Gráfelméleti struktúraalgoritmusok

SZAKDOLGOZAT

Írta:

Pap Gyula

V. matematikus

Témavezető:

Szegő László

tanársegéd

2002.

Tartalomjegyzék

1. Előszó

A kombinatorikus optimalizálásnak egy központi témája a maximális párosítás feladat. Több lehetséges általánosítására ismert tétel és algoritmikus megoldás: az (f,g)-faktor feladatra, a pont- vagy éldiszjunkt A-utakra, az útpárosításokra. A páros faktor fogalmát W.H. Cunningham vezette be [5], mely az útpárosítások általánosítása. Ebben a dolgozatban a páros faktorokra egy tisztán kombinatorikus megközelítést mutatunk be, mely Lovász egy párosításokra kidolgozott ötletén alapszik. Egy algoritmust adunk meg, mely a maximális páros faktor feladatot tetszőleges úgynevezett alig szimmetrikus gráfban megoldja. Ebből levezethető a páros faktorok struktúratétele, ami egy általánosítása a párosításokra vonatkozó Gallai-Edmonds-féle struktúratételnek. Erre a tételre adható rövidebb, de nem algoritmikus bizonyítás [7]. Levezethető belőle néhány nem párosításokra vonatkozó ismert állítás is: Menger tétele, Dilworth tétele, a (2.7.) formula.

A dolgozat fő része a páros faktor algoritmus megadása. Sajnos vannak kellemetlen nehézségek, melyeket nem világos, hogyan lehetne könnyebben elkerülni. Az utolsó fejezetben megfogalmazunk egy sejtést, mely az algoritmus működését lényegesen leegyszerűsítheti. Az algoritmus ebben a formában nem alkalmas (f,g)-faktorok kezelésére közvetlenül. Ha az 5. fejezetben megadott javítósétát sikerülne megfelelően átfogalmazni, akkor az (f,g)-faktorok struktúratételére egy egyszerűbb bizonyítást adhatnánk.

Ismertek általánosabb elméletek, melyek speciális esetként tartalmazzák a párosítás feladatot: a matroid parity és az ugrácsok. Alig szimmetrikus gráfban a páros faktorok foksorozatai ugrácsot alkotnak. Ezen egyszerű erdményt kivéve egyelőre teljesen tisztázatlan, mi a kapcsolata a páros faktor feladatnak az általános elméletekkel. Ez nagy űr, ugyanis azok a feladatok, amikre struktúratételt találtak, belefoglalhatók ezekbe az elméletekbe. A struktúratétel és az algoritmus ugyan kész, de a további kutatások várhatóan újabb érdekes eredményekre vezethetnek.

Köszönök mindent Szegő Lászlónak, aki már egy éve önzetlenül segít felkészülni szakdolgozatom megírására.

2. Bevezető

A dolgozat kiindulópontja a maximális párosítás feladat. Egy $G = (V, E)$ gráfban a maximális párosítás méretére a szokásos $\nu(G)$ jelölést használjuk. Ha $G = (A, B; E)$ páros gráf, akkor Ore formulája megmondja, mekkora a legnagyobb párosítás mérete, és ez meg is határozható egy alternáló utas algoritmussal:

$$\nu(G) = \min_{X \subseteq A}(|A| - |X| + |N_G(X)|) \tag{2.1.}$$

Nem páros gráfban ennél bonyolultabb a helyzet: a Berge-Tutte formula szerint

$$2\nu(G) = \min_{Y \subseteq V}(|V| - \mathrm{odd}_G[Y] + |N_G(Y)|) \tag{2.2.}$$

ahol $\mathrm{odd}_G[Y]$ (szögletes zárójellel!) jelöli $G[Y]$ páratlan komponenseinek a számát. Ez itt a Berge-Tutte formulának nem a szokásos felírása: a későbbi formulákhoz viszont ez az alak hasonlít jobban. Ismert Edmonds algoritmusa, ami meghatároz egy maximális párosítást, és ad egy Y gátat is. A (2.2.) formulánál többet fejez ki a Gallai-Edmonds-féle struktúratétel, ami a maximális párosítások elhelyezkedését írja le:

2.3. tétel. *Legyen $D(G)$ azon pontok halmaza, melyekhez van őt elkerülő maximális párosítás. Legyen $A(G) := N(D(G))$ és $C(G) := V - D(G) - A(G)$. Ha M maximális párosítás, akkor*

(a) *$M[C]$ teljes $G[C(G)]$-ben.*

(b) *$G[D(G)]$ bármely $G[T]$ komponensében $M[T]$ majdnem teljes.*

(c) *M minden $A(G)$-beli pontot valamelyik $D(G)$-belivel párosít össze.*

(d) *$2\nu(G) = |V| - \mathrm{odd}_G[D(G)] + |A(G)|$, azaz $D(G)$ gát.*

(e) *A $G[D(G)]$ részgráf minden komponense faktorkritikus.*

Ebből a tételből indul ki Lovász párosítási algoritmusa; az 5. fejezetben egy új változatát láthatjuk. Futásideje polinomiális, de elmarad Edmondsétól. Ötletét azonban más feladatnál is sikeresen bevetették: Legáltalánosabban a lineáris matroid-parity feladatra alkalmazta Lovász [10]. Sebő T-kötések keresésére mutatott hasonló algoritmust [8]. A pont- vagy éldiszjunkt A-utakra is ismertek struktúratételek. Az A-utak feladata visszavezethető a lineáris matroid-parityre, de itt még nem sikerült egyszerű algoritmust megadni, ami nem használja a lineáris matroid-parity algoritmust. E dolgozat későbbi fejezeteiben az útpárosításokra illetve páros faktorokra vetjük be az ötletet. Az útpárosítások fogalmát W.H. Cunningham és J.F. Geelen vezették be [3]. Megadták egy poliéderes leírását az útpárosítás feladatnak, melynek segítségével az ellipszoid-módszeren keresztül polinomidejű algoritmus készíthető. Geelen a Tutte-mátrixra épülő algebrai módszereket alkalmazott, eredményeiből algoritmust kapott. Lovász ötletéből tisztán kombinatorikus algoritmust készítünk ebben a dolgozatban, ezzel fogjuk megismerni az új fogalmakat. Az algoritmus viselkedéséből végül a Gallai-Edmonds struktúratétel analogonja [4] könnyen kimutatható. A kifejlesztett eszközök a páros faktorok kezelésére általánosan is alkalmasak. A páros faktor algoritmus megadásában egy technikai nehézség lesz az alternáló utak általánosítása (az „igazítás"). E nehézség áthidalható, ha egy később kimondott sejtés esetleg bebizonyosodik. Nyitott kérdés az is, hogy a páros faktorok visszavezethetők-e a lineáris matroid-parityre.

Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf, jelöljön T_1, T_2 diszjunkt ponthalmazokat, melyeket terminálisoknak hívunk. Továbbá legyen $R = V - (T_1 \cup T_2)$. Egy $\underline{M} \subseteq E$ élhalmazt akkor nevezünk útpárosításnak, ha a $(V, \underline{M})$ részgráf komponensei egyszerű utak $T_1 \cup R$-ből $T_2 \cup R$-be, s egy ilyen útnak legfeljebb egy-egy pontja lehet a terminális halmazokban. Legyen egy útpárosítás értéke $\mathrm{val}(\underline{M}) := |\underline{M}| + |\underline{M}_p|$ ahol $\underline{M}_p$ azokat az éleit jelöli $\underline{M}$-nek, melyek két R-beli pontot kötnek össze, és egyedül alkotnak komponenst $(V, \underline{M})$-ben. $\underline{M}_p$ elemeit **párosításélek**nek nevezzük. A többi legalább egyélű komponenst **utak**nak és **félutak**nak hívjuk attól függően, ha mindkét terminális halmazba belemetszenek vagy csak az egyikbe; ha semelyikbe, akkor ez a komponens egy **törtút**.

Egy $\underline{M}$ **útpárosítás irányítása** legyen egy olyan irányított M élhalmaz, amit úgy kapunk, hogy az utakat, félutakat T_1 felől T_2 felé irányítjuk. A törtutak élei ugyanabba (de a kettő közül bármelyik) irányba álljanak, s a párosításéleket helyettesítsük egy oda- és egy visszaéllel. Egy irányított élhalmaz akkor származhat útpárosításból, ha ki- és befokai legfeljebb egyek, a terminális halmazokon a megfelelő fokok nullák, s nincs benne nemtriviális (kettőnél hosszabb) kör. Jelöljük $\overrightarrow{G}$-vel azt az irányított gráfot, melyet úgy kapunk G-ből, hogy az R-en belüli éleket helyettesítjük egy oda- és egy visszaéllel, a T_1 -re illeszkedő éleket kifelé, a T_2-re illeszkedőket befelé irányítjuk meg. Tetszőleges útpárosítás irányítása részgráfja $\overrightarrow{G}$-nek. Látható, hogy ezekkel a jelölésekkel $\mathrm{val}(\underline{M}) = |M|$.

Egy tetszőleges G irányított gráfban **útpárosítás**nak olyan részgráfot nevezünk, aminek ki és befokai legfeljebb egyek, és nincs benne nemtriviális kör. Nevezzük **hagyományos útpárosítás**nak a fenti $\overrightarrow{G}$-ben keletkező útpárosításokat.

Cunningham cikke [5] szerint **páros faktor**nak egy irányított gráf olyan részgráfját nevezzük, melynek ki- és befoka minden pontban legfeljebb 1, és nem tartalmaz páratlan kört. Élszámra nézve keresünk maximális páros faktort. Általában ez NP-nehéz, de úgynevezett gyengén szimmetrikus gráfokra megoldható. Egy irányított gráfot **gyengén szimmetrikus**nak nevezünk, ha erősen összefüggő komponensein belül az élek csak ellentétes párjukkal együtt szerepelhetnek. Látható, hogy az $\overrightarrow{G}$ gráf gyengén szimmetrikus. Benne a páros faktor feladat ekvivalens az útpárosítás feladattal: esetleges irányított páros körök helyettesíthetők azonos összértékű triviális körökkel (párosításélekkel) a gyenge szimmetria miatt. Egy irányított gráfot **alig szimmetrikus**nak nevezünk, ha benne minden páratlan irányított kör minden élének az ellentétes párja is él. Ez egy kicsit bővebb gráfosztály a gyengén szimmetrikusaknál, ebben a dolgozatban az alig szimmetrikus gráfokra van kitalálva minden. Ezentúl tegyük fel, hogy G alig szimmetrikus irányított gráf.

Jelölje $V_1(M) := \{v \in V : \delta_M(v) = 1\}$ a **kifedett** pontok halmazát, $V_2(M) := \{v \in V : \varrho_M(v) = 1\}$ a **befedett** pontok halmazát. Jelölje tetszőleges M élhalmaz **hiány**át $\operatorname{def}_G(M) := |V| - |M|$ -et, ha M útpárosítás, akkor $\operatorname{def}_G(M) = |V| - |V_1(M)| = |V| - |V_2(M)|$. Legyen $\nu(G) := \max\{|M| : M \text{ páros faktor }\}$ és $\operatorname{def}(G) := \min\{\operatorname{def}_G(M) : M \text{ páros faktor }\}$. Ekkor $\operatorname{def}_G(M) + |M| = |V|$, és $\operatorname{def}(G) + \nu(G) = |V|$. (Hagyományos útpárosítás esetén, azaz egy $\overrightarrow{G}$ alakú gráfban nyilván $V_1(M) \subseteq T_1 \cup R$ és $V_2(M) \subseteq R \cup T_2$.)

A dolgozatban maximális útpárosításokra illetve páros faktorokra formulát és struktúratételt fogunk látni algoritmikus bizonyítással. A későbbi tételeket röviden összefoglaljuk:

Tekintsük a G gráfban a T_1, T_2 terminálisokkal a hagyományos útpárosítás feladatot. Egy $X \subseteq V$-et **vágás**nak nevezünk, ha $G[V - X]$-ben nincs út a terminálisok közt. Ha X vágás, akkor vezessük be az $\operatorname{odd}_G(X)$ jelölést $G[V - X]$-ben a terminálisoktól diszjunkt páratlan pontszámú komponensek számára. A következő formula jól karakterizálja a maximális útpárosítás méretét:

$$\nu(G) = \min_{X \text{ vágás}} |R| + |X| - \operatorname{odd}_G(X) \tag{2.4.}$$

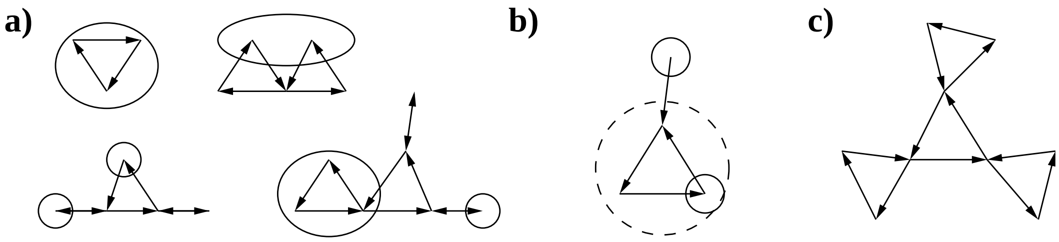
Ezt a formulát Frank és Szegő adták meg [2]-ben. Speciális esetként $R = V$-re tartalmazza a Berge-Tutte formulát. Cunningham és Geelen korábban egy kicsit bonyolultabb alakú formulát adtak [3]. Spille és Weissmantel [9] algoritmikusan közelítette meg a hagyományos útpárosítás feladatot Edmonds párosítási algoritmusának a mintájára, amelyben komoly bonyodalmakba ütközött. Már [4]-ben kiderült, hogy a Gallai-Edmonds-féle struktúratételhez hasonlóan itt is található egy kanonikus gát, azaz egy olyan vágás, ami az egyenlőséget biztosítja a formulában: Legyen $D(G) := \{x \in T_1 \cup R : \exists M \text{ maximális útpárosítás, amire } x \notin V_1(M)\}$ és $A(G) := N(D(G)) \cup T_1 - D(G)$. Ekkor $A(G)$ vágás és $\nu(G) = |R| + |A(G)| - \operatorname{odd}_G(A(G))$. Ez a struktúrális állítás alapozza meg ebben a dolgozatban egy algoritmus működését, bár magát az állítást nem használjuk semelyik ponton.

Legyen $G = (V, E)$ egy alig szimmetrikus irányított gráf. Tekintsük egy $U \subseteq V$-re a $G' = G[U]$ részgráfját G-nek: ekkor G' szintén alig szimetrikus. Jelölje mostantól $\operatorname{odd}_G[U]$ a G' azon erős összefüggőségi komponenseinek számát, melyekbe nem megy be él más komponensből, és páratlan sok pontja van. Pongyolán fogalmazva $\operatorname{odd}_G[U]$ a páratlan forráskomponensek számát jelenti. A páros faktorokra a következő formulát fogjuk bizonyítani:

$$\nu(G) = \min_{Y \subseteq V}(|V| + |N_G^+(Y)| - \mathrm{odd}_G[Y]) \tag{2.5.}$$

Ha ezt $\overrightarrow{G}$ alakú gráfra alkalmazzuk, akkor megkapjuk az 2.4. formulát. A struktúratétel fő állítása alapján a $D(G) := \{x \in V : \exists M \in \mathcal{L}$ maximális páros faktor amire $x \notin V_1(M)\}$ halmazzal $\nu(G) = |V| + |N_G^+(D(G))| - \mathrm{odd}_G[D(G)]$. Az algoritmus helyességéből fogjuk levezetni ezen állításokat, de adható közvetlen kombinatorikus bizonyítás is [7].

Érdekes, hogy (2.5.) sok konkrét gráfban teljesül, amely nem alig szimmetrikus. Az ábra a) alatti példáiban $D(G)$ gát; b) alatt $D(G)$ nem gát, de van két gát is; a c) alatti gráfban pedig nem igaz a formula. (Valójában eddig ez az egyetlen ismert ellenpélda a formulára.)



A páros faktor formula sok más feladatot tartalmaz speciális esetként, illetve könnyű következményként. Formálisan általánosítja a Berge-Tutte formulát. Elemi konstrukcióval levezethető a hagyományos útpárosítások alkalmazásával Menger pontösszefüggőségi tétele [13]. Itt most Dilworth tételét és egy rokon állítást vezetünk le a páros faktor formulából:

Legyen $G = (V, E)$ az $(V, <)$ részbenrendezett halmaznak megfelelő aciklikus gráf. Legyen $(V, <)$ egy minimális láncfedésben lévő láncok száma $\tau(V, <)$. G-ben egy páros faktor pontdiszjunkt uniója irányított utaknak, hiánya az utak száma (az egypontúakat is figyelembevéve). $(V, <)$ fedése láncokkal leszűkíthető pontdiszjunkt fedéssé. Így kapjuk a $\tau(V, <) = \mathrm{def}\,(G)$ összefüggést. A páros faktor formula alapján pedig

$$\mathrm{def}\,(G) = \max_{Y \subseteq V}\,(\mathrm{odd}_G[Y] - |N^+(Y)|) \tag{2.6.}$$

Látható, hogy a maximum egy felfelé zárt Y-on vétetik fel és $N^+(Y) = \emptyset$, $\mathrm{Odd}_G[Y]$ antilánc. Dilworth tételét kaptuk, miszerint $\nu(V, <)$ egyenlő a maximális antilánc méretével.

Legyen $G = (V, E)$ tetszőleges aciklikus gráf. Legalább hány irányított út kell V lefedéséhez? Látható, hogy (2.6.) itt is megadja a választ, bár itt Y nem feltétlenül zárt felfelé. Átfogalmazva a formulát $A = \mathrm{Odd}_G[Y]$ és $B = N^+(Y)$-nal:

$$\tau(G, E) = \max\,(|A| - |B|) \tag{2.7.}$$

ahol a maximumot olyan A, B diszjunkt halmazpárokon vesszük, hogy $G - B$-ben semelyik A-beli pontpár közt nincs irányított út. A [12] cikkben arra látható formula, hogy egy aciklikus gráfban gráfban (tetszőleges) l darab úttal legfeljebb hány pont fedhető le. Az ottani formulából is levezethető (2.7.).

Számos cikkben foglalkoznak a hagyományos útpárosítás illetve a páros faktor feladat kiterjesztéseivel. A súlyozott feladatra és a matroidos megszorításra ismert eredmények megtekinthetők Cunningham összefoglaló cikkében [5]. Ezekkel a dolgozatban nem találkozhatunk.

Az (f, g)-faktorok idevágó általánosítása ígéretes feladatnak tűnik, de egyelőre nincsenek komoly eredmények. Több értelmes definíciót lehet mondani (f, g) páros faktorokra. Kívánatos, hogy egy szimmetrikusan megirányított gráfban ekvivalens legyen az (f, g)-faktor feladattal. Továbbá $f \equiv g \equiv 1$ választással ekvivalens legyen a páros faktor feladattal. Ezt a két kívánalmat teljesíti a következő definíció:

Legyen $G = (V, E)$ egy irányított gráf. Egy $M \subseteq E$ élhalmazt páros faktornak nevezünk, ha előáll irányított utak és páros körök éldiszjunkt uniójaként, melyben útvégpont és útkezdőpont nem eshet egybe. Legyenek f, g a csúcsokon értelmezett nemnegatív egész értékű függvények, és tetszőleges M páros faktorhoz és $v \in V$ csúcshoz legyen

$$\delta(G, M, f, g, v) := \max\{\text{dist }([f(v), g(v)], \delta_M(v)), \text{dist }([f(v), g(v)], \varrho_M(v))\}$$

$$\delta(G, M, f, g) := \sum_{v \in V} \delta(M, f, g, v)$$

$$\delta(G, f, g) := \min\{\delta(M, f, g, v) : M \text{ páros faktor }\}$$

Keresendő a $\delta(G, f, g)$ függvény jellemzése.

3. Jelölések, alapfogalmak

Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges irányított vagy irányítatlan gráf.

Megszorítás: Egy $U \subseteq V$ ponthalmazra jelölje $E[U]$ azon E-beli élek halmazát, melyeknek mindkét végpontja U-ban van. $G[U] := (U, E[U])$

Összehúzás: $V/U := V - U + \{U\}$ jelöli az összehúzott ponthalmazt. E/U jelölje a következő élhalmazt: az E-beli élek közül azok, melyeknek nincs U-beli végpontjuk, plusz vegyünk annyi élt minden $x \in V - U$ és $\{U\}$ között, amennyi E-ben van x és U között (esetleg az irányt is figyelembe véve). $G/U := (V/U, E/U)$

Szomszédok: Egy $X \subseteq V$ ponthalmazra jelölje $N(X)$ azon $V - X$-beli pontokat, melyeknek van X-beli szomszédja. Irányított gráf esetén $N^+(X)$ azon $V - X$-beli pontokból álljon, melyekbe megy be olyan él, amelynek töve X-ben van: ezek X kiszomszédai.

Fokok: Egy G irányítatlan gráfban egy x csúcs foka a rá illeszkedő élek száma, amit $d_G(x)$ jelöl. Irányított gráfban x kifoka a belőle kilépő élek $\delta_G(x)$ száma, befoka a belelépő élek $\varrho_G(x)$ száma. Ha $X \subseteq V$, akkor $d_G(X) := d_{G/X}(\{X\})$ és $\delta_G(X) := \delta_{G/X}(\{X\})$ és $\varrho_G(X) := \varrho_{G/X}(\{X\})$.

4. Előzmények

Legyen $G = (V, E)$ egyszerű irányítatlan gráf. Párosításnak olyan (V, M) részgráfot nevezünk, melynek minden pontban legfeljebb egy a foka: $d_M(v) \leqslant 1$ minden $v \in V$-re. A részgráf helyett általában csak az M élhalmazt fogjuk említeni. Alkalmazzuk a következő jelöléseket: $|M|$ a párosítás mérete, és $V(M) = \cup M$ a fedett pontok halmaza. Egy párosítást **teljesnek** nevezünk, ha $V(M) = V$. Legyen $\nu(G) := \max\{|M| : M \text{ párosítás } G\text{-ben}\}$ a legnagyobb párosítás mérete, $\operatorname{def}(M) = |V| - |V(M)|$ a párosítás hiánya, és $\operatorname{def}(G) := \min\{\operatorname{def}(M) : M \text{ párosítás } G\text{-ben}\} = |V| - 2\nu(G)$ a gráf hiánya. A $\nu(G)$ méretű, azaz $\operatorname{def}(G)$ -hiányos párosításokat nevezzük maximálisnak. Következzen most néhány alapvető állítás a bevezetett fogalmakról.

4.1. állítás. *Ha C egy páratlan kör a G gráfban, és adott egy M párosítás a G/C gráfban, akkor készíthető egy M^C párosítás a G-ben, amire $M^C/C = M$, és* $\operatorname{def}_{G/C}(M) = \operatorname{def}_G(M^C)$.

Bizonyítás. Egy páratlan kör bármely pontját kihagyva a többi ponton van teljes párosítás. ■

4.2. állítás. *Ha C páratlan kör G-ben, akkor* $\operatorname{def}(G) \leqslant \operatorname{def}(G/C)$. *Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha G-ben van olyan N maximális párosítás, melyre $d_N(C) \leqslant 1$.*

Bizonyítás. Legyen M egy maximális párosítás G/C-ben, akkor

$$\operatorname{def}(G/C) = \operatorname{def}_{G/C}(M) = \operatorname{def}_G(M^C) \geqslant \operatorname{def}(G).$$

Ha egyenlőség áll, akkor $N = M^C$ maximális G-ben és $d_{M^C}(C) \leqslant 1$. Ha pedig adott egy N maximális párosítás G-ben, amire $d_N(C) \leqslant 1$, akkor N/C párosítás G/C-ben, így $\operatorname{def}(G/C) \leqslant \operatorname{def}_{G/C}(N/C) = \operatorname{def}_G(N) = \operatorname{def}(G)$. ■

Az alábbiakban levezetjük Tutte tételét, és a Berge-Tutte formulát, melyek a teljes párosítás létezését és $\nu(G)$-t jól karakterizálják.

4.3. állítás. *Ha valamely $X \subseteq V$ -re* $\operatorname{odd}_G[X] > |N(X)|$, *akkor G-ben nincs teljes párosítás.*

4.4. állítás. *Bármely* $X \subseteq V$ *részhalmazra* $2\nu(G) \leqslant |V| - \mathrm{odd}_G[X] + |N(X)|$.

Bizonyítás. Ha M tetszőleges párosítás G-ben, akkor X-ben legalább $\mathrm{odd}_G[X]$ fedetlen pontja van $M[X]$-nek. Ezek közül legfeljebb $|N(X)|$ lehet fedett M-ben. ■

4.5. tétel. (Gallai-lemma) *Ha* G *összefüggő, és minden* $v \in V$ *csúcsra* $\nu(G) = \nu(G-v)$*, akkor* $\mathrm{def}\,(G) = 1$.

Bizonyítás. (Schrijver, 2000)

4.6. lemma. *Tetszőleges* M *párosításhoz egy* G' *gráfban létezik olyan* N *maximális párosítás, amire* $V(M) \subseteq V(N)$.

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges M-et. Legyen N az a maximális párosítás, amire $|M \cap N|$ a legnagyobb. Ha indirekte $x \in V(M) - V(N)$, akkor legyen $xy \in M$. Ha $y \notin V(N)$, akkor $N + xy$ még nagyobb párosítás lenne. Tehát van egy $yz \in N$. Az $N' := N - yz + xy$ is maximális párosítás, és $|M \cap N'| > |M \cap N|$. Ellentmondás. □

Tegyük fel, hogy $\mathrm{def}\,(G) \geqslant 2$: minden maximális párosításban van legalább két fedetlen pont. G összefüggő, ezért tekinthető egy olyan M maximális párosítást, melyben két fedetlen pont távolsága minimális. Legyen két minimális távolságra lévő fedetlen pont a és b. Távolságuk biztosan legalább 2; legyen P egy legrövidebb út köztük, legyen $z \in V(P) - a - b$. Mivel z fedett, ezért van egy $zw \in M$ él. $M - zw$ párosítás a $G' = G - z$ gráfban. Ekkor a lemma szerint van olyan $\nu(G') = \nu(G)$ méretű N párosítás G'-ben, amire $V(M - zw) \subseteq V(N) \subseteq V - z$. Itt z fedetlen N-ben, és a, b, w valamelyike is fedetlen N-ben, ugyanis $M - zw$-ben fedetlenek, és $|V(N) - V(M - zw)| = 2$. Így az N-ben lenne két fedetlen pont, melyek közelebb vannak mint a és b. ■

Faktorkritikusnak olyan gráfot nevezünk, amiben bármely pontot törölve van teljes párosítás. Egy ilyen gráf biztosan összefüggő. Gallai lemmája azt jelenti, hogy pontosan a faktorkritikus gráfok elégítik ki a lemma feltételeit.

4.7. tétel. (Tutte) *Akkor és csak akkor van teljes párosítás* G*-ben, ha minden* $X \subseteq V$ *részhalmazra* $\mathrm{odd}_G[X] \leqslant |N(X)|$.

4.8. tétel. (Berge-Tutte formula) *Tetszőleges* G *gráfra*

$$2\nu(G) = \min_{X \subseteq V} \{|V| - \mathrm{odd}_G[X] + |N(X)|\}$$

Bizonyítás. A 4.4. állítás miatt elég lenne mutatni egyetlen X-et, amire $2\nu(G) \geqslant |V| - \mathrm{odd}_G[X] + |N(X)|$. $|V|$ szerinti indukciót alkalmazunk: egypontú gráfra $X = V$-vel igaz.

1. eset: $\nu(G) < \nu(G-v)$ valamely $v \in V$ -re. Ekkor persze $\nu(G) - 1 = \nu(G-v)$. Az indukciós feltevés miatt létezik $X \subseteq V - v$, amivel

$$2(\nu(G) - 1) = 2\nu(G-v) = |V - v| - \mathrm{odd}_{(G-v)}[X] + |N_{G-v}(X)| \geqslant$$

$$\geqslant |V| - 1 - \text{odd}_G[X] + |N_G(X)| - 1$$

azaz $2\nu(G) \geqslant |V| - \text{odd}_G[X] + |N_G(X)|$.

2. eset: $\nu(G) = \nu(G - v)$ minden $v \in V$ csúcsra. Ha G komponensei $G_1, G_2, \cdots, G_k$, akkor Gallai lemmája miatt G_i-nek páratlan sok pontja van, és

$$\text{def}(G) = \text{def}(G_1) + \text{def}(G_2) + \cdots + \text{def}(G_k) = k = \text{odd}_G(V)$$

Ezért $X = V$ választása megfelel. ■

Egy olyan X-et, ami a Berge-Tutte-formulában egyenlőséget biztosít **gát**nak nevezünk.

5. Gallai-lemma és Lovász párosítási algoritmusa

Ebben a fejezetben bemutatunk egy új megközelítést párosítások kezelésére. Ebből levezetjük a második fejezet eredményeit. A levezetés kerülő úton jön: egy algoritmust is megadunk, az ún. Gallai-Edmonds-féle struktúratétel gondolatát veszi alapul.

5.1. Javítóséta definíciója, alapvető tulajdonságai

Egy $M_0 \subseteq E$ élhalmazt z_0-**hibás párosítás**nak hívunk, ha mindenütt legfeljebb egy a foka, csak z_0-ben kettő. Legyen a z_0-ra illeszkedő két él $y_0z_0, z_0a \in M$. Ha N_0 egy párosítás, melyre $z_0 \notin V(N_0)$ (szóban: N_0 z_0-**szabad**), akkor tekintsük $N_0^+ = N + \mathrm{y_0z_0}$ -t és $M_0^- = M - \mathrm{y_0z_0}$-t, ezt a műveletet nevezzük billentésnek! (Itt tekinthettük volna a másik z_0-re illeszkedő élt is.) N_0^+ párosítás, vagy y_0-hibás párosítás; M_0^- pedig y_0-szabad párosítás. Ha N_0^+ nem párosítás, akkor újabb billentéssel folytathatjuk: N_0^+-ben y_0-ra egy új és egy régi él illeszkedik, billentsük át M_0^--nak a régit. A billentések sorozatát nem hagyjuk abba, míg egy billentés után mindkét élhalmaz párosítás nem lesz. Egy $W = W(M_0, N_0, z_0)$ sétát kapunk:

$$z_0,\ y_0,\ z_1,\ y_1,\ z_2,\ y_2,\ \cdots$$

ahol $z_i \neq z_{i+1}$ és $y_i \neq y_{i+1}$: mindig a másik hibás élt billentjük vissza. Továbbá

$$M_i = M_0 - z_0y_0 + y_0z_1 - \cdots + y_{i-1}z_i$$

$$N_i = N_0 + z_0y_0 - y_0z_1 + \cdots - y_{i-1}z_i$$

$$M_i^- = M_0 - z_0y_0 + y_0z_1 - \cdots - z_iy_i$$

$$N_i^+ = N_0 + z_0y_0 - y_0z_1 + \cdots + z_iy_i$$

melyekre $M_i \ni z_iy_i$ és $N_i^+ \ni y_iz_{i+1}$. Látható, hogy d_M és d_{M_i} majdnem mindenütt megegyezik, csak z_0-ban és z_i-ben lehet a különbség ± 1. Fontos kiemelni, hogy $|M| = |M_i| = |M_i^-| + 1$ és $|N| = |N_i| = |N_i^+| - 1$.

A javítóséta akkor ér véget, amikor először M_i vagy N_i^+ párosítás lesz. Ha végetér, akkor jelöljük ezt az indexet t-vel.

Ha M eredetileg párosítás (nem hibás), akkor is lehet képezni a fenti műveleteket: Ha z-re nem illeszkedik él, akkor a javítóséta a z pontból áll; ha $zy \in M$, akkor $M_0^- := M - zy$, $N_0^+ := N + zy$ után már a fenti szabállyal haladhatunk. Ezt nevezzük **hideg indítás**nak.

A séta és az M_i, M_i^+, N_i, N_i^+ élhalmazok összességét nevezzük (z, M, N)-**javítórendszernek**. Ez nem teljesen egyértelmű, ugyanis z-ben két éllel is kezdhetjük. A két lehetséges javítórendszer bármelyike megfelel a későbbiekben.

5.1. állítás. *A következő három lehetőség közül pontosan egy igaz bármely javítórendszerre:*

a) Egy M_t párosítással végetér.

b) Egy N_t^+ párosítással végetér.

c) Van egy (egyértelmű) $C \ni z$ páratlan kör, melyből se M se N nem lép ki, C pedig M- és N-élekkel váltakozó módon le van fedve, z-nél két M-éllel.

Bizonyítás. $M \cup N$ minden foka legfeljebb kettő, így komponensei utak és körök. Ha z komponense út lenne, akkor biztosan végetérne a séta: hiszen csak $M \cup N$ élein lépked, és oda-vissza lépés nincsen. És ha z komponense egy C kör, akkor C z-n kívül alternáló, z fedetlen N-ben, így két M-él kell mellé. A kör ekkor páratlan. ■

Ilyenkor a séta a páratlan körön szaladgál körbe-körbe. Nevezzük ezt **beszorulásnak**. Beszoruláskor $|M[C]| = (|C|+1)/2$, $|N[C]| = (|C|-1)/2$ és $d_M(C) = d_N(C) = 0$. Vegyük észre, hogy hideg indítás nem szorulhat be!

5.2. tétel. *Legyenek M, N párosítások, C páratlan kör, melyre $d_M(C) = 0$, továbbá $v \notin C$, $v \notin V(N)$. Ekkor vagy van $|N|$-nél nagyobb párosítás, vagy van olyan v-szabad M_v párosítás, melyre $|M_v| \geqslant |M|$ és $d_{M_v}(C) \leqslant 1$.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy (v, M, N)-javítórendszert. Ez megáll, mert hideg indítással keletkezett. Ha N_t^+-szal, akkor készen vagyunk. Ha M_t-vel áll meg és $W \cap C = \emptyset$, akkor $M_v = M_t$-vel kész. Ha M_t-vel áll meg, de $W \cap C \neq \emptyset$, akkor W a C-be csak egy N-élen léphetett be, azaz legyen a W első C-be lépő éle $y_{i-1}z_i$. Ekkor $M_v := (M_i/C)^C$ megfelel. ■

A javítórendszer felépíthető algoritmikusan, így az elmondott állításokban szereplő egzisztenciáknál többet is tudunk: meg is találhatók ezen párosítások és páratlan körök.

5.2. Gallai-lemma

A 4.5. tételre az imént megadott fogalmakkal új bizonyítást adhatunk:

A 4.5. tétel bizonyítása: A tétel állítása egypontú gráfra igaz. A pontok száma szerinti indukcióval bizonyítjuk az állítást: ezentúl tegyük fel, hogy $|V| > 1$.

Legyen M tetszőleges $\nu(G)$ méretű párosítás. Az összefüggőség miatt kell lennie fedett pontnak, sőt kell lennie szomszédos x, y pontpárnak: x fedetlen és y fedett. $\nu(G) = \nu(G - y)$, legyen N olyan $\nu(G)$ méretű párosítás G-ben, ami nem fedi y-t. Tekintsünk egy $(y, M + xy, N)$ -javítórendszert. Ha megáll a séta, akkor van $\nu(G) + 1$ méretű párosítás, ami lehetetlen. Azaz beszorul egy C páratlan körbe. Minden $v \notin C$-re található a 5.2. állításnak megfelelő M_v. Az M/C és M_v/C ($v \in V - C$) párosítások mutatják, hogy bármely ponthoz van olyan def (G) hiányú párosítás G/C-ben, ami fedetlenül hagyja azt a pontot. A 4.2. állítás miatt def $(G) =$ def (G/C). Azaz $\nu(G/C) = \nu(G/C - v)$ minden $v \in V/C$-re. Az indukció alkalmazásával def $(G) =$ def $(G/C) = 1$. ■

5.3. megjegyzés. Egy rögzített faktorkritikus gráfra az indukiós bizonyítás az egypontú gráfra vezeti vissza az állítást. Menetközben az összehúzások egy fülfelbontást adnak meg. Ez azt jelenti, hogy a következő három tulajdonság ekvivalens:

a) G összefüggő, és minden $v \in V$ csúcsra $\nu(G) = \nu(G - v)$.

b) G faktorkritikus.

c) G-nek van páratlan fülfelbontása.

A fülfelbontás konstrukciója algoritmikus is, ha az elején minden ponthoz kapunk egy párosítást, ami csak őt hagyja ki. A bizonyítás lépéseit általánosítva Lovász "listás" algoritmusának egy változatát fogjuk kapni, ami tetszőleges gráfban maximális párosítást keres, sőt megadja a Gallai-Edmonds-féle felbontását.

5.3. Tetszőleges gráfban legnagyobb párosítás keresése

Eddig általános tételeket ismertünk meg maximális párosításokkal kapcsolatban. Szeretnénk algoritmikusan is megoldani az ide tartozó kombinatorikus optimalizálási feladatot: mutassunk egy maximális párosítást egy tetszőleges gráfban, és egy gátat a Berge-Tutte formulában, amely egyúttal bizonyítékul szolgál arra, hogy az adott párosítás valóban maximális. Páros gráfok esetén ez a feladat egyszerűnek bizonyult: egy alternáló utas algoritmus könnyen megbírkózik vele. Tetszőleges gráfban a legismertebb, és egyben rendkívül hatékony kombinatorikus algoritmus Edmondstól származik. Most ehelyett Lovász algoritmusának egy változata következik.

Legyen $G = (V, E)$ tetszőleges gráf. Legyen k-hiányos párosítások egy nemüres halmaza $\mathcal{L}$. Definiáljuk a következő partícióját V-nek:

$$D = D(\mathcal{L}) = D_G(\mathcal{L}) := \{x \in V : \exists M \in \mathcal{L} \text{ amire } x \notin V(M)\}$$

$$A = A(\mathcal{L}) = A_G(\mathcal{L}) := N(D(\mathcal{L}))$$

$$C = C(\mathcal{L}) = C_G(\mathcal{L}) := V - (D(\mathcal{L}) \cup A(\mathcal{L}))$$

Jelöljük $\mathcal{L}_{\max} = \{M : |M| = \nu(G)\}$ -vel az összes maximális párosítás halmazát. A következő partíciót **Gallai-Edmonds-féle struktúrá**nak nevezzük:

$$D(G) := D_G(\mathcal{L}_{\max}),\ A(G) := A_G(\mathcal{L}_{\max}),\ C(G) := C_G(\mathcal{L}_{\max})$$

Egy gráfban egy M párosítás **majdnem teljes**, ha pontosan egy pontot hagy fedetlenül.

5.4. lemma. (Optimalitási feltételek) *Ha M egy párosítás, $\mathcal{L}$ azonos méretű párosítások egy halmaza, melyre $M \in \mathcal{L}$, továbbá teljesülnek a a következő feltételek (OF): (α) M semelyik éle nem köt össze $A(\mathcal{L})$-beli pontot $A(\mathcal{L}) \cup C(\mathcal{L})$-belivel. ($\beta$) $G[D(\mathcal{L})]$ bármely T összefüggőségi komponensében $M[T]$ majdnem teljes párosítás,*

akkor M maximális párosítás és $D(\mathcal{L})$ gát.

Bizonyítás. OF teljesülése esetén $G[D]$ komponensei páratlanok, mindben egyetlen pont van ami a komponensen belül nincs kipárosítva, s ezek közül $|A|$ darab van kipárosítva A-belivel. $A \cup C$ -ben minden pont fedett M által. Ezért a 4.4. állítás felhasználásával

$$2|M| = |V| - \operatorname{odd} G[D] + |A| \geqslant 2\nu(G)$$

∎

Most következik az algoritmus leírása. Az algoritmust $k = n$, $\mathcal{L} = \{\emptyset\}$ -val indítjuk. Vegyünk egy tetszőleges $M \in \mathcal{L}$-et. Ha $M, \mathcal{L}$ kielégítik az OF-et, akkor kész. Egyébként valahogyan megváltoztatjuk $\mathcal{L}$-et úgy, hogy vagy D nagyobb vagy k kisebb lesz (azaz nagyobb párosítást kapunk), ez az algoritmus egy javítólépése: Áttérünk egy egyelemű $\mathcal{L}'$-re, melynek egy nagyobb párosítás az egyetlen eleme, vagy egy új k-hiányos tagot adunk $\mathcal{L}$-hez.

Ha nem teljesülnek az OF, akkor a javítólépéshez az alábbiak szerint járunk el:
($\neg\alpha$) $\exists xy \in M$, $\exists z \in D : x \in A$, $y \in A \cup C$, $zx \in E$. Ekkor legyen $\overline{M} := M - xy + zx$.
($\neg\beta1$) $G[D(\mathcal{L})]$ valamely T komponensében van két fedetlen pont. Legyen az egyik fedetlen x, legyen $z \in T$ az egyik szomszédja. $\overline{M} := M + zx$
($\neg\beta2$) $G[D(\mathcal{L})]$ valamely T komponensére: $\exists xy \in M : x \in T$, $y \in A$, és vagy van még legalább egy M-él T és A között, vagy van még legalább egy fedetlen pont T-ben. Ekkor legyen $z \in T$ az egyik szomszédja x-nek. $\overline{M} := M - xy + zx$
($\neg\beta3$) $G[D(\mathcal{L})]$ valamely T komponensében $M[T]$ teljes párosítás. Ekkor $|T|$ páros. D definíciója szerint van $M' \in \mathcal{L}$, ami valamelyik pontot nem fedi le T-ben. M' a ($\neg\beta1$), ($\neg\beta2$) eset valamelyikébe esik.

Legyen $N \in \mathcal{L}$ z-szabad. Tekintsünk egy $(z, \overline{M}, N)$-javítórendszert. Ha a 5.1. állítás a) vagy b) esete áll fenn, akkor vagy egy M_t vagy egy N_t^+ keletkezik. A fenti esetekben: ($\neg\alpha$), ($\neg\beta2$) Ha M_t-vel áll meg a séta, és nem x-ben ért véget, akkor $\mathcal{L}' := \mathcal{L} + M_t$-vel $x \in D(\mathcal{L}') \supseteq D(\mathcal{L}) \not\ni x$. Ha x-ben, akkor $\mathcal{L}' := \mathcal{L} + N_t$-vel $x \in D(\mathcal{L}') \supseteq D(\mathcal{L}) \not\ni x$. Ha N_t^+-vel ér véget, akkor nagyobb párosítást kaptunk, $\mathcal{L}' := \{N_t^+\}$.

($\neg\beta 1$) A kapott M_t (vagy N_t^+) nagyobb párosítás, így $\mathcal{L}' := \{M_t\}$ (vagy $\mathcal{L}' := \{N_t^+\}$).

Marad az az eset, amikor beszorulunk egy C-be. Feltehető $C \subseteq D$, egyébként D-t megnövelhetnénk. A 5.2. tétel szerint: minden $v \in D - C$-re: vagy találunk nagyobb párosítást, vagy találunk megfelelő M_v-ket. Ekkor legyen $\mathcal{L}_{G/C} := \{M_v/C : v \in D-C\} \cup \{M/C, N/C\}$, melynek tagjai szintén k-hiányosak G/C-ben, és $D_{G/C}(\mathcal{L}_{G/C}) = D_G(\mathcal{L})/C$. Mivel M nem teljesítette az optimalitási feltételeket, ezért $\mathcal{L}_{G/C}$-ben M/C sem. Ha találunk egy nagyobb párosítást G/C-ben, a 4.1. állítás alapján készíthetünk G-ben is. Ha $\mathcal{L}_{G/C}$-hez egy új k-hiányos $M_{\text{új}}$ tagot hozzávéve megnövelhető D (azaz $D_{G/C}(\mathcal{L}_{G/C}) \not\supseteq V - V(M_{\text{új}})$), akkor a 4.1. állítás alapján elérhető $D_G(\mathcal{L})$ növelése is: $D_G(\mathcal{L}_G) \not\supseteq V - V(M_{\text{új}}^C)$. Tehát G/C-ben folytathatjuk az algoritmust $M/C \in \mathcal{L}_{G/C}$-vel: az ottani javítólépés G-beli javítólépést idéz elő.

Futásidő: Az algoritmus futása közben $|\mathcal{L}| \leqslant |D| + 1 \leqslant n+1$, ugyanis elég volt olyan $\mathcal{L}$ listát megtartani, ami az aktuális $D(\mathcal{L})$ pontjaihoz egy-egy tagot tartalmaz, a "+1" azért kell, mert az összehúzáskor ezen felül megtartottuk még M/C-t is. Egy javítóséta $O(n)$ lépés, egy összehúzáshoz $O(n)$ javítóséta kell, $O(n)$ összehúzás történhet, amíg D megnő. $O(n)$ -szor nőhet meg D, míg k lecsökken. Így $O(n^5)$ idejű algoritmusunk van, ami egyáltalán nem jó. Ezt le lehet csökkenteni $O(n^4)$-re egy kis ügyeskedéssel, ugyanis nem szükséges minden összehúzást elvégezni. (Lovász eredeti algoritmusának futásideje $O(n^4)$.)

5.4. Gallai-Edmonds-féle struktúratétel

Az előző fejezetben megadott $V = D(G) \cup A(G) \cup C(G)$ partíciónak a következő tulajdonságai vannak: Tetszőleges M maximális párosításra

(a) $M[C]$ teljes $G[C(G)]$-ben.

(b) $M[T]$ majdnem teljes $G[T]$ -ben, ha T komponense $G[D(G)]$-nek.

(c) M minden $A(G)$-beli pontot valamelyik $D(G)$-belivel párosít össze.

(d) $2\nu(G) = |V| - \operatorname{odd}_G[D(G)] + |A(G)|$, azaz $D(G)$ gát.

(e) Minden komponense $G[D(G)]$-nek faktorkritikus.

Bizonyítás. Alkalmazzuk Lovász algoritmusának lépéseit $\mathcal{L}_{\max}$-ra! Ha valamely $M \in \mathcal{L}_{\max}$ nem teljesítené OF-et, akkor az algoritmus biztosítana nagyobb párosítást, vagy bővebb D-t. Tehát minden $M \in \mathcal{L}_{\max}$ teljesíti OF-et. Ebből könnyen adódik valamennyi állítás. ■

5.5. megjegyzés. Amikor az algoritmus megáll, akkor nemcsak egy legnagyobb párosítást ad, hanem egy gátat is. Sokféleképpen lefuthat az algoritmus: menetközben több választási lehetősége van, például az $M \in \mathcal{L}$ választásakor. Mégis mindig az $D(G)$ kanonikus gátat adja, ezzel megkonstruálva a Gallai-Edmonds-féle struktúrát.

6. Az igazítási algoritmus

A bevezetőben megismerkedtünk az útpárosításokkal és általánosításával, a páros faktor problémával. Az ott bevezetett jelöléseket fogjuk ezentúl is használni. A következő alapvető megfigyelések az páros faktorok méretéről, hiányáról szólnak: a párosításoknál látott 4.1. és 4.2. állítások általánosításai. Ezentúl G legyen egy tetszőleges alig szimmetrikus gráf. Egy alig szimmetrikus gráfban **faktorkritikus**nak olyan $F \subseteq V$ ponthalmazt nevezünk amiben a szimmetrikus élek irányítatlan értelemben faktorkritikus gráfot alkotnak. Ekkor az egész $G[F]$ szimmetrikus az alig szimmetria miatt. Legyen t_1, t_2 két tetszőleges pont egy faktorkritikus gráfban. Ekkor létezik egy $t_1 \to t_2$ páros hosszú út úgy, hogy a többi pont kipárosítható egymás közt. (Bizonyítás: vegyük egy t_1-et és egy t_2-t elkerülő párosítás unióját.) Ha a későbbiekben azt mondjuk, hogy „$t_1 \to t_2$ út”, akkor erre gondoljunk! Az alábbi állítást kapjuk:

6.1. állítás. *Ha $F \subseteq V$ faktorkritikus a G gráfban, és adott egy M páros faktor a G/F gráfban, akkor készíthető egy M^F páros faktor a G-ben, amire $M^F/F = M$, és* $\operatorname{def}_{G/F}(M) = \operatorname{def}_G(M^F)$.

6.2. állítás. *Egy F páratlan ponthalmazban legfeljebb $|F| - 1$ éle van egy páros faktornak: $|M[F]| \leqslant |F| - 1$. Egyenlőség esetén $M[F]$ tartalmaz egy $t_1 \to t_2$ utat F-ben. M legfeljebb egy éllel léphet be F-be, méghozzá t_1-be. F -ből kilépő éle is legfeljebb egy t_2-ből kilépő lehet.*

Bizonyítás. $|M[F]|$ annyival kevesebb $|F|$-nél, ahány olyan komponense van ami nem (páros) kör. ∎

Ez az állítás adja az értelmét a következő fogalomnak: Egy M páros faktor **majdnem teljes** egy $H \subseteq R$ páratlan ponthalmazban, ha $|M[H]| = |H| - 1$.

6.3. állítás. *Ha $F \subseteq V$ faktorkritikus G-ben, akkor* $\operatorname{def}(G) \leqslant \operatorname{def}(G/F)$. *Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha G-ben van olyan M maximális páros faktor, melyre $\delta_M(F), \varrho_M(F) \leqslant 1$.*

Bizonyítás. Legyen M egy maximális páros faktor G/F-ben, ekkor $\operatorname{def}(G/F) = \operatorname{def}_{G/F}(M) = \operatorname{def}_G(M^F) \geqslant \operatorname{def}(G)$. Ha egyenlőség áll, akkor az előző állítás miatt M^F maximális G-ben.

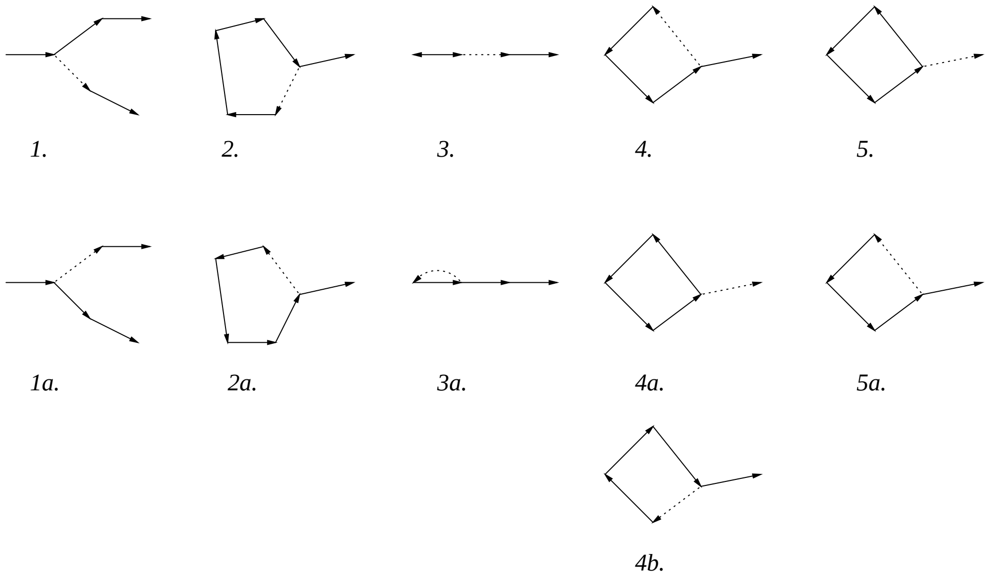
A másik irány igazolásához tekintsünk egy N maximális páros faktor G-ben, amire $\delta_M(F)$, $\varrho_M(F) \leqslant 1$. Ha $|N[F]| = |F| - 1$ akkor N/F az előző állítás miatt páros faktor G/F-ben, így $\operatorname{def}(G/F) \leqslant \operatorname{def}_{G/F}(N/F) = \operatorname{def}_G(N) = \operatorname{def}(G)$.

Ha pedig $|N[F]| \leqslant |F| - 2$, akkor egy N'-t készítünk: N-nek a F-ből kilépő élét és a F-n belüli éleit kihagyjuk, helyettük F-ben $|F| - 1$ élt húzunk be. Erre N'/F páros faktor, és $\operatorname{def}(G/F) \leqslant \operatorname{def}_{G/F}(N'/F) = \operatorname{def}_G(N') = \operatorname{def}(G)$. ■

6.1. Javítóséta definíciója

Mostantól kezdve néhány fejezeten keresztül páros faktorokkal fogunk műveleteket végezni.

Az M páros faktort nevezzük z-**kiszabadnak** ha $\delta_M(z) = 0$, illetve z-**beszabadnak** ha $\varrho_M(z) = 0$. Legyen M y-beszabad és $e = zy \in E$. Ha egy élhalmaz előáll $M_{\text{ki}} = M + e$ alakban, és NEM páros faktor, akkor z-**kihibásnak** nevezzük. Hasonlóan ha M z-kiszabad és $e = zy \in E$ akkor $M_{\text{be}} = M + e$-t y-**behibásnak** nevezzük, ha NEM páros faktor. Az e él a hibás él ezekben a példákban. A z-kihibásság lehetőségeit az alábbi 1.-5. ábrák szemléltetik:



Ha M_{ki} z-kihibás, akkor legyen $M^*_{\text{ki}} := M_{\text{ki}}$ ha M_{ki} nem tartalmaz z-re illeszkedő (irányított) kört. Ha van egy z-re illeszkedő K kör M_{ki}-ben akkor páratlan $|K|$ esetén legyen $M^*_{\text{ki}} := M_{\text{ki}} - K + \overleftarrow{K}$, ahol $\overleftarrow{K}$ a K kör fordítottja. Páros $|K|$ esetén $\overleftarrow{K}$ nem mindig része $E(G)$-nek. De ha része, akkor legyen $M^*_{\text{ki}} := M_{\text{ki}} - K + \overleftarrow{K}$. Ha a páros kör fordítottja nem része az élhalmaznak, akkor legyen $M^*_{\text{ki}} := M_{\text{ki}}$. Egy M_{be} z-behibásra hasonló a definíciója M^*_{be}-nek. Ez a $*$ művelet megengedhető az alig szimmetria miatt. Az 1a.-5a. és 4b. ábrákról leolvasható az alábbi lemma:

6.4. lemma. *Ha $M_{ki} = M + g$ z-kihibás, akkor M^*_{ki} is z-kihibás, és $M^*_{ki} - f$ páros faktor, ahol $f \neq e$ egy másik z-ből kimenő él.*

Ha $N_{be} = N + f$ y-behibás, akkor N^*_{be} is y-behibás, és $N^*_{be} - g'$ páros faktor, ahol $g' \neq f$ egy másik y-ba bemenő él.

Egy páros faktort (ill. z-hibás páros faktort) nevezzünk **rendes**nek, ha nem tartalmaz (ill. nem tartalmaz z-től diszjunkt) nemtriviális páros kört, aminek a fordítottja is része $E(G)$-nek. Elég lesz rendes páros faktorokra szorítkozni, mert egy nem rendes páros faktor rendessé tehető a fokok változtatása nélkül. Az (M_0, N_0, z_0, g_{-1}) négyest **kihibás négyes**nek nevezzük ha M_0 rendes z_0-kihibás, és N_0 rendes z_0-kiszabad g_{-1} M_0-nak a z_0-ból kilépő hibás éle. Ha nem tesszük fel, hogy M_0, N_0 rendesek, akkor rendetlen kihibás négyesről beszélünk.

Tekintsünk egy (M_0, N_0, z_0, g_{-1}) kihibás négyest. A lemma szerinti f éllel legyen $M_0^- := M_0^* - f$ és $N_0^+ := N_0 + f$, azaz **billentsük át** a hibás $f = f_0 = z_0y_0$ élt. Itt M_0^- már y_0-beszabad és N_0^+ y_0-behibás, vagy páros faktor. Ha N_0^+ y_0-behibás, akkor legyen a lemmabeli $f \neq g' = g_0 = z_1y_0$ éllel $M_1 = M_0^- + g$ és $N_1 = (N_0^+)^* - g$. Az újabb billentés után N_1 z_1-kiszabad és M_1 páros faktor vagy z_1-kihibás. Addig ismételgessük ezt a billentéses műveletet, amíg M_i vagy N_i^+ páros faktor lesz. Kapunk egy $W = W(M_0, N_0, z_0, g_{-1})$ sétát:

$$W = (z_0,\ y_0,\ z_1,\ y_1,\ z_2,\ y_2,\ \cdots)$$

ahol $z_i \neq z_{i+1}$ és $y_i \neq y_{i+1}$: mindig egy másik élt billentünk vissza. Továbbá

$$M_i = M_{i-1}^- + z_iy_{i-1}$$

$$N_i = (N_{i-1}^+)^* - z_iy_{i-1}$$

$$M_i^- = (M_i)^* - z_iy_i$$

$$N_i^+ = N_i + z_iy_i$$

melyekre $(M_i)^* \ni z_iy_i = f_i$ és $(N_i^+)^* \ni z_{i+1}z_i = g_i$. Négyesek egy sorozatát is kapjuk: (M_0, N_0, z_0, g_{-1}), (M_0^*, N_0, z_0, f_0), (M_0^-, N_0^+, y_0, f_0), $(M_0^-, N_0^{+*}, y_0, g_0)$, (M_1, N_1, z_1, g_0),...

Látható, hogy δ_{M_0} és δ_{M_i} majdnem mindenütt megegyeznek, csak z_0-ban és z_i-ben lehet a különbség ± 1. Fontos kiemelni, hogy $|M_0| = |M_i| = |M_i^-| + 1$ és $|N_0| = |N_i| = |N_i^+| - 1$. A javítóséta akkor ér véget, amikor először M_i vagy N_i^+ páros faktor lesz. Ha ez tényleg megtörténik – nem végtelen a séta – akkor jelöljük ezt az indexet t-vel.

Ha M_0 eredetileg páros faktor (nem hibás), akkor is lehet képezni a fenti műveleteket: Ha z_0-ra nem illeszkedik kiél, akkor a javítóséta a z_0 pontból áll; ha $z_0y_0 \in M_0$, akkor $M_0^- := M_0 - z_0y_0$, $N_0^+ := N_0 + z_0y_0$ után már a fenti szabállyal haladhatunk. Ezt nevezzük **hideg indítás**nak, (M_0, N_0, z_0, g_{-1})-ra is képezhető a kihibás hármasoknál megadott javítóséta. Mivel feltettük M_0, N_0 rendességét, ezért az összes kapott élhalmaz rendes. Jelölje

$$\mathrm{JR}\,(M_0, N_0, z_0, g_{-1}) := (M_0, M_1, M_2, , \cdots)$$

a konstruált rendes élhalmazok **javítórendszerét**.

6.5. megjegyzés. A W javítóséta visszafelé (ellentétes sorrendben) is előáll javítósétaként, így egy javítóséta kezdőszeletét meghatározza a folytatása. Ugyanis $W(M_i^*, N_i, z_i, f_i)$ kiadja W kezdőszeletét z_i és z_0 között „tolatva”.

6.2. Csere, első páros visszatérés

Végső célunk az, hogy a billentéses művelet segítségével – ha lehet – gyártsunk le egy M_t vagy N_t^+ páros faktort, s ha nem lehet, akkor a 5.1. állításhoz hasonlóan derítsük ki, mi az oka. Vegyük észre, hogy a billentéses művelet teljes képességét nem használja ki a javítóséta. Ugyanis tegyük fel, hogy valamely $i < j$-re $z_i = z_j$. Ekkor képezhető egy $W(M_i, N_j, z_j, g_{i-1})$ valamint egy $W(M_j, N_i, z_j, g_{j-1})$ javítóséta, és könnyen lehet, hogy egy ilyen z-**cseré**vel több esélyünk van találni M_t vagy N_t^+ alakú páros faktort. Egy z-csere műveletének akkor van egyáltalán értelme, ha $M_i \neq M_j$ (azaz $N_i \neq N_j$ is). Mikor számíthatunk erre? **Első páros visszatérés**nek nevezzük a W sétában a $z_i = z_j$ $(i < j)$ párt, ha $i' < j' < j$ -re $z_{i'} \neq z_{j'}$.

6.6. állítás. *Ha $z_i = z_j$ $(i < j)$ első páros visszatérés, akkor vagy $M_i \neq M_j$ (és $N_i \neq N_j$), vagy van egy $C = (c_0, c_1, \cdots, c_{|C|-1})$ páratlan kör, melynek $c_i c_{i+1}$ élei szimmetrikusak és*

$|M_0[C]| = |C|$ *és* $\varrho_{M_0}(C) = 0$ *és* $\delta_{M_0}(C) \leqslant 1$

$|N_0[C]| = |C| - 1$ *és* $\delta_{N_0}(C) = 0$ *és* $\varrho_{N_0}(C) \leqslant 1$

$z_0 \in C$, $i = 0$ *és* $j = 2|C|$.

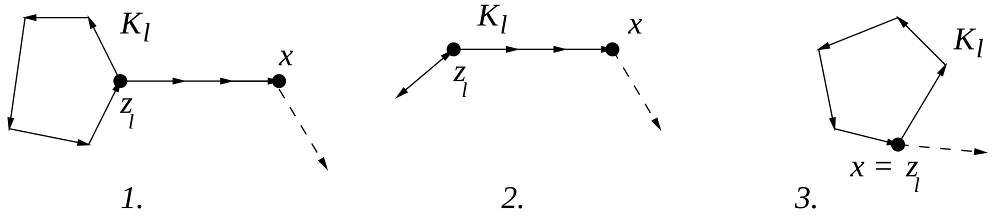
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $M_i = M_j$. Egy pontban legfeljebb egyszer járhatott a séta z-ként. Minden élen páros sokszor lépett át a séta i és j között. Azaz minden élen ahol átment, ott pontosan kétszer. Egy pontra legfeljebb két i és j közt használt él illeszkedhet. A séta nem ért véget, és mivel nincs oda-vissza lépés, ez csak úgy lehetett, ha a bejárt élek egyetlen C kört alkotnak. Ha páros lenne, akkor már egyszeri körbejárás után meglenne a páros visszatérés. A 6.5. megjegyzés miatt pedig $i = 0$ és $j = 2|C|$. Legyen $C = (c_0, c_1, \cdots, c_{|C|-1})$ ciklikusan indexelve. Ezeken az éleken a séta f-ként és g-ként is végigmegy, így mind szimmetrikus. Ebből következik, hogy minden keletkező kör megfordítható.

Tekintsük ezentúl csak az M_l-eket. Tegyük fel, hogy ha M_l^- c_p-beszabad, akkor $M_{l+1} = M_l^- + c_{p+1}c_p$ és $M_{l+1}^- = M_{l+1}^* - c_{p+1}c_{p+2}$.

6.7. lemma. *M_l-nek a z_l-től diszjunkt C-be metsző komponensei C-n lévő párosításélek.*

Bizonyítás. Tekintsük M_l egy z_l-től diszjunkt C-be metsző komponensét. Ha ez egy páros kör, akkor az alig szimmetria miatt, M_l rendessége miatt, és mert a séta csak a C körön halad, csak egy C-n lévő párosításél lehet. Már csak azt kell kizárni, hogy van egy (esetleg ponttá fajuló) út, ami nem tartalmazza z_l-et, de belemetsz C-be. Legyen ennek az útnak az első C-ben lévő pontja c_0. Ekkor minden M_i-ben és M_i^*-ben c_0 egy komponens első C-beli pontja. Valamely $0 \leqslant s \leqslant 2|C|$-re $y_s = c_0$. Azaz $M_s \ni c_{|C|-1}c_0$, így van egy éle M_s^*-nek a körön, ami belép c_0-ba. Ez ellentmondás. □

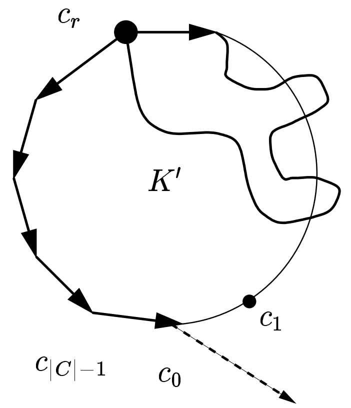
Mivel a párosításélek nem fedhetik le C-t, ezért van egyetlen K_l komponense M_l-nek, ami C-be metsz, de nem párosításél. Az ábra a lehetséges K_l komponenseket szemlélteti:



Az ábrán x-szel jelölt pont (a komponens utolsó C-beli pontja) minden M_l-re ugyanaz marad. A szimmetria miatt feltehető, hogy $x = z_0 = c_0$. Ekkor M_0 egy 3. típusú K_0 komponenst tartalmaz, melynek K a köre. M_0 valamilyen irányban biztosan tartalmazza az $c_0c_1, c_2c_3, \cdots, c_{|C|-1}c_0$ éleket, mert rendre ezeket billentjük át. Tehát a K kör x-re illeszkedő két éle c_0c1 és $c_{|C|-1}c_0$.

6.8. lemma. $K = C$

Bizonyítás. Ha $K \neq C$, akkor legyen $c_{r-1}c_r \notin K$ és $c_rc_{r+1}, c_{r+1}c_{r+2}, \cdots, c_{|C|-1}c_0 \in K$. Ekkor az előző észrevétel miatt $r = 2q$ páros $(0 < r < |C|)$. Nézzük M_q -t: a séta $z_q = c_r$-ben jár. Mivel $c_{r-1}c_r \notin M_0$, ezért K_q csak az 1. típusnak felelhet meg, az alábbi ábra szemlélteti:



A keletkező K' kör egyik éle nem a C körre illeszkedik. Ez ellentmondás, mert a séta ezen az élen menne tovább. □

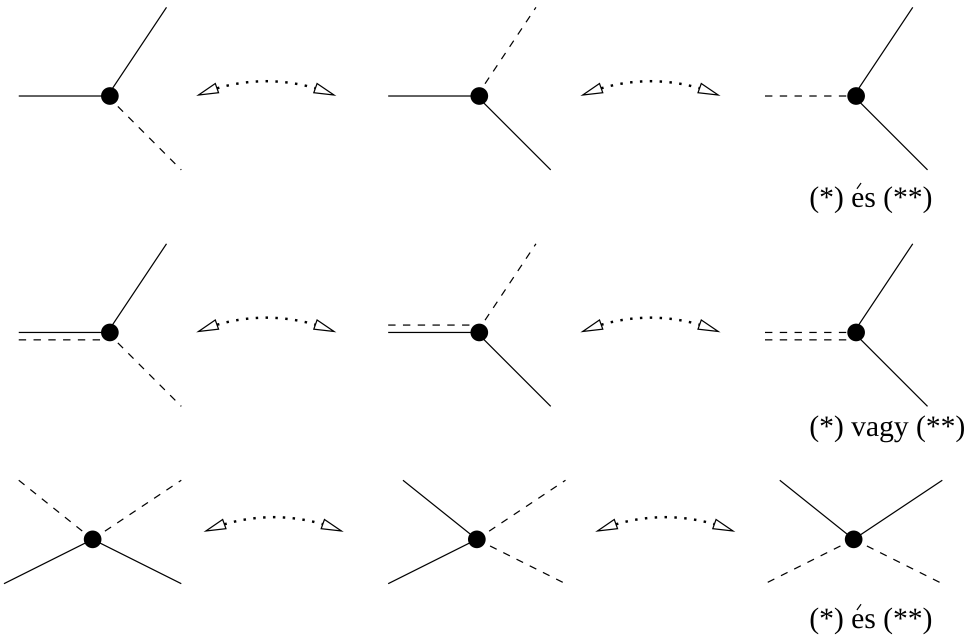
Ezért M_0-nak a C körön $|C|$ éle van. Mivel M_0 z_0-kihibás, ezért C-re illeszkedő éle legfeljebb egyetlen x-ből kilépő él lehet. Az állítás felét ezzel beláttuk, a másik fele ebből adódik, ha N_0^+-ra alkalmazzuk a gondolatmenetet az éleket megfordítva. ■

Ha az első páros visszatéréskor $M_i = M_j$, akkor az állítás szerinti C páratlan körön a séta körbe-körbe halad. Nevezzük ezt **ciklizálás**nak.

Ha H egy tetszőleges irányított élhalmaz, akkor vezessük be az $\underline{H}$ jelölést az irányítatlan értelemben vett H-ra. Az $\underline{\underline{H}}$ jelölést pedig arra az élhalmazra vezessük be, melyet az irányítás és a multiplicitás nélkül kapunk H-ból. Legyen $e(H) := |\underline{\underline{H}}|$.

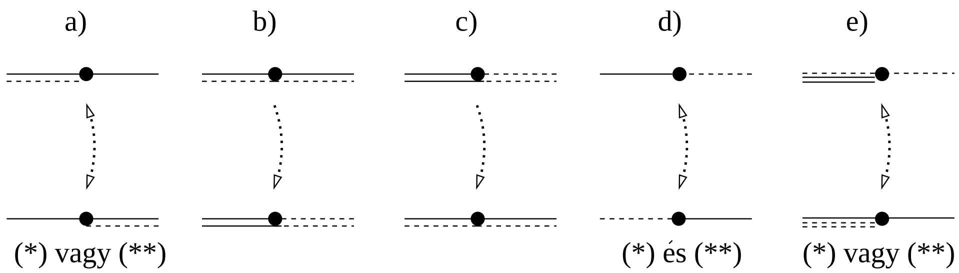
6.9. állítás. *Ha $M_i \neq M_j$ és $N_i \neq N_j$ első páros visszatéréssel keletkeztek, akkor*
(*) $e(M_i \cup N_j) < e(M_i \cup N_i)$ vagy
(**) $e(M_i \cup N_j) < e(M_i \cup N_i)$.

Bizonyítás. Tekintsük $\underline{M_i}$-t és $\underline{M_j}$-t, legyen $\Delta = \underline{M_i}\Delta\underline{M_j}$ azon irányítatlan élek halmaza, ahol „történt változás”. A Δ által fedett $V(\Delta)$ pontok irányítatlan értelemben legalább másodfokúak az $\underline{\underline{\underline{M_i \cup N_i}}}$ gráfban. Tegyük fel először, hogy van harmad vagy negyedfokú, z_i-től különböző pont $V(\Delta)$-ban. Ekkor az 1. ábra alapján ellenőrizhető (*) vagy (**).



1. ábra

Ha $V(\Delta) - z_i$-ben csak másodfokú pontjai vannak az $\underline{\underline{\underline{M_i \cup N_i}}}$ gráfnak, akkor a 2. ábrát tekintsük:



2. ábra Jelmagyarázat: $v=$ ● $M=$ ╱ $N=$ ⋰

Látható, hogy egy rögzített $v \in V(\Delta) - z_i$ pontban csak a b) és c) elrendezés esetén nincs megoldás (*)-ra vagy (**)-ra v-nél. Ha csak b) vagy c) pontok vannak $V(\Delta) - z_i$-ben, akkor található egy z_i-re illeszkedő fül, aminek minden z_i-től különböző pontjában b) vagy c) esete áll fenn. Ez pedig lehetetlen, mert (M_i, N_i, z_i, g_{i-1}) így nem lehet kihibás hármas. ■

6.3. Beszorulás

Egy úgynevezett **igazítás**t fogunk konstruálni, mely javítósétákat és cseréket fog alkalmazni; ennek módját a következő oldalakon részletesen megismerhetjük. Az (M_0, N_0, z_0, g_{-1})-igazítás a következő három eset valamelyikét fogja szolgáltatni:

A) $\widehat{M'}$ és $\widehat{N'}$ páros faktorokat ($|\widehat{M'}| = |M_0|$ és $|\widehat{N'}| = |N_0|$) és egy $\widehat{z'} \in V$ csúcsot, melyekre

$$\delta_{\widehat{M'}} - \delta_{M_0} = \chi_{\widehat{z'}} - \chi_{z_0} = \delta_{N_0} - \delta_{\widehat{N'}} \tag{6.10.}$$

B) egy $\widehat{N'}$ páros faktort ($|\widehat{N'}| = |N_0| + 1$)

C) Egy $z_0 \in F$ faktorkritikus részgráfot, melyre $|M_0[F]| = |F|$ és $|N_0[F]| = |F| - 1$. Ha van egy ilyen F faktorkritikus, akkor mondjuk azt, hogy (M_0, N_0, z_0, g_{-1}) **beszorult** F-be.

Ha megáll valamelyik séta – ezt úgy fejezhetjük ki, hogy megáll az igazítás – akkor az A) vagy B) esetet könnyen teljesíthetjük. A következő állítások segítségével fogjuk kezelni a beszorulást, de csak a későbbi fejezetekből fog kiderülni, hogy hogyan.

6.11. állítás. (Folytonosság) *Legyen $H \subseteq V$. Egy $W = W(M_0, N_0, z_0, g_{-1})$ javítóséta során a $|M[H]|$ mennyiség folytonosan változik: Ha az z_0 és z_i között a séta $2b$-szer használt $d(H, V - H)$-beli élt, akkor $-b \leqslant |M_i[H]| - |M_0[H]| \leqslant b$.*

Bizonyítás. Elég lenne, hogy ha $b = 1$, akkor legfeljebb eggyel változik $|M[H]|$. Ez pedig világos, hiszen a W séta egy H-ba eső részsétája mentén billentünk át éleket: ha e részséta páros, akkor nem változik $|M[H]|$, ha páratlan, akkor pontosan eggyel változik meg. ■

6.12. állítás. *Legyen $H \subseteq V$. Tegyük fel, hogy egy M élhalmaz páros faktor vagy valamely H-beli pontban kihibás, továbbá teljesül $\delta_M(H) \leqslant 2$ és $\varrho_M(H) \leqslant 1$. Ekkor M/H vagy páros faktor, vagy $\{H\}$-kihibás.*

Bizonyítás. A ki- és befokok legfeljebb egyek, kivéve $\{H\}$ kifoka legfeljebb kettő. Mivel M páros faktor volt, ezért M/H csak olyan nemtriviális kört tartalmazhat, ami átmegy $\{H\}$-n. ■

6.4. Cserék sorozata

Kezdjük az (M_0, N_0, z_0, g_{-1})-igazítás konstrukcióját. Tekintsük az első páros visszatérést. Az 6.6. állítás szerint vagy találunk egy C-t: ekkor teljesíthető $F = C$-vel a C) eset; vagy tudunk cserélni: az 6.9. állítás miatt indíthatunk egy $W(M'_j, N'_j, z_j, g'_{j-1})$ javítósétát, melyre $e(M'_j \cup N'_j) < e(M_i \cup N_i)$. Ezután is ezzel a szabállyal cserélgetünk:

Jelöljük W_0-lal a legelső z_0-ban indított javítósétát. Egy W_m javítósétán belül tekintsük az első páros visszatérést: $\mathrm{PVT}_m = (z_{i(m)}, z_{j(m)})$ alakú. Vegyük a $W_{m+1} = W(M_{i(m)}, N_{j(m)}, z_{j(m)}, g_{i(m)-1})$ vagy a $W_{m+1} = W(M_{j(m)}, N_{i(m)}, z_{j(m)}, g_{j(m)-1})$ javítósétát úgy, hogy $e(M \cup N)$ csökkenjen. A z-ket és y-okat folytatólagosan indexeljük egy csere után! Látható, hogy ezzel azt a $\underline{W}(M_0, N_0, z_0, g_{-1})$ sétát kapjuk, ami a W_i-k egymás után fűzéséből áll. Jelöljük a visszatérés elemeit $\mathrm{PVT}_m = (a_m, b_m)$ -vel. Ezek a $\underline{W}$ sétán $a_0 \prec b_0 \preceq a_1 \prec b_1 \preceq a_2 \prec b_2 \preceq \cdots$ sorrendben következnek. Mivel $e(M \cup N)$ minden cserénél csökkent, így legfeljebb $2n$ csere után a 6.6. állítás másik esete fog bekövetkezni: egy W_r $(r \leqslant 2n)$ első páros visszatérésekor találunk egy $C = C(M_0, N_0, z_0, g_{-1})$ kört, melyen W_r ciklizál. Ezzel megadtuk az első páros visszatérések

$$\mathrm{pvt}_G(M_0, N_0, z_0, g_{-1}) := (\mathrm{PVT}_0, \mathrm{PVT}_1, \cdots, \mathrm{PVT}_r)$$

sorozatát, a

$$\mathrm{jr}_G(M_0, N_0, z_0, g_{-1}) := \mathrm{JR}_0 \cup \mathrm{JR}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{JR}_r$$

javítórendszereket, egy $C(M_0, N_0, z_0, g_{-1})$ páratlan kört, és a $\underline{W} = W_0 + W_1 + \ldots + W_r$ sétát. Ha $F = C$ kielégíti a C) feltételt, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor $|M_0[C]| < |C|$ vagy $|N_0[C]| < |C| - 1$ teljesül.

6.13. állítás. *Tegyük fel, hogy a fenti jelölés szerint W_r ciklizál a $C = C(M_0, N_0, z_0, g_{-1})$ páratlan körben. Ha $F = C$ nem teljesíti a C) feltételt, akkor található M_i, melyre $|M_i[C]| = |C| - 1$ és $1 \leqslant \delta_{M_i}(C) \leqslant 2$ és $\varrho_{M_i}(C) \leqslant 1$ és $z_i \in C$.*

Bizonyítás. Tekintsük a legkisebb l-t, amire $z_l \in C$ és $|N_l[C]| = |C| - 1$. Ekkor $|M_l[C]| \leqslant |C| - 1$. A 6.6. állítás miatt $|M_{j(r)}[C]| = |C|$. A 6.11. állítás miatt $|M_\bullet[C]|$ értékei egy intervallum egészei, így valamely i-re $|M_i[C]| = |C| - 1$. Ekkor

$$\delta_{M_i}(C) = \sum_{x \in C} \delta_{M_i}(x) - |M_i[C]| \leqslant (|C| + 1) - (|C| - 1) = 2$$

$$\varrho_{M_i}(C) = \sum_{x \in C} \varrho_{M_i}(x) - |M_i[C]| \leqslant |C| - (|C| - 1) = 1$$

$$|C| \leqslant \sum_{x \in C} \delta_{M_{j(r)}}(x) = \sum_{x \in C} \delta_{M_i}(x) = |C| - 1 + \delta_{M_i}(C) \quad \Rightarrow \quad \delta_{M_i}(C) \geqslant 1$$

■

6.5. Összehúzások sorozata egy igazításban

A 6.13. állítás jelöléseivel: létezik egy M_i, amely majdnem teljes C-ben, és

$$1 \leqslant \delta_{M_i}(C) \leqslant 2\,, \quad \varrho_{M_i}(C) \leqslant 1\,, \quad z_i \in C.$$

Legyen egy C-ből kilépő éle M_i-nek g. A 6.12. állítás miatt $(M_i/C, N_{j(r)}/C, \{C\}, g/C)$ kihibás négyes a G/C gráfban. A következők is fennállnak:

$$\text{(6.14.)} \qquad \operatorname{def}_{G/C} M_i/C = \operatorname{def} M_0 \quad \text{és} \quad \operatorname{def}_{G/C} N_{j(r)}/C = \operatorname{def} N_0$$

Képezhetők a fenti szabályok szerinti

$$\operatorname{pvt}_{G/C}(M_i/C, N_{j(r)}/C, C, g/C)\ ,\ \operatorname{jr}_{G/C}(M_i/C, N_{j(r)}/C, C, g/C)\ ,$$

$$\underline{W}_{G/C}(M_i/C, N_{j(r)}/C, C, g/C)$$

sorozatok a G/C gráfban. (6.14.) miatt ha ez a javítórendszer megáll, akkor látni fogjuk, hogy a 6.1. lemma konstrukciójával kielégíthető A) vagy B). Ha nem áll meg, akkor az alábbi módon további összehúzások következnek. Az igazítás összehúzások egy sorozatát alkalmazza, két összehúzás között pedig $\operatorname{pvt}, \operatorname{jr}, \underline{W}, C$-ket képez. Ennek a pontos magyarázata most következik:

Tegyük fel, hogy már voltak bizonyos összehúzások: (a $C_{-1} := \{z_0\}$ jelöléssel)

$$G_0 := G = G/C_{-1}\ ,\ G_1 := G_0/C_0\ ,\ G_2 := G_1/C_1\ ,\ \cdots\ ,\ G_k := G_{k-1}/C_{k-1}$$

melyeket úgy kaptuk, hogy minden G_i-ben adott egy $(M_0^{(i)}, N_0^{(i)}, \{C_{i-1}\}, g_{-1}^{(i)})$ kihibás négyes. Legyen $jr^{(i)} := jr_{G_i}(M_0^{(i)}, N_0^{(i)}, \{C_{i-1}\}, g_{-1}^{(i)})$ és $C_i := C(M_0^{(i)}, N_0^{(i)}, \{C_{i-1}\}, g_{-1}^{(i)})$. Még azt is tegyük fel, hogy a $(M_0^{(i)}, N_0^{(i)}, \{C_{i-1}\}, g_{-1}^{(i)})$ kihibás négyesekre

- $N_0^{(i)} = N_{j(r(i-1))}^{(i-1)}/C_{i-1}$ és $M_0^{(i)} = M/C_{i-1}$ alakú egy $M \in \operatorname{jr}^{(b)}$ $(b \leqslant i-1)$-re és
- $\operatorname{def}_{G_i} M_0^{(i)} = \operatorname{def} M_0$ és $\operatorname{def}_{G_i} N_0^{(i)} = \operatorname{def} N_0$

Tehát $N_0^{(i)}$ választása egyértelmű, míg $M_0^{(i)}$-t úgy választjuk, hogy valamely $\operatorname{jr}^{(b)}$-be visszautalunk. Jelöljük egy $H \subseteq V(G_i)$ ponthalmaz képét a G_j gráfban $\langle H\rangle_j$-val, $\langle H\rangle := \langle H\rangle_0$. Ha $F = \langle C_k\rangle$ kielégíti a C) feltételt: beszorult $\langle C_k\rangle$-ba az igazítás, akkor kész. Ha nem, akkor úgy folytatjuk az igazítást, hogy veszünk egy megfelelő $(M_0^{(k+1)}, N_0^{(k+1)}, \{C_k\}, g_{-1}^{(k+1)})$ kihibás négyest a $G_{k+1} := G_k/C_k$ gráfban.

Fontos megfigyelés: Itt különösen figyeljünk arra, hogy milyen gráfban lévő élhalmazról van szó. $M_0^{(k+1)}$ konstrukciójánál külön ügyelni kell arra, hogy $G_b/C_k = G_k/C_k$ teljesüljön, ha $\operatorname{jr}^{(b)}$-be utalunk vissza! Legyen $I < k$ a legnagyobb olyan index, melyre $\langle C_I\rangle_k \notin C_k$ (ha nincs ilyen, akkor legyen pl. $I = -1$.) Ekkor $b > I$ esetén $G_b/C_k = G_k/C_k$.

6.15. állítás. *Tegyük fel, hogy $F = \langle C_k\rangle$ nem elégíti ki a C) feltételt. Ekkor található egy $M = M_m^{(b)} \in \operatorname{jr}^{(b)}$ melyre $k \geqslant b > I$, továbbá $|M[\langle C_k\rangle_b]| = |\langle C_k\rangle_b| - 1$ és $1 \leqslant \delta_M(\langle C_k\rangle_b) \leqslant 2$ és $\varrho_M(\langle C_k\rangle_b) \leqslant 1$ és $z_m^{(b)} \in \langle C_k\rangle_b$.*

Bizonyítás. Tekintsük a legkisebb I-nél nagyobb c indexet és azon belül legkisebb j-t, amire $z_j^{(c)} \in \langle C_k\rangle_c$ és $|N_j^{(c)}[\langle C_k\rangle_c]| = |\langle C_k\rangle_c| - 1$.

6.16. állítás. *Ekkor* $|M_j^{(c)}[\langle C_k\rangle_c]| \leqslant |\langle C_k\rangle_c| - 1$.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy I definíciója miatt $M_0^{(i)}$ $(I < i \leqslant k)$ megadásánál csak olyan $\mathrm{jr}^{(b)}$-be utalhattunk vissza, melyre $b > I$, ugyanis eddig betartottuk a fontos megfigyelést. Ha $I \geqslant 0$, akkor biztosan nem lehet I definíciója miatt az, hogy $c = I + 1$ és $j = 0$, hiszen akkor $z_0^{(I+1)} = \{C_I\} \notin \langle C_k\rangle_{I+1}$ lenne. Tehát vagy $I = -1$ vagy egy billentés után keletkezett $N_j^{(c)}$, azaz $j > 0$. Ha $j > 0$, akkor indirekte $|M_j^{(c)}[\langle C_k\rangle_c]| = |\langle C_k\rangle_c|$ miatt $|N_{j-1}^{(c)+}[\langle C_k\rangle_c]| = |\langle C_k\rangle_c|$ így $|N_{j-1}^{(c)}[\langle C_k\rangle_c]| = |\langle C_k\rangle_c| - 1$ ami ellentmondás. Ha $j = 0$, akkor csak $N_j^{(c)} = N_0^{(0)}$ marad, abban az esetben pedig azért igaz az állítás, mert $F = \langle C_k\rangle$ nem elégíti ki a C) feltételt. □

Továbbá $|M_0^{(k)}[C_k]| = |C_k|$. Láttuk, hogy $M_0^{(i)}$ $(I < i \leqslant k)$ megadásánál csak olyan $\mathrm{jr}^{(b)}$-be utalhattunk vissza, melyre $b > I$. Így az 6.11. állítás miatt $\mathrm{def}_{\langle C_k\rangle_i} M_\bullet^{(i)}[\langle C_k\rangle_i]$ $(I < i \leqslant k)$ értékei egy intervallumot alkotnak, így kell lennie olyan $M = M_m^{(b)}$-nek, amire $M \in \mathrm{jr}^{(b)}$ $(I < b \leqslant k)$, és $|M[\langle C_k\rangle_b]| = |\langle C_k\rangle_b| - 1$ és $z_m^{(b)} \in \langle C_k\rangle_b$. Ekkor

$$\delta_M(\langle C_k\rangle_b) = \sum_{x \in \langle C_k\rangle_b} \delta_M(x) - |M[\langle C_k\rangle_b]| \leqslant (|\langle C_k\rangle_b| + 1) - (|\langle C_k\rangle_b| - 1) = 2$$

$$\varrho_M(\langle C_k\rangle_b) = \sum_{x \in \langle C_k\rangle_b} \varrho_M(x) - |M[\langle C_k\rangle_b]| \leqslant |\langle C_k\rangle_b| - (|\langle C_k\rangle_b| - 1) = 1$$

Vegyük észre, hogy $z_j^{(i)} \in \langle C_k\rangle_i$ esetén a $\delta_{M_j^{(i)}}(\langle C_k\rangle_i) - \mathrm{def}_{\langle C_k\rangle_i}(M_j^{(i)}[\langle C_k\rangle_i])$ mennyiség mindig ugyanannyi ($z_j^{(i)} \notin \langle C_k\rangle_i$ esetén pedig mindig ugyanannyi minusz 1), ugyanis az igaztás műveleteire invariáns. Ezért

$$\delta_{M_m^{(b)}}(\langle C_k\rangle_b) = (\delta_{M_{j(r(k))}^{(k)}}(C_k) - \mathrm{def}_{C_k}(M_{j(r(k))}^{(k)}[C_k])) + \mathrm{def}_{\langle C_k\rangle_b}(M_m^{(b)}[\langle C_k\rangle_b]) \geqslant (0-0) + 1$$

■

Az 6.15. állítás jelölésével legyen $M_0^{(k+1)} := M/\langle C_k\rangle_b$, $N_0^{(k+1)} := N_{j(r(k))}^{(k)}/C_k$, és legyen $g_{-1}^{(k+1)}$ a hibás éle $M_0^{(k+1)}$-nek. Ekkor $(M_0^{(k+1)}, N_0^{(k+1)}, \{C_k\}, g_{-1}^{(k+1)})$ kihibás négyes G_{k+1}-ben a 6.12. állítás miatt. Az eddigiek szerint vagy találunk a C)-nek megfelelő F-et; vagy egy G_t gráfban $(t < n)$ megáll valamelyik séta: ekkor a legutolsó négyest jelöljük (M', N', z', g')-vel. Neki mindkét tagja útpárosítás. Ennek a négyesnek a segítségével fogjuk az A) vagy a B) követelményeit kielégíteni. Ha az y-fázisban állt meg, akkor a B) könnyen kielégíthető 6.1. konstrukciójával. Ha a z-fázisban, akkor A)-t fogjuk kielégíteni. De ennél egy picit többet is mondhatunk:

Egy javítóséta során, sőt cserék után is megmarad az a későbbiekben fontos tulajdonsága a keletkező élhalmazoknak, hogy

$$(6.17.) \quad \delta_{M_i} - \delta_{M_0} = \chi_{z_i} - \chi_{z_0} = \delta_{N_0} - \delta_{N_i} \quad \text{és} \quad \delta_{M_i^-} - \delta_{M_0} = -\chi_{z_0} = \delta_{N_0} - \delta_{N_i^+}.$$

A következő fejezetben azt fogjuk megmutatni, hogy az igazítás során keletkező minden élhalmazhoz hozzárendelhető egy olyan G-beli élhalmaz, amelynek a kifokai alig különböznek a kiinduló M_0, N_0 kifokaitól. Pontosabban 6.1. konstrukciójával bármely $(M_i^{(b)}, N_i^{(b)}, z_i^{(b)}, g_{i-1}^{(b)})$ G_b-beli kihibás négyeshez megadható $(\widehat{M_i^{(b)}}, \widehat{N_i^{(b)}}, \widehat{z_i^{(b)}}, \langle g_{i-1}^{(b)}\rangle)$ G-beli rendetlen kihibás négyes, melyre

$$\widehat{M_i^{(b)}}/C_0/C_1/\cdots/C_{b-1} = M_i^{(b)} \quad \text{és} \quad \widehat{N_i^{(b)}}/C_0/C_1/\cdots/C_{b-1} = N_i^{(b)}$$

$$\delta_{\widehat{M_i^{(b)}}} - \delta_{M_0} = \chi_{\widehat{z_i^{(b)}}} - \chi_{z_0} = \delta_{N_0} - \delta_{\widehat{N_i^{(b)}}} \tag{6.18.}$$

Ha a legutolsó (M', N', z', g') négyes tagjai páros faktorok, a hozzájuk rendelt G-beli élhalmazok is azok. Két eset van a megállás tekintetében:

A) Ha $\operatorname{def} N' < \operatorname{def} N_0$. Ekkor 6.1. konstrukciójával képezhető egy nagyobb útpárosítás G-ben is: $|\widehat{N'}| = |N| + 1$.

B) Ha $\operatorname{def} N' = \operatorname{def} N_0$ és $\operatorname{def} M' = \operatorname{def} M_0$, akkor tekintsük $\widehat{M'}$-t és $\widehat{N'}$-t. Méretük $|N_0| = |\widehat{N'}|$ és $|M_0| = |\widehat{M'}|$, és valamely z' csúccsal fennáll

$$\delta_{\widehat{M'}} - \delta_{M_0} = \chi_{\widehat{z'}} - \chi_{z_0} \quad \text{és} \quad \delta_{\widehat{N'}} - \delta_{N_0} = \chi_{z_0} - \chi_{\widehat{z'}} \tag{6.19.}$$

6.6. A kalapok

Most belefogunk az előző bekezdés technikai állításainak igazolásába. A következő állításból mind következik.

6.20. állítás. *Minden*

$$(M_j^{(i)}, N_j^{(i)}, z_j^{(i)}, g_{j-1}^{(i)})\ ,\ (M_j^{(i)*}, N_j^{(i)}, z_j^{(i)}, f_j^{(i)}),$$
$$(M_j^{(i)-}, N_j^{(i)+}, y_j^{(i)}, f_j^{(i)}) \ \ \textit{és}\ \ (M_j^{(i)-}, (N_j^{(i)+})^*, y_j^{(i)}, g_j^{(i)})$$

G_i-beli négyeshez megadhatók

$$(\widehat{M_j^{(i)}}, \widehat{N_j^{(i)}}, \widehat{z_j^{(i)}}, \langle g_{j-1}^{(i)}\rangle)\ ,\ (\widehat{M_j^{(i)*}}, \widehat{N_j^{(i)*}}, \widehat{z_j^{(i)*}}, \langle f_j^{(i)}\rangle),$$
$$(\widehat{M_j^{(i)-}}, \widehat{N_j^{(i)+}}, \widehat{y_j^{(i)}}, \langle f_j^{(i)}\rangle) \ \ \textit{és}\ \ (\widehat{M_j^{(i)-*}}, (\widehat{N_j^{(i)+}})^*, \widehat{y_j^{(i)*}}, \langle g_j^{(i)}\rangle)$$

G-beli rendetlen négyesek, melyekre a következő három feltétel mind teljesül:

♣ $\widehat{\cdot}/C_0/C_1/\cdots C_{i-1} = \cdot$ *ahol $\cdot$ valamelyik G_i-beli négyes hibás pontja vagy egyik élhalmaza.*

♠ $\operatorname{def}_{G_i}(\widehat{\cdot}) = \operatorname{def}_G(\cdot)$ *ahol $\cdot$ valamelyik G_i-beli négyes egyik élhalmaza. (Azaz a kalapos élhalmazok minden összehúzott faktorkritikus ponthalmazban teljesek.)*

♡ $\delta_{M_0} - \delta_{\widehat{M_j^{(i)}}} = \delta_{\widehat{N_j^{(i)}}} - \delta_{M_0} = \chi_{z_0} - \chi_{\widehat{z_j^{(i)}}}$

$\delta_{M_0} - \delta_{\widehat{M_j^{(i)*}}} = \delta_{\widehat{N_j^{(i)*}}} - \delta_{M_0} = \chi_{z_0} - \chi_{\widehat{z_j^{(i)*}}}$

$\delta_{M_0} - \delta_{\widehat{M_j^{(i)-}}} = \delta_{\widehat{N_j^{(i)+}}} - \delta_{M_0} = \chi_{z_0}$

$\delta_{M_0} - \delta_{\widehat{M_j^{(i)-*}}} = \delta_{\widehat{N_j^{(i)+*}}} - \delta_{M_0} = \chi_{z_0}.$

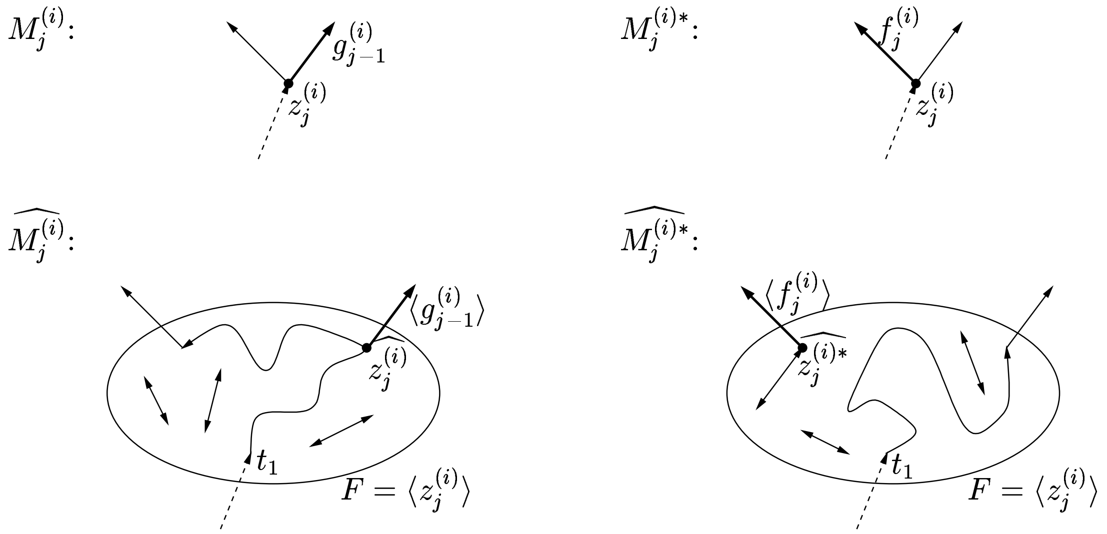
Bizonyítás. A kalapos négyeseket keletkezésük időrendje szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az induláshoz $(\widehat{M_0^{(0)}}, \widehat{N_0^{(0)}}, \widehat{z_0^{(0)}}, \langle g_{-1}^{(0)}\rangle) := (M_0^{(0)}, N_0^{(0)}, z_0^{(0)}, g_{-1}^{(0)})$ megfelel. Azt kell megmutatnunk, hogy a kalapos kiterjesztések előállnak egy billentés, a * művelet, illetve egy összehúzás után is.

Egy billentés után keletkező négyes kiterjesztése:

$$(\widehat{M_j^{(i)}}, \widehat{N_j^{(i)}}, \widehat{z_j^{(i)}}, \langle g_{j-1}^{(i)}\rangle) := (\widehat{M_{j-1}^{(i)-*}} + \langle g_{j-1}^{(i)}\rangle, \widehat{N_j^{(i)+*}} - \langle g_{j-1}^{(i)}\rangle, \widehat{z_j^{(i)}}, \langle g_{j-1}^{(i)}\rangle)$$

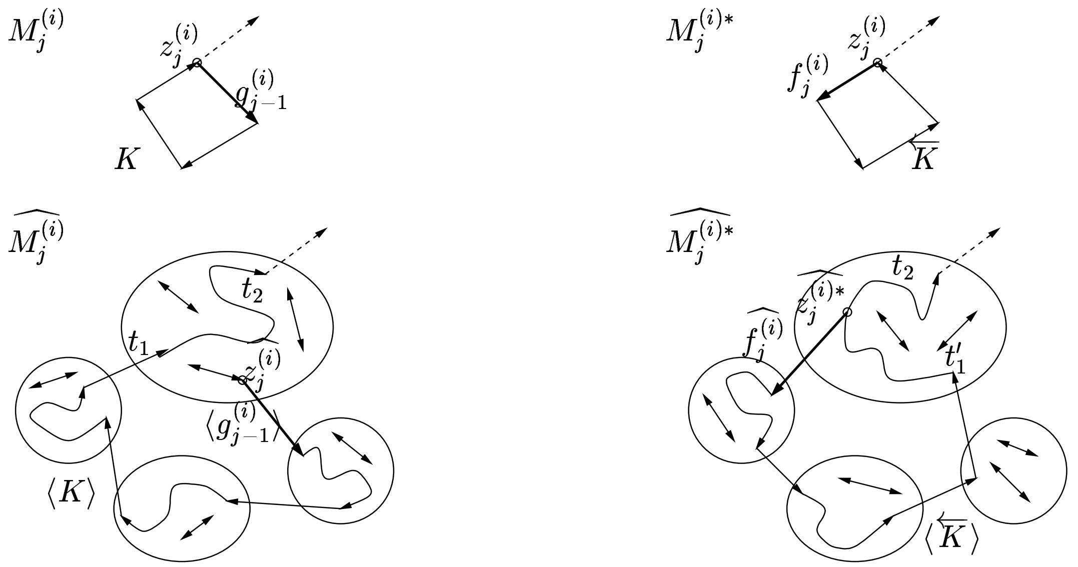
ahol $\widehat{z_j^{(i)}}$ legyen a $\langle g_{j-1}^{(i)}\rangle$ él töve.

Tegyük fel, hogy $(M_j^{(i)}, N_j^{(i)}, z_j^{(i)}, g_{j-1}^{(i)})$-ra már kész a kalapos kiterjesztés. A * művelet vagy megfordít egy $z_j^{(i)}$-ra illeszkedő kört $M_j^{(i)}$-ben, vagy nem változtat semmit. Tegyük fel először az utóbbit. A $(\widehat{M_j^{(i)*}}, \widehat{N_j^{(i)*}}, \widehat{z_j^{(i)*}}, \langle f_j^{(i)}\rangle)$ négyes konstrukciójában az alábbi ábrán egy általános elrendezés látható:



Legyen $F := \langle z_j^{(i)}\rangle$ és $\widehat{M_j^{(i)}}$ F-ből kilépő élei legyenek $\langle g_{j-1}^{(i)}\rangle = \widehat{z_j^{(i)}}\widehat{y_{j-1}^{(i)}}$ és $\langle f_j^{(i)}\rangle = \widehat{z_j^{(i)*}}\widehat{y_j^{(i)}}$. $\widehat{M_j^{(i)}}$ $\widehat{z_j^{(i)}}$-kihibás, ezért F-ben egy $t_1 \to \widehat{z_j^{(i)*}}$ utat tartalmaz. $\widehat{M_j^{(i)*}}$-ot úgy kapjuk, hogy csak F-ben módosítjuk $\widehat{M_j^{(i)}}$-t: a régi F-beli élek helyett egy $t_1 \to \widehat{z_j^{(i)}}$ utat és párosításéleket húzunk be. $N_j^{(i)*}$ könnyen megkapható $N_j^{(i)}$-ból: F-ben módosítjuk úgy, hogy ne $\widehat{z_j^{(i)}}$-kiszabad legyen, hanem $\widehat{z_j^{(i)*}}$-kiszabad. A kifok függvények $\chi_{\widehat{z_j^{(i)}}} - \chi_{\widehat{z_j^{(i)*}}}$-gal változtak, így a ♡ tulajdonság is fennmarad.

A másik eset, ha a * művelet vagy megfordít egy $z_j^{(i)}$-ra illeszkedő K kört $M_j^{(i)}$-ben.



Legyen $F := \langle z_j^{(i)} \rangle$ és tekintsük az F-ből kilépő $\langle g_{j-1}^{(i)} \rangle = \widehat{z_j^{(i)}}\widehat{y_{j-1}^{(i)}}$, $\langle f_j^{(i)} \rangle = \widehat{z_j^{(i)*}}\widehat{y_j^{(i)}}$ éleket. K éleinek megfelelnek $\widehat{M_j^{(i)}}$-beli élek: az első az F-ből kilépő $\langle g_{j-1}^{(i)} \rangle = \widehat{z_j^{(i)}}\widehat{y_{j-1}^{(i)}}$ él, az utolsó az F-be belépő $\langle f_j^{(i)} \rangle = \widehat{z_j^{(i)*}}\widehat{y_j^{(i)}}$ él, F-en kívül ki van egészítve a megfelelő $V(G_i)$-kupacokban egy $\widehat{z_j^{(i)}}$-ben kezdődő $\langle K \rangle$ úttá. Legyen $t_1 \in F$ az $\langle K \rangle$ út vége. Ekkor $\widehat{M_j^{(i)}}$ egy $t_1 \to t_2$ utat tartalmaz F-ben. $\widehat{M_j^{(i)}}$-ben a $\langle K \rangle$ utat és a $t_1 \to t_2$ utat helyettesítsük az $\langle \overleftarrow{K} \rangle$ úttal és egy $t_1' \to t_2$ úttal (ahol t_1' a $\langle \overleftarrow{K} \rangle$ út vége): így kaptuk $\widehat{M_j^{(i)*}}$-ot. Ezzel magkaptuk $\widehat{M_j^{(i)*}}$-t, és a kifokfüggvény $\chi_{\widehat{z_j^{(i)}}} - \chi_{\widehat{z_j^{(i)*}}}$-vel változott, így a $\heartsuit$ tulajdonság is fennmarad. $\widehat{N_j^{(i)*}}$ könnyen megkapható $\widehat{N_j^{(i)}}$-ból: F-ben módosítjuk úgy, hogy ne $\widehat{z_j^{(i)}}$-kiszabad legyen, hanem $\widehat{z_j^{(i)*}}$-kiszabad.

A kapott kalapos élhalmazok páros faktorok, illetve hibás páros faktorok: A fokok stimmelnek; páratlan kör nem jöhet be, ugyanis a $t_1 \to t_2$ alakú utak páros hosszúak. Azokat az eseteket oldottuk meg, amikor egy kihibás négyesre alkalmazzuk a * műveletet illetve a billentést. A gondolatmenet behibás négyesre is alkalmazható az élek képzeletbeli megfordításával.

Még azt kell megmutatni, hogy egy összehúzás után is előállnak a kalapos kiterjesztések. Tegyük fel, hogy $(M_0^{(i)}, N_0^{(i)}, \{C_{i-1}\}, g_{-1}^{(i)})$ úgy keletkezett, hogy $M_0^{(i)} := M/\langle C_{i-1} \rangle_b$ (ahol $M \in \mathrm{jr}^{(b)}$ az (M, N, z, g) korábbi négyes tagja) és $N_0^{(i)} := N_{j(r(i-1))}^{(i-1)}/$ $/C_{i-1}$ és $g_{-1}^{(i)}$ a $\{C_{i-1}\}$-ből kilépő hibás éle $M_0^{(i)}$-nek. Itt $z_0^{(i)} = \{C_{i-1}\}$, legyen $F := \langle z_0^{(i)} \rangle$. Most $\widehat{M}$ segítségével megadjuk $\widehat{M_0^{(i)}}$-t: csak F-en belül kell változtatni. Legyen $\widehat{z_0^{(i)}}$ $\langle g_{-1}^{(i)} \rangle$ töve. Vegyük észre, hogy $\widehat{M}[F]$-nek a kifoksorozata F pontjaiban vagy $0, 1, 1, \cdots, 1$ vagy $0, 0, 1, 1, \cdots, 1, 2$.

I. eset: $\widehat{M}[F]$ kifoksorozata F pontjaiban $0, 0, 1, \cdots, 1, 2$. Nyilván $\widehat{z}$-ben van a 2-es. Ekkor F-ből kilépő éle $\widehat{M}$-nek csak a két 0-ból lehet legfeljebb egy-egy. Az egyik 0 $\langle g_{-1}^{(i)} \rangle$ tövénél van, jelölje t_2 a másikat. F-be belépő éle $\widehat{M}$-nek legfeljebb egy lehet; ha van, akkor legyen ez t_1, ha nincs, akkor legyen $t_1 \in F$ tetszőleges. $\widehat{M}$-nek az F-beli élei helyett egy $t_1 \to t_2$ utat vegyünk F-ben. A kifokok változása: a 2 $\widehat{z}$-ben lecsökken 1-re és a 0 $\langle g_{-1}^{(i)} \rangle$ tövében 1-re változik. Így a $\heartsuit$ tulajdonság fennmarad.

II. eset: $\widehat{M}[F]$ kifoksorozata F pontjaiban $0, 1, 1, \cdots, 1$.

a) Ha $0 = \delta_{\widehat{M}[F]}(\widehat{z})$, akkor F-ből kilépő éle $\widehat{M}$-nek csak $\widehat{z}$-ból léphet ki. Így $\langle g_{-1}^{(i)} \rangle$ töve $\widehat{z} = \widehat{z_0^{(i)}}$. Legyen $t_2 := \widehat{z}$. Legfeljebb egy F-be belépő éle van $\widehat{M}$-nek; ha van, akkor legyen a feje t_1, amúgy $t_1 \in F$ tetszőleges. $\widehat{M}$-nek az F-beli élei helyett egy $t_1 \to t_2$ utat vegyünk F-ben. A kifokfüggvény nem változik, így a $\heartsuit$ tulajdonság fennmarad.

b) Ha $1 = \delta_{\widehat{M}[F]}(\widehat{z})$, akkor F-ből kilépő éle $\widehat{M}$-nek legfeljebb egy $\widehat{z}$-ből és legfeljebb még a „0"-ból kilépő él lehet. Tehát vagy $\widehat{z_0^{(i)}} = \widehat{z}$ vagy $\widehat{z_0^{(i)}}$ a „0". Az első esetben legyen t_2 a „0", míg a másik esetben legyen $t_2 = \widehat{z}$. t_1 szokásosan legyen vagy az egyetlen F-be lépő él feje, vagy tetszőleges. Mindkét esetben a kifokfüggvény $\chi_{\widehat{z}} - \chi_{\widehat{z_0^{(i)}}}$-lal változott, így a $\heartsuit$ tulajdonság fennmarad.

Az I. és a II. esetben $\widehat{N_0^{(i)}}$ könnyen megkapható $\widehat{N_{j(r(i-1))}^{(i-1)}}$-ből: F-en belül változtatjuk úgy, hogy $\widehat{z_0^{(i)}}$-kiszabad legyen. A kapott kalapos élhalmazok páros faktorok, illetve hibás páros faktorok: A fokok stimmelnek; páratlan kör nem jöhet be, ugyanis a $t_1 \to t_2$ alakú utak páros hosszúak. ■

Azért csak rendetlen négyeseket kapunk, mert egy G_i-beli triviális (2 hosszú) körből keletkezhet olyan G-beli páros kör, aminek a fordítottja is része $E(G)$-nek. Ez nem gond, hiszen a rendetlen körök mindig helyettesíthetők triviális körökkel a fokok változtatása nélkül.

6.7. Hideg igazítás

Legyen M_0 páros faktor, melyre $\delta_{M_0}(z_0) = 1$, és legyen N_0 egy z_0-kiszabad páros faktor. Ilyenkor egy igazítást hideg igazításnak nevezünk: egy hideg indítással kezdődik. Ekkor a C) eset, a beszorulás sohasem fordulhat elő a 6.2. állítás miatt. Ebben a fejezetben azt fogjuk megmutatni, hogy nemcsak az A), B) esetek valamelyike teljesíthető hideg igazításkor, hanem ezek valamelyike is:

A') Adunk egy nagyobb páros faktort: $|\widehat{N'}| > |N_0|$.

B') Adunk $\widehat{M'}, \widehat{N'}$ páros faktorokat és egy $\widehat{z'} \neq z_0$ pontot, melyekre (6.19.) fennáll.

Az egyetlen megszorítás az B')-ben a $\widehat{z'} \neq z_0$ feltétel. Ha az igazítás ezt véletlenül teljesíti, akkor kész. Amúgy pechünkre $\widehat{z'} = z_0$; de a következő esetek egyike biztosan előáll:

(1) Nem volt egyetlen C_0 összehúzás, egyetlen csere sem, de $M' \neq M_0$.

(2) Volt legalább egy csere, de nem volt összehúzás.

(3) Volt legalább egy összehúzás.

Az (1) esetben alkalmazzunk egy $z_0 = z'$ -cserét, utána $e(M \cup N)$ kisebb lesz. A

(2) esetben volt csere, így egy (M', N', z', g') hideg igazítással folytatva $e(M \cup N) < e(M_0 \cup N_0)$. (3) esetén egy (M', N', z', g') hideg igazítással folytatjuk az összehúzott G_t gráfban: $e(M \cup N) < e(M_0 \cup N_0)$, mert nyilván egy összehúzás is csökkenti ezt a mennyiséget. Megmutattuk tehát, hogy hideg igazításnál az A'), B') esetek valamelyike kielégíthető, sőt B') esetén valamely $\widehat{z'} \neq z_0$ csúccsal (6.19.) is fennáll. Vegyük észre, hogy $\widehat{z'} \neq z_0$ miatt ekkor

(6.21.) $$\delta_{\widehat{M'}}(z_0) = 0 \text{ és } \delta_{\widehat{N'}}(\widehat{z'}) = 0.$$

7. Hagyományos útpárosítások

Tekintsünk egy G egyszerű gráfot a T_1, T_2 diszjunkt terminális ponthalmazokkal. A bevezetett $\overrightarrow{G}$ irányított gráfban lévő páros faktorok közül keresünk legnagyobb élszámút, ezzel megoldjuk az útpárosítás feladatot is. Legyen $\mathcal{L}$ k-hiányos rendes páros faktorok nemüres listája. Ekkor definiáljuk a V csúcshalmaz következő partícióját:

$$D = D(\mathcal{L}) = D_G(\mathcal{L}) := \{x \in T_1 \cup R : \exists M \in \mathcal{L} \text{ amire } x \notin V_1(M)\}$$

$$A = A(\mathcal{L}) = A_G(\mathcal{L}) := N(D(\mathcal{L})) \cup (T_1 - D(\mathcal{L}))$$

$$C = C(\mathcal{L}) = C_G(\mathcal{L}) := V - (D(\mathcal{L}) \cup A(\mathcal{L}))$$

Jelölje továbbá $D_{11}(\mathcal{L}) \subseteq D(\mathcal{L})$ a $G[D(\mathcal{L})]$ azon komponenseinek unióját, melyek belemetszenek T_1-be. Legyen $\mathcal{L}_{\max} = \{M : |M| = \nu(G)\}$ az összes maximális páros faktor halmaza. A következő partíciót a Gallai-Edmonds-féle struktúrának megfelelően definiáljuk:

(7.1.) $$D(G) := D_G(\mathcal{L}_{\max}) \ , \ A(G) := A_G(\mathcal{L}_{\max}) \ , \ C(G) := C_G(\mathcal{L}_{\max})$$

Optimalitási feltételek:

Egy $M, \mathcal{L}$ pár kielégíti az optimalitási feltételeket, ha $M \in \mathcal{L}$ és

(α) Nincs éle M-nek $A(\mathcal{L}) \cup C(\mathcal{L})$-ből $A(\mathcal{L})$-ba.

(β) Nincs éle M-nek $A(\mathcal{L})$-ból $D_{11}(\mathcal{L})$-be.

(γ) $(D_{11}(\mathcal{L}) \cup A(\mathcal{L})) - T_1$ minden pontjába megy be éle M-nek.

(δ) $G[D(\mathcal{L})]$-nek a T_1-től diszjunkt komponensei páratlanok és M-ben majdnem teljesek.

Egy $X \subseteq V$ ponthalmazt **vágás**nak nevezünk, ha $G[V - X]$-ben nincs út a terminálisok közt. Egy X vágás esetén vezessük be az $\operatorname{odd}_G(X)$ jelölést (gömbölyű zárójellel!) $G[V - X]$-ben a terminálisoktól diszjunkt páratlan komponensek számára. $Z := Z(X)$ jelölje $G[V - X]$-nek a T_2-től diszjunkt páratlan komponenseinek és T_1-be metsző összes komponensének unióját.

7.2. lemma. *Tetszőleges X vágásra $\nu(G) \leqslant |R| + |X| - \operatorname{odd}_G(X)$.*

Bizonyítás. Legyen M maximális páros faktor.

• M éleit a fejeknél összesítve látható, hogy $Z = Z(X)$-en belül legfeljebb $|Z - T_1| - \operatorname{odd}_G(X)$ él lehet.

• Hasonlóan: Z-ből kilépő él legfeljebb $|X - T_1|$ darab lehet.

• Olyan él melynek töve $V - Z$-ben van legfeljebb $|V - (Z \cup T_2)|$ darab lehet.

M minden élét pontosan egyszer vettünk figyelembe, ezért
$\nu(G) \leqslant (|Z - T_1| - \operatorname{odd}_G(X)) + |X - T_1| + |V - (Z \cup T_2)| = |R| + |X| - \operatorname{odd}_G(X)$ ■

Nevezzünk egy X vágást **gát**nak, ha az előző lemma egyenlőtlenségét egyenlőséggel teljesíti. Egy gát létezése nem nyilvánvaló, ekvivalens a (2.4.) formulával. Az algoritmus nemcsak maximális páros faktort, illetve útpárosítást fog találni, hanem egy X-et is, ami ebben a formulában egyenlőséget biztosít.

7.3. lemma. *Ha fennállnak az optimalitási feltételek, akkor M maximális, $A(\mathcal{L})$ gát.*

Bizonyítás. $X := A(\mathcal{L})$ vágás, ugyanis minden út vagy $T_1 - D(\mathcal{L})$-ben kezdődik, vagy kilép $D(\mathcal{L})$-ből $N(D(\mathcal{L})) \subseteq X$-ba. (δ) alapján $Z = Z(X) \supseteq D(\mathcal{L})$. Legyen S egy T_2 -től diszjunkt páratlan komponense $G[V - A(\mathcal{L})]$-nek; tegyük fel, hogy $S \subseteq C(\mathcal{L})$. Ekkor C definíciója alapján minden S-beli pontból lép ki M-él. S páratlan, ezért S-ből ki kell lépnie legalább egy élnek $A(\mathcal{L}) = X$-be. Ez ellentmond (α)-val, azaz $S \subseteq D(\mathcal{L})$. Végül $Z \subseteq D(\mathcal{L})$, így $Z = D(\mathcal{L})$.

• $G[Z - D_{11}]$ komponensein belül $|Z - D_{11}| - \operatorname{odd}_G(X)$ él van (δ) miatt. $D_{11} - T_1$-ben minden pontba megy be él: (β) miatt $Z = D(\mathcal{L})$-n belül. Ezért $Z = D(\mathcal{L})$-ben pontosan $|Z - T_1| - \operatorname{odd}_G(X)$ él van.

• Minden $X - T_1$-beli pontba megy be él, (α) miatt csak Z-ből. Tehát a Z-ből kilépő élek száma pontosan $|X - T_1|$.

• D definíciója miatt minden $V - (Z \cup T_2)$-beli pontból lép ki M-él.

A felsorolt élek csupa különbözőek, azaz $\nu(G) = |M|$. ■

7.1. Az algoritmus

Tekintsük a $G = (V, E)$ gráfot, benne a diszjunkt T_1, T_2 terminális halmazokat. Megadunk egy algoritmust, ami meghatároz egy maximális hagyományos útpárosítást.

Legyen az algoritmus futása során $\mathcal{L}$ néhány $\overrightarrow{G}$-beli k-hiányos rendes páros faktor nemüres listája. Egy javítólépés abból áll, hogy áttérünk egy $\mathcal{L}'$-re úgy, hogy vagy $k' < k$ (azaz nagyobb páros faktort kapunk), vagy $D(\mathcal{L}) \subsetneq D(\mathcal{L}')$. Ha nem találunk javítólépést, akkor mutatni fogunk egy vágást, ami a 7.2. egyenlőtlenségében azt bizonyítja, hogy megtaláltunk egy maximális megoldást.

Kiindulunk például a triviális $\mathcal{L} := \{\emptyset\}$ listából. Egy javítólépéshez tekintsünk egy tetszőleges $M \in \mathcal{L}$ tagját a listának. Ha teljesülnek az optimalitási feltételek, akkor találtunk maximális megoldást és gátat is a 7.3. lemma miatt. Ha nem teljesül mind, akkor a következő esetek lehetnek:

($\neg\alpha$) Van egy $yx \in M$ él, melyre $x \in A$ és $y \in A \cup C$.
($\neg\beta$) Van egy $yx \in M$ él, melyre $x \in D_{11}$ és $y \in A$.
($\neg\gamma$) Van egy $x \in (A \cup D_{11}) - T_1$ pont, melyre $\varrho_M(x) = 0$.
($\neg\delta 1$) Van egy S komponense $G[D(\mathcal{L})]$-nek, ami diszjunkt T_1-től (T_2-től is) és:

$$\exists x, u \in S \;\; \exists y \notin S \;:\; yx \in M \;\text{ és }\; x \neq u \;\text{ és }\; \varrho_{M[S]}(x) = \varrho_{M[S]}(u) = 0$$

($\neg\delta 2$) Van egy S komponense $G[D(\mathcal{L})]$-nek, ami diszjunkt T_1-től (T_2-től is) és:

$$\exists x, u \in S \;:\; x \neq u \;\text{ és }\; \varrho_M(x) = \varrho_M(u) = 0$$

($\neg\delta 3$) Van egy S komponense $G[D(\mathcal{L})]$-nek, ami diszjunkt T_1-től (T_2-től is) és le van fedve párosításélekkel.

Ezekben az esetekben:
($\neg\alpha$) Létezik $zx \in E$, $z \in D$. Legyen $M_0 := M - yx + zx$.
($\neg\beta$) Létezik $zx \in E$, $z \in D_{11}$. Legyen $M_0 := M - yx + zx$.
($\neg\gamma$) Létezik $z \in D$, $zx \in E$. Legyen $M_0 := M + zx$.
($\neg\delta 1$) Létezik $z \in S$, $zx \in E$. Legyen $M_0 := M - yx + zx$.
($\neg\delta 2$) Létezik $z \in S$, $zx \in E$. Legyen $M_0 := M + zx$.
($\neg\delta 3$) Ekkor $|S|$ páros. Tekintsünk egy másik $M' \in \mathcal{L}$ -et, ami valamely $s \in S$ -re s-kiszabad. Ez az M' az ($\neg\delta 1$) vagy ($\neg\delta 2$) esetnek felel meg.

Legyen a fenti esetekhez $N_0 \in \mathcal{L}$ egy $z_0 = z$-kiszabad páros faktor. A ($\neg\gamma$) és ($\neg\delta 2$) esetén egy (M_0, N_0, z_0, g_{-1})-igazítás A) vagy B) esetén nagyobb páros faktort ad: áttérünk az $\mathcal{L}' := \{\widehat{N'}$ rendessé téve $\}$ vagy $\mathcal{L}' := \{\widehat{M'}$ rendessé téve $\}$-re. Az ($\neg\alpha$) , ($\neg\beta$) és ($\neg\delta 1$) esetén ha A)-val ér véget az igazítás, akkor nagyobb páros faktort kaptunk: áttérhetünk egy $\mathcal{L}' := \{\widehat{N'}$ rendessé téve $\}$-re. Ha pedig B)-vel, akkor $\widehat{z'} \neq y$ esetén $\mathcal{L}' := \mathcal{L} \cup \{\widehat{M'}$ rendessé téve $\}$ és $\widehat{z'} = y$ esetén $\mathcal{L}' := \mathcal{L} \cup \{\widehat{N'}$ rendessé téve $\}$. Ezzel a választással (6.19.) miatt $z \notin D(\mathcal{L})$ bekerül D-be: $D(\mathcal{L}) + z \subseteq D(\mathcal{L}')$.

Marad az az eset, amikor a C)-nek megfelelő F faktorkritikust adja az igazítás: tegyük fel, hogy $N_0 = (N_0/F)^F$ és N_0/F $\{F\}$-kiszabad és $F \subseteq D$. Ekkor a párosításoknál látott módon egy összehúzott gráfban fogjuk folytatni a javítólépést. Ehhez meg fogunk adni egy $F \subseteq \overline{F} \subseteq D(\mathcal{L})$ faktorkritikust, és minden $v \in D(\mathcal{L})/\overline{F}$ pontra egy v-kiszabad M_v páros faktort $G/\overline{F}$-ben. Ha ezen M_v-k konstrukciója közben véletlenül nagyobb páros faktort találnánk vagy egy ugyanakkorának $\mathcal{L}$-hez vételével D-t megnövelnénk, akkor mindenről megfeledkezhetünk, és kész a javítólépés. Következzen az M_v-k konstrukciója. Legyen $v \in D - F$ tetszőleges, és $N_v \in \mathcal{L}$ legyen v-kiszabad. Alkalmazzuk az $M_0 := N_0$ és $N_0 := N_v$ jelöléseket a következő fejezetben.

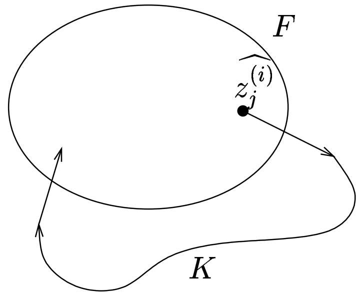
7.2. Összehúzás az algoritmusban

Tegyük fel, hogy egy G alig szimmetrikus gráfban adott egy F faktorkritikus, és egy $M_0 = (M_0/F)^F$ alakú páros faktor, ahol M_0/F egy $\{F\}$-kiszabad páros faktor G/F-

ben, és N_0 egy v-kiszabad páros faktor. Ha maga M_0 v-kiszabad, akkor kész. Amúgy van egy v-ből kilépő g éle M_0-nak. Alkalmazzunk egy (M_0, N_0, v, g) hideg igazítást, abban reménykedve, hogy kapunk egy M_v-t, ami kielégíti igényeinket! Tegyük először a következő egyszerű megfigyelést:

7.4. lemma. *Tekintsük az igazítás során keletkezett $M_l^{(b)}$-t. Ha eddig nincs olyan $g_{j-1}^{(i)} = z_j y_{j-1}$ él, amire $z_j^{(i)} \in \langle F\rangle_i$ és $y_{j-1}^{(i)} \notin \langle F\rangle_i$ akkor $M_l^{(b)}$ szintén nem tartalmaz $\langle F\rangle_j$-ből kilépő élt és legfeljebb egy $\langle F\rangle_j$-be belépő élt.*

(i) ESET: Ha nincs olyan $g_{j-1} = z_j y_{j-1}$ él semelyik $W^{(i)}$ sétában, amire $z_j \in \langle F\rangle_i$ és $y_{j-1} \notin \langle F\rangle_i$. A hideg igazításnál az A')-t vagy B')-t kielégítjük. A') esetén kész. B') esetén pedig (6.21.) miatt a kapott $M_v := \widehat{M'}/\langle F\rangle$ megfelel.
(ii) ESET: Az igazításban az első g-él legyen $g_{j-1}^{(i)} = z_j y_{j-1}$, amire $z_j^{(i)} \in \langle F\rangle_i$ és $y_{j-1}^{(i)} \notin \langle F\rangle_i$ teljesül.
Tekintsük az $M = M_j^{(i)}$ élhalmazt! M-nek $|\langle F\rangle_i| - 1$ éle van $\langle F\rangle_i$-en belül. Ha $M/\langle F\rangle_i$ páros faktor, akkor $M_v := \widehat{M}/F$ megfelel. Ha nem páros faktor, akkor $\widehat{M}$ az ábra alapján helyezkedhet el:



F-re még legfeljebb egy be- és egy kiél illeszkedik, és $\widehat{z_j^{(i)}} \in F$. Ezért $\widehat{M}/F$ csak akkor nem páros faktor, ha van $\widehat{M}$-ben egy $\{F\}$-et átmetsző K páratlan kör. Tekintsünk egy $(\widehat{M}/F, M_0/F, \{F\}, g/F)$ igazítást: A) vagy B) esetén készen vagyunk, C) esetén pedig egy $\{F\} \in F' \subseteq V/F$ faktorkritikussal M_0/F' $\{F'\}$-kiszabad. Ekkor $M_0/\{F+F'\}$ $\{F+F'\}$-kiszabad, ahol $F \subsetneq F+F'$. Tehát vagy minden v-re találunk megfelelő M_v-t, vagy találunk egy bővebb $F+F'$ faktorkritikust. Az utóbbi esetben a bővebb faktorkritikusra térünk át.

Ha az algoritmus eddig nem talált javítólépést, akkor talált egy $F \subseteq \overline{F} \subseteq D$ faktorkritikust, és $G/\overline{F}$-ben minden $v \in D/\overline{F}$-re egy M_v v-kiszabad páros faktort. Legyen $\mathcal{L}_{G/\overline{F}} := \{M_v : v \in D(\mathcal{L})/\overline{F}\}$. Látható, hogy ha valamely $N \in \mathcal{L}_{G/\overline{F}}$ kielégítené OF-et, akkor $N^{\overline{F}} \in \mathcal{L} \cup \{N^{\overline{F}}\}$ is. Ezért semelyik tagja $\mathcal{L}_{G/\overline{F}}$-nek nem elégíti ki OF-et. Ha találunk egy javítólépést $G/\overline{F}$-ben, akkor látható, hogy ez kiterjed a 6.1. állítás alapján egy javítólépéssé G-ben is. Az algoritmus vesz egy tetszőleges $M \in \mathcal{L}_{G/\overline{F}}$-et. A fentiek szerint nem teljesíti OF-et. A javítólépést az összehúzott gráfban keressük tovább. Mivel minden összehúzás csökkenti $|V|$-t, ezért legfeljebb n összehúzás lehetséges, végülis találunk egy javítólépést G-ben.

Javítólépések egy legfeljebb n^2 hosszú sorozata után talál egy M , $\mathcal{L}$ párt, ami teljesíti az OF-eket. A 7.3. lemma miatt a maximális M mellé megtaláltuk az $A(\mathcal{L})$ gátat is. Az algoritmus futásideje $O(n^8)$.

7.3. Struktúratétel

Mindez nem jöhetett volna létre, ha [4]-ből nem ismernénk egy struktúratételt. A megadott algoritmust ez motiválta, de nem használtuk fel – nem igazán segített volna. Eddigi ismeretünk birtokában viszont már könnyen bebizonyíthatjuk.

7.5. tétel. *Legyen M tetszőleges maximális útpárosítás.*
(i) $A(G)$ gát, azaz vágás és $\nu(G) = |R| + |X| - \mathrm{odd}_G(X)$.
(ii) $G[D(G)]$-nek a T_1 -től diszjunkt komponensei faktorkritikusak.
(iii) $M \in \mathcal{L}_{max}$ kielégíti az optimalitási feltételeket.

Bizonyítás. Az algoritmus $\mathcal{L} = \{\emptyset\}$ helyett $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\max}$ -szal is indítható (ha a futásidő nem érdekel minket). Láttuk, hogy ha egy $M \in \mathcal{L}$ nem teljesíti az optimalitási feltételeket, akkor van javítólépés. Ez itt nem lehetséges, így az (i), (iii) tulajdonságok egyből adódnak.

(ii) igazolásához tekintsük egy tetszőleges S komponensét $G[D(G)]$-nek ami T_1 -től diszjunkt. Legyen $v \in S$ tetszőleges. Legyen M_v egy v-kiszabad maximális útpárosítás. (δ) miatt M_v majdnem teljes S-ben; a 6.2. lemma miatt pedig $G[S - v]$-ben van teljes párosítás. Tehát S faktorkritikus. ■

8. Páros faktor probléma

Az bevezetőben megadtunk egy kombinatorikus optimalizálási feladatot: maximális páros faktor keresése irányított gráfban. Ezt alig szimmetrikus irányított gráfban akarjuk csak megoldani. Speciális esetként a hagyományos útpárosításokra ezt megoldottuk az igazítási algoritmus segítségével. Most megadjuk az általános feladatra egy algoritmust, ami szintén az igazítási algoritmusra épít – lényeges újdonság nincs benne. Következményként kapunk egy 2.4.-hoz hasonló összefüggést és egy 7.5.-hoz hasonló struktúratételt.

Legyen $G = (V, E)$ egy alig szimmetrikus irányított gráf. Ismételjünk át néhány jelölést: Egy $U \subseteq V$ csúcshalmazra a $G[U]$ részgráf szintén alig szimetrikus. Jelölje $\mathrm{odd}_G[U]$ a $G[U]$ azon erős összfüggőségi komponenseinek számát, melyekbe nem megy be él más komponensből, és páratlan sok pontja van. Pongyolán fogalmazva $\mathrm{odd}_G[U]$ a páratlan forráskomponensek számát jelenti. Már az első fejezetben bevezettük az

$N_G^+(U)$ jelölést azokra az $V - U$-beli pontokra, melyekbe megy be él U-ból. Ezek U kiszomszédai. A V_1, def és ν definícióját általánosan páros faktorokra mondtuk ki. Kissé módosítjuk a struktúra definícióját: Ha $\mathcal{L}$ azonos méretű páros faktorok nemüres listája, akkor

$$D = D(\mathcal{L}) = D_G(\mathcal{L}) := \{x \in V : \exists M \in \mathcal{L} \text{ amire } x \notin V_1(M)\}$$

$$A = A(\mathcal{L}) = A_G(\mathcal{L}) := N_G^+(D(\mathcal{L}))$$

$$C = C(\mathcal{L}) = C_G(\mathcal{L}) := V - (D(\mathcal{L}) \cup A(\mathcal{L}))$$

$\mathcal{L}_{\max} = \{M : |M| = \nu(G)\}$ -vel jelöljük a maximális páros faktorok halmazát.

(8.1.) $$D(G) := D_G(\mathcal{L}_{\max}) \ , \ A(G) := A_G(\mathcal{L}_{\max}) \ , \ C(G) := C_G(\mathcal{L}_{\max})$$

Egy U ponthalmazban az M páros faktort **teljes**nek nevezzük, ha $\mathrm{odd}_G[U]$ kivétellel U minden pontjába belép $M[U]$ egy éle. Ennél több nem lehet $|M|$, mert a páratlan forráskomponensekben mindig van legalább egy befedetlen pont.

8.1. Optimalitási feltételek

Egy $M, \mathcal{L}$ pár kielégíti az optimalitási feltételeket, ha $M \in \mathcal{L}$ és
(α) Nincs éle M-nek $A(\mathcal{L}) \cup C(\mathcal{L})$-ből $A(\mathcal{L})$-ba.
(β) $M[D(\mathcal{L})]$ teljes $G[D(\mathcal{L})]$-ben.
(γ) Minden $A(\mathcal{L})$-beli pontba belép M egy éle.

8.2. lemma. *Tetszőleges Y ponthalmazra $\nu(G) \leqslant |V| + |N^+(Y)| - \mathrm{odd}_G[Y]$.*

Bizonyítás. Legyen M egy $\nu(G)$ élű páros faktor.
- Y-on belül legfeljebb $|Y| - \mathrm{odd}_G[Y]$ éle lehet M-nek.
- Y-ból kilépő él legfeljebb $|N^+(Y)|$ darab lehet, ugyanis mindnek különböző $N^+(Y)$ -beli pontban van a feje.
- Olyan él melynek töve $V - Y$-ben van legfeljebb $|V - Y|$ darab lehet.

Minden élt pontosan egyszer vettünk figyelembe, ezért

$$\nu(G) = |M| \leqslant (|Y| - \mathrm{odd}_G[Y]) + |N^+(Y)| + |V - Y| = |V| + |N^+(Y)| - \mathrm{odd}_G[Y]$$

∎

Nevezzünk egy Y-t **pontos**nak, ha az előző lemma egyenlőtlenségét egyenlőséggel teljesíti. Egy pontos Y létezése ekvivalens a Páros Faktor Formulával:

(8.3.) $$\nu(G) = \min_{Y \subseteq V} |V| + |N^+(Y)| - \mathrm{odd}_G[Y]$$

8.4. lemma. *Ha fennállnak az optimalitási feltételek, akkor M maximális, $D(\mathcal{L})$ pontos.*

Bizonyítás. Legyen $Y := D(\mathcal{L})$.
• Y-on belül $|Y| - \operatorname{odd}_G[Y]$ éle van M-nek (β) miatt.
• Minden $N^+(Y)$-beli pontba megy be él (γ) miatt, és (α) miatt ezek csak Y-ból jöhetnek. Tehát az Y-ból kilépő élek száma pontosan $|N^+(Y)|$.
• D definíciója miatt minden $A \cup C$-beli pontból lép ki M-él.

A felsorolt élek csupa különbözőek, így

$$|M| = (|D| - \operatorname{odd}_G[Y]) + |N^+(Y)| + |A \cup C| = |V| + |Y| - \operatorname{odd}_G[Y] \geqslant \nu(G).$$

■

8.2. Algoritmus maximális páros faktor keresésére alig szimmetrikus gráfban

Megadunk egy algoritmust alig szimmetrikus gráfban maximális páros faktor keresésére. Legyen az algoritmus futása során $\mathcal{L}$ néhány k-hiányos páros faktor nemüres listája. Egy javítólépés abból áll, hogy áttérünk egy $\mathcal{L}'$-re úgy, hogy vagy $k' < k$ (azaz nagyobb páros faktor kapunk), vagy $D(\mathcal{L}) \subsetneq D(\mathcal{L}')$. Ha nem találunk javítólépést, akkor mutatni fogunk egy vágást, ami a 8.2. egyenlőtlenségében azt bizonyítja, hogy megtaláltunk egy maximális megoldást. Kiindulunk $\mathcal{L} := \{\emptyset\}$ -ből. Egy javítólépéshez tekintsünk egy tetszőleges $M \in \mathcal{L}$ -et. Ha teljesülnek az optimalitási feltételek, akkor találtunk maximális megoldást és pontos halmazt is a 8.4. lemma miatt. Ha nem teljesül mind, akkor a következő esetek lehetnek:
$(\neg\alpha)$ Van egy $yx \in M$ él $A \cup C$-ből A-ba.
$(\neg\beta 1)$ Van egy $x \in S$ pont egy $G[D]$-nek egy S erős összefüggőségi komponensében ami nem páratlan forráskomponens, és x-be nem megy be $M[D]$-él. Ezen belül két aleset: a) Van $yx \in M$ $(y \in A \cup C)$. b) Nincs.
$(\neg\beta 2)$ Van két pont $x, u \in S$ valamelyik S páratlan forráskomponensében $G[D]$-nek, melyekbe nem lép be $M[D]$-él. Ezen belül két aleset: a) Van $yx \in M$ $(y \in A \cup C)$. b) Nincs.
$(\neg\gamma)$ Van egy $x \in A$, amibe nem lép be $M[S]$-él.

Ezekben az esetekben legyen
$(\neg\alpha)$ $\exists zx \in E$, $z \in D$. Ekkor legyen $M_0 := M - yx + zx$.
$(\neg\beta$ 1,2a) $\exists zx \in E[D]$. Legyen $M_0 := M - yx + zx$.
$(\neg\beta$ 1,2b) $\exists zx \in E[D]$. Legyen $M_0 := M + zx$.
$(\neg\gamma)$ $\exists zx \in E$, $z \in D$. Legyen $M_0 := M + zx$.

Legyen $N_0 \in \mathcal{L}$ z-kiszabad. Tekintsünk egy (M_0, N_0, z, g_{-1}) igazítást. Ez javítólépést eredményez A), B) esetén:

$(\neg\beta$ 1,2b), $(\neg\gamma)$: Nagyobb páros faktort kapunk.

$(\neg\alpha)$, $(\neg\beta$ 1,2a): A) esetén nagyobb páros faktort kapunk. B) $\widehat{z'} \neq y$ esetén $\mathcal{L}' := \mathcal{L} \cup \{\widehat{M'}\}$ és $\widehat{z'} = y$ esetén $\mathcal{L}' := \mathcal{L} \cup \{\widehat{N'}\}$. Ezzel a választással $y \notin D(\mathcal{L})$ bekerül D-be: $D(\mathcal{L}) + y \subseteq D(\mathcal{L}')$.

C) esetén találunk egy F faktorkritikusat, amire $N_0 = (N_0/F)^F$ alakú ahol N_0/F egy $\{F\}$-kiszabad páros faktor. Ekkor az algoritmus az 7.2 fejezetben leírt módon fejezhető be.

8.3. Páros faktorok struktúratétele

8.5. tétel. *Legyen M tetszőleges maximális páros faktor.*
(i) $D(G)$ gát, azaz $\nu(G) = |V| + |A(G)| - \operatorname{odd}_G[D(G)]$.
(ii) $G[D(G)]$-nek a páratlan forráskomponensei faktorkritikusak.
(iii) $M \in \mathcal{L}_{max}$ kielégíti az optimalitási feltételeket.

Bizonyítás. Ha az $\mathcal{L}_{\max}$ listával indítjuk az algoritmust, akkor nem történhet javító-lépés. Ezért minden $M \in \mathcal{L}_{\max}$ kielégíti az optimalitási feltételeket. Ebből (i) és (ii) is következik. ■

9. Nyitott kérdések

Egy alig szimmetrikus irányított G gráfot nevezzünk **kritikus**nak, ha $V = D(G)$. Speciálisan ha G szimmetrikus és összefüggő, akkor a kritikusság ekvivalens a faktorkritikussággal. Tetszőleges G alig szimmetrikus irányított gráfra ekvivalensek a következők:

(i) G kritikus.

(ii) Minden maximális páros faktor $\operatorname{odd}_G[V]$ kivétellel belép minden pontba és minden ponthoz van olyan maximális páros faktor, amiben ez a pont kiszabad.

Van-e a faktorkritikusok fülfelbontásához hasonló előállítási tétel a kritikusságra? Ebben a kérdésben egy apró kiindulást adhat a következő sejtés, de a teljes válaszhoz talán a Szegedy-féle algebrai elméletet [11] kell segítségül hívni.

9.1. sejtés. *Legyen G irányítatlan gráf, $T_1 \subseteq V$, $T_2 = \emptyset$ a terminális halmazok. $\overrightarrow{G}$ akkor és csak akkor kritikus, ha G felépíthető a következő műveletekkel az üres gráfból:*

- *Új pontot veszünk fel R-be vagy T_1-be.*
- *Egy T_1-beli pontot és egy tetszőleges másik pontot összekötünk egy új R-beli pontokon át haladó tetszőleges úttal.*
- *Két pontot összekötünk egy új R-beli pontokon át haladó páratlan hosszú úttal.*

Az Olvasó joggal tarthatja bonyolultnak a páros faktor algoritmust: az igazítási algoritmust hívja meg sokszor, amit több fejezeten át konstruáltunk. Egyelőre csak sejtésként van meg a következő egyszerűsítési ötlet.

9.2. sejtés. *Tetszőleges* (M_0, N_0, z_0, g_{-1}) *kihibás hármasra a következő két lehetőség közül pontosan egy teljesül:*

X) A $W(M_0, N_0, z_0, g_{-1})$ *javítóséta végetér.*

Y) Van egy $z_0 \in F \subseteq V$ *faktorkritikus, melyre* $|M_0[F]| = |F|$ *és* $|N_0[F]| = |F| - 1$ *(azaz* W *beszorult* F*-be). Ekkor egy nem túl nagy pozitív* q*-ra* $M_q = M_0$*,* $N_q = N_0$*, és a séta* F *minden pontját bejárta* q *lépés után.*

Itt az Y) esetén F-et a séta során q lépés után megtaláljuk. X) esetén pedig a 5.2.-5.6. fejezetekre nincs szükség, és a további fejezetekben is kicsit egyszerűbb a jelölések használata. Az algoritmusban egy igazítást helyettesíthetjük egyetlen javítósétával. A futásidő javul kettőt a kitevőben. Ha ez a sejtés hamis, van tartaléksejtés is, ami ugyanezeket a következményeket implikálja.

További kérdések:

Az útpárosítások, páros faktorok vagy az (f, g) páros faktorok visszavezethetők-e a matroid-parityre? Lehet-e általánosítani az (f, g)-faktorok elméletét az (f, g) páros faktorokra? Mely nem alig szimmetrikus gráfokra teljesül a Páros Faktor Formula, illetve melyekre gát $D[G]$?

Hivatkozások

[1] L. Lovász, M.D. Plummer: Matching Theory, Akadémiai Kiadó, 1986.

[2] A. Frank, L. Szegő: *A note on the path-matching formula*, J. of Graph Theory, elfogadva.

[3] W.H. Cunningham, J.F. Geelen: *The Optimal Path-Matching Problem*, Combinatorica, 17/3 (1997), 315-336.

[4] B. Spille, Szegő L.: *Gallai-Edmonds-type structure theorem for path-matchings*, kézirat

[5] W.H. Cunningham: *Matchings, matroids, and extensions*, Math. Program. Ser. B **91** (2002) 3, 515-542.

[6] J.F. Geelen: *An algebraic approach to matching problems*, kézirat

[7] G. Pap, L. Szegő: *On the Maximum Even Factor in Weakly Symmetric Graphs*, Journal of Combinatorial Theory Ser. B, közlésre benyújtva

[8] A. Sebő: *Finding the t-Join Structure of Graphs*, Math. Program. Ser. **36** (1986), 123-134.

[9] B. Spille, R. Weissmantel: *A Combinatorial Algorithm for the Independent Path-Matching Problem*, kézirat

[10] L. Lovász: *Matroid Matching and Some Applications* Journal of Combinatorial Theory Ser. B, **28** (1980), 208-236.

[11] B. Szegedy, Ch. Szegedy: *Symplectic Spaces and Ear-Decompositions of Matroids*

[12] S. Felsner: *Orthogonal Structures in Directed Graphs*, Journal of Combinatorial Theory (B) **57** (1993), 309-321.

[13] Szegő László: *Utak és párosítások* (szakdolgozat)

[14] Szabó Jácint (személyes beszélgetés)