss(8)	friss(4)
jéghegy:	-8.63%	173.61%	2.85%	35.58%
láncszem:	-6.38%	190.88%	1.61%	32.76%
lánclétra:	-8.36%			
szeparációs:	-46.10%			

5.2. ábra. A különböző módszerek százalékos hibái

Jól látható, hogy a különböző módszerek egészen eltérő eredményeket adnak. Elsősorban a pesszimista becslések térnek el erősen pozitív irányba, a szeparációs módszerrel végzett számítás viszont éppen negatív irányba torzít. Emellett a különböző átlagos értéket használó módszereket megnézve látszik az is, hogy csak a frissebb adatokat használva magasabb tartalékot kapunk eredményül.

5.1.1. A pesszimista becslések

Ezek a becslések természetesen mindig valamennyire felfelé torzítanak, hiszen meg sem próbálják a várható értéket közelíteni. Most viszont nagyon erős $+200\%$ körüli torzítást kaptunk. Ezt az magyarázza, hogy ha megnézzük a kifutási háromszögben szereplő értékeket, akkor jól látható azok erőteljes szóródása.

Ránézésre is látszik, hogy az egyes negyedévekben egészen más a késések aránya. Tehát akár jéghegy, akár láncszem módszert használok, olyan értékeknek kell valamilyen közepét számítanom (a α-val illetve β-val jelölt arányok a 2.1 fejezetből), amik nagyon erősen szórnak. Ennek megfelelően a különböző középértékek erősen eltérnek, illetve a minimum – átlag – maximum értékek különbsége is nagyon nagy lesz. Ez tehát megmagyarázza a pesszimista becslések erős pozitív torzítását.

5.1.2. A szeparációs módszer

A pesszimista módszerekkel ellentétben a szeparációs módszer alkalmazásakor azt tapasztaltam, hogy negatív irányba torzít közel 50%-kal. Ez nagyon erős torzításnak számít, hiszen itt nem alsó korlátot akarunk adni a szükséges tartalékra (mint ahogy a pesszimista becslések felső korlátot próbálnak adni a tartalékra), hanem az IBNR károk várható értékét becsüljük.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
199803	1	683665.88	83620.26	13193.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
199804	2	539198.49	148341.80	0.00	-701.47	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	**0.00**
199901	3	646857.42	128252.06	8731.75	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	**0.00**	**0.00**
199902	4	612150.39	170812.44	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	8018.90	0.00	0.00	**0.00**	**0.00**	**0.00**
199903	5	582527.99	182025.57	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**
199904	6	533442.57	217520.21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**
200001	7	638866.70	126621.79	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	16347.95	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**
200002	8	618728.34	136176.04	0.00	0.00	0.00	2871.27	0.00	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**
200003	9	587672.76	106951.90	0.00	27002.78	0.00	0.00	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**
200004	10	636998.55	202654.06	0.00	0.00	0.00	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**
200101	11	489554.84	174981.58	0.00	-1644.58	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**
200102	12	659784.42	206378.35	0.00	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**
200103	13	462160.59	241682.12	**12830.64**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**
200104	14	629473.79	**103829.86**	**12885.98**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**
mü		802792	633152	808392	740402	761371	715468	856387	745350	723849	743950	692209	869788	671410	885859
d		0.8516	0.1321	0.0163	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

5.3. ábra. A szeparációs módszer

Ha megnézzük a szeparációs módszer alkalmazása során kiszámolt μ és d értékeket, azt láthatjuk, hogy a d-k közül csak az első három különbözik 0-tól. A μ értékek pedig jól láthatóan nem követnek semmilyen tendenciát, pedig a vizsgált időszak árszínvonala az időnek enyhén csökkenő mértékben növekvő függvénye (vagyis pozitív, de enyhén csökkenő mértékű volt az infláció). Tehát a szeparációs módszer ebben az esetben nem alkalmazható. Az így kapott 8 millió forint körüli értéket tehát nem veszem figyelembe a tartalék meghatározásánál – különösen annak fényében, hogy a többi módszerrel ennél konzisztensen magasabb értéket kaptam.

5.1.3. A jéghegy és a láncszemhányados módszerek

A jéghegy és a láncszemhányados módszerek közel azonos tartalékot adtak eredményül – ha azonos átlagszámítási eljárást alkalmaztam. A különböző átlagszámítások eredményei azonban eléggé eltértek egymástól.

a(átlag)	0.7743	0.9895	0.9918	0.9949	0.9949	0.9953	0.9953	0.9983	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
a(min)	0.6126	0.9329	0.9329	0.9655	0.9655	0.9692	0.9692	0.9899	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
a(friss 8)	0.7549	0.9882	0.9884	0.9936	0.9943	0.9953	0.9953	0.9983	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
a(friss 4)	0.7170	0.9783	0.9802	0.9864	0.9891	0.9921	0.9916	0.9975	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

5.4. ábra. A jéghegy módszer α értékei

b(átlag)	1.2851	1.0024	1.0032	1.0000	1.0004	1.0000	1.0031	1.0017	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
b(max)	1.5229	1.0172	1.0389	1.0000	1.0038	1.0000	1.0214	1.0102	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
b(friss 8)	1.3149	1.0000	1.0045	1.0000	1.0005	1.0000	1.0031	1.0017	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
b(friss 4)	1.3778	1.0000	1.0091	1.0000	1.0010	1.0000	1.0053	1.0026	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

5.5. ábra. A láncszemhányados módszer β értékei

Jól látszik, hogy minél inkább csak a friss adatokat használtam (az utolsó 8 illetve 4 negyedév adatait), annál magasabb tartalékot kaptam eredményül. Ezt az okozza, hogy éppen az utolsó előtti negyedévben (2001. 3. negyedév) szerepel egy kiugróan magas késésarány. A korábbi években az egy negyedévet késő kárnagyság a nem késő kárnagyságnak kb. $20 - 30\%$-a volt (2. oszlop : 1. oszlop), 2001. 3. negyedévében viszont több, mint 50%-ra jött ki. Ez pedig minél kevesebb értékből képezem az átlagot, annál nagyobb súllyal szerepel, vagyis egyre inkább növeli a tartalék értékét.

Ahhoz, hogy eldönthessük, hogy ezt a magas késési arányt milyen mértékig vegyük figyelembe, azt kéne tudnunk, hogy egyedi esetről van szó, vagy pedig egy tendencia kezdetéről. Mivel azonban ezt nem tudjuk, ezért kiszámítottam mindkét módszerrel, mindhárom fajta átlagolással (sima átlag, 4 illetve 8 legfrissebb adat átlaga), plusz még lánclétra módszerrel a tartalékot, és ennek a hét értéknek az átlagát tekintem megbízható eredménynek.

módszerek átlaga (kivéve, ami irreális):			15,573,915
		hibája:	7.06%

5.6. ábra. Az átlagos eredmény

A szükséges értékkel összehasonlítva azt láthatjuk, hogy ez is kb. 7%-kal felül becsüli a tényleges értéket. A későbbi adatokat megvizsgálva pedig azt szűrhetjük le, hogy ez a kiugróan magas késésarány tendenciává vált (az átlagos érték kb. 25%-ról 40% környékére nőtt), azonban a 2001. 4. negyedévében bekövetkezett károk késési aránya éppen viszonylag alacsony maradt. Így a kiugró érték figyelembevétele a szükségesnél magasabb tartalékot eredményezett, a későbbiekben azonban ez szükségessé válik.

5.1.4. A lebonyolítási eredmények

A tényleges értékkel való összehasonlítás mellett egy olyan mutatószámot is kiszámítottam a különböző becslésekre, amit a gyakorlatban is alkalmaznak: ez az arányos lebonyolítási eredmény. Ezt a következő módon számítják (t a tartalékképzés napja):

$$\text{lebonyolítási eredmény} = \text{megképzett tartalék a } t \text{ időpontban} -$$

$$- \text{ egy éven belüli felhasználás a tartalékból } t \text{ előtti károkra} -$$

$$- \text{ az egy év múlva megképzett tartalék } t \text{ előtti károkra jutó része}$$

Ebből már egyszerűen származik az arányos lebonyolítási eredmény:

$$\text{arányos lebonyolítási eredmény} = \frac{\text{lebonyolítási eredmény}}{\text{megképzett tartalék a } t \text{ időpontban}}$$

	átlag	pesszimista	friss(8)	friss(4)
jéghegy:	-12.35%	53.93%	-0.84%	27.00%
láncszem:	-9.71%	52.19%	-2.30%	25.46%
lánclétra:	-12.69%			
átlag:	4.70%			

5.7. ábra. A különböző módszerek arányos lebonyolítási eredménye

Ez az érték 10% körül számít jónak, és jellemzően inkább az pozitív érték a jobb.

A különböző módszerekkel kapott tartalék arányos lebonyolítási eredményeit a 5.7. táblázat foglalja össze.

Tehát azt láthatjuk, hogy a sima átlag és a 8 legfrissebb adatból származó érték negatív, de a 10%-os nagyságrendbe beleférő arányos lebonyolítási eredményt adott. A pesszimista módszerekből – természetesen – nagy pozitív lebonyolítási eredmény származott és hasonlóan a 4 legfrissebb értékből számított tartalékok is 10%-ot jóval meghaladóan pozitív eredményt adtak. Azonban a 7 érték átlagából (a táblázatban szereplők, kivéve a pesszimistákat) $4,7\%$-os arányos lebonyolítási eredményt kaptam, ami ismét azt mutatja, hogy jó választás volt a szóba jöhető értékek átlagát választani.

A. Függelék

2003. évi LX. törvény a biztosítókról és a biztosítási tevékenységről

A.1. A biztosítástechnikai tartalékok

117. § (1) A biztonságos üzletmenet érdekében a biztosítónak a mérleg fordulónapján fennálló, várható kötelezettségei teljesítésére, a károk ingadozására, valamint a várható biztosítási veszteségekre biztosítástechnikai tartalékokat kell képeznie.

(2) Biztosítástechnikai tartaléknak minősülnek:

a) a meg nem szolgált díjak tartaléka;

b) a matematikai tartalékok, ezen belül:

1. az életbiztosítási díjtartalék,
2. a betegségbiztosítási díjtartalék,
3. a balesetbiztosítási járadéktartalék,
4. a felelősségbiztosítási járadéktartalék;

c) a függőkár tartalékok, ezen belül:

1. a bekövetkezett és bejelentett károk tartaléka (tételes függőkár tartalék),
2. a bekövetkezett, de még be nem jelentett károk tartaléka (IBNR);

d) az eredménytől függő díj-visszatérítési tartalék;

e) az eredménytől független díj-visszatérítési tartalék;

f) a káringadozási tartalék;

g) a nagy károk tartaléka;

h) a törlési tartalék;

i) a befektetési egységekhez kötött (unit-linked) életbiztosítások tartaléka;

j) az egyéb biztosítástechnikai tartalékok.

A.2. A biztosítástechnikai tartalékok képzése

118. § (1) A biztosítástechnikai tartalékot a biztosítónak olyan mértékben kell képeznie, hogy az a viszontbiztosításba nem adott kockázatokból származó kötelezettsége folyamatos és tartós teljesítésére - az ésszerűség és a biztosítási tevékenység tapasztalatai alapján - előreláthatóan fedezetet nyújtson. Az életbiztosításokra - a tiszta kockázati életbiztosítások, illetve a haláleseti kockázatot is tartalmazó biztosítások kockázati részének kivételével - a biztosítástechnikai tartalékokat a viszontbiztosításba adott kockázatokra is meg kell képezni.

(2) A nem életbiztosítási ág esetében a biztosítónak a bruttó biztosítástechnikai tartalékok legalább 2 százalékát meg kell képeznie, függetlenül a viszontbiztosításba adott kockázat arányától.

(3) Hitel- és kezesi biztosítást végző biztosítónak a 119. § (3) bekezdésében foglalt módon a kockázat terjedelmével arányosan külön tartalékot kell képeznie.

(4) Együttbiztosítás esetén a biztosítástechnikai tartalékokat az együttbiztosításban részt vevők kockázatvállalásukból eredő kötelezettségeiknek megfelelő mértékben képzik.

119. § (1) A biztosítástechnikai tartalékokat ágazatonként kell a mérleg fordulónapjával képezni.

(2) A matematikai tartalék év végére várható értékének eszközfedezetét folyamatosan, de legalább negyedévenként az előre látható kötelezettségeket figyelembe véve meg kell teremteni, és folyamatosan fenn kell tartani annak érdekében, hogy az év végére a szükséges tartalékkal azonos nagyságú, a befektetési előírásoknak megfelelő eszközfedezet a biztosító rendelkezésére álljon.

(3) A biztosítástechnikai tartalékok tartalmát, képzésének és felhasználásának rendjét a pénzügyminiszter rendeletben szabályozza.

(4) A biztosító köteles az életbiztosítások esetében a biztosítástechnikai tartalékok képzésénél alkalmazott elvek és módszerek megismerését - az ügyfél kérésére - lehetővé tenni.

120. § Az e törvény hatálybalépését követően megkötött életbiztosítási szerződések díjának - ésszerű aktuáriusi feltételezések mellett - elegendőnek kell lenniük a biztosító valamennyi, e szerződésekkel összefüggésben felmerülő kötelezettségének teljesítésére, illetve a megfelelő biztosítástechnikai tartalékok képzésére.

B. Függelék

8/2001. (II. 22.) PM rendelet a biztosítástechnikai tartalékok tartalmáról, képzésének és felhasználásának rendjéről

A biztosítóintézetekről és a biztosítási tevékenységről szóló - többször módosított - 1995. évi XCVI. törvény (a továbbiakban: Tv.) 168. §-a (2) bekezdésének b) pontjában kapott felhatalmazás alapján a biztosítástechnikai tartalékok tartalmáról, képzésének és felhasználásának rendjéről a következőket rendelem el:

1. § (1) A biztosító ágazatonként köteles meghatározni a biztosítástechnikai tartalékok összegét a viszontbiztosítás figyelembevétele nélkül, a viszontbiztosításba adott kockázatokra jutó biztosítástechnikai tartalékok összegét és a biztosító által megképzett biztosítástechnikai tartalékok összegét.

(2) A biztosító a biztosítástechnikai tartalékszükséglet számítási módját és a felhasznált adatokat köteles egyértelműen dokumentálni. A biztosítástechnikai tartalékok képzési szabályait a biztosító által készített tartalékolási szabályzat tartalmazza.

(3) A viszontbiztosításba adott kockázatrészek után a biztosítástechnikai tartalékokat - a (4) bekezdésben foglaltak kivételével - nem szabad megképezni.

(4) A Tv. 75. §-ának (3) bekezdése alapján az életbiztosítások esetében - a tiszta kockázati életbiztosítások, illetve a haláleseti kockázatot is tartalmazó biztosítások kockázati részének kivételével - a biztosítástechnikai tartalékokat a viszontbiztosításba adott kockázatrészekre is meg kell képezni. A Tv. 75. §-ának (4) bekezdése alapján a nem-életbiztosítási ág esetében a biztosítástechnikai tartalékokat a viszontbiztosításba nem adott kockázatok mértékéig, de legalább 2%-ban kell megképezni.

(5) A biztosítástechnikai tartalékoknak a tárgyévet követő években a legfrissebb információk alapján történő, nem visszamenőleges hatályú képzése minősül a biztosí-

tástechnikai tartalékok helyesbítésének.

(6) Ahol e rendelet a tartalék egyedi képzését írja elő, ott a megképzett tartalékot egyedi azonosításra alkalmas módon archiválni kell.

2. § (1) A Tv. 75. §-a (2) bekezdésének a) pontjában meghatározott meg nem szolgált díjak tartaléka a tárgyév, illetve az azt megelőző évek folyamán előírt díjakból képzett tartalék, amely a díjfizetés alapját képező biztosítási szerződésekből származó, tárgyévet követő év(ek) kötelezettségeinek fedezetére szolgál.

(2) A meg nem szolgált díjak tartalékát - a (3) és (4) bekezdés kivételével - a biztosító által művelt valamennyi ágazatra meg kell képezni.

(3) A 60 napot meg nem haladó tartamú szerződések díját - ha a díjat a biztosítási időszak tartamának egészére egy összegben befizetik a szerződés megkötésekor - a befizetés évében lehet elszámolni. Ebben az esetben a díjból nem kell meg nem szolgált díjak tartalékát képezni.

(4) Élet- és betegségbiztosítások esetében a meg nem szolgált díjak tartalékát legfeljebb a tárgyév előírt díjaiból lehet képezni. Azon szerződések esetében, amelyekre a biztosító élet- vagy betegségbiztosítási díjtartalékot képez, a meg nem szolgált díjak tartalékát - a biztosító döntésétől függően - a matematikai tartalékon belül is képezheti. Ez esetben ezen szerződések után meg nem szolgált díjak tartaléka nem képezhető.

(5) A meg nem szolgált díjak tartalékának megállapítása a díjelőírás elszámolásával egyidejűleg, de legkésőbb a tárgyév mérleg fordulónapján, a tárgyévet és az azt követő éve(ke)t megillető díjrész különválasztásával történik.

(6) A meg nem szolgált díjak tartalékát a tárgyév mérleg fordulónapjával - a (7) bekezdésben foglaltak kivételével - szerződésenként egyedileg kell megállapítani és megképezni a következőképpen:

a) a díjelőírás összegét időarányosan, illetve - indokolt esetben - a terméktervben foglaltak szerint kell megosztani a tárgyév és az azt követő időszakok között;

b) viszontbiztosításnál

ba) arányos viszontbiztosítási szerződés esetén a közvetlen biztosító a teljes díjelőírást alapul véve elvégzi az a) pont szerinti díjmegosztást a tárgyév és az azt követő időszakok között, majd az így számított meg nem szolgált díjból a viszontbiztosítási hányad arányában határozza meg a biztosítóra és a viszontbiztosításra jutó meg nem szolgált díjak tartalékának összegét,

bb) nem arányos viszontbiztosítási szerződés esetén a biztosító a meg nem szolgált díjból a viszontbiztosítás sajátosságainak függvényében határozza meg a biztosítóra, illetve a viszontbiztosításra jutó meg nem szolgált díjak tartalékának összegét.

(7) A meg nem szolgált díjak tartaléka közelítő módszerrel is megállapítható, ha az egyedi számítás az adott esetben nem, vagy csak aránytalanul nagy költséggel alkalmazható és a közelítő módszerrel számított tartalék az egyedileg számított tartalékot jól közelíti. A közelítő módszer alkalmazásánál figyelembe kell venni a szerződések időtartamát és a díjfizetés gyakoriságát.

3. § (1) A matematikai tartalékok azokat a Tv. 75. §-a (2) bekezdésének b) pontjában felsorolt tartalékokat foglalják magukban, amelyeket a terméktervben rögzített biztosításmatematikai elvek és módszerek szerint kell meghatározni és képezni.

(2) A matematikai tartalékokat a szerződésből eredő jövőbeni kiadások és jövőbeni bevételek tartalékképzés időpontjára a technikai kamatlábak felhasználásával számított várható jelenértékeinek különbözeteként (prospektív módszer) kell meghatározni és képezni. A prospektív módszertől eltérő egyéb módszer csak akkor alkalmazható, ha a prospektív módszerrel történő meghatározás nem lehetséges, vagy alkalmazása az adott esetben aránytalanul nagy költséggel jár, és az egyéb módszerrel számított tartalékszükséglet jól közelíti a prospektív módszerrel meghatározott összeget.

(3) A matematikai tartalékszükségletet a (2) bekezdésben foglaltakat alapul véve a terméktervben, illetve a terméktervvel nem rendelkező egyedi szerződés tartalékolási leírásában rögzített tartalékszámítási elvek és képletek szerint - a kollektív díjtartalékkal rendelkező csoportos biztosítások kivételével - egyénenként kell kiszámítani, és a mérleg fordulónapján érvényben lévő szerződésekre, valamint járadékjogosultakra vonatkozóan kell képezni. A képzés, illetve a képzés módosításának indokoltságát bizonylatokkal, számításokkal, illetve egyéb módon kell alátámasztani.

(4) Az 1987. január 1-je előtt bevezetett és a mellékletben felsorolt életbiztosítási termékekre a matematikai tartalékot az e §-ban és a mellékletben foglaltak alapján kell képezni.

(5) A viszontbiztosításba vett és az együttbiztosítással vállalt kockázat fedezetére szolgáló matematikai tartalékot

a) az élet- és betegségbiztosításoknál a kockázatvállalásból eredő kötelezettségeknek megfelelő mértékben,

b) más ágazatoknál az elsődleges biztosítók által megadott tartalékszükséglet alapján

kell kiszámítani és képezni.

(6) A viszontbiztosításba adott állománynál a viszontbiztosítók részesedését a viszontbiztosítási szerződések alapján kell számba venni.

(7) A matematikai tartalék számításánál a biztosítási esemény kockázati tényezőin túl figyelembe kell venni:

a) a garantált szolgáltatások, illetve kifizetések értékét (beleértve a garantált visszavásárlás értékét is),

b) a garantált hozamokat,

c) a kötvénytulajdonosok számára biztosított opciókat (beleértve a díjmentes leszállítás opcióját is),

d) a szerződéssel összefüggő, jövőbeni várható költségeket, valamint a folyamatos díjfizetés esetén a díjfizetés időtartamára megosztott szerzési költségeket,

e) a tartalékok befektetésének várható hozamát.

4. § (1) A Tv. 75. § (2) bekezdése b) pontjának 1. alpontjában meghatározott életbiztosítási díjtartalék az életbiztosítási szerződésekből eredő - és más biztosítástechnikai tartalékokkal nem fedezett - kötelezettségek fedezetére szolgál.

(2) A szerződés életbiztosítási díjtartalékát a szerződés összes kockázatára együttesen és kockázati részekre bontottan is meg lehet képezni.

(3) Az életbiztosítási szerződés megkötésekor a biztosító köteles egyértelműen meghatározni a szerződés teljes tartamára az életbiztosítási díjtartalék és annak esetleges megbontása számítási módját és paramétereit. A szerződés tartama alatt a díjtartalék számítási módja és paraméterei legfeljebb akkor változtathatók, ha ezáltal a szerződő (biztosított, kedvezményezett) nem kerülhet hátrányosabb helyzetbe.

(4) Az életbiztosítási tartalék képzésénél egyértelműen rögzíteni kell, hogy a képzésnél milyen módon vették figyelembe a felmerülő szerzési költségeket.

5. § (1) A Tv. 75. § (2) bekezdése b) pontjának 2. alpontjában meghatározott betegségbiztosítási díjtartalék a betegségbiztosítási szerződésekből eredő - és más biztosítástechnikai tartalékokkal nem fedezett - kötelezettségek fedezetére szolgál.

(2) A szerződés betegségbiztosítási díjtartalékát a szerződés összes kockázatára együttesen és kockázati részekre bontottan is meg lehet képezni.

(3) A betegségbiztosítási szerződés megkötésekor a biztosító köteles egyértelműen meghatározni a szerződés teljes tartamára a betegségbiztosítási díjtartalék és esetleges megbontása számítási módját és paramétereit. A szerződés tartama alatt a díjtartalék számítási módja és paraméterei legfeljebb akkor változtathatók, ha ezáltal a szerződő (biztosított, kedvezményezett) semmilyen esetben sem kerülhet hátrányosabb helyzetbe.

6. § (1) A Tv. 75. § (2) bekezdése b) pontjának 3. alpontjában meghatározott baleset-biztosítási járadéktartalék a járadékfizetési kötelezettséget is tartalmazó baleset-biztosításoknál a biztosítási esemény miatt fellépő járadékfizetési kötelezettség és az azzal kapcsolatos költségek fedezetére szolgál.

(2) A tartalékszükségletet úgy kell megállapítani, hogy a tartalék a befektetéséből származó hozamával együtt várhatóan fedezze a járadékkifizetéseket és az ahhoz kapcsolódó költségeket.

(3) A baleset-biztosítási járadéktartalékot a megállapított járadékok és a várható - járadékkifizetéssel kapcsolatos - költségek alapján járadékosonként egyedileg kell meghatározni, és a megállapítást követő legközelebbi mérleg fordulónapon kell megképezni. Ha a károsult, illetve biztosított több jogcímen is jogosult járadékra, és a mérleg fordulónapján még nem minden járadékfajta került véglegesen megállapításra, akkor a még meg nem állapított járadékjogcímekre továbbra is függőkár tartalékot kell képezni.

7. § (1) A Tv. 75. § (2) bekezdése b) pontjának 4. alpontjában meghatározott felelősségbiztosítási járadéktartalék a felelősségbiztosításból eredő járadékfizetési kötelezettségek és az azzal kapcsolatos költségek fedezetére szolgál.

(2) A tartalékszükségletet úgy kell megállapítani, hogy a tartalék a befektetéséből származó hozamával együtt várhatóan fedezze a járadékkifizetéseket és az ahhoz kap-

csolódó költségeket.

(3) A felelősségbiztosítási járadéktartalékot a megállapított járadékok és a várható - járadékkifizetéssel kapcsolatos - költségek alapján járadékosonként egyedileg kell meghatározni, és a megállapítást követő legközelebbi mérleg fordulónapon kell megképezni. Ha a károsult, illetve biztosított több jogcímen is jogosult járadékra és a mérleg fordulónapján még nem minden járadékfajta került véglegesen megállapításra, akkor a még meg nem állapított járadékjogcímekre továbbra is függőkár tartalékot kell képezni.

8. § (1) A Tv. 75. § (2) bekezdése c) pontjának 1. alpontjában meghatározott bekövetkezett és bejelentett károk tartaléka (tételes függőkár tartalék) a mérleg fordulónapjáig bekövetkezett és bejelentett, de még nem vagy csak részben rendezett károk, biztosítási események miatti kifizetések és ezek költségeinek fedezetére szolgál.

(2) A tételes függőkár tartalékot a mérleg fordulónapján a tárgyévben bekövetkezett káreseményekre úgy kell megállapítani és képezni, hogy az szerződésenként, egyedileg fedezetet nyújtson a várhatóan felmerülő kárkifizetési ráfordításokra, valamint (ha az adott biztosítási ágazatban a biztosító járadékfizetésre kötelezett) a még meg nem állapított, fizetendő járadékokra, továbbá a (4) bekezdés szerint megállapított kárrendezési költségekre és a járadékok folyósításával kapcsolatban várhatóan felmerülő igazgatási költségekre.

(3) A tárgyévet megelőző években megállapított tételes függőkár fedezetére szolgáló tartalékszükségletet a tárgyévi mérleg fordulónapján - a befolyásoló tényezők alakulását figyelembe véve - egyedileg felül kell vizsgálni, és az egyedi függőkár tartalékok összegét az értékeléssel megállapított tartalékszükséglet összegére kell helyesbíteni. A képzés indokoltságát bizonylatokkal, számításokkal, illetve egyéb módon kell alátámasztani. A tételes függőkár tartalékokat a bekövetkezés és a bejelentés éve szerint is nyilván kell tartani.

(4) A (2) bekezdés szerinti kárrendezési és igazgatási költségek fedezetére a függőkár tartalékon belül képzett összeg megállapításakor a tárgyévben felmerült kárrendezési költségeknek a kárkifizetéshez viszonyított arányát, az igazgatási költségek megállapításánál pedig a tárgyévben a járadékfizetéssel kapcsolatban felmerült igazgatási költségeknek a járadékfizetésekhez viszonyított arányát kell alkalmazni. Az arányoktól való eltérést külön indokolni kell.

(5) A tárgyévet megelőző években bekövetkezett, a bekövetkezés évében be nem jelentett, de a tárgyév mérleg fordulónapjáig bejelentett káresemények (késői károk) ismertté válásakor a tételes függőkár tartalékon belül - a bekövetkezés éve szerinti részletezésben - elkülönítetten kell nyilvántartani az azok fedezetére szolgáló, a (2) bekezdés szerint meghatározott függőkár tartalékot.

(6) A tételes függőkár tartalékszükséglet összegének meghatározásánál csökkentő tényezőként kell figyelembe venni a szerződésenként (káreseményenként) nagy valószínűséggel érvényesíthető visszkereset vagy kármegosztás várható összegét.

(7) Az előreláthatólag járadékfizetéssel járó káreseményeknél egyedileg kell be-

csülni a járadék és az ehhez kapcsolódó költségek várható tőkeértékét, amely a járadék megállapításáig a tételes függőkár tartalékban marad. Az adott szerződéshez (káreseményhez) kapcsolódó járadék összegének megállapítását követő mérleg fordulónapokon e szerződés (káresemény) vonatkozásában csak az esetlegesen várható járadéknövekedésekre és az egyéb várható, nem járadék jellegű kárkifizetésekre, valamint ezek költségeire lehet tételes függőkár tartalékot képezni.

9. § (1) A Tv. 75. § (2) bekezdése c) pontjának 2. alpontjában meghatározott bekövetkezett, de még be nem jelentett károk tartaléka (a továbbiakban: IBNR tartalék) a mérleg fordulónapjáig bekövetkezett vagy okozott, de még be nem jelentett késői károk, biztosítási események miatti kifizetések és azok várható költségének fedezetére szolgál.

(2) Az IBNR tartalékot a tárgyév mérleg fordulónapján a következőképpen kell meghatározni és képezni (a meghatározás és képzés módszere attól függ, hogy mióta műveli a biztosító az adott biztosításokat):

a) olyan új termék vagy egyedi szerződés esetében, amelyet a biztosító még nem művel három éve, és amelyre az ágazat többi biztosításától elkülönítetten kíván IBNR tartalékot képezni, azt a tárgyévben a termék tárgyévi megszolgált díjának maximum 6%-ának erejéig teheti. Magas káralakulású vagy erőteljesen fejlődő állomány esetén a biztosító ettől magasabb mértékű IBNR tartalékot is képezhet. Ennek indokoltságát számításokkal kell alátámasztani;

b) az a) ponthoz nem tartozó szerződések káraira az IBNR tartalék szükségletet az elmúlt évek tapasztalati adataira építve olyan statisztikai módszerrel kell megállapítani, melynél a károk kifutási háromszögeinek adatait fel kell használni.

(3) A konkrét késői károk ismertté válásakor a káreseményre tételes függőkár tartalékot kell képezni. Az ilyen káreseményeket a tételes függőkár tartalékon belül elkülönítetten kell nyilvántartani.

(4) A tárgyév mérleg fordulónapján az IBNR tartalékot a tárgyév mérleg fordulónapjával a szükséges szintre kell módosítani.

(5) A biztosítónak gyűjtenie kell a károk bekövetkezésének, okozásának, illetve bejelentésének időpontjait, valamint ezen túlmenően külön kell gyűjtenie az egyes évekre vonatkozóan a mérleg fordulónapjáig bekövetkezett, de be nem jelentett késői károk statisztikáit.

10. § (1) A Tv. 75. §-a (2) bekezdésének d) pontjában meghatározott eredménytől függő díjvisszatérítési tartalék a biztosítási feltételek alapján a biztosítottat (szerződőt, kedvezményezettet) a biztosító tárgyévi, illetve a tárgyévet megelőző évei eredményéből megillető díjvisszatérítés fedezetére szolgál. A visszajuttatás módját (visszafizetés, díjjóváírás, többletszolgáltatás) a biztosítási szerződési feltételek határozzák meg. Biztosító egyesület esetében ezt meghatározhatja az egyesület alapszabálya is.

(2) A Tv. 62. §-ának (2) bekezdésében és 165. §-ban foglaltak szerint az életbiztosítási ágban a matematikai tartalékok hozamából a biztosítottaknak visszajuttatandó,

de ki nem fizetett, vagy még oda nem ígért (meghirdetett) részt a tárgyév mérleg fordulónapján az eredménytől függő díjvisszatérítési tartalékba kell helyezni. Az eredménytől függő díjvisszatérítési tartalékba helyezés önmagában nem minősül a többlethozam visszajuttatásának.

(3) A fel nem használt eredménytől függő díjvisszatérítési tartalékot nem lehet felszabadítani, annak összege mindaddig a tartalékban marad, amíg a biztosítottaknak (szerződőknek, kedvezményezetteknek) véglegesen vissza nem juttatják.

11. § (1) A Tv. 75. §-a (2) bekezdésének e) pontjában meghatározott eredménytől független díjvisszatérítési tartalék a biztosítási feltételek szerint - így különösen kármentesség, alacsony káralakulás miatt - a biztosítottnak (szerződőnek, kedvezményezettnek) történő díjvisszatérítés fedezetére szolgál.

(2) Az eredménytől független díjvisszatérítési tartalék meghatározásának szabályait a biztosítási feltételekkel összhangban a termékterv tartalmazza.

(3) Az eredménytől független díjvisszatérítési tartalékot a tárgyév mérleg fordulónapján az érvényben levő szerződések alapján kell megképezni. Ha valamely szerződésnél a mérleg fordulónapján a díjvisszatérítés feltételei fennállnak, abban az esetben tartalékként a várható éves díjvisszatérítési összeg időarányos részét kell megképezni.

(4) Ha a biztosítási szerződés a többéves kármentesség esetére növekvő mértékű díjvisszatérítést tartalmaz, akkor a díjvisszatérítési tartalék megállapításánál azt is figyelembe kell venni, hogy az ügyfél kedvező káralakulás esetén magasabb díjvisszatérítésre tart igényt.

(5) A tárgyévben képzett eredménytől független díjvisszatérítési tartalékot a díjcsökkentés, díjvisszatérítés vagy többletszolgáltatás formájában történő visszajuttatáskor fel kell használni, a tartalék fennmaradó részét pedig legkésőbb a tárgyévet követő év mérleg fordulónapján a szükséges szintre kell módosítani.

12. § (1) A Tv. 75. §-a (2) bekezdésének f) pontjában meghatározott káringadozási tartalék egy-egy ágazat évenkénti kárkifizetéseinek kiegyenlítésére szolgál.

(2) A káringadozási tartalékot akkor lehet feltölteni, ha az ágazat elkülönített eredményelszámolásában a - káringadozási tartalék figyelembevétele nélkül megállapított - biztosítástechnikai eredmény pozitív előjelű és a tartalék szintje nem haladja meg a (4) bekezdésben előírt maximális szintet.

(3) A tartalékot évente a tárgyév mérleg fordulónapján az adott ágazat díjelőírása és az adott ágazatra felmerült ráfordítások különbözetének

a) mezőgazdasági elemi károkra kötött biztosítások és a hitelbiztosítások esetében 100%-áig,

b) egyéb biztosításoknál 40%-áig

lehet feltölteni.

(4) A káringadozási tartalék maximális szintje a mezőgazdasági elemi károkra kötött biztosítások és a hitelbiztosítások esetén a tárgyévi díjelőírás 100%-a, a többi ágazatban a tárgyévi díjelőírás 40%-a. A tartalékképzés mértékét úgy kell meghatározni,

hogy a tartalék állománya ne haladja meg az előírt maximális szintet.

(5) A káringadozási tartalékot a tárgyévben a mérleg fordulónapján kell felhasználni, ha az adott ágazat biztosítástechnikai eredménye negatív előjelű. A felhasználás mértéke a biztosítástechnikai veszteség mértéke, de legfeljebb a káringadozási tartalék összege.

(6) Az ágazat műveléséből adódó kötelezettség megszűnésekor a tartalékot fel kell szabadítani.

(7) A biztosító köteles a károk alakulásáról szóló statisztikát 15 évig megőrizni.

13. § (1) A Tv. 75. §-a (2) bekezdésének g) pontjában meghatározott nagykárok tartalékát azon kockázatokra lehet képezni, amelyek esetében a lehetséges legnagyobb kár saját megtartású része meghaladja a külön rendeletben meghatározott nagykárok határértékét.

(2) A kockázatokat a nagy károk tartalékának képzésénél a következő csoportok egyikébe kell sorolni:

a) a nagy értékek koncentrációja (pl. atomerőmű, környezetszennyezési károk);

b) a kockázat különleges jellege, valamint új, eddig ismeretlen kockázatvállalás (pl. vegyi és gyógyszerfelelősség, új, eddig ismeretlen technológiai ág biztosítása);

c) szakmai felelősségbiztosítási kockázatok (pl. orvosi, ügyvédi, építészeti);

d) károk halmozódása (pl. földrengéskár, járványok);

e) egyéb.

(3) A nagykárok tartalékát ágazatonként és ezen belül a (2) bekezdés a)-e) pontjaiban foglalt kategóriák szerinti kockázatonként elkülönítetten kell megképezni és felhasználni.

(4) A (2) bekezdés a) és b) pontjához tartozó kockázatok - saját megtartású részének - tárgyévi összesített éves díjelőírása és tárgyévi káreseményeihez kapcsolódó összesített ráfordításai és költségei (így különösen a kárkifizetési ráfordítás, a nagy károk tartalékának figyelembevétele nélkül megállapított tartalékráfordítások, kárrendezési költség) pozitív különbségével kell a nagy károk tartalékát feltölteni, ha a tartalék szintje nem haladja meg ezen kockázatok - saját megtartású része - tárgyévi éves díjbevételének tízszeresét.

(5) A (2) bekezdés a) és b) pontjához tartozó kockázatokra képzett nagy károk tartalékának maximális szintje ezen kockázatok - saját megtartású része - tárgyévi éves díjbevételének tízszerese.

(6) A (2) bekezdés c) pontjába tartozó kockázatok nagy károk tartalékát a mérleg fordulónapján a biztosítónak saját döntésétől függő mértékben úgy kell megképeznie, hogy a tartalék állományának szintje ezen biztosításokra a kockázatban állás időtartama alatt fizetett saját megtartású díjrészeinek 90%-át ne haladja meg.

(7) A (2) bekezdés d) és e) pontjaihoz tartozó kockázatok nagy károk tartalékát legfeljebb ezen kockázatok - saját megtartású részének - tárgyévi összesített éves díjelőírása és tárgyévi káreseményeihez kapcsolódó összesített ráfordításai és költségei

(így különösen a kárkifizetési ráfordítás, a nagy károk tartalékának figyelembevétele nélkül megállapított tartalékráfordítások, kárrendezési költség) pozitív különbségével lehet feltölteni, ha a tartalék szintje nem haladja ezen kockázatok - saját megtartású része - tárgyévi éves díjbevételének tízszeresét.

(8) A (2) bekezdés a)-e) pontjaihoz tartozó kockázatok nagykárok tartalékát a bekövetkezett káresemény miatt felmerült ráfordítások és költségek összegében, azok felmerülésekor - legfeljebb a tartalék összegének erejéig - kell felhasználni.

(9) Ha a biztosító e rendelet hatálybalépése előtt egyes kockázataira nagykárok tartalékát képzett - és ezekre a hatálybalépés után már nem képezhet ilyen tartalékot -, akkor köteles azt az első mérleg fordulónapon felszabadítani.

14. § (1) A Tv. 75. §-a (2) bekezdésének h) pontjában meghatározott törlési tartalék a biztosítónak a befolyt díjbevételeiből a kockázat megszűnése, mérséklése, illetve átmeneti szüneteltetése miatti jogos díjvisszatérítéseknek, valamint az előírt díjkövetelések fenti okokból helyesbítendő összegének és az előírt díjkövetelések díjnemfizetés miatt várhatóan törlésre kerülő részének fedezetére szolgál.

(2) A törlési tartalékot a tárgyév mérleg fordulónapjával kell megképezni. A törlési tartalék szükséglet megállapításakor figyelembe kell venni a megelőző években az (1) bekezdésben meghatározott okok miatt visszatérített díjbevételek, a csökkentett, illetve törölt díjelőírások, valamint a tárgyévi mérleg fordulónapján fennálló hátralékos díjkövetelések várhatóan törlésre kerülő részének együttes összegét.

(3) A tárgyévet megelőző évben képzett törlési tartalékot a tárgyévi mérleg fordulónapján teljes összegében fel kell használni.

15. § (1) A Tv. 75. §-a (2) bekezdésének i) pontjában meghatározott befektetési egységekhez kötött (unit-linked) életbiztosítások tartaléka az eszközalap(ok) szerződők számára kimutatott nettó eszközértékének a vonatkozó biztosítási terméktervben meghatározott, a felmerülő költségek fedezetére elvont eszközökkel csökkentett része.

(2) Az eszközalapban lévő befektetési eszközök értékelésének irányadó szabálya, hogy a befektetési eszközt azon a piacon kialakult piaci záróáron kell értékelni, melyen az adott befektetési eszköz forgalmának legnagyobb része megvalósul. Az eszközalap nettó eszközértékét a portfólióban lévő eszközök lehető legfrissebb árfolyaminformációkat tükröző értékének alapulvételével kell kiszámítani. Ha az eszköz ritka kereskedése miatt (pl. ingatlan) annak piaci értékéről friss információ nem áll rendelkezésre, akkor az értéket könyvvizsgáló becslése alapján kell megállapítani.

(3) A befektetési egységekhez kötött (unit-linked) életbiztosítások tartalékán belül a különböző eszközalapokhoz tartozó tartalékokat egymástól és a matematikai tartalékoktól elkülönítetten kell kezelni és nyilvántartani.

16. § (1) A várható veszteségek tartaléka - mely a Tv. 75. §-a (2) bekezdésének j) pontjában meghatározott egyéb biztosítástechnikai tartalék egyik elkülönített fajtája - az egy vagy több biztosítási termék saját vagy viszontbiztosításba vett művelése során az olyan nagy valószínűséggel bekövetkező, jövőbeni veszteség fedezetére szolgál, amelyet a fennálló szerződési kötelezettségek miatt nem, vagy csak a későbbi időszakban lehet megszüntetni.

(2) A várható veszteség nagyságrendjét a termékek díjkalkulációját is figyelembe véve olyan kalkulációval kell megállapítani, amely

a) az adott biztosítási termék művelésének legalább 2 évi adatai alapján készített elkülönített eredményelszámolást, és

b) az adott szerződések érvényességéig várható kár- és költségráfordításait

veszi alapul.

(3) A tartalékot évente a mérleg fordulónapján, a mérlegkészítés időpontjáig rendelkezésre álló információkat figyelembe véve, más biztosítástechnikai tartalékokban rendelkezésre álló fedezet beszámításával kell megállapítani. A tartalékszükséglet az e fedezetet meghaladó várható veszteségek összegével egyenlő.

(4) A várható veszteség kiszámításánál nem szabad figyelembe venni az érdekmúlás vagy egyéb okok miatt megszűnő szerződések hatásait, amelyekre törlési tartalékot képeztek.

(5) A tartalék megállapításánál alkalmazott feltételeket és módszertant - a díjelőírást, a meg nem szolgált díjak tartalékát, a kárkifizetések (kárgyakoriság, átlagkár) alakulását, a függőkár tartalék, a káringadozási tartalék és a nagykárok tartalékának nagyságát, a költségtényezőket, a passzív viszontbiztosítás hatását és a termék tárgyévi eredményelszámolását - az éves beszámoló üzleti jelentésében be kell mutatni.

(6) A tárgyévet megelőző évben képzett várható veszteségek tartalékát a tárgyév mérleg fordulónapjával a szükséges szintre kell módosítani.

17. § (1) A Tv. 75. §-a (5) bekezdésének megfelelően a hitel- és kezesi biztosítást végző biztosító képezhet hitel- és kezesi biztosítások külön tartalékát a Tv. 75. §-a (2) bekezdésének j) pontjában meghatározott egyéb biztosítástechnikai tartalék egyik elkülönített fajtájaként.

(2) A hitel- és kezesi biztosítások külön tartalékának feltöltése legfeljebb a hitel- és kezesi biztosítások tárgyévi saját megtartású díjbevételének 40%-ával történhet. Az így megképzett tartalék nem haladhatja meg ezen biztosítások tárgyévi díjelőírásának ötszörösét.

(3) A hitel- és kezesi biztosítások tartalékát a tárgyévben a mérleg fordulónapján lehet felhasználni, ha az adott ágazat biztosítástechnikai eredménye negatív előjelű. A felhasználás mértéke a biztosítástechnikai veszteség, de legfeljebb a tartalék mértéke lehet.

(4) A hitel- és kezesi biztosítások műveléséből adódó kötelezettség megszűnésekor a tartalékot fel kell szabadítani.

18. § (1) Ez a rendelet a kihirdetését követő 8. napon lép hatályba azzal, hogy a 2000. évre vonatkozó tartalékképzést a korábban hatályos jogszabályok szerint kell elvégezni.

(2) A biztosító 2001. december 31-ig köteles elkészíteni a biztosító tartalékolási

szabályzatát.

(3) E rendelet hatálybalépésével egyidejűleg hatályát veszti a biztosítástechnikai tartalékok képzéséről és felhasználásáról szóló 12/1996. (IV. 24.) PM rendelet.

C. Függelék

Magyarország férfi népességének halandósági táblája a 2002. évre

Életkor	Százezer élveszü-löttből a jelzett életkort elérte	Százezer élveszü-löttből meghalt a jelzett életkorban	Elhalálozási valószínűség	Továbbélési valószínűség	Stacioner népesség	Leélendő évek száma	Várható élet-tartam években	Várható elhalá-lozási életkor
x	l_x	d_x	q_x	p_x	L_x	T_x	e_x°	$x + e_x^\circ$
0	100000	729	0,00729	0,99271	99453		68,26	68,26
1	99271	56	0,00057	0,99943	99243	6776494	67,76	68,76
2	99215	36	0,00037	0,99963	99196	6677223	66,80	68,80
3	99178	35	0,00035	0,99965	99161	6578008	65,83	68,83
4	99143	32	0,00033	0,99967	99127	6478830	64,85	68,85
5	99111	23	0,00023	0,99977	99100	6379687	63,87	68,87
6	99088	19	0,00019	0,99981	99079	6280576	62,88	68,88
7	99069	19	0,00019	0,99981	99060	6181488	61,90	68,90
8	99050	19	0,00020	0,99980	99041	6082419	60,91	68,91
9	99031	20	0,00020	0,99980	99021	5983369	59,92	68,92
10	99011	20	0,00020	0,99980	99001	5884338	58,93	68,93
11	98991	21	0,00021	0,99979	98980	5785327	57,94	68,94
12	98970	23	0,00023	0,99977	98959	5686336	56,96	68,96
13	98947	28	0,00029	0,99971	98933	5587366	55,97	68,97
14	98919	41	0,00042	0,99958	98898	5488419	54,98	68,98
15	98878	36	0,00036	0,99964	98860	5389500	54,01	69,01
16	98842	44	0,00045	0,99955	98820	5290622	53,03	69,03
17	98798	55	0,00055	0,99945	98771	5191780	52,05	69,05
18	98743	66	0,00067	0,99933	98710	5092982	51,08	69,08
19	98678	76	0,00077	0,99923	98639	4994239	50,11	69,11
20	98601	84	0,00085	0,99915	98559	4895561	49,15	69,15
21	98517	89	0,00090	0,99910	98473	4796960	48,19	69,19
22	98428	91	0,00093	0,99907	98383	4698443	47,23	69,23
23	98337	93	0,00094	0,99906	98291	4600015	46,28	69,28
24	98244	95	0,00096	0,99904	98197	4501678	45,32	69,32
25	98149	98	0,00100	0,99900	98101	4403434	44,36	69,36
26	98052	102	0,00104	0,99896	98001	4305285	43,41	69,41
27	97950	106	0,00108	0,99892	97897	4207233	42,45	69,45
28	97844	110	0,00113	0,99887	97789	4109283	41,50	69,50
29	97734	117	0,00120	0,99880	97676	4011439	40,45	69,54
30	97617	127	0,00130	0,99870	97554	3913705	39,59	69,59

Életkor	Százezer élveszülöttből a jelzett életkort elérte	Százezer élveszülöttből meghalt a jelzett életkorban	Elhalálozási valószínűség	Továbbélési valószínűség	Stacioner népesség	Leélendő évek száma	Várható élettartam években	Várható elhalálozási életkor
x	l_x	d_x	q_x	p_x	L_x	T_x	e_x°	$x+e_x^\circ$
31	97490	137	0,00140	0,99860	97422	3816088	38,64	69,64
32	97354	147	0,00151	0,99849	97280	3718598	37,70	69,70
33	97207	160	0,00165	0,99835	97127	3621244	36,75	69,75
34	97047	180	0,00186	0,99814	96957	3524037	35,81	69,81
35	96866	211	0,00218	0,99782	96761	3426990	34,88	69,88
36	96655	254	0,00263	0,99737	96528	3330124	33,95	69,95
37	96401	307	0,00319	0,99681	96247	3233469	33,04	70,04
38	96094	367	0,00382	0,99618	95910	3137069	32,15	70,15
39	95727	430	0,00449	0,99551	95512	3040974	31,27	70,27
40	95297	493	0,00517	0,99483	95051	2945247	30,41	70,41
41	94805	556	0,00587	0,99413	94527	2849950	29,56	70,56
42	94248	623	0,00661	0,99339	93937	2755145	28,73	70,73
43	93626	690	0,00737	0,99263	93281	2660897	27,92	70,92
44	92935	758	0,00815	0,99185	92557	2567271	27,12	71,12
45	92178	824	0,00894	0,99106	91766	2474336	26,34	71,34
46	91354	889	0,00973	0,99027	90909	2382158	25,58	71,58
47	90465	952	0,01052	0,98948	89989	2290804	24,82	71,82
48	89513	1015	0,01133	0,98867	89006	2200339	24,08	72,08
49	88498	1077	0,01217	0,98783	87960	2110826	23,35	72,35
50	87421	1139	0,01303	0,98697	86852	2022328	22,63	72,63
51	86282	1200	0,01390	0,98610	85682	1934907	21,93	72,93
52	85083	1257	0,01478	0,98522	84454	1848625	21,23	73,23
53	83825	1315	0,01569	0,98431	83168	1763542	20,54	73,54
54	82510	1376	0,01667	0,98333	81822	1679717	19,86	73,86
55	81134	1441	0,01776	0,98224	80414	1597207	19,19	74,19
56	79693	1509	0,01894	0,98106	78939	1516073	18,52	74,52
57	78184	1578	0,02018	0,97982	77395	1436380	17,87	74,87
58	76606	1648	0,02152	0,97848	75782	1358196	17,23	75,23
59	74958	1722	0,02297	0,97703	74097	1281590	16,60	75,60
60	73236	1799	0,02456	0,97544	72337	1206632	15,98	75,98
61	71438	1877	0,02628	0,97372	70499	1133396	15,37	76,37
62	69561	1955	0,02810	0,97190	68583	1061958	14,77	76,77
63	67606	2032	0,03006	0,96994	66590	992397	14,18	77,18
64	65573	2110	0,03218	0,96782	64518	924791	13,60	77,60
65	63463	2187	0,03447	0,96553	62370	859218	13,04	78,04
66	61276	2260	0,03688	0,96312	60146	795755	12,49	78,49
67	59016	2325	0,03940	0,96060	57853	734479	11,95	78,95
68	56691	2387	0,04211	0,95789	55497	675463	11,41	79,41
69	54304	2448	0,04509	0,95491	53080	618772	10,89	79,89
70	51855	2510	0,04841	0,95159	50600	564468	10,39	80,39
71	49345	2566	0,05201	0,94799	48062	512613	9,89	80,89
72	46778	2611	0,05582	0,94418	45473	463268	9,40	81,40
73	44167	2649	0,05997	0,94003	42843	416490	8,93	81,93
74	41518	2681	0,06458	0,93542	40178	372323	8,47	82,47
75	38837	2709	0,06976	0,93024	37483	330805	8,02	83,02
76	36128	2921	0,08085	0,91915	34667	291968	7,58	83,58
77	33207	2800	0,08433	0,91567	31807	255840	7,20	84,20
78	30407	2690	0,08847	0,91153	29062	222633	6,82	84,82
79	27717	2589	0,09342	0,90658	26422	192226	6,44	85,44
80	25127	2496	0,09932	0,90068	23880	164509	6,05	86,05
81	22632	2407	0,10634	0,89366	21429	139382	5,66	86,66
82	20225	2320	0,11469	0,88531	19065	116750	5,27	87,27
83	17906	2231	0,12460	0,87540	16790	96525	4,89	87,89
84	15674	2137	0,13634	0,86366	14606	78619	4,52	88,52
85	13537	2034	0,15022	0,84978	12521	62945	4,15	89,15

Életkor	Százezer élveszülöttből a jelzett életkort elérte	Százezer élveszülöttből meghalt a jelzett életkorban	Elhalálozási valószínűség	Továbbélési valószínűség	Stacioner népesség	Leélendő évek száma	Várható élettartam években	Várható elhalálozási életkor
x	l_x	d_x	q_x	p_x	L_x	T_x	e_x°	$x + e_x^\circ$
86	11504	1916	0,16657	0,83343	10546	49408	3,79	89,79
87	9588	1781	0,18576	0,81424	8697	37904	3,45	90,45
88	7807	1625	0,20820	0,79180	6994	28316	3,13	91,13
89	6181	1448	0,23430	0,76570	5457	20509	2,82	91,82
90	4733	1252	0,26446	0,73554	4107	14328	2,53	92,53
91	3481	1041	0,29908	0,70092	2961	9595	2,26	93,26
92	2440	826	0,33846	0,66154	2027	6114	2,01	94,01
93	1614	618	0,38278	0,61722	1305	3674	1,78	94,78
94	996	430	0,43204	0,56796	781	2060	1,57	95,57
95	566	275	0,48596	0,51404	428	1064	1,38	96,38
96	291	158	0,54392	0,45608	212	498	1,21	97,21
97	133	80	0,60488	0,39512	93	207	1,06	98,06
98	52	35	0,66735	0,33265	35	74	0,92	98,92
99	17	13	0,72939	0,27061	11	22	0,79	99,79
100	5	4	0,78873	0,21127	3	5	0,50	100,50

D. Függelék

Kifutási háromszögek

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
199803	1	47172946	5769798	910334	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
199804	2	40439887	11125635	0	-52610	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
199901	3	46573734	9234148	628686	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
199902	4	48972031	13664995	0	0	0	0	0	0	641512	0	0			
199903	5	40776959	12741790	0	0	0	0	0	0	0	0				
199904	6	30939669	12616172	0	0	0	0	0	0	0					
200001	7	52510916	10407533	0	0	0	0	0	1343701						
200002	8	42256668	9300278	0	0	0	196096	0							
200003	9	38365004	6982134	0	1762821	0	0								
200004	10	47417517	15085360	0	0	0									
200101	11	35457041	12673410	0	-119112										
200102	12	51967832	16255363	0											
200103	13	26663700	13943507												
200104	14	38293719													

D.1. ábra. A kárnagyságok nem kumulált kifutási háromszöge

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
199803	1	47172946	52942744	53853078	53853078	53853078	53853078	53853078	53853078	53853078	53853078	53853078	53853078	53853078	53853078
199804	2	40439887	51565522	51565522	51512912	51512912	51512912	51512912	51512912	51512912	51512912	51512912	51512912	51512912	
199901	3	46573734	55807882	56436568	56436568	56436568	56436568	56436568	56436568	56436568	56436568	56436568	56436568		
199902	4	48972031	62637026	62637026	62637026	62637026	62637026	62637026	62637026	63278538	63278538	63278538			
199903	5	40776959	53518749	53518749	53518749	53518749	53518749	53518749	53518749	53518749	53518749				
199904	6	30939669	43555841	43555841	43555841	43555841	43555841	43555841	43555841	43555841					
200001	7	52510916	62918449	62918449	62918449	62918449	62918449	62918449	64262150						
200002	8	42256668	51556946	51556946	51556946	51556946	51753042	51753042							
200003	9	38365004	45347138	45347138	47109959	47109959	47109959								
200004	10	47417517	62502877	62502877	62502877	62502877									
200101	11	35457041	48130451	48130451	48011339										
200102	12	51967832	68223195	68223195											
200103	13	26663700	40607207												
200104	14	38293719													

D.2. ábra. A kárnagyságok kumulált kifutási háromszöge

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
199803	1	59	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
199804	2	52	22	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
199901	3	56	15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
199902	4	61	18	0	0	0	0	0	0	1	0	0			
199903	5	53	17	0	0	0	0	0	0	0	0				
199904	6	38	20	0	0	0	0	0	0	0					
200001	7	67	14	0	0	0	0	0	1						
200002	8	54	13	0	0	0	1	0							
200003	9	54	10	0	1	0	0								
200004	10	52	22	0	0	0									
200101	11	55	16	0	1										
200102	12	59	19	0											
200103	13	38	19												
200104	14	46													

D.3. ábra. A kárszámok nem kumulált kifutási háromszöge

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
199803	1	59	68	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69
199804	2	52	74	74	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	
199901	3	56	71	72	72	72	72	72	72	72	72	72	72		
199902	4	61	79	79	79	79	79	79	79	80	80	80			
199903	5	53	70	70	70	70	70	70	70	70	70				
199904	6	38	58	58	58	58	58	58	58	58					
200001	7	67	81	81	81	81	81	81	82						
200002	8	54	67	67	67	67	68	68							
200003	9	54	64	64	65	65	65								
200004	10	52	74	74	74	74									
200101	11	55	71	71	72										
200102	12	59	78	78											
200103	13	38	57												
200104	14	46													

D.4. ábra. A kárszámok kumulált kifutási háromszöge

Irodalomjegyzék

[1] Arató Miklós. *Nem-élet biztosítási matematika.* ELTE Eötvös Kiadó, 2001.

[2] H. Schmitter and E. Straub. *Quadratic programming in insurance.* Astin Bulletin, Vol VII, Part 3, 1974.

[3] Krekó Béla. *Biztosítási matematika - Életbiztosítás I.* Aula kiadó, 1994.

[4] E. Straub. *On the calculation of IBNR-reserves* Nederlandse Reassurantic Groep N. V. Amsterdam, 1972.

[5] H. Kramreiter and E. Straub. *On the calculation of IBNR-reserves II.* Mitterlungen der Schweitzerischen Versicherungsmathematiker, 1973.

[6] LeRoy J. Simon *Distortion in IBNR factors.* Proceedings of the Casualty Actuarial Society, Vol LVII, 1970.

[7] Joakim Hertig *A Statistical Aproach to IBNR-Reserves in Marine Reinsurance.* Astin Bulletin, Vol XV, Part 2, 1985.

[8] Ole Hesselager and Thomas Witting *A Credibility Model with Random Fluctuations in Delay Probabilities for the Prediction of IBNR Claims.* Astin Bulletin, Vol XVIII, Part 1, 1988.

[9] Farrokh Guiahi *A Probabilistic Model for IBNR Claims.* Proceedings of the Casualty Actuarial Society, Vol LXXIII, 1986.

[10] Dr. Ira Robbin *A Bayesian Credibility Formula for IBNR Counts.* Proceedings of the Casualty Actuarial Society, Vol LXXIII, 1986.