Approximációs algoritmusok k-összefüggő részgráfok keresésére

Szakdolgozat

Írta:	Témavezető:
Hajba Tamás	Frank András
	egyetemi tanár

ELTE Természettudományi Kar
Operációkutatási Tanszék

1998.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az utóbbi évtizedekben a gyakorlati alkalmazások miatt az NP-teljes problémák jó közelítő megoldását szolgáltató heurisztikák illetve algoritmusok egyre fontosabb szerepet kapnak. Egy lehetséges megközelítési mód approximációs algoritmusok használata. Egy α faktor approximáción olyan polinomiális algoritmust értünk, mely bizonyítottan nem ad rosszabb megoldást mint az optimum α-szorosa. Az approximációs algoritmusok mindig magukban foglalják az optimum alsó becslését, és így közvetve a probléma mélyebb megértésében is segítenek.

A szakdolgozat célja a gráfok NP-teljes összefüggőségi problémáira vonatkozó approximációs algoritmusok áttekintése. A szakdolgozat a Hochbaum [1] könyv 4. és 6. fejezetének fontosabb algoritmusait és az újabb eredményeket tartalmazza.

A 2. és 3. fejezetben a következő problémára ismertetünk approximációs algoritmusokat: egy k-összefüggő élsúlyozott gráfnak keressünk minimális súlyú k-összefüggő részgráfját. A feladatnak 4 verziója lehetséges, attól függően, hogy a gráf irányított vagy irányítatlan; illetve pontösszefüggő vagy élösszefüggő. A feladat irányítatlan gráfoknál $k \geq 2$ esetén már azonosan egy súlyozásnál, míg irányított esetben $k \geq 1$ esetben az azonosan egy súlyozásnál is NP-teljes. Azonban kiderül, hogy 2 faktor approximációt szinte mindegyik esetben könnyű adni. Többfajta típusú algoritmus létezik. Az egyik gyakran használt módszer mélységi fák használata. Például 2-élösszefüggő részgráf keresésénél előnyt jelent, hogy egy mélységi fában nincsenek keresztélek, ezért az elvágó élek csak a fa élei lehetnek. Néhány algoritmus a párosítások elméletén alapul: Sebő, Szigeti és Cheriyan algoritmusa azt használja, hogy egy 2-élösszefüggő gráfnak létezik 'megfelelő' fülfelbontása. Mindegyik algoritmusnál fontos szerepet játszik az optimum alsó becslése. Jó becslésekre többfajta tételt is fogunk látni.

A 4. fejezetben egy általánosabb feladatot tárgyalunk: irányítatlan gráfnak kell keresni minimális súlyú részgráfját, mely minden vágásból legalább előre megadott számú élet tartalmaz. A feladat speciális esete az általánosított Steiner probléma, amikor is a pontok közötti lokális élösszefüggőségre van egy előírás. A fejezetben szereplő algoritmusok a feladat lineáris programként való megfogalmazását használják. Williamson algoritmusa a primál és duál változókat javítja addig, míg a feladatra kap egy megengedett megoldást. Az algoritmus során arra vigyázunk, hogy a primál complementary slackness mindvégig fennáljon, míg a duál complementary slackness 'átlagosan' fog teljesülni. Kamal Jain algoritmusa iteratíven megoldja az LP relaxációt majd kerekíti a megoldást. Az algoritmus lényege, hogy minden lépésben legalább eggyel csökken az élek száma.

Definíciók

Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf. G-t *k-pontösszefüggőnek* nevezzük , ha $|V| > k-1$ és G-ben bárhogy törlünk el legfeljebb $k-1$ pontot, a maradék gráf összefüggő marad. G-t *k-élösszefüggőnek* nevezzük, ha G-ben bárhogy törlünk el legfeljebb $k-1$ élet, a maradék gráf összefüggő marad.

Egy $S \subset V$ ponthalmazra jelölje $\delta(S)$ azon élek halmazát, melyeknek pontosan az egyik végpontja van S-ben. Ha adott G-ben egy T feszítő fa és egy $r \in V$ pont, akkor a (T, r) párt *gyökeres fának* nevezzük, és azt mondjuk, hogy r a T *gyökérpontja*. Legyen (T, r) egy gyökeres fa. Azt mondjuk, hogy az $u \in V$ pont a $v \in V$ pont *őse*, ha u rajta van a v-ből r-be vezető T-beli úton. A v pontot ekkor az u pont *leszármazottjának* hívjuk. Ha ráadásul $(u, v) \in T$, akkor az u pontot a v *szülőjének*, v-t pedig u *fiának* nevezzük. Az $(x, y) \in E - T$ élet *visszaélnek* nevezzük, ha valamelyik végpontja őse a másik végpontnak. Ha egyik végpontja sem őse a másik végpontnak, akkor az (x, y) élet *keresztélnek* nevezzük.

Egy irányított gráfot *erősen összefüggőnek* hívunk, ha bármely pontból bármely pontba létezik irányított út.

Egy irányított gráfot *k-pontösszefüggőnek* nevezünk, ha legalább k pontja van és bárhogy törlünk el legfeljebb $k-1$ pontot, a maradék gráf erősen összefüggő marad. Egy irányított gráfot *k-élösszefüggőnek* nevezünk, ha bárhogy törlünk el legfeljebb $k-1$ élet, a maradék gráf erősen összefüggő marad.

Egy irányított gráfot gráfot *fenyőnek* hívunk, ha valamely s pont befoka 0, és minden más pont befoka 1. Az s pontot a fenyő *gyökerének* nevezzük.

Ha adott egy gráf (irányított vagy irányítatlan) és egy $c: E \to \mathbb{R}$ élsúlyozás, akkor tetszőleges E' élhalmaz *súlyán* a benne szereplő élek súlyának összegét értjük, és $c(E')$-vel jelöljük. Egy k-összefüggő G gráf egy e élét *kritikusnak* nevezzük, ha $G - e$ nem k-összefüggő.

Legyen G egy irányított (irányítatlan) gráf, és s egy adott pontja. Jelölje S a s pontból elérhető pontok halmazát. Ekkor létezik egy s gyökerű F fenyő (gyökeres fa), melynek ponthalmaza S. F-t a következő címkézési technika segítségével találhatjuk meg: minden ponthoz tartozik 2 címke, egy ELÉRT és egy ÁTVIZSGÁLT. Az algoritmus kezdetén az s pont elért, a többi pont nem elért, és minden pont NEM ÁTVIZSGÁLT. Az algoritmus egy lépésben vesz egy már elért, de még nem átvizsgált u pontot. Ha az u pontból megy ki olyan (u, v) él, melyre v még nem elért, akkor v-t elértté nyilvánítjuk, és az (u, v) élet betesszük a v pont ELÉRT címkéjébe. Ha az u pontból nem megy ki olyan (u, v) él, melyre v még nem elért, akkor az u pontot ÁTVIZSGÁLTNAK nyilvánítjuk, és iteráljuk az eljárást. Könnyen belátható, hogy az algoritmus végén az elért pontok ELÉRT címkéjében lévő élek egy s gyökerű fenyőt (gyökeres fát) alkotnak, melynek ponthalmaza S.

Ha az algoritmus során mindig azt a még nem átvizsgált pontot választjuk ki, melyet a legkorábban értünk el, akkor az algoritmust *szélességi keresésnek* nevezzük. Ha mindig azt a még nem átvizsgált pontot választjuk ki, melyet a legkésőbb értünk el, akkor az algoritmust *mélységi keresésnek* nevezzük. A *lokális szélességi keresés* a szélességi keresés általánosítása: az algoritmus mindig vesz egy elért de még nem átvizsgált u pontot, és beteszi a fenyőbe az összes olyan (u, v) élt, melyekre v még nem elért.

Az $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ $(\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m)$ egy $\mathbf{x}_0$ megengedett megoldását *bázismegoldásnak* nevezünk, ha azon sorok rangja, melyeket $\mathbf{x}_0$ egyenlőséggel teljesít, megegyezik $\mathbf{A}$ rangjával.

Legyen V egy véges alaphalmaz. Azt mondjuk, hogy az $S \subset V$ és az $S' \subset V$ halmazok *metszőek*, ha az $S - S'$, $S' - S$, $S \cap S'$ halmazok egyike sem az üreshalmaz. Egy $\mathcal{S} \subset 2^V$ halmazrendszert *laminárisnak* nevezünk, ha semmelyik két halmaza sem metszi egymást.

Egy α *approximáción* olyan polinomiális algoritmust értünk, mely az optimumnál legfeljebb α-szor ad rosszabb megoldást.

2. IRÁNYÍTATLAN GRÁFOK

2.1. Pontösszefüggő problémák

Ebben a fejezetben a következő problémával foglalkozunk: adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan k-pontösszefüggő gráf és $c: E \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény. Keressünk minimális súlyú k-pontösszefüggő részgráfot a V ponthalmazon. A továbbiakban jelöljön $G_{opt} = (V, E_{opt})$ egy minimális súlyú k-pontösszefüggő részgráfot.

Az első részben azt az esetet tárgyaljuk, mikor minden súly egyenlő 1-gyel, míg a második részben az általános esetet nézzük.

2.1.1. Súlyozatlan pontösszefüggőség

Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan k-pontösszefüggő gráf. Keressünk G-nek minimális élszámú k-pontösszefüggő részgráfját.

Cheriyan és Thurimella [2]-ben adott egy egyszerű 2 approximációt: lokális szélességi kereséssel vegyünk egy F_1 maximális erdőt, hagyjuk el az éleit, majd a maradék gráfból lokális szélességi kereséssel vegyünk ki egy F_2 maximális erdőt, stb. Ekkor $E_k = F_1 \cup F_2 \ldots \cup F_k$ k-pontösszefüggő gráf lesz, melynek élszáma legfeljebb $(k-1)k/2 + (n-k)k$. Mivel minden k-pontösszefüggő gráfban minden pont foka legalább k, ezért $|E_{opt}| \geq kn/2$, ezért az algoritmus egy 2 approximáció.
A $k = 2$ esetre Khuller és Vishkin [3]-ban adott 5/3-os approximációt. Az algoritmus vesz egy mélységi fát, melyet visszaélek hozzáadásával 2-pontösszefüggővé tesz. Garg, Santosh és Singla [4]-ben az algoritmus módosításával az approximációs faktort 3/2-re javította.

$k > 2$ esetén sokáig nem ismertek 2 faktornál jobb approximációt. Cheriyan és Thurimella [5]-ben párosítások segítségével tetszőleges k-ra adott egy $1 + 1/k$ faktorú approximációt.

k-pontösszefüggőség:

Cheriyan és Thurimella algoritmusa: Az algoritmus 2 fázisból áll. Az első fázisban meghatároz egy minimális elemszámú M élhalmazt, hogy minden $v \in V$ pontra $d_M(v) \geq k-1$. Ez lényegében egy *b-párosítás* feladat. A b-párosítás feladat a maximális párosításnak az általánosítása: minden v pontra adott egy b_v egész szám, találjunk maximális számú $N \subset E$ élhalmazt, hogy minden v pontra $d_N(v) \leq b_v$. Gabow és Tarjan [24]-ben megmutatta, hogy a b-párosítás feladat $O(|E|^{1.5}(log|V|)^{1.5})$ lépésben megoldható.
Esetünkben M megtalálása ekvivalens egy $N \subset E$ megtalálásával, melyre $d_N(v) \geq d(v) - k + 1$ minden v pontra. Az előző megjegyzés szerint M

$O(|E|^{1.5}(log|V|)^{1.5})$ időben megtalálható.

A második fázisban egy tartalmazásra nézve minimális F élhalmazt keresünk, amelyre $M \cup F$ k-pontösszefüggő lesz. F megkeresése: kezdetben legyen $F = \emptyset$ és az aktuális gráf pedig G. Tetszőleges sorrendben megvizsgáljuk $E - M$ éleit. Ha egy e él kritikus (azaz az aktuális gráfból elhagyva már nem lesz k-pontösszefüggő a maradék gráf), akkor az e élt hozzávesszük F-hez, ha pedig e nem kritikus, akkor töröljük az aktuális gráfból. Egy (u, v) él pontosan akkor kritikus, ha az u és v pont között nem létezik $k+1$ diszjunkt út, így egy él kritikusságát $O(k|E|)$ időben eldönthetjük. A 2. fázis futásideje $O(k|E|^2)$.
Az eljárás végén $M \cup F$ k-pontösszefüggő lesz, és F minden éle kritikus lesz.

Most M-re és F-re vonatkozó felső becsléseket fogunk adni. Bizonyítás nélkül használni fogjuk Mader [6]-beli tételét:

2.1. Tétel *Egy k-pontösszefüggő gráfban egy kritikus élekből álló körnek van olyan pontja, melynek a foka pontosan k.*

2.2. Lemma $|F| \leq n - 1$

Bizonyítás. Tekintsük a $G' = (G, M \cup F)$ gráfot. Ez k-pontösszefüggő és minden F-beli él kritikus. Ha F-beli élekből létezne egy C kör, akkor M definíciója miatt G'-ben a C kör minden csúcsának legalább $k+1$ lenne a foka, ami ellentmond Mader tételének. Tehát F aciklikus, így $\leq n-1$ számú éle van. □

2.3. Tétel *Legyen $G = (V, E)$ egy k-pontösszefüggő gráf, $M \subset E$ pedig olyan élhalmaz, hogy $d_M(v) \leq k-1$ $\forall v \in V$. Ekkor $|M| \leq |E_{opt}| - \lfloor n/2 \rfloor$*

Bizonyítás. Ha G_{opt}-ban létezik teljes párosítás, akkor az állítás triviális. Ha nem létezik G_{opt}-ban teljes párosítás, akkor a Gallai-Edmonds tétel szerint létezik egy $X \subset V$ ponthalmaz, melyet G_{opt}-ból elhagyva a keletkező páratlan komponensek faktorkritikusak, és számuk $\geq |X|$, a páros komponensekben pedig létezik teljes párosítás. Tekintsük a következő $G' = (S \cup T, E')$ páros gráfot: legyen $S = X$, T pontjai legyenek a páratlan komponensek, E' pedig álljon az X halmazból a páratlan komponensekbe menő G-beli élekből. Mivel a G gráf k-pontösszefüggő, ezért G'-ben minden T-beli pont foka legalább k.

Színezzük meg G'-t k színnel egyenletesen, azaz bontsuk fel E'-t $E_1, \dots E_k$ nemüres diszjunkt halmazokra úgy, hogy minden $v \in S \cup T$ pontra

$$\lfloor \frac{d_{G'}(v)}{k} \rfloor \leq d_{E_i}(v) \leq \lfloor \frac{d_{G'}(v)}{k} \rfloor + 1. \qquad 1 \leq i \leq k$$

Ismert, hogy minden páros gráf élhalmaza bármely k-ra egyenletesen kiszínezhető.
Hagyjuk el G'-ből mondjuk az E_1 színosztályt. Az egyenletes színezés miatt a maradék gráfban minden T-beli pont foka legalább $k-1$. Az eredeti G gráfban vegyünk egy $M' \subset E_1$ élhalmazt, mely minden páratlan komponensből egy kilépő élet tartalmaz. Ha ehhez az M'-höz hozzávesszük a páratlan komponensek 'maradék' pontjainak egy teljes párosítását és a páros komponensek egy teljes párosítását, akkor egy legalább $\lfloor |V|/2 \rfloor$ nagyságú élhalmazt kapunk, melyet G_{opt}-ból elhagyva minden pont foka legalább $k-1$. Ezért a minimális élszámú M élhalmazra, melyre $d_M(v) \geq k-1$ minden $v \in V$ pontra, $|M| \leq |E_{opt}| - \lfloor n/2 \rfloor$. □

2.4. Tétel *Legyen $G = (V, E)$ egy k-szor pontösszefüggő gráf. A fenti algoritmus G-nek egy $G' = (V, E')$ k-pontösszefüggő részgráfját találja meg, melyre $|E'| \leq (1 + 1/k)|E_{opt}|$. Az algoritmus futásideje*
$O(k^3|V|^2 + |E|^{1.5}(log|V|)^2)$.

Bizonyítás.

$$\frac{|E'|}{|E_{opt}|} = \frac{|M| + |F|}{|E_{opt}|} \leq \frac{|E_{opt}| - (n-1)/2 + n - 1}{|E_{opt}|} \leq 1 + 1/k.$$

A másodi fázis futásidejét $O(k^3|V|^2)$-re javíthatjuk, ha először vesszük G egy legfeljebb nk élű E' k-pontösszefüggő részgráfját, és a 2. fázist $M \cup E'$ -re futtatjuk. □

2-pontösszefüggőség

Ebben a részben Garg, Santosh és Singla lineáris idejű algoritmusát ismertetjük minimális élszámú 2-pontösszefüggő részgráf keresésére.

Az algoritmus során a gráf egy *blokkján* pontoknak egy részhalmazát értjük, tehát **nem** a gráfelméleti jelentése szerint használjuk (azaz egy blokk nem a 2-pontösszefüggő komponenseket jelenti). Az algoritmus 2 fázisból áll. Az első fázisban vesz egy S élhalmazt, amely egy 2-pontösszefüggő részgráfját határozza meg G-nek. Továbbá az első fázisban a pontokat blokkokba osztja, majd ezen blokkok segítségével a második fázisban módosítja S-t.
1. fázis: Vegyünk egy s gyökerű T mélységi fát. Egy v pontra jelölje dfs(v), hogy a mélységi keresés hányadiknak érte el v-t.

Mikor a keresés során egy u pontot átvizsgáltunk, és visszalépünk a v szülőjére, akkor megnézzük, hogy az aktuális gráfban v szeparátor-e. Ha igen, akkor S-hez hozzáveszünk egy (x, y) visszaélt, melyre x az u leszármazottja, dfs(y) pedig minimális. A továbbiakban ezeket az éleket legmélyebb visszaélnek nevezzük. Továbbá u azon leszármazottjaiból, melyek még nincsenek benne blokkban, csinálunk egy új blokkot. A mélységi keresés végén azon pontokból, melyek nincsenek benne egyik blokkban sem, csinálunk egy blokkot.

Az 1. fázis végén minden v ponthoz létezik S-ben legalább egy legmélyebb visszaél, mely v valamely ősét v valamely leszármazottjával köti össze, ezért S 2-pontösszefüggő lesz.

Látható, hogy a T fa élei minden blokknak egy feszítő fáját adják. Húzzuk össze a T mélységi fában a blokkokat egy ponttá, jelölje az így kapott fát T', és legyen T' gyökere a T gyökerét tartalmazó blokk. A T' gyökeres fa segítségével értelmezni tudjuk a blokkok közti szülő-gyerek viszonyt.

2.5. Definíció *Azt mondjuk, hogy a v pont a B blokk szülőpontja, ha v eleme a B blokk szülőblokkjának, és v és B között létezik T-beli faél.*

Az első fázisban alkalmazott eljárásból azonnal adódik az alábbi lemma:

2.6. Lemma *G minden éle vagy egy blokkon belül, vagy egy blokk és a szülőblokkja között, vagy egy blokk és a szülőblokkjának a szülőpontja között megy.*

2.7. Lemma *Ha egy B blokk v pontjából B semmelyik gyerekblokkjába nem megy él G-ben, akkor v-ből B semmelyik leszármazott blokkjába sem megy G-beli él.*

Bizonyítás. A feltétel miatt v nem szülőpontja a B blokk egyetlen gyerekblokkjának sem, amiből a 2.6 Lemma alapján következik az állítás. □

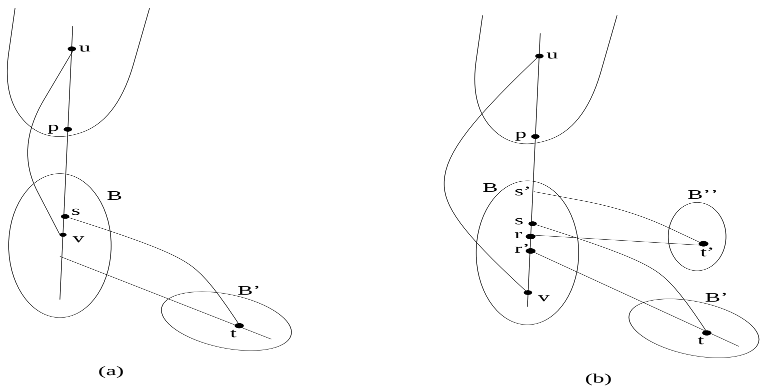
Az első fázis után minden nem gyökér blokkból megy ki egy legmélyebb visszaél. A második fázis során ezen visszaéleket módosítjuk úgy, hogy vagy minden blokkból elhagyhatunk egy fa élet, vagy ha ez nem lehetséges, akkor találunk egy nagy független ponthalmazt.

Az élelhagyást az alábbi egyszerű lemma miatt hajthatjuk végre:

2.8. Lemma *Legyen G' egy 2-szer pontösszefüggő gráf; C egy kör G'-ben, $e = (u, v)$ a C egy húrja. Ekkor $G' - e$ 2-szer pontösszefüggő.* □

2. fázis: A második fázis során a gyökér blokktól a levél blokkok felé haladva minden blokk a gyerek blokkjaiból induló viszaélek módosításáról fog dönteni.

Tegyük fel, hogy a B blokknál vagyunk. Legyen (v, u) a B-ből induló visszaél, ahol $v \in B$. Nézzük a fában a v-ből a B blokk p szülőpontjába menő



1. ábra:

utat. Legyen s ennek az útnak a legelső olyan pontja (v-t is beleértve), amely az úttól eltekintve nem tartalmaz fa élt. Ha ilyen pont nem létezik, akkor s legyen p-vel egyenlő. (1. ábra)

1. eset:

Létezik egy (t, s) visszaél, $t \in B'$, B' a B gyerek-blokkja. Ahelyett, hogy a B'-ből kiinduló legmélyebb visszaélt vennénk, vegyük a megoldáshoz a (t, s) visszaélt, B többi gyerekblokkjában nem módosítjuk az első fázis során vett visszaéleket. Világos, hogy az új gráf továbbra is 2-pontösszefüggő marad.

1.1 eset: $s = p(v)$ Ekkor (s, v) húrja az $u - v - -t - s - -p - -u$ körnek, így az (s, v) faél elhagyható.

1.2 eset: $s \neq p(v)$. Legyen $(r', r), (r, s)$ a T fa v-ből s-be menő útjának utolsó 2 éle.

1.2.1 eset:A T fában a $t - s$ út átmegy az (r', r) élen. Az s-re tett feltevés miatt r-ből az (r', r), (r, s) éleken kívül is megy fa él. Menjen ez az él a B blokk egy B'' gyerek blokkjába. Ekkor létezik egy (t', s') visszaél, melyre $t' \in B''$, s' pedig az s és p közti T fa-beli úton van. Ekkor az (r, s) él húrja az $r - -t - s - -s' - t' - -r$ körnek, így elhagyható.

1.2.2 eset: A T fában a $t - s$ út nem megy át az (r', r) élen. Ekkor (r, s) húrja a $s - -p - -u - v - -r - -t - s$ körnek, így elhagyható.

Tehát az első esetben mindig kidobható egy faél.

2.eset: semmelyik gyerek-blokkból sem megy s-be él. A s pontot hozzávesszük az M halmazhoz.

2.9. Lemma *Az M-beli pontok függetlenek.*

Bizonyítás. AZ M-beli pontok különböző blokkokban vannak, és egy M-beli pontba semmelyik gyerek-blokkból nem vezet él, így a 2.7 Lemma alapján két M-beli pont között nem mehet él. □

2.10. Tétel *A fenti algoritmus $O(E)$ lépésben megtalálja G egy 2-pontösszefüggő részgráfját, melynek élszáma legfeljebb $3/2$-szerese az optimumnak.*

Bizonyítás. Mivel M egy független ponthalmaz, így egy optimális 2-pontösszefüggő részgráfnak legalább $\max(n, 2|M|)$ éle van. Másrészt a 2. fázisban pontosan akkor nem hagyunk el egy blokkból egy faélet, ha ennél a blokknál az M halmazt új elemmel bővítjük, ezért az algoritmus által vett élek száma $n - 1 + |M|$, így az algoritmus egy $\dfrac{n-1+|M|}{\max(n, 2|M|)}$ approximációs faktort ér el, ami legfeljebb $3/2$. A lépésszámra vonatkozó állítás könnyen látható. □

2.1.2. Súlyozott pontösszefüggőség

Az általános esetben az éleken adott egy w nemnegatív súlyozás, és keresni kell egy minimális súlyú k-pontösszefüggő részgráfot.
Az általános esetben nem ismert konstans faktorú approximáció. A jelenleg ismert legjobb algoritmust Ravi és Williamson adta [16]-ban, amely egy $2H(k)$ approximáció, ahol $H(k) = 1+1/2+...1/k$. Az algoritmus egy primál-duál algoritmus, melyet egy későbbi fejezetben ismertetünk.
Ha a súlyfüggvény kielégíti a háromszög-egyenlőtlenséget, akkor Khuller és Raghavachari [7]-ben adott egy $2 + 2\frac{k-1}{n}$ approximációt.

$k = 2$ esetén Khuller és Raghavachari [7]-ben adott egy $2 + 1/n$-es approximációt. Ezt az algoritmust kicsit módosítva Penn és Shasha-Krupnik [8]-ban adott egy 2 -szeres approximációt.

$k = 3$ esetén Nutov és Penn [19]-ben adott egy 3 approximációt.

Mindhárom algoritmus lényege a következő algoritmus:

2.11. Feladat *Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan k-pontösszefüggő gráf élein nemnegatív súlyokkal, és $R \subset V$ k darab pont. Keressünk minimális súlyú $E' \subset E$ élhalmazt úgy, hogy $G' = (V, E')$-ben minden $v \in V$ pontból létezik R-be k darab pontdiszjunkt út.*

AZ IRÁNYÍTATLAN FT(G, k, R) algoritmus a következő: készítsük el G irányított változatát: minden él helyett vegyünk 2 ellentétesen megirányított élet az eredetivel megegyező súlyokkal. Vegyünk fel egy új r pontot, és húzzunk belőle minden R-beli ponthoz k darab 0 súlyú irányított élt.

Frank és Tardos [9]-ben megmutatta, hogy a következő probléma polinomiális időben megoldható: Adott egy D irányított gráf, élein nemnegatív súlyok, és egy r gyökérpont. Találjunk minimális súlyú irányított H részgráfot úgy, hogy D minden v pontjához létezzék r-ből k darab pontdiszjunkt út.

Alkalmazzuk Frank és Tardos algoritmusát az új gráfra. Így kapunk egy minimális súlyú H részgráfot, melyben minden ponthoz létezik r-ből k darab pontdiszjunkt irányított út. Legyen $S \subset E$ azon élei G-nek, melyeknek megfelelő 2 irányított él közül legalább az egyik benne van H-ban. H konstrukciója miatt minden G-beli pont és R között létezik S-ben k darab pontdiszjunkt út.

2.12. Lemma

$$w(S) \leq 2w(E_{opt})$$

ahol E_{opt} egy minimális súlyú k-pontösszefggő részgráf.

Bizonyítás. Készítsük el a fenti módon E_{opt} irányított változatát . Így egy olyan H' irányított gráfot kapunk, melyben r-ből minden V-beli pontba létezik k darab pontdiszjunkt út, és $w(H') = 2w(E_{opt})$. Mivel H minimális súlyú részgráf , melyben r-ből minden V-beli pontba létezik k darab pontdiszjunkt út, ezért $w(S) \leq w(H) \leq w(H') = 2w(E_{opt})$. □

2.13. Tétel *(Khuller és Raghavachari): Ha a súlyfüggvény kielégíti a háromszög-egyenlőtlenséget, akkor létezik egy $2 + 2(k-1)/n$ approximációs algoritmus.*

Az algoritmus a következő: A háromszög-egyenlőtlenség miatt feltehető, hogy a G gráf teljes, és az élek súlya egyenlő a végpontjaikat összekötő legrövidebb út hosszával. Az algoritmus először megkeresi a minimális súlyú k pontú csillagot. Jelölje ezt a gráfot $S(i)$, ahol i a csillag középpontja, és legyen R a csillag ponthalmaza. Ezután meghívja az IRÁNYÍTATLAN FT(G, k, R)-t, így kapunk egy S részgráfot. Az algoritmus végül az $S \cup K_R$ gráfot adja ki, ahol K_R az R-beli pontok által meghatározott teljes gráf.

2.14. Lemma *$S \cup K_R$ k-pontösszefüggő.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy létezik $|C| \leq k-1$ pont, melyeket elhagyva $S \cup K_R$ szétesik $C_1, ..C_l$, $l \geq 2$ komponensekre. Mivel az R-beli pontok szomszédosak, ezért valamely i-re $R \subset C \cup C_i$. Mivel $|C| \leq k-1$ ezért $i \neq j$ esetén egy C_j-beli pontból nem létezhet k darab pontdiszjunkt út R-be, ami ellentmond S definíciójának. □

2.15. Lemma $w(K_R) \leq \dfrac{2(k-1)}{n} w(E_{opt})$

Bizonyítás. Jelölje $N(j)$ a G_{opt}-beli minimális súlyú j középpontú k-csillagot (ilyen létezik, mert G_{opt}-ban minden pont foka legalább k). Mivel $S(i)$ egy minimális súlyú csillag G-ben, ezért $\forall j$-re $w(S(i)) \leq w(N(j))$. Másrészt

$$\sum_{j=1}^{n} w(N(j)) \leq 2w(E_{opt})$$

hiszen minden élt legfeljebb 2-szer számolunk. Így

$$w(S(i)) \leq \frac{2}{n} w(E_{opt}).$$

A háromszög-egyenlőtlenség miatt könnyen látható, hogy

$$w(K_R) \leq (k-1)w(S(i)).$$

A két egyenlőtlenségből következik,hogy

$$w(K_R) \leq \frac{2(k-1)}{n} w(E_{opt}).$$

□

2.16. Tétel $w(S \cup K_R) \leq (2 + 2(k-1)/n)w(E_{opt})$

Bizonyítás. Az 2.12 Lemma alapján $w(S) \leq 2w(E_{opt})$, az előző lemma szerint pedig $w(K_R) \leq \dfrac{2(k-1)}{n} w(E_{opt})$. □

A fenti algoritmus $k = 2$ esetén akkor is működik, ha a súlyfüggvényre nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. Az algoritmus először vesz egy minimális súlyú $e = (u, v)$ élt. $R = \{x, y\}$-ra alkalmazva az IRÁNYÍTATLAN FT$(G, 2, R)$ algoritmust kapunk egy S élhalmazt. Az előző algoritmusnál használt bizonyítások miatt $S \cup e$ 2-szer pontösszefüggő lesz, és súlya legfeljebb $(2 + 1/n)$-szerese az optimumnak.

Penn és Shasha-Krupnik[8]-ban megmutatta, hogy ha az IRÁNYÍTATLAN FT$(G, 2, R)$ algoritmust nem csak a minimális súlyú élre, hanem az összes élre külön-külön lefuttatjuk, és az $S_e \cup e$ gráfok közül vesszük a minimális súlyút, akkor egy 2 approximációt kapunk.

Bizonyítás. Legyen $f = (u, v)$ a G_{opt} egy éle. Legyen D az $E_{opt} - f$ irányított változata. Ekkor $w(D) = 2w(E_{opt}) - 2w(f)$, továbbá D-ben r-ből minden pontba vezet két pontdiszjunkt út. Ezért

$$w(S_f) \leq 2w(E_{opt}) - 2w(f),$$

amiből

$$\min_e\{w(S_e)+w(e)\} \leq w(S_f)+w(f) \leq 2w(E_{opt})-w(f) \leq 2w(E_{opt}). \quad \square$$

3-pontösszefüggőség

Nutov és Penn [19] algoritmusa:

1. Válasszunk ki egy tetszőleges c_1 pontot. Legyen (c_1, c_2) és (c_1, c_3) a c_1-gyel szomszédos két legolcsóbb él. Legyen $C_3 := \{c_1, c_2, c_3\}$, és alkalmazzuk az IRÁNYÍTATLAN FT(G,3,C_3)algoritmust. Jelölje $R(G, C_3)$ a kapott irányítatlan gráfot. Ez egy olyan gráf, melyben minden pontból létezik R-be 3 pontdiszjunkt út, és a súlya legfeljebb 2-szerese a minimális 3-pontösszefüggő részgráf súlyának.

2. Az $R(G, C_3) \cup (c_1, c_2) \cup (c_1, c_3)$ élek súlyát csökkentsük 0-ra, és találjunk $G - c_1$-ben c_2 és c_3 között 2 pontdiszjunkt utat minimális összsúllyal. Legyen F a két út élhalmaza.

3. Legyen $E' = (R(G, C_3) \cup F \cup (c_1, c_2) \cup (c_1, c_3))$.

2.17. Tétel *(V, E') 3-pontösszfüggő, és $w(E') \leq 3w(E_{opt})$, ahol E_{opt} egy minimális súlyú 3-pontösszefüggő részgráf. Az algoritmus $O(n^2m)$ lépést tesz.*

Bizonyítás. Tegyül fel, hogy E' nem 3-pontösszefüggő, azaz létezik egy $|C| < 3$ szeparáló ponthalmaz. Mivel $(c_1, c_2) \in E'$ és $(c_1, c_3) \in E'$ továbbá c_2 és c_3 között létezik 3 pontdiszjunkt út, ezért C_3 benne van C valamely komponensének és C-nek az uniójában. Ekkor azonban E'-ben C egy másik komponenséből nem mehetne C_3-ba három pontdiszjunkt út, ami bizonyítja az ellentmondást, azaz a kapott gráf 3-pontösszefüggő.

Felhasználva, hogy E_{opt}-ban c_1 foka legalább 3, továbbá c_1 legközelebbi szomszédai c_2 és c_3 kapjuk, hogy $w(F \cup (c_1, c_2) \cup (c_1, c_3)) \leq w(E_{opt})$. Tudjuk, hogy $w(R(G, C_3)) \leq 2w(E_{opt})$, így $w(E') \leq 3w(E_{opt})$.

Az algoritmus első fázisát $O(n^2m)$ lépésben meg lehet csinálni, F-t pedig $O(m + nlogn)$ lépésben meg lehet találni. $\square$

2.2. Élösszefüggőségi problémák

Ebben a fejezetben a következő problémát tárgyaljuk: adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan k-élösszefüggő gráf nemnegatív élsúlyokkal. Találjunk G-ben minimális súlyú k-élösszefüggő részgráfot. A fejezet során $G_{opt} = (V, E_{opt})$ egy optimális megoldást fog jelölni.

2.2.1. Súlyozatlan élösszefüggőség

Adott egy n pontú, m élű irányítatlan k-élösszefüggő G gráf, keressünk minimális elemszámú k-élösszefüggő részgráfját.

Tetszőleges k-ra Nishizeki és Poljak [23]-ban adott egy 2 approximációt. Az algoritmus vesz a G gráfban egy maximális F_1 erdőt, elhagyja az éleit és a maradék gráfban vesz egy F_2 maximális erdőt, stb. Az $E_k = = F_1 \cup F_2 \dots F_k$ gráf G egy k-élösszefüggő részgráfja lesz, melynek élszáma legfeljebb kn. Mivel $|E_{opt}| \geq kn/2$, ezért ez egy 2 approximációt ad. Khuller és Raghavachari [7]-ben adott egy 1.85 faktorú approximációt. Az algoritmus fázisokból áll, és minden fázisban az összefüggőséget 2-vel növeli. [5]-ben Cheriyan és Thurimella adott egy $1 + [2/(k+1)]$ faktorú approximációt. Az algoritmus lényegében megegyezik a pontösszefüggő esetben használt algoritmussal: először egy minimális M élhalmazt talál meg, melyre minden v pontra $d_M(v) \geq k$. Ezután egy tartalmazásra nézve minimális F élhalmazt keres, melyre $M \cup F$ k-élösszefüggő. Az algoritmus futásideje $O(k^3|V|^2 + + |E|^{1.5}(\log|V|)^2)$.

$k = 2$-re Khuller és Vishkin [3]-ban adott 1.5-szeres approximációt. Az algoritmusuk vesz egy mélységi fát, majd ezt visszaélek hozzáadásával 2 élösszefüggővé teszi. A jelenleg ismert legjobb approximációt Sebő, Szigeti és Cheriyan adta [10]-ben: az algoritmus fülfelbontást használ és 17/12-es approximációt ad.

2-élösszefüggőség

Khuller és Vishkin[2] algoritmusa:

Az algoritmus során a gráf egy *blokkján* pontoknak egy részhalmazát értjük, tehát **nem** a gráfelméleti jelentése szerint használjuk (azaz egy blokk nem a 2-pontösszefüggő komponenseket jelenti). Mélységi kereséssel vegyünk egy T fát. A fa minden éle benne lesz a megoldásban. A mélységi keresés során mikor egy u pontot átvizsgáltunk, és visszalépünk a v ősére, megnézzük, hogy az aktuális gráfban az (u, v) él vágás-e. Ha igen, akkor a megoldáshoz hozzáveszünk egy (x, y) visszaélt, melyre x az u leszármazottja, és ezen belül dfs(y) minimális. Ezen kívül u azon leszármazottaiból, melyek még nincsenek benne blokkban, csinálunk egy blokkot. A mélységi keresés végén azon pontokból, melyeket még nem tettünk bele egyetlen blokkba sem, szintén csinálunk egy blokkot. Az algoritmus végén lesz egy 2-élösszefüggő részgráfunk, és a pontoknak egy partíciója.

2.18. Definíció *Egy G gráf ponthalmazának egy $V_1, \dots V_k$ partícióját fafelbontásnak nevezzük, ha a V_i-ken mint ponthalmazon létezik egy F fa úgy,* *hogy minden $v \in V_i$ pontnak a G-beli szomszédai vagy V_i-ben, vagy valamely V_i-vel F-ben szomszédos V_j halmazban vannak. k a fafelbontás nagysága.*

2.19. Tétel *Ha a $G = (V, E)$ gráfnak van egy k nagyságú fafelbontása, akkor minden 2-élösszefüggő részgráfjának legalább $2(k-1)$ éle van.*

Bizonyítás. Nézzük a fafelbontás definíciójában szereplő F fát. Minden F-beli $e = (V_i, V_j)$ él V-t S_e és $V - S_e$ részekre bontja. A fafelbontás miatt ebben a vágásban minden él V_i és V_j között megy. Mivel a V_i-k diszjunktak, ezért az $S_e : e \in F$ vágások diszjunktak és számuk $k-1$, ezért minden 2-élösszefüggő részgráfnak legalább $2(k-1)$ éle van. □

2.20. Tétel *Az algoritmus során kapott blokkok G-nek egy fafelbontását adják.*

Bizonyítás. A T fában a blokkokat összehúzva kapjuk az F fát. Legyen (u, v) egy $G - T$-beli él. Mivel az algoritmus mindig a legmélyebbre visszamenő élt veszi, ezért u és v vagy egy blokkban, vagy F-ben szomszédos blokkokban vannak. □

2.21. Tétel *Az algoritmus kiad egy $H = (V, E')$ 2-élösszefüggő részgráfot, melyre $|E'|/|E_{opt}| \leq 3/2$. A futásidő $O(E)$.*

Bizonyítás. Legyen a T fához hozzáadott élek száma k. Ekkor a 2.20 Tétel szerint G-nek létezik egy $k+1$ nagyságú fafelbontása. Mivel $|T| = n-1$, a 2.19 Tételt felhasználva

$$|E'|/|E_{opt}| \leq \frac{n-1+k}{\max(n, 2k)} \leq 3/2. \qquad \square$$

Sebő, Szigeti és Cheriyan[10] algoritmusa: Feltehető, hogy a G gráf 2-pontösszefüggő. Ellenkező esetben a 2-pontösszefüggő komponensekben külön-külön alkalmazva az algoritmust, mindegyik komponensnek kapnánk egy 2-élösszefüggő részgráfját. A részgráfok uniója G-nek egy 2-élösszefüggő részgráfját adja, és az approximációs faktor legfeljebb akkora, mint a maximális approximációs faktor a blokkokban.
Így az algoritmus során feltesszük, hogy G 2-pontösszefüggő. Az algoritmushoz szükségünk lesz néhány definícióra és tételre.

Egy $G = (V, E)$ gráf *fülfelbontásán* utaknak olyan $P_0, P_1, \ldots P_k$ rendszerét értjük, melyekre $\cup_0^k V(P_i) = V$, P_0 egypontú triviális út, és $\forall P_i$ $1 \leq i \leq k$

esetén a P_i út végpontjai $V_{i-1} := V(P_0) \cup V(P_1) \ldots \cup V(P_{i-1})$-ben vannak, de P_i-nek nincs belső pontja V_{i-1}-ben.
Ha egy P_i út kezdő és végpontja megegyezik (azaz a P_i kör), akkor P_i-t *zárt fülnek*, ha a két végpontja különbözik, akkor *nyílt fülnek* nevezzük. Egy $P_0 + + P_1 + \ldots P_k$ fülfelbontás *nyílt (zárt)*, ha a $P_2, \ldots P_k$ fülek nyíltak (zártak). Egy fül *hosszán* a benne lévő élek számát értjük. Egy fülfelbontás *páros (páratlan)*, ha a triviális úton kívül minden út páros (páratlan) hosszú.

2.22. Tétel (Whitney): *(i) Egy gráf pontosan akkor 2-élösszefüggő, ha létezik fülfelbontása.*
(ii) Egy gráf pontosan akkor 2-pontösszefüggő, ha létezik nyílt fülfelbontása.

2.23. Definíció *Legyen G egy 2-élösszefüggő gráf. Jelölje $\varphi(G)$ G összes fülfelbontásában szereplő páros hosszú fülek minimális számát .*

Frank [11]-ben megmutatta, hogy egy 2-élösszefüggő gráf $\varphi(G)$ páros hosszú fület tartalmazó fülfelbontása $O(|V||E|)$ lépésben megtalálható, és ha a gráf 2-pontösszefüggő is, akkor a fülek nyíltaknak is választhatók.

2.24. Lemma *Legyen $G = (V, E)$ egy 2-élösszefüggő gráf. Ekkor $|E_{opt}| \geq \geq |V| + \varphi(G) - 1$.*

Bizonyítás. Képzeljük el G egy G' 2-élösszefüggő részgráfját. Ha G'-nek létezik olyan fülfelbontása, melynek $\varphi(G)$-nél kevesebb páros füle van, akkor ehhoz a fülfelbontáshoz hozzávéve G éleit mint 1 hosszú füleket, G-nek olyan fülfelbontását kapnánk, melynek $\varphi(G)$-nél kevesebb páros hosszú füle lenne. Tehát $\varphi(G') \geq \varphi(G)$. Legyen $P_0 + P_1 \ldots + P_k$ a G' egy fülfelbontása. Az előzőek miatt $k \geq \varphi(G)$. Ekkor $|E'| = k + |V| - 1 \geq \varphi(G) + |V| - 1$. □

Megjegyzés: Az előző lemma alapján azonnal kaphatunk egy 1.5-szeres approximációt. Vegyük G-nek egy $\varphi(G)$ páros hosszú fület tartalmazó fülfelbontását, és hagyjuk el az egy hosszú füleket. Legyen q a páratlan hosszú fülek belső pontjainak a száma. Ekkor a maradék gráfban a páratlan hosszú fülek által meghatározott élek száma legfeljebb $3q/2$, míg a páros hosszú fülek által meghatározott élek száma legfeljebb $\varphi(G) + |V| - q - 1$. Az előző lemmát felhasználva kapjuk, hogy a kapott gráf élszáma legfeljebb 1.5-szerese az optimumnak.

Ahhoz, hogy jobb approximációs faktort kapjunk, szükségünk lesz egy másik alsó becslésre is:

2.25. Lemma *Legyen $G = (V, E)$ egy 2-élösszefüggő gráf, és $S \subset V$ $S \neq \emptyset$ ponthalmaz úgy, hogy $G - S$ $c \geq 2$ komponensre esik szét. Ekkor $|E_{opt}| \geq \geq |V| + c - |S|$.*

Bizonyítás. Nézzük $G-S$ egy C komponensét. Mivel minden 2-élösszefüggő gráfban minden C-beli pont foka legalább 2, és C-ből megy ki él , ezért C legalább $V(C)+1$ számú éllel járul hozzá az optimális megoldáshoz. A komponensekre összegezve megkapjuk az állítást. □

Az algoritmus először megkeresi G-nek egy $\varphi(G)$ páros hosszú fület tartalmazó $P_0+P_1 \dots P_k$ nyílt fülfelbontását. Ezt a fülfelbontást módosítva kap egy $Q_0+Q_1 \dots Q_k$ fülfelbontást az alábbi α tulajdonsággal:
(i) a fülfelbontásnak $\varphi(G)$ páros hosszú füle van
(ii) egy 3 hosszú Q_i fül belső pontja nem végpontja egyetlen legalább 2 hosszú fülnek sem
(iii) nem létezik él, ami egy 3 hosszú Q_i fül egy belső pontját köti össze egy másik 3 hosszú Q_j fül egy belső pontjával.

2.26. Állítás *Ha adott egy $G=(V,E)$ 2 élösszefüggő gráfnak egy P_0+P_1+ $+\dots+P_k$ nyílt fülfelbontása, melynek $\varphi(G)$ páros hosszú füle van, akkor G-nek lineáris időben meg tudjuk keresni egy α tulajdonságú $Q_0+Q_1\dots+$ $+Q_k$ fülfelbontását.*

Bizonyítás. Fülszámra vonatkozó indukcióval.
$k=1$-re az állítás triviális. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $P_0+P_1+\dots P_{j-1}$ esetén. Legyen $P_j=v_1,v_2,\dots v_l,v_{l+1}$ egy l hosszú nyílt fül (azaz v_1 és v_{l+1} a P_j végpontjai, és $v_1 \neq v_{l+1}$. Jelölje T a $Q_0+Q_1\dots+Q_{j-1}$ 3 hosszú füleinek a belső pontjainak a halmazát. Ha $T\cap v_1=\emptyset$ és $T\cap v_{l+1}=\emptyset$ illetve $l=1$ akkor készen vagyunk. Tehát feltehető hogy $l\geq 2$.
1. eset: P_j-nek pontosan egy végpontja van T-ben. Legyen $Q_i=w_1,v_1,w_3,w_4$ egy v_1-t tartalmazó 3 hosszú fül. Ekkor legyen $Q_j=w_4,w_3,v_1,\dots v_l,v_{l+1}$, Q_i-t pedig cseréljül ki w_1,v_1 1 hosszú élre. Mivel a módosítás során a páros hosszú fülek számának a paritása nem változott, ezért egy α tulajdonságú felbontást kaptunk.
2. eset: P_j mindkét végpontja T-ben van. Ha egy $Q_i=w_1,v_1,v_{l+1},w_4$ 3 hosszú fül tartalmazza mindkét végpontot, akkor legyen
$Q_j=w_1,v_1,v_2,v_{l+1},w_4$, Q_i helyett pedig vegyük a v_1,v_{l+1} egy hosszú fület. Az előző esethez hasonlóan látható, hogy egy α tulajdonságú felbontást kaptunk. Ha v_1 egy $Q_i=w_1,v_1,w_3,w_4$-ben, v_{l+1} egy $Q_h=z_1,v_{l+1},z_3,z_4$ fülben van benne, akkor legyen $Q_j=w_4,w_3,v_1\dots v_{l+1},z_3,z_4$, Q_i-t cseréljük ki a w_1v_1 élre, Q_h-t pedig a z_1v_{l+1} élre. Így megint egy α tulajdonságú felbontást kaptunk. □

Az algoritmus miután G-nek megtalálja egy α tulajdonságú fülfelbontását, elhagyja az 1 hosszú füleket. Legyen az így kapott gráf $G'=(V,E')$. A 2.22 Tétel alapján G' 2-élösszefüggő.

Jelölje T a 3 hosszú fülek belső pontjait. Az α tulajdonság miatt $G[T]$-ben minden összefüggő komponens 2 pontú.

2.27. Lemma $|E_{opt}| \geq 3|T|/2$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 2.25 Lemmát $S = V - T$ és $c = c(G - S) =$ $= |T|/2$-re. □

2.28. Tétel *Az előzőekben leírt algoritmus egy $G = (V, E)$ 2-élösszefüggő gráfnak megtalálja egy $G' = (V, E')$ 2-élösszefüggő részgráfját úgy, hogy $\frac{|E'|}{|E_{opt}|} \leq 17/12$. Az algoritmus futásideje $O(nm)$.*

Bizonyítás. A 2.24 Lemma és az 2.27 Lemma miatt
$|E_{opt}| \geq \max(n + \varphi(G) - 1, 3|T|/2)$.
A 3 hosszú fülekben lévő élek száma $3|T|/2$. A 2 hosszú és a legalább 4 hosszú fülekben lévő élek száma $\leq \varphi(G) + 5(n - t - 1)/4$. Ezekből adódik, hogy

$$\frac{|E'|}{|E_{opt}|} \leq \frac{|T|}{4} \cdot \frac{2}{3|T|} + \frac{5(n + \varphi(G) - 1)}{4} \cdot \frac{1}{n + \varphi(G) - 1} = 17/12. \qquad \square$$

k-élösszefüggőség

Khuller és Raghavachari [7] algoritmusa:

Először páros k-ra ismertetjük az algoritmust. Az algoritmus fázisokból áll. Egy fázison belül az összefüggőséget 2-vel növeljük. $k/2$ fázis után kapunk egy S k-élösszefüggő részgráfot.
Az i. fázis elején S $(2i-2)$-szer élösszefüggő, a fázis végén $2i$-szer élösszefüggő lesz. Először mélységi kereséssel hozzáadjuk S-hez $G - S$ egy maximális F_i erdőjét. Ez az összefüggőséget $2i - 1$-re fogja növelni.

2.29. Definíció *Legyen $e = (u, v)$ az F_i erdő egy éle, dfs(u)<dfs(v). Az e élt fedő legmélyebb visszaélnek olyan $G - S - F_i$-beli élt nevezünk, melynek egyik végpontja v-nek utóda, a másik végpontja pedig u-nak őse, és dfs(u) minimális.*

Ezután F_i éleit fordított sorrendben nézzük végig, mint ahogy a mélységi keresés megtalálta őket. Minden alkalommal amikor találunk egy $(u, v) \in F_i$ élt úgy, hogy S-ben u-ból v-be nincsen $2i$ darab élidegen út, akkor S-hez hozzáveszünk $G - S$-ből egy e-t fedő legmélyebb visszaélt.

Miután F_i minden élét megvizsgáltuk, S $2i$-szer élösszefüggő lesz. Megmutatjuk, hogy az algoritmus által kiadott gráf élszáma legfeljebb $(3+ln2)/2 \approx$ 1.85-szöröse az optimumnak.
Először megmutatjuk hogy a kapott gráf k-szor élösszefüggő.

2.30. Lemma *Legyen $G=(V,E)$ egy legalább k-szor élösszefüggő gráf. Legyen S egy $k-1$-szer élösszefüggő részgráfja G-nek, F pedig $G-S$-ben egy maximális erdő. Ekkor $S \cup F$ k-szor élösszefüggő.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy $S \cup F$ nem k-élösszefüggő. Mivel S $(k-1)$-szer élösszefüggő, ez azt jelenti,hogy $S \cup F$-ből el lehet hagyni $k-1$ élt, hogy a maradék gráf $C_1, \dots C_l$ $l \geq 2$ komponensre esik szét. Mivel F maximális erdő volt, ezért $E-(S \cup F)$-ben a komponensek közt nem mehet él, ami azonban ellentmond annak, hogy G k-élösszefüggő. □

2.31. Lemma *Legyen $G=(V,E)$ egy legalább k-élösszefüggő gráf. Legyen S egy $(k-2)$-szer élösszefüggő részgráfja G-nek, melyet egy F maximális erdő hozzáadásával $(k-1)$-szer élösszefüggővé tettünk. Vegyünk $E-(S \cup F)$-ből egy B élhalmazt úgy, hogy bármely két, F-ben szomszédos pont között $S \cup F \cup B$-ben létezzék k darab éldiszjunkt út. Ekkor $S \cup F \cup B$ k-élösszefüggő.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy létezik $S \cup F \cup B$-ben egy $k-1$ nagyságú C élhalmaz, amelyre $(S \cup F \cup B)-C$ $C_1, \dots C_l$ $l \geq 2$ komponensekre esik szét. Képzeljük el F egy T fáját. A feltétel szerint T bármely 2 szomszédos pontja között létezik $S \cup F \cup B$-ben k élidegen út ; ebből következik hogy bármely 2 T-beli pont között létezik $S \cup F \cup B$-ben k élidegen út. Így F minden T fája valamelyik C_i komponensbe esik, ezért a $C_1, \dots, C_l$ komponensek között $G-(S \cup F \cup B)$-ben nem vezethet él, hiszen F maximális erdő volt. Ekkor azonban C egy $k-1$ élű vágás lenne G-ben, ami ellentmond annak, hogy G k-szor élösszefüggő. □

2.32. Tétel *A fentiekben ismertetett algoritmus egy k-szor élösszefüggő részgráfját adja G-nek.*

Bizonyítás. i-re vonatkozó indukcióval belátjuk, hogy az i. fázis befejezése után S $2i$-szer élösszefüggő.
$i=0$-ra triviális. Az indukciós feltevés szerint az i. fázis megkezdésekor S $(2i-2)$-szer élösszefüggő. Az algoritmus ezután hozzáad S-hez egy maximális DFS erdőt. A 2.30 Lemma alapján így S $(2i-1)$-szer élösszefüggő lesz. Ezután az algoritmus visszaélek hozzádásával eléri, hogy a DFS erdő bármely két szomszédos pontja között vezessen S-ben $2i$ élidegen út. A 2.31 Lemma

miatt így S $2i$-szer élösszefüggővé válik. Tehát $k/2$ fázis után S k-élösszefüggő lesz. □

Most rátérünk annak a bizonyítására, hogy S élszáma legfeljebb 1.85-szöröse az optimumnak.
Nézzük az algoritmus i. fázisát. Ez hozzáad S-hez egy F_i DFS erdőt, majd visszaéleknek egy B_i halmazát. Minden $e_b \in B_i$ él azért kerül be S-be, hogy lefogja valamely $e_f \in F_i$ él által indukált $2i-1$-s vágást. Minden $e_b \in B_i$-re jelölje $c(e_b)$ ezt az egyértelműen meghatározott F_i-beli élt, és legyen $c(B_i) := \cup_{e_b \in B_i} c(e_b)$. Mivel B_i és $c(B_i)$ elemei közt létezik egy bijekció, ezért elemszámuk megegyezik. Legyen $f_i = |F_i|$ és $b_i = |B_i|$.

2.33. Lemma *Minden i fázisra $|OPT(G)| \geq (k-2i+2)b_i$.*

Bizonyítás. Tekintsük az algoritmus i. fázisát. Legyen $e = (x,y) \in F_i$, ahol x az y szülője. Megfigyelhetjük, hogy ha $e = c(e_b)$ valamely $e_b \in B_i$-re, akkor a fázis kezdetekor x és y között $2i-2$ élidegen út volt S-ben, a fázis befejeztekor pedig $2i$.
Legyen C egy $2i-1$ élből álló vágás $S \cup F_i$-ben, amely szeparálja x-t és y-t. Legyen C-nek az $S \cup F_i$-ből történő elhagyása után keletkező 2 komponens X és X', $x \in X$, $y \in X'$. Mivel a fázis kezdetekor S $(2i-2)$-szer élösszefüggő, így F_i-nek csak az (x,y) éle van benne C-ben. Jelöljük P_e-vel azon $G-(S \cup F_i)$-beli éleket, melyek egyik végpontja X-ben, másik végpontja X'-ben van.

2.34. Lemma *P_e pontosan azon $G-(S \cup F_i)$-beli élekből áll, melyek y valamely leszármazottját kötik össze x valamely ősével.*

Bizonyítás. Ha y valamely leszármazottja X-ben volna, akkor F_i-nek az (x,y) élen kívül még legalább egy eleme benne lenne C-ben, de az előbb láttuk, hogy ez lehetetlen. Hasonlóan adódik, hogy az y-t tartalmazó fa minden olyan pontja, amelyik nem leszármazottja y-nak, X-ben van. Továbbá F_i minden más T fája vagy X-ben, vagy X'-ban van. Mivel F_i-ben nincs keresztél, ezért a fentiek miatt egy X és X' közti él y egy leszármazottját köti össze x egy ősével. □

P_e definíciója miatt G-nek minden k-élösszefüggő részgráfja legalább $k-$ $-2i+2$ élt tartalmaz P_e-ből. Elegendő tehát belátni, hogy $e \in B_i$-re a P_e vágások diszjunktak.
Legyen $l \in B_i$, $l' \in B_i$ két visszaél, melyeket az algorimus az $e = (u,v)$ és $e' =$ $= (x,y)$ faélek megvizsgálása során adott hozzá a megoldáshoz. Feltehetjük, hogy az algoritmus az e élt vizsgálta át előbb.
1. eset: e' benne van az F_i-ben v-ből r-be menő úton. $P_e \cap P_{e'} \neq \emptyset$ azt

jelentené, hogy létezik e-t és e'-t fedő visszaél, de mivel l egy legmélyebbre menő e-t fedő visszaél volt, ezért ekkor l fedné e'-t is, aminek következtében l'-re már nem is lett volna szükségünk. Tehát ebben az esetben $P_e \cap P_{e'} = \emptyset$.
2. eset: e' nincs benne van az F_i-ben v-ből r-be menő úton. Mivel F_i-ben nincsenek keresztélek, ezért $P_e \cap P_{e'} = \emptyset$. $\square$

2.35. Tétel *Az algoritmus által adott gráf élszáma legfeljebb* 1.85*-szöröse az optimumnak. A lépésszám* $O(k^2|E|^2)$.

Bizonyítás. A tételt páros k-ra látjuk be. (páratlanra egy kis módosítással ugyanígy megy a bizonyítás). Az algoritmus az i. fázisban $f_i + b_i$ új élt vesz. Mivel F_i és B_i is erdők, ezért $f_i < n$ és $b_i < n$. Felhasználva a 2.33 Lemmát, illetve a triviális $|OPT| \geq kn/2$ egyenlőtlenséget, az adódik, hogy

$$\frac{\sum_{i=1}^{k/2}(f_i + b_i)}{|OPT(G)|} \leq \frac{3kn/4 + \sum_{i-1}^{k/4} b_i}{\max\{kn/2, \max_i\{(k-2i+2)b_i\}\}}$$

$$\leq \frac{3}{2} + \sum_{i=1}^{k/4} \frac{1}{k-2i+2} \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k/4} \frac{1}{k/2-i+1} \leq \frac{3}{2} + \frac{ln2}{2} < 1.85.$$

Egy iterációban először egy max. erdőt veszünk. Ez $O(|E|)$ lépést jelent. Annak eldöntése, hogy egy él 2 végpontja között létezik-e $2i$ diszjunkt út, $O(k|E|)$ lépésben megtehető. Egy fázison belül tehát a lépésszám $O(k|E|^2)$. Mivel $k/2$ fázis van, így az összlépésszám $O(k^2|E|^2)$. $\square$

2.2.2. Súlyozott élösszefüggőség

Az általános esetben adott egy $G = (V, E)$ k-élösszefüggő irányítatlan gráf, élein nemnegatív súlyokkal. A feladat az, hogy találjunk G-nek egy minimális súlyú k-élösszefüggő H részgráfját.

$k = 2$-re Frederickson és Jájá 1981-ben adott egy 3-szoros approximációt. Az algoritmus az első fázisban keres egy minimális súlyú feszítő fát. A második fázisban a fát kiegészíti élekkel, hogy 2 élösszefüggő gráfot kapjunk.

Tetszőleges k-ra Khuller és Vishkin [3]-ban adott egy 2-szeres approximációt. Az algoritmus: minden $e = (u, v)$ irányítatlan élt helyettesítsünk (u, v) és (v, u) irányított élekkel, és a súlyuk legyen $w(e)$. Jelölje D az így kapott irányított gráfot. Jelöljük ki D valamely r pontját, és keressünk D-ben egy minimális súlyú részgráfot, melyben minden ponthoz vezet r-ből k éldiszjunkt út. Edmonds [20]-ban megmutatta, hogy ez a feladat polinomiális időben megoldható. Ha az (u, v) és (v, u) irányított élek közül legalább az egyiket kiválasztottuk, akkor az (u, v) irányítatlan élt hozzáadjuk E_H-hoz.

2.36. Lemma *A $H = (V, E_H)$ gráf k-élösszefüggő részgráfja G-nek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik $k-1$ él, melyeket elhagyva a gráf 2-nél több komponensre esik szét. Ekkor azonban r-ből egy olyan pontba, amelyik nem az r pontot tartalmazó komponensbe esik, D-ben nem mehet k éldiszjunkt út. Tehát H valóban k-élösszefüggő. □

2.37. Tétel *E_H súlya legfeljebb 2-szerese az optimumnak.*

Bizonyítás. Legyen OPT egy minimális súlyú k-élösszefüggő részgráfja G-nek. OPT éleit 2 ellentétes irányítású éllel helyettesítve D-nek egy részgráfját kapjuk, melynek súlya $2w(OPT)$. Továbbá a kapott gráfnak megvan az a tulajdonsága, hogy minden pontba létezik r-ből k darab élidegen irányított út. Mivel az algoritmus a minimális ilyen tulajdonságú részgráfot találja meg, ezért $w(E_H) \leq 2w(OPT)$. □

3. IRÁNYÍTOTT GRÁFOK

Minimális súlyú k-élösszefüggő részgráf keresésére a következő egyszerű 2 approximáció ismert: vegyünk egy tetszőleges s pontot, és Edmonds [20] algoritmusával határozzunk meg egy F_1 illetve F_2 olyan minimális súlyú részgráfokat, hogy F_1-ben s-ből minden pontba létezik k éldiszjunkt út, és F_2-ben minden pontból létezik s-be k éldiszjunkt út. $F_1 \cup F_2$ k-szor élösszefüggő gráf lesz, melynek súlya legfeljebb 2-szerese az optimumnak.

Súlyozatlan esetben $k \geq 2$ esetén sokáig csak az előző 2-szeres approximáció volt ismert. Cheriyan és Thurimella adott először [5]-ben 2-nél jobb approximációt. Az algoritmusuk ugyanúgy működik mint az irányítatlan esetben használt algoritmus, és pontösszefüggőség esetén $1 + 1/k$ approximációt, élösszefüggőség esetén $1 + 4/\sqrt{k}$ approximációt ad.
Súlyozatlan esetben $k = 1$ esetre Khuller, Raghavachari [12]-ben és Young adott egy 1.64 faktoros approximációt, amit az algoritmus kis módosításával [13]-ban 1.61-re javítottak. Az algoritmust a fejezet első részében ismertetjük.

A fejezet során csak a súlyozatlan esettel foglalkozunk.

3.1. Erős összefüggőség

Ebben a részben Khuller, Raghavachari és Young 1.61 faktorú approximációs algoritmusát ismertetjük minimális élszámú erősen összefüggő részgráf keresésére.
Az algoritmus köröket húz össze egészen addig, míg egy olyan H gráfot kap, melyben nincs háromnál hosszabb irányított kör. Belátjuk, hogy egy ilyen

gráfnak polinomiális időben meg tudjuk keresni egy minimális élszámú erősen összefüggő részgráfját. Az algoritmus az összehúzott éleket és H egy minimális élszámú erősen összefüggő részgráfját adja ki.

3.1. Tétel *Legyen $G = (V, E)$ egy olyan erősen összefüggő irányított gráf, melyben minden irányított kör legfeljebb 3 hosszú. Ekkor G-nek egy minimális élszámú erősen összefüggő részgráfja $O(n^2 + m\sqrt{n})$ időben megtalálható, ahol n, m G pont- illetve élszáma.*

Bizonyítás.

Feltehetjük, hogy G irányítatlan értelemben 2-szer pontösszefüggő, azaz nincs elvágó pont.

3.2. Definíció *Az $e \in E$ él kritikus, ha $G - e$ nem erősen összefüggő.*
Az $e \in E$ él lényegtelen, ha $G - e$ erősen összefüggő.
Az $e = (u, v)$ él veszélyes, ha nem létezik kritikus élekből álló $v \to u$ út.

3.3. Lemma *Minden lényegtelen él pontosan egy körben van benne.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy egy (u, v) lényegtelen él legalább két körben van benne. Ekkor v és u között legalább két út létezik. Mivel nincs háromnál hosszabb kör a gráfban, ezért valamelyik út pontosan 2 hosszú. Legyen ez az út (v, x, u).
Mivel (u, v) lényegtelen, ezért u és v között létezik egy legalább 2 hosszú irányított P_{uv} út. A P_{uv} útnak át kell mennie az x ponton, különben P_{uv} és (v, x, u) egy legalább 4 hosszú kört alkotna.

Ha $(v, u) \in E$ akkor P_{uv} pontosan 2 hosszú, azaz $P_{uv} = (u, x, v)$. Ebben az esetben tehát az x, u, v pontok között mind a hat lehetséges él szerepel. Jelölje V_v a v pontból az u és x pontok felhasználása nélkül elérhető pontokat. Hasonlóan definiálhatjuk a V_u és V_x halmazokat. Mivel G erősen összefüggő és nincs benne háromnál hosszabb kör, ezért ezek a halmazok diszjunktak és legalább az egyik nem üres. Ekkor azonban az u, v, x pontok közül legalább az egyik elvágó pont lenne, ellentmondva a feltevésnek.

Tehát $(v, u) \notin E$ és létezik egy (v, y, u) út is. A P_{uv} útnak át kell mennie az y ponton is, mert különben P_{uv} és (v, y, u) egy legalább 4 hosszú kör lenne. A P_{uv} út tehát átmegy az x és az y ponton is, ezért x és y esetleges felcserélése után létezik egy Q $x \to y$ út, ami nem használja az (u, v) élt. Ekkor Q, (y, u), (u, v) (v, u) egy legalább 4 hosszú kört alkotna. □

3.4. Lemma *$G' = (V, E')$ $E' \subset E$ erősen összefüggő $\Leftrightarrow$ E' tartalmazza a kritikus éleket, és minden $(u, v) \in E$ veszélyes élre G'-ben v-ből u-ba létezik olyan út, amely kritikus élekből és egy darab lényegtelen élből áll.*

Bizonyítás. $\Rightarrow$ A 3.3 Lemma miatt egy körben legfeljebb egy lényegtelen él szerepelhet. Ezt felhasználva a feltétel szükségessége azonnal következik.
$\Leftarrow$ G' erősen összefüggőségéhez elegendő belátni, hogy minden $(u, v) \in E$ élre G'-ben létezik $v \to u$ út. A feltétel szerint azonban ilyen út létezik. $\square$

A 3.4 Lemma alapján a feladat a következő problémára redukálódik: keressünk minimális elemszámú, lényegtelen élekből álló M élhalmazt, hogy minden veszélyes (u, v) élre létezzen kritikus élekből és egy darab M-beli élből álló $v \to u$ út.

Készítsünk egy irányítatlan G' segédgráfot: G' pontjai legyenek G veszélyes élei. Minden e lényegtelen élre, (i) ha e benne van egy 2 hosszú körben melynek a másik éle veszélyes, akkor ezen élnek G'-ben megfelelő pontra tegyünk egy hurokélt; (ii) ha egy 3 hosszú körben van benne melynek az egyik éle veszélyes, akkor ezen veszélyes élnek G'-ben megfelelő pontra tegyünk egy hurokélt; (iii) ha egy 3 hosszú körben van benne melynek a másik két éle veszélyes, akkor G'-ben ezen két pont között vegyünk egy élet.
Mivel minden lényegtelen él pontosan egy körben van benne, ezért minden lényegtelen élnek legfeljebb egy G'-beli él felel meg.
A 3.4 Lemma alapján G'-ben egy élhalmaz pontosan akkor fedi G' pontjait ha az éleknek megfelelő lényegtelen élek a kritikus élekkel együtt erősen összefüggő részgráfot határoznak meg. Tehát a feladat egy minimális élfedésre egyszerűsödött, ami ekvivalens egy maximális párosítás megtalálásával.

3.5. Állítás *G' páros gráf.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy G veszélyes élei 2 színnel színezhetők, hogy a szomszédos élek különböző színűek. Ebből az állítás azonnal következik.

Ha a veszélyes éleknek nem lenne jó színezése, akkor veszélyes élekből lenne egy páratlan C kör. Legyen (a, b) a kör egy éle. Megmutatjuk, hogy létezik egy másik $a \to b$ út is, azaz az (a, b) él lényegtelen. Mivel lényegtelen él nem lehet veszélyes, így ellentmondást kapunk.
Elegendő megmutatni, hogy a C kör minden más (u, v) élére létezik egy $v \to u$ út amelyik nem használja az (a, b) élet. Ha a C kör egy (u, v) élére egy $v \to u$ út tartalmazza az (a, b) élet, akkor ez az út 2 hosszú, és vagy $v = a$ vagy $u = b$. Nézzük az első esetet (a másik hasonlóan megy). A (b, u) él nem lehet lényeges, mert ekkor az (a, b) él nem lenne veszélyes.
(b, u) tehát lényegtelen, ezért létezik egy másik P_{bu} út. Ennek az útnak át kell mennie a v ponton, mert különben P_{bu} és az (u, a) illetve (a, b) élek egy legalább 4 hosszú kört alkotnának. A P_{bu} útnak tehát létezik egy (a, b) élet nem használó $v \to u$ részútja, amint azt állítottuk. $\square$

G'-t $O(n^2)$ lépésben meg lehet konstruálni, páros gráfban egy maximális párosítást $O(m\sqrt{n})$ lépésben meg lehet találni. Ezzel beláttuk, hogy ha G-

ben nincs háromnál hosszabb kör, akkor G-nek egy minimális élszámú erősen összefüggő részgráfját $O(n^2 + m\sqrt{n})$ időben megtalálhatjuk.

Ezek után rátérünk az algoritmus ismertetésére, mely a minimális erősen összefüggő részgráf problémára 1.61 faktorú approximációt ad.

3.6. Tétel *Minden $c > \pi^2/6 - 1/36 \approx 1.61$ számra létezik egy c approximáció a minimális erősen összefüggő részgráf problémára.*

Bizonyítás. Az algoritmus a következő: legyen $k \geq 4$ egy rögzített pozitív egész. Amíg a gráfban létezik legalább k hosszú kör, addig húzzunk össze egyet. Ha a gráfban már nem létezik legalább k hosszú kör, akkor kezdjük el összehúzni a $k-1$ hosszú köröket stb. Ha az összehúzásokkal eljutunk egy olyan gráfhoz, melyben nincs háromnál hosszabb kör, akkor ennek a gráfnak határozzuk meg egy minimális élszámú erősen összefüggő H részgráfját. Az algoritmus az összehúzott éleket és a H gráfot adja vissza. Világos hogy az algoritmus által adott részgráf erősen összefüggő. Rögzített k-ra egy legalább k hosszú kört legfeljebb $O(m^k)$ lépésben meg tudunk keresni, így az algoritmus rögzített k-ra polinomiális, és legfeljebb $O(nm^{k+1})$ lépést tesz.

3.7. Lemma *Ha egy n pontú G irányított gráfban a leghosszabb kör l hosszú, akkor G minden erősen összefüggő részgráfjának legalább $(n-1)l/(l-1)$ éle van.*

Bizonyítás. Minden erősen összefüggő gráf egy pontttá húzható körök egymás utáni összehúzásával. Egy összehúzás során az összehúzott élek és a pontok csökkenésének aránya legalább $l/l-1$. Mivel a pontok száma összesen $n-1$-gyel csökken, ezért egy erősen összefüggő gráfnak legalább $(n-1)l/(l-1)$ éle van. □

Jelölje n a gráf pontszámát, n_i pedig a legalább i hosszú körök összehúzása után megmaradó gráf pontszámát $(i = 4, \dots k)$. Legyen H az az összehúzások után keletkező gráf, melyben már nincs háromnál hosszabb kör, és jelölje $OPT(H)$ ennek egy minimális erősen összefüggő részgráfját. Az algoritmus által vett élek száma legfeljebb

$$\frac{k}{k-1}(n - n_k) + \sum_{i=4}^{k-1} \frac{i}{i-1}(n_{i+1} - n_i) + |opt(H)|.$$

Felhasználva, hogy $|opt(H)| \leq 2(n_4 - 1)$ és a fenti kifejezést átalakítva kapjuk, hogy az algoritmus által adott élek száma legfeljebb

$$\frac{k}{k-1}(n-1) + \sum_{i=5}^{k} \frac{n_i - 1}{(i-1)(i-2)} + 1/3|opt(H)|.$$

A 3.7 Lemma miatt $\forall i$-re $|OPT(G)| \geq (n_i - 1)(i-1)/(i-2)$, továbbá $|opt(H)| \leq |opt(G)|$ miatt az approximációs faktor legfeljebb

$$\frac{k}{k-1} + \sum_{i=5}^{k} \frac{1}{(i-1)^2} + 1/3 \leq \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{36} + \frac{1}{k(k-1)}.$$

Az algoritmus lépésszáma annyiban függ c-től, hogy c mennyire van közel 1.61-hez (azaz a fenti képlet szerint k-t milyen nagyra kell választani). $\square$

3.2. Többszörös összefüggőség

Cheriyan és Thurimella [5] algoritmusa pontösszefüggőség esetén:

Az algoritmus a következő: az első fázisban egy minimális nagyságú $M \subset E$ élhalmazt keresünk, melyre $\forall v \in V$ pontra $\varrho_M(v) \geq (k-1)$ és $\delta_M(v) \geq (k-1)$. A második fázisban a 2.4 Tételben használt módon egy tartalmazásra nézve minimális $F \subset E - M$ élhalmazt vesz úgy, hogy $M \cup F$ k-pontösszefüggő legyen.

Az első fázisban M-t a következőképpen kaphatjuk meg: készítsünk G-ből egy irányítatlan, páros $B(G)$ gráfot. Minden $v \in V$ pont helyett vegyünk két, v_- és v_+ pontot, és egy $(u, v) \in E$ irányított élnek feleltessük meg $B(G)$-ben az (u_+, v_-) irányítatlan élt. Ekkor $\forall v \in V$ esetén $\varrho_M(v) \geq (k-1)$ és $\delta_M(v) \geq$ $\geq (k-1) \Leftrightarrow d_{B(M)}(z) \geq (k-1)$ minden $B(G)$ -beli z pontra.

Azaz M megtalálásához $B(G)$-ben egy b-párosítást kell megoldanunk.

3.8. Definíció *Egy irányított gráfban egy páros hosszú kört alternáló kör-nek hívunk, ha az egymást követő élek fordított irányításúak. Egy C alternáló kör egy v pontja C-ki (C-be) pont, ha C-ben van két egymást követő, v-ből kimenő (v-be bemenő) él.*

Bizonyítás nélkül használni fogjuk Mader [21]-beli tételét.

3.9. Tétel : *Egy k-pontösszefüggő irányított G gráfban egy kritikus élekből álló alternáló körben vagy létezik C-ki pont, melynek G-beli kifoka k, vagy létezik egy C-be pont, melynek G-beli befoka k.*

Az alábbi állítás könnyen látható:

3.10. Állítás *Legyen G egy irányított gráf, $B(G)$ pedig a belőle a fenti módon készített páros gráf. G-ben pontosan akkor létezik alternáló kör, ha $B(G)$-ben létezik kör.*

3.11. Lemma *Legyen $F \subset E - M$ az algoritmus által a második fázis során megtalált kritikus élek halmaza. Ekkor $|F| \leq 2|V| - 1$.*

Bizonyítás. Legyen $G' = (V, M \cup F)$. Állítjuk hogy G'-ben nincs alternáló kör. Egy C alternáló körnek ugyanis minden C-ki pontjának G'-ben legalább $k+1$ a kifoka, és minden C-be pontnak legalább $k+1$ a befoka, ami ellentmond a 3.9 Tételnek. A 3.10 Állítás miatt így $B(G)$ aciklikus, ezért $|F| \leq 2|V|-1$. $\square$

3.12. Tétel *Legyen $G = (V, E)$ egy k-pontösszefüggő irányított gráf. A fenti algoritmus megtalál egy (V, E') k-pontösszefüggő részgráfot, amelyre $|E'| \leq (1+1/k)|E_{opt}|$, ahol (V, E_{opt}) egy minimális élszámú k-pontösszefüggő részgráf. Az algoritmus futásideje $O(k^3|V|^2+)E|^{1.5}(\log|V|)^2)$.*

Bizonyítás. Legyen $M^* \subset E(B(G_{opt}))$ olyan minimális számú élhalmaz, hogy $d_{M^*}(v) \geq k-1$ minden $B(G)$-beli pontra. Mivel M olyan minimális elemszámú élhalmaz volt, hogy $B(G)$-ben minden pontra $d_M(v) \geq (k-1)$ teljesült, ezért $|M| \leq |M^*|$. A 2.3 Tételt M^*-ra és $B(G_{opt})$-ra alkalmazva $|M^*| \leq |E(B(G_{opt}))| - |V(B(G_{opt}))|/2 = |E_{opt}| - |V|$. Felhasználva, hogy $|F| \leq 2|V|-1$, és $|E_{opt}| \geq k|V|$ kapjuk, hogy

$$\frac{|E'|}{|E_{opt}|} \leq \frac{|E_{opt}| - |V| + 2|V| - 1}{|E_{opt}|} \leq 1 + 1/k. \qquad \square$$

Abban az esetben, ha a $G = (V, E)$ irányított gráf k-élösszefüggő, és egy minimális élszámú k-szor élösszefüggő részgráfját keressük, Cheriyan és Thurimella [5]-ben az előzővel azonos elvű algoritmust adott, mely $1 + 4/\sqrt{k}$ approximációt ad.

Az algoritmus a következő: az előző algoritmushoz hasonlóan, az első fázis során egy olyan minimális élszámú M halmazt keresünk, hogy minden v pontra $\varrho_M(v) \geq k$ és $\delta_M(v) \geq k$. Nyilvánvalóan $|M| \leq |E_{opt}|$. A második fázis során egy tartalmazásra nézve minimális F élhalmazt vesz, melyre $M \cup F$ k-szor élösszefüggő. Az algoritmus az $M \cup F$ gráfot adja ki.

3.13. Tétel *Legyen $G = (V, E)$ egy k-szor élösszfüggő irányított gráf. A fenti algoritmus G-nek megtalálja egy (V, E') k-szor élösszfüggő részgráfját, melyre $|E'| \leq (1 + (4/\sqrt{k}))|E_{opt}|$, ahol $|E_{opt}|$ egy minimális élszámú k-szor élösszfüggő részgráf élszáma. A futásidő $O(k^3|V|^2 + |E|^{1.5}(\log|V|)^2)$.*

Bizonyítás. Szükségünk lesz a következő definícióra:

3.14. Definíció *Egy k-pontösszefüggő irányított gráf egy (u, v) élét speciálisnak hívjuk, ha az (u, v) él kritikus és $\delta(u) \geq k+1$, $\varrho(v) \geq k+1$.*

Világos, hogy a $G' = (V, M \cup F)$ gráfban minden F-beli él speciális.

3.15. Tétel (Cheriyan, Thurimella [5]) *Egy n pontú k-élösszefüggő irányított H gráfban a speciális élek száma legfeljebb $4n\sqrt{k}$.*

Jelölje V a H gráf ponthalmazát. Minden speciális e élhez létezik egy $A_e \subset V$ halmaz, hogy $e \in \delta(A_e)$, $|\delta(A_e)| = k$, és $2 \leq |A_e| \leq n-2$ (ha több is létezik akkor vegyük az egyiket). Jelölje $\mathcal{F}_{ki}$ az ezen halmazokból álló halmazrendszert, azaz $\mathcal{F}_{ki} = \{A_1, A_2, \dots A_l\}$ olyan halmazrendszer, hogy minden i-re $\delta(A_i) = k$, $\delta(A_i)$ tartalmazza valamely speciális élet, és minden speciális él benne van valamelyik $\delta(A_i)$-ben. A szokásos kikeresztezés után kapunk egy ugyanilyen tulajdonságú lamináris halmazrendszert, jelöljük ezentúl ezt $\mathcal{F}_{ki}$-vel. Az ismert módon az $\mathcal{F}_{ki} \cup V$ halmazon definiálhatunk egy irányítatlan gyökeres T fát: A_i és A_j között vezessen egy él, ha A_j a legszűkebb A_i-t tartalmazó $\mathcal{F}_{ki} \cup V$-beli halmaz (vagy fordítva). Az egyszerűség kedvéért az A_i-hez tartozó T-beli pontot szintén A_i-vel jelöljük. Legyen $\phi_i =$ $= \{A_i \backslash \cup A \in \mathcal{F}_{ki} : A \subset A_i, A \neq A_i\}$. Jelölje továbbá R_2 azon $A \in \mathcal{F}_{ki}$ halmazokat, melyeknek T-ben pontosan két szomszédjuk van, és legyen $R_1 =$ $= \{A : A \in \mathcal{F}_{ki} \backslash R_2\}$.

3.16. Állítás $|R_1| \leq 2|V_1|/(k+1)$, *ahol* $V_1 = \cup\phi_i : A_i \in R_1$.

Bizonyítás. Legyen T_1 az fa, amelyiket T-ből kapjuk az alábbi módon: bontsuk fel T-t olyan $A_0, A_1, \dots A_q, A_{q+1}$ utakra, hogy $1 \leq i \leq q$ esetén A_i foka T-ben kettő (azaz $A_i \in R_2$), és $A_0 \in R_1$, $A_{q+1} \in R_1$. Minden ilyen útnál töröljük el T-ből az $A_1, \dots A_q$ pontokat és a belőlük induló éleket, továbbá húzzuk be az A_0, A_{q+1} élt.

Jelölje az így kapott fát T_1. T_1 pontjai az R_1-beli halmazok és V lesz, és T_1-ben minden nem levél R_1-beli halmaz foka legalább 3. Ha a T_1 -beli levelek számát l_1-gyel jelöljük, akkor az előző megjegyzés miatt $|R_1| \leq 2l_1$. Mivel minden tartalmazásra nézve minimális $A_i \in \mathcal{F}_{ki}$ halmaz kifoka pontosan k, és A_i tartalmaz olyan pontot, melynek kifoka $k+1$ (hiszen A_i-ből megy ki speciális él), ezért egyszerű számolással látható, hogy $|A_i| \geq k+1$. Ezt felhasználva $|R_1| \leq 2|V_1|/(k+1)$. □

A speciális éleket a következőképpen számoljuk meg:
Legyen A_i, A_j egy él T_1-ben ($A_i \subset A_j$). Ha ez az él már a T fában is benne volt, akkor az A_i, A_j él számolja az A_i-ből és A_j-ből kimenő speciális éleket. Ezen élek száma legfeljebb $2k$. Ha az A_i, A_j él egy $A_i, A_1, \dots A_q, A_j$ út módosítása miatt jött létre, akkor az A_i, A_j él számolja A_i-ből és A_q-ből kimenő speciális éleket. Az ilyen élek száma legfeljebb $2k$. Így a T_1 fa élei által megszámolt kritikus élek száma legfeljebb $2k|R_1|$.
A fennmaradó kritikus élek valamely "módosított úton belül" mennek. Pontosabban: legyen $P = A_0, A_1, \dots A_q, A_{q+1}$, $A_0 \subset A_1 \dots \subset A_{q+1}$ olyan T-beli

út, hogy $A_i \in R_2$ $1 \leq i \leq q$, és $A_0 \notin R_2$, $A_{q+1} \notin R_2$. Legyen $V_P = \phi_1 \cup \phi_2 \dots \phi_q$.
Egy ilyen útnál azon (v,w)speciális éleket nem számoltuk meg a T_1 fa éleivel, melyekre $v \in V_P$ és $(v,w) \in \{\bigcup \delta(A_i) : 1 \leq i \leq q-1\}$.

Állítjuk, hogy az ilyen élek száma legfeljebb $\sqrt{k}|V_P|$. Rendezzük a V_P pontjait sorba úgy, hogy a ϕ_i-beli pontok a sorrendben megelőzzék a ϕ_{i+1}-beli pontokat. Tetszőleges $v \in V_P$ ponta jelöle Γ_v azon w pontok halmazát, melyekre $w \in V_P$ és $(v,w) \in \{\bigcup \delta(A_i) : 1 \leq i \leq q-1\}$. Legyen a Γ_v-beli pontok sorrendje $w_1, \dots w_{\Gamma_v}$.
Egy (v, w_j) élt rövid élnek hívunk, ha $j \leq \sqrt{k}$, egyébként pedig hosszú élnek hívjuk. Világos, hogy a rövid élek száma legfeljebb $\sqrt{k}|V_P|$.
Egy (v, w_j) hosszú élt "számoljuk meg a $w_1, \dots w_{\sqrt{k}} \in \Gamma_v$ pontoknál, azaz ezeket a pontokat súlyozzuk meg $1/\sqrt{k}$-val. Így a V_P-beli pontok összsúlya egyenlő a hosszú élek számával. Legyen $w_a \in \phi_i$ $1 \leq i \leq q-1$ egy tetszőleges pont. Ezt a pontot csak a $\delta(A_{i-1})$ élek miatt súlyozhattuk meg, ezért az w_a pont súlya legfeljebb $k\sqrt{k} = \sqrt{k}$. A hosszú élek száma tehát legfeljebb $\sqrt{k}|V_P|$.

Azt kaptuk tehát, hogy egy tetszőleges fenti tulajdonságú P útnál a T_1 fa élei által nem számolt speciális élek száma legfeljebb $2\sqrt{k}|V_P|$.
A fent leírtak miatt a G-beli speciális élek száma legfeljebb

$$2k|R_1| + 2\sqrt{k}n_2 \leq \frac{4kn_1}{k+1} + 2\sqrt{k}n_2$$

ahol $n_1 = |\bigcup \phi_i : A_i \in R_1|$ és $n_2 = |\bigcup \phi_i : A_i \in R_2|$. A fenti kifejezés akkor maximális, ha n_2 a lehető legnagyobb. Mivel T-ben legalább két levél van, ezért $n_2 \leq n - (2k+2)$. Ezért a speciális élek száma legfeljebb

$$4k(2k+2)/(k+1) + 2\sqrt{k}(n - (2k+2)) \leq 4\sqrt{k}n. \qquad \square$$

Mivel az algoritmus által vett F-beli élek speciálisak, ezért $|F| \leq 4n\sqrt{k}$. Mivel $|M| \leq |E_{opt}|$, ezért azonnal adódik, hogy a fenti algoritmus egy $1+4\sqrt{k}$ approximáció. $\square$

4. ÁLTALÁNOSÍTOTT STEINER FELADAT

Ebben a fejezetben egy irányítatlan gráfnak keressük minimális súlyú részgráfját mely minden vágásból legalább előre megadott számú élet tartalmaz. Pontosabban fogalmazva:
Adott egy irányítatlan gráf $G = (V, E)$, egy $f : 2^V \to \mathbb{Z}$ halmazfüggvény, és egy $c : E \to \mathbb{Q}_+$ nemnegatív súlyfüggvény. Oldjuk meg az alábbi IP feladatot:

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e \tag{1}$$

$$\forall S \subset V : \; x(\delta(S)) \geq f(S)$$

$$\forall e \in E : x_e \in \{0, 1\}$$

A fenti feladat fontos speciális esete az un. általánosított Steiner feladat: minden i, j pontpárra adott egy $r_{i,j}$ igény és minimális súlyú részgráfot kell találni melyben minden i, j pontpár között létezik $r_{i,j}$ éldiszjunkt út. Ha $r \equiv k$ akkor az általánosított Steiner feladat speciális eseteként a minimális súlyú k-élösszfüggő részgráf problémát kapjuk.
$0, 1$ értékű jó függvényekre [14]-ben Goemans és Williamson adott egy 2 faktor primál-duál algoritmust. Goemans, Williamson, Mihail és Vazirani [22]-ben tetszőleges jó függvényre adott $2f_{max}$ faktorú primál-duál algoritmust. Nem sokkal később Goemans, Goldberg, Plotkin, Shmoys, Tardos és Williamson [15]-ben általánosították az algoritmust ferdén szupermoduláris függvényekre, és az algoritmus módosításával az approximációs faktort $2\kappa(f_{max})$ -ra javították. Ferdén szupermoduláris függvényekre Kamal Jain [16]-ban adott 2 approximációt. Az algoritmusa iteratíve megoldja az IP relaxációját, majd kerekíti a megoldást.

Az algoritmusok ismertetése során a következő definíciókat és egyszerű állításokat fogjuk használni.

4.1. Definíció *Egy $f : 2^V \to \mathbb{Z}$ függvény ferdén szupermoduláris, ha $\forall A, B \subset V$ halmazra*

$$f(A) + f(B) \leq \max\{f(A - B) + f(B - A), f(A \cap B), +f(A \cup B)\}.$$

4.2. Definíció *Egy $f : 2^V \to \mathbb{Z}$ függvényt jónak hívunk, ha*
-$f(S) = f(V - S)$ $\forall S \subset V$ halmazra
-ha A és B diszjunktak, akkor $f(A \cup B) \leq \max\{f(A), f(B)\}$.

4.3. Definíció *Egy $h : 2^V \to \{0,1\}$ függvény kikeresztezhető, ha $h(V) = 0$ és bármely két $A, B \subset V$ halmazra, melyekre $h(A) = h(B) = 1$, vagy $h(A \cap B) = h(A \cup B) = 1$ vagy $h(A - B) = h(B - A) = 1$.*

4.4. Lemma *Minden jó függvény ferdén szupermoduláris.*

Bizonyítás. A jó függvény definíciója miatt $\max(f(A - B), f(A \cap B)) \geq f(A)$; $\max(f(B-A), f(A \cup B)) \geq f(A)$; $\max(f(B-A), f(A \cap B)) \geq f(B)$; $\max(f(A-B), f(A \cup B)) \geq f(B)$. A négy egyenlőtlenségből azonnal adódik, hogy $f(A) + f(B) \leq \max(f(A - B) + f(B - A), f(A \cap B) + f(A \cup B))$. $\square$

A következő állítás a jó függvény definíciójából azonnal következik:

4.5. Állítás *Ha f jó függvény, akkor bármely két diszjunkt A, B halmazra, az $f(A)$, $f(B)$ és $f(A \cup B)$ értékek közül egyik sem nagyobb a másik kettőnél.*

4.6. Állítás *Legyen f kikeresztezhető függvény és $S \subset V$ egy tartalmazásra nézve minimális halmaz amelyre $f(S) = 1$. Ekkor minden S-t metsző S' halmazra $f(S') = 0$.* $\square$

4.7. Állítás *Legyen f ferdén szupermoduláris. Legyen $h(S) = 1$ ha $f(S) = f_{\max}$ és $h(S) = 0$ különben. Ekkor a h függvény kikeresztezhető.* $\square$

4.8. Állítás *Ha f ferdén szupermoduláris és $x : E \to \mathbb{R}_+$, akkor $f(S) - x(\delta(S))$ is ferdén szupermoduláris.* $\square$

4.1. Primál-duál algoritmus

Az algoritmust először $\{0,1\}$ értékű jó függvényekre ismertetjük.
Legyen tehát $f : 2^V \to \{0,1\}$ egy jó függvény amely egy gyenge orákulummal van megadva, amely egy S halmazra megmondja az $f(S)$ értéket. Nézzük az (1) feladat relaxációját és annak duálját.
A primál:

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$
$$\forall S \subset V : \; x(\delta(S)) \geq f(S) \tag{2}$$
$$\forall e \in E : x_e \geq 0.$$

A duál:

$$\max \sum_S h(S) y_S \tag{3}$$

$$\forall\ e \in E \sum_{S: e\in\delta(S)} y_S \leq c_e$$
$$\forall\ S \subset V\ y_S \geq 0.$$

Az algoritmus két fázisból áll. Az első fázisban éleket veszünk be a megoldásba, míg a második fázis során éleket hagyunk el.

1. fázis: az algoritmus kiindul az $F = \emptyset$ primál nem megengedett megoldásból, és az $y \equiv 0$ duál megengedett megoldásból. Amíg létezik tartalmazásra nézve minimális sértő halmaz (azaz olyan S, hogy $f(S) = 1$ és $\delta_F(S) = 0$), addig az algoritmus a következőt csinálja: az összes minimális sértő halmaz duál változóját ugyanazzal a számmal megnöveli egészen addig, míg valamely él pontossá nem válik, azaz valamely élre $\sum_{S:\ e\in\delta(S)} y_S = c_e$. Az ilyen élek közül egy tetszőlegeset hozzáveszünk az F halmazhoz. Az 1. fázis akkor fejeződik be, ha már nem létezik minimális sértő halmaz, azaz amikor F a primál egy megengedett megoldása. A következő lemma mutatja, hogy a minimális sértő halmazok egyszerűen megtalálhatóak:

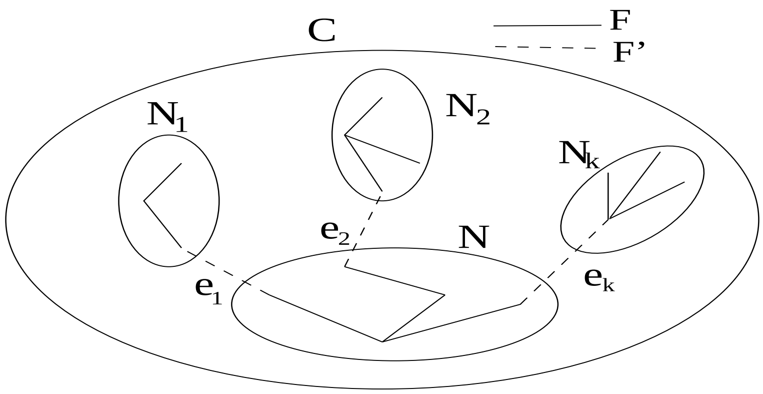
4.9. Lemma *Az F élhalmazra nézve minimális sértő halmazok pontosan az F összefüggő komponensei.*

Bizonyítás. Legyen S egy tartalmazásra nézve minimális sértő halmaz, amely nem összefüggő. Ekkor persze $f(S) = 1$ és $\delta_F(S) = 0$. Nézzük F összefüggő komponenseit. Mivel $\delta_F(S) = 0$, ezek közül néhány S egy partícióját adják. Legyenek ezek $S_1, \dots S_l$, $l \geq 2$. Ekkor minden i-re $\delta_F(S_i) = 0$. Mivel az S_i-k már nem sértőek, ezért minden i-re $f(S_i) = 0$. Ekkor azonban a 4.5 Lemma miatt $f(S) = 0$, ami ellentmondás. □

A 2. fázis során azokat az e éleket elhagyjuk a megoldásból, melyekre $F - e$ minden N komponensére $f(N) = 0$.

4.10. Állítás *A második fázis után kapott élek a primál egy megengedett megoldását adják.*

Bizonyítás. Jelölje F az 1. fázis után kapott éleket, F' pedig a 2. fázis után kapott éleket. A konstrukció miatt $F' \subset F$. A 4.9 Lemma miattt elegendő belátni, hogy F' minden N összefüggő komponensére $f(N) = 0$. (2.ábra)
Legyen tehát N az F' egy összefüggő komponense. $F' \subset F$ miatt N benne van F valamely C komponensében. Mivel F a primál megengedett megoldása, ezért $f(C) = 0$. Legyenek $e_1 \dots e_l$ az N-ből kilépő F-beli élek. $1 \leq i \leq l$ esetén jelölje N_i $C - e_i$-nek az N-t nem tartalmazó komponensét. Mivel az e_i éleket a második fázis során elhagytuk, ezért $\forall$ i-re $f(N_i) = 0$. Másrészt $C = N \cup N_1 \dots N_l$, így a 4.5 Lemma miatt $f(N) = 0$. □



2. ábra:

4.11. Tétel *A fenti algoritmus minden $f: 2^V \to \{0,1\}$ jó függvény esetén az (1) feladatra 2 faktoros approximációt ad.*

Bizonyítás. Jelölje l_f azon diszjunkt S halmazok maximális számát, amelyekre $f(S) = 1$. Az algoritmus meghatározza (2) egy F' megengedett megoldását, és (3) egy y megengedett megoldását úgy, hogy a primál complementary slackness feltétel teljesül. Azt fogjuk belátni, hogy

$$\sum_{e \in F'} c_e \leq (2 - \frac{2}{l_f}) \sum_S f(S) y_S.$$

Mivel y a duál egy megengedett megoldása, ezért ebből következik, hogy az algoritmus által vett élek súlya legfeljebb 2-szerese a duál optimumának, amiből a tétel következik.
A primál complementary slackness teljesülése miatt

$$\sum_{e \in F'} c_e = \sum_{e \in F'} \sum_{S: e \in \delta(S)} y_S = \sum_{S \in V} y_S |\delta_{F'}(S)|.$$

Ezért elegendő belátni, hogy

$$\sum_{S \in V} y_S |\delta_{F'}(S)| \leq (2 - \frac{2}{l_f}) \sum_{S \in V} f(S) y_S.$$

Az egyenlőtlenséget indukcióval látjuk be. Az algoritmus kezdetén az egyenlőtlenség triviálisan teljesül, hiszen $y \equiv 0$. Nézzünk egy tetszőleges iterációt, vagyis azt lépést mikor a duál változók értékét növeljük és egy élet hozzáveszünk F-hez. Jelölje $\mathcal{C}$ az iteráció kezdetén tartalmazásra nézve

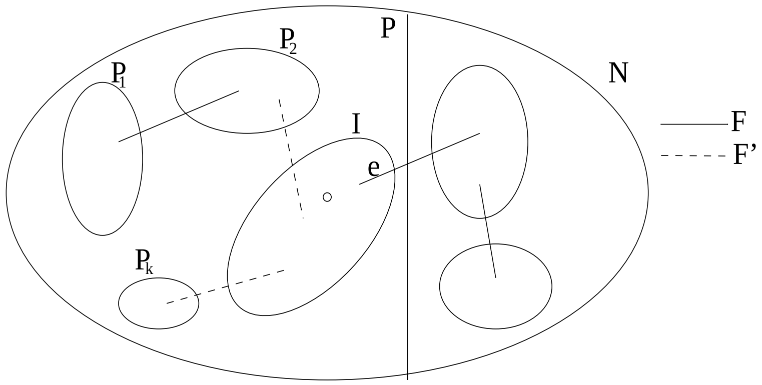
minimális sértő halmazok rendszerét. Az egyenlőtlenség bal oldalának a növekedése $\sum_{C\in\mathcal{C}} \epsilon|\delta_{F'}(C)|$, míg a jobb oldal növekedése $(2-\frac{2}{l_f})\epsilon|\mathcal{C}|$, ahol $\epsilon \geq 0$ (ennyivel növeltük a duál változókat).
Mivel $|\mathcal{C}| \leq l_f$, ezért elegendő belátni, hogy minden iterációban

$$\sum_{C\in\mathcal{C}} |\delta_{F'}(C)| \leq 2|\mathcal{C}| - 2. \tag{4}$$

A (4) egyenlőtlenség bizonyítása: Jelölje $\mathcal{C}$ az iteráció kezdetén az aktuális élhalmaz azon összefüggő C komponenseit, melyekre $f(C) = 1$. Korábban láttuk, hogy ezek pontosan a tartalmazásra nézve minimális sértő halmazok. Jelölje $\mathcal{I}$ az iteráció kezdetén az aktuális élhalmaz azon összefüggő I komponenseit, melyekre $\delta_{F'}(I) \neq 0$ és $f(I) = 0$.

Készítsünk el egy H gráfot: H pontjai legyenek a $\mathcal{C}$ és $\mathcal{I}$-beli halmazok, az élei pedig az $e \in \delta_{F'}(S):\ S \in \mathcal{C} \cup \mathcal{I}$ élek. Vegyük észre, hogy H erdő. Állítjuk, hogy H-ban $\mathcal{I}$-beli halmaz nem lehet levél.

Tegyük fel indirekt, hogy H-ban létezik egy $I \in \mathcal{I}$ levél. Legyen e a belőle kilépő egyetlen él, N pedig F-nek az I-t tartalmazó összefüggőségi komponense. Legyen P illetve $N-P$ az F-ből az e él elhagyásával keletkező két komponens. Szimmetria miatt feltehetjük, hogy $I \subset P$. P felbomlik az aktuális iteráció öszefüggő komponenseire: $P = P_1 \cup \ldots \cup P_k$. Mivel I



3. ábra:

levél, ezért F'-beli él nem mehet az I és P_i halmazok között. Az algoritmus szabálya miatt $f(\cup P_i) = 0$. Mivel $f(I) = 0$, ezért a 4.5 Lemma miatt $f(P) =$ $= 0$. Tudjuk, hogy $f(N) = 0$, ezért a 4.5 Lemma miatt $f(N-P) = 0$, de ekkor az e élet elhagyhattuk volna a megoldásból.(3. ábra)

Azt kaptuk tehát, hogy a H fában minden levél $\mathcal{C}$-beli. A $d_N = |\delta_{F'}(N)|$ jelölést bevezetve:

$$\sum_{N\in\mathcal{C}} d_N = \sum_{N\in\mathcal{C}\cup\mathcal{I}} d_N - \sum_{N\in\mathcal{I}} d_N \leq 2(|\mathcal{C}| + |\mathcal{I}| - 1) - 2|\mathcal{I}| = 2|\mathcal{C}| - 2.$$

Ezzel beláttuk a 4.11 Tételt. $\square$

Ha az f függvény kikeresztezhető vagy ferdén szupermoduláris, akkor a fenti algoritmus nem alkalmazható, ha f csak a gyenge orákulummal van megadva. Például az $f(S) = 1$ és $f(S') = 0$ $S' \neq S$ függvény kikeresztezhető és ferdén szupermoduláris is, és annak eldöntésére, hogy egy adott élhalmaz megoldása-e a feladatnak, a gyenge orákulumot exponenciális sokszor kellene meghívni.

Ezeknél a függvényosztályoknál feltesszük, hogy van egy erős orákulumunk, amely egy F élhalmaz (x vektor) esetén megmondja az összes tartalmazásra nézve minimális maximális sértő halmazt, azaz azon minimális S halmazokat, melyekre $f(S) - |\delta_F(S)| = \max_T(f(T) - |\delta_F(T)|)$. Jelölje ezt az orákulumot max-sértő(f,F). A továbbiakban ezeket a halmazokat maximális sértőknek nevezzük.

Kikeresztezhető függvény esetén az algoritmus a következőképpen módosul: az 1. fázisban az algoritmus kiindul az $F = \emptyset$ primál nem megengedett megoldásból és az $y \equiv 0$ duál megengedett megoldásból. Minden iterációban az algoritmus meghívja a max-sértő(f,F) orákulumot. A maximális sértő halmazok duál változóját megnöveli egy nemnegatív ϵ számmal, amíg valamelyik él pontossá nem válik, azaz $\sum_{S:\ e\in\delta(S)} y_S = c_e$. Egy pontossá vált élet hozzáveszünk F-hez. Az 1. fázis akkor fejeződik be, ha már nem létezik sértő halmaz, azaz amikor F a primál egy megengedett megoldása.

A 2. fázis során az F-beli éleket fordított sorrendben vizsgáljuk meg, mint ahogy az 1. fázis során bekerültek a megoldásba. Ha egy e élre $F - e$ továbbra is megoldás, akkor az e élet elhagyjuk F-ből. A 2. fázis befejeződése után lesz egy F primál megengedett megoldásunk, és egy y duál megengedett megoldásunk úgy, hogy a complementary slackness feltétel teljesül: $\forall e \in F: \ \sum_{S:\ e\in\delta(S)} y_S = c_e$.

4.12. Tétel *A fenti algoritmus minden f kikeresztezhető függvény esetén az (1) feladatra 2 faktoros approximációt ad.*

Bizonyítás. A 4.11 Tétel bizonyításához hasonlóan elegendő belátni, hogy minden iterációban

$$\sum_{C\in\mathcal{C}} |\delta_{F'}(C)| \leq 2|\mathcal{C}| - 1,$$

ahol $\mathcal{C}$ az iteráció kezdetén maximális sértő halmazok rendszere.

Legyen $Y = \cup_{C\in\mathcal{C}}\delta_{F'}(C)$. Világos, hogy az algoritmus az Y-beli éleket az aktuális iteráció során vagy utána vette be a megoldásba.

4.13. Lemma *Minden $e \in Y$ élhez létezik egy $S_e \subset V$ halmaz, hogy*
1. $f(S_e) = 1$,
2. $\delta_{F'}(S_e) = \{e\}$,
3. $\forall C \in \mathcal{C}$ halmazra $C \subset S_e$ vagy $C \cap S_e = \emptyset$.

Bizonyítás. Az, hogy az e élet a második fázis során nem dobtuk ki, pontosan azt jelenti, hogy létezik egy S_e halmaz, hogy $f(S_e) = 1$ és $\delta_{F'}(S_e) = \{e\}$. Mivel a második fázisban az éleket fordítva nézzük végig, ezért S_e az iteráció kezdetén sértő volt. Ezért a 4.6 Állítás miatt a 3. tulajdonság is igaz. $\square$

Minden $e \in Y$ élhez vegyünk egy fenti tulajdonságú S_e halmazt. Jelölje $\mathcal{S}$ az így kapott halmazrendszert.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{S}$-ben léteznek S_e és $S_{e'}$ metsző halmazok. Mivel f kikeresztezhető, ezért vagy $f(S_e \cup S_{e'}) = f(S_e \cap S_{e'}) = 1$ vagy $f(S_e - S_{e'}) = f(S_{e'} - S_e) = 1$. Nézzük az első esetet: cseréljük ki az S_e, $S_{e'}$ halmazokat az $S_e \cap S_{e'}$ és az $S_e \cup S_{e'}$ halmazokra. Állítjuk, hogy a két új halmaz továbbra is tanu lesz az e és e' élre nézve. A δ függvény szubmodularitását felhasználva

$$2 = |\delta_{F'}(S_e)| + |\delta_{F'}(S_{e'})| \geq |\delta_{F'}(S_e \cap S_{e'})| + |\delta_{F'}(S_e \cup S_{e'})| \geq 1 + 1.$$

A második egyenlőtlenségnél azt használtuk, hogy F' megengedett megoldás. Tehát $|\delta_{F'}(S_e \cap S_{e'})| = |\delta_{F'}(S_e \cup S_{e'})| = 1$. Következésképpen az $S_e \cap S_{e'}$ és $S_e \cup S_{e'}$ halmazok közül az egyik az e élre tanu, a másik pedig az e' élre.
Ha $f(S_e - S_{e'}) = f(S_{e'} - S_e) = 1$, akkor az S_e illetve $S_{e'}$ halmazokat cseréljük ki az $S_e - S_{e'}$ és $S_{e'} - S_e$ halmazokra. Az előző esethez hasonlóan belátható, hogy továbbra is egy tanúrendszerünk lesz.

A fenti eljárást folytatva lesz egy 4.13 tulajdonságú $\mathcal{S}$ lamináris halmazrendszerünk (az eljárás véget ér mert a metsző párok száma mindig csökken).

Vegyük hozzá V-t $\mathcal{S}$-hez, és ezen a lamináris rendszeren definiáljunk egy H fát. Jelölje v_S az S halmaznak megfelelő H-beli pontot. $(v_S, v_T) \in E(H)$ pontosan akkor ha T az S-t tartalmazó legszűkebb $\mathcal{S}$-beli halmaz.
Minden $C \in \mathcal{C}$ halmazhoz rendeljük hozzá az őt tartalmazó legszűkebb $\mathcal{S}$-beli halmazt. A H fa egy v_S pontját aktívnak hívjuk, ha S hozzá van rendelve valamely $C \in \mathcal{C}$ halmazhoz.

4.14. Lemma *A H fában minden levél (a V-t esetleg kivéve) aktív.*

Bizonyítás. Egyedül V és a tartalmazásra nézve minimális $\mathcal{S}$-beli halmazok lehetnek levelek. Bármely tartalmazásra nézve minimális $\mathcal{S}$-beli halmaz az iteráció kezdetén sértő, ezért tartalmaz $\mathcal{C}$-beli halmazt, vagyis ezek a pontok aktívak. □

Jelölje H_a az aktív H-beli pontok halmazát.

4.15. Lemma $\sum_{C\in\mathcal{C}} |\delta_{F'}(C)| \leq \sum_{v\in H_a} d_H(v)$.

Bizonyítás. Minden $e \in Y$ élnek egyértelműen megfeleltetünk egy H-beli élet, melynek az egyik végpontja aktív. Legyen az $e \in \delta_{F'}(C)$ élhez tartozó $\mathcal{S}$-beli tanuhalmaz S_e. Ekkor H-ban létezik egy (v_{S_e}, v_T) él, ahol T az S_e-t tartalmazó legszűkebb $\mathcal{S}$-beli halmaz. Feleltessük meg az e élnek ezt az élet. Könnyen látható, hogy C vagy az S_e vagy a T halmazhoz van hozzárendelve, azaz a (v_{S_e}, v_T) él egyik végpontja aktív. □

4.16. Tétel *Minden iterációban fennáll a (4) egyenlőtlenség.*

Bizonyítás. Mivel a H fában esetleg a V-t kivéve minden levél aktív, ezért:

$$\sum_{v\in H_a} d_H(v) = \sum_{v\in H} d_H(v) - \sum_{v\in H-H_a} d_H(v) \leq 2(|H|-1) - 2(|H|-|H_a|) + 1 =$$

$2|H_a| - 1$.
Mivel $|H_a| \leq |\mathcal{C}|$ és $\sum_{C\in\mathcal{C}} |\delta_{F'}(C)| \leq \sum_{v\in H_a} d_H(v)$ így

$$\sum_{C\in\mathcal{C}} |\delta_{F'}(C)| \leq 2|\mathcal{C}| - 1.$$

Ezzel beláttuk az 4.12 Tételt. □

A legáltalánosabb esetben az f függvény ferdén szupermoduláris. Ekkor az algoritmus $f_{\max}$ fázisból áll. Az algoritmus minden fázisban új éleket vesz hozzá a megoldáshoz úgy, hogy a maximális hiányt eggyel csökkenti, így $f_{\max}$ fázis után az (1) feladat egy megengedett megoldását kapjuk.
Pontosabban: legyen a p. fázis előtt vett élek halmaza F_{p-1}. Kezdetben $F_0 = \emptyset$. A p. fázisban az algoritmus meghívja a max-sértő(f, F_{p-1}) erős orákulumot. Jelölje $\mathcal{S}$ az orákulum által visszaadott halmazokat (azaz a tartalmazásra nézve minimális maximális sértő halmazokat). Legyen $h_p(S) =$ $= 1$ ha $S \in \mathcal{S}$, különben $h(S) = 0$. A 4.7 és 4.8 Állítások szerint a h_p függvény

kikeresztezhető. Az előző részben ismertetett algoritmussal megoldjuk az alábbi IP feladatot:

$$\min \sum_{e \in E - F_{p-1}} c_e x_e$$
$$\forall S \subset V: \; x(\delta_{G-F_{p-1}}(S)) \geq h_{p-1}(S)$$
$$\forall e \in E - F_{p-1} : x_e \in \{0, 1\}.$$

Az algoritmus által meghatározott éleket hozzávesszük F_{p-1}-hez. Indukcióval látható, hogy a p. fázisban azon halmazok hiányát csökkentjük eggyel, melyeknek a $p-1$-dik fázis után a hiánya $f_{\max} - p + 1$.

4.17. Tétel *A fenti algoritmus ferdén szupermoduláris függvények esetén az (1) feladatra $2\kappa(f_{\max})$ approximációt ad, ahol $\kappa(i) = 1 + 1/2 + \ldots 1/i$.*

Bizonyítás. Nézzük az (1) feladat alábbi LP relaxációját:

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e \qquad LP$$
$$\forall S \subset V: \; x(\delta(S)) \geq f(S)$$
$$\forall e \in E: \; 0 \leq x_e \leq 1.$$

A relaxált feladat duálja:

$$\max \sum_S h(S) y_S - \sum_{e \in E} z_e \qquad (D)$$
$$\forall e \in E: \; \sum_{S: e \in \delta(S)} y_S \leq c_e + z_e$$
$$\forall S \subset V: \; y_S \geq 0$$
$$\forall e \in E: \; z_e \geq 0.$$

Legyen y a p. fázisban kapott duál változó. Definiáljuk z_e-t a következőképpen: $\forall e \in F_{p-1} : z_e = \sum_{S:\ e \in \delta(S)} y_S$ és $z_e = 0$ egyébként. A definíció miatt $\sum_{e \in E} z_e = \sum_{e \in F_{p-1}} \sum_{S:\ e \in \delta(S)} y_S = \sum_S |\delta_{F_{p-1}}(S)| y_S$.

4.18. Lemma *Az (y, z) vektor a (D) egy megengedett megoldása.*

Bizonyítás. Az y változót a (4) feladat megoldása során kaptuk, ezért $\forall\ e \in E - F_{p-1}$ élre $\sum_{S:\ e \in \delta(S)} y_S = c_e$. Az $e \in F_{p-1}$ élekre a definíció miatt a (D) feladatbeli egyenlőtlenség triviálisan teljesül. $\square$

Legyen Z_D a (D) optimuma. A 4.18 Lemma miatt a p. fázisban

$$Z_D \geq \sum_S f(S)y_S - \sum_{e\in E} z_e = \sum_S (f(S) - |\delta_{F_{p-1}}(S)|)y_S = (f_{\max} - p + 1)\sum_S y_S$$

ahol felhasználtuk, hogy a p. fázisban csak azoknak a halmazoknak pozitív az y változója, melyekre $f(S) - |\delta_{F_{p-1}}(S)| = f_{\max} - p + 1$. Felhasználva, hogy kikeresztezhető függvényekre az algoritmus 2-szeres approximációt ad, kapjuk, hogy

$$\sum_{e\in F_{f_{\max}}} c_e \leq 2\sum_{p=1}^{f_{\max}} \frac{1}{f_{\max} - p + 1} Z_D = 2\kappa(f_{\max})Z_D$$

ami igazolja a 4.17 Tételt. □

Ravi és Williamson [16]-ban megmutatta, hogy a ferdén szupermoduláris függvényeknél használt algoritmus minimális súlyú k-pontösszefüggő részgráf keresésére is alkalmazható. Az algoritmus k fázisból áll, és minden fázisban a pontösszefüggőséget eggyel növeli. Ha a p. fázisig az F_{p-1} élhalmazt vettük ki, akkor a p. fázisban egy (1) típusú feladatot kell megoldani: minden $p -$ $- 1$ számú pontra, melyek elhagyása után (V, F_{p-1}) S_1 és S_2 komponensre esik szét, a $\delta(S_1, S_2) \cap (E - F_{p-1})$ halmazból legalább egy élet hozzá kell venni F_{p-1}-hez, azaz itt is felírható egy (1) típusú feladat. A kikeresztezhető függvényeknél látott módon belátható, hogy egy fázison belül a primál-duál algoritmus 2 approximációt ad, és a 4.17 Tétel bizonyításához hasonlóan belátható, hogy a teljes algoritmus $2\kappa(k)$ approximációs faktort ad.

Megjegyzés: Fontos látni, hogy a fejezetben ismertetett algoritmusok nem használnak semmilyen szubrutint, míg a következő részben használt algoritmus szubrutinként használja az ellipszoid módszert.

4.2. Egy 2 faktor approximáció

Ebben a fejezetben Kamal Jain algoritmusát ismertetjük az (1) feladatra ferdén szupermoduláris függvények esetén. A feladat relaxációja:

$$\min \sum_{e\in E} c_e x_e \tag{5}$$

$$\forall S \subset V: \; x(\delta_G(S)) \geq f(S)$$

$$\forall e \in E: 0 \leq x_e \leq 1.$$

A továbbiakban feltesszük, hogy az (5) feladatra létezik egy szeparációs orákulumunk, amely egy x vektorról megmondja, hogy megengedett megoldás, vagy pedig talál egy feltételt melyet x megsért. Vegyük észre, hogy az általánosított Steiner feladat esetén ilyen orákulum létezik: egy x vektor pontosan akkor elégíti ki a feladatot, ha minden i, j párra az i-t és j-t elválasztó minimális vágás nagyobb mint r_{ij}. Tehát az általánosított Steiner feladat az általunk tárgyalt feladat egy speciális esete.

Az algoritmus a következő iterációt csinálja:
1. lépés: oldjuk meg az (5) feladatot
2. lépés: (5) egy optimális megoldásából csináljunk egy optimális bázismegoldást
3. lépés: azokat az éleket, melyeknek a bázismegoldásbeli értéke legalább 1/2, tegyük be (1) megoldásába (azaz értéküket rögzítsük 1-nek)
4. lépés: töröljük el az előző lépésben lerögzített éleket, és oldjuk meg a visszamaradó feladatot.

Mivel a feltétel szerint a feladatra van szeparációs orákulumunk, ezért (5) egy optimális törtmegoldását megkaphatjuk az ellipszoid módszer segítségével.

4.19. Tétel *Az* (5) *feladat minden x bázismegoldásában* $\exists e : x_e \geq 1/2$.

A tételt később bizonyítjuk. A tétel miatt az élszám mindig legalább eggyel csökken, így az algoritmus legfeljebb élszámnyi lépés után véget ér. Még arra van szükségünk, hogy a 4. lépésben kapott módosított feladat hasonló típusú mint (5). Legyen X^* (5) egy optimális bázismegoldása, és jelölje $E_{\frac{1}{2}+}$ azon éleket, melyekre $X^*_e \geq 1/2$. Legyen $G_{res} = G - E_{\frac{1}{2}+}$. Az $E_{\frac{1}{2}+}$-beli élek értékét rögzítsük egynek, azaz ezeket belevesszük a megoldásba. A módosított feladat:

$$\min \sum_{e \in E(G_{res})} c_e x_e \tag{6}$$

$$\forall S \subset V : \; x(\delta_{G_{res}}(S)) \geq f(S) - \sum_{e \in E_{\frac{1}{2}+} \cap \delta_{G(S)}} 1$$

$$\forall e \in E(G_{res}) : 0 \leq x_e \leq 1.$$

A (6) feladatbeli halmazfüggvény a 4.8 Állítás miatt szintén ferdén szupermoduláris, ezért egy (5)-tel megegyező típusú feladatot kaptunk, ezért ismét alkalmazhatjuk a fenti lépéseket.
Legfeljebb élszámnyi iteráció után kapunk (2)-nek egy egész megengedett megoldását. A következő tétel miatt a kapott megoldás legfeljebb 2-szerese az optimumnak, amiből következik, hogy az algoritmus egy 2 approximáció.

4.20. Tétel *Legyen z^* illetve z^*_{res} az (5) illetve (6) LP feladatok optimális értéke. Ha E_{res} a (6) feladat olyan egész megoldása, melynek a célfüggvény értéke legfeljebb $2z^*_{res}$, akkor $E_{res} \cup E_{\frac{1}{2}+}$ (5) egy egész megoldása, melynek a célfüggvény értéke legfeljebb $2z^*$.*

Bizonyítás. Világos, hogy $E_{res} \cup E_{\frac{1}{2}+}$ (5) egy megengedett egész megoldása. Mivel X^* megszorítása G_{res}-re megengedett megoldása a (6) feladatnak, ezért

$$z^*_{res} \leq z^* - \sum_{e \in E_{\frac{1}{2}+}} X^*_e c_e$$

azaz

$$2z^* \geq 2z^*_{res} + \sum_{e \in E_{\frac{1}{2}+}} X^*_e c_e.$$

Felhasználva, hogy $\forall e \in E_{\frac{1}{2}+}:\ 2X^*_e \geq 1$ és $\sum_{e \in E_{res}} c_e \leq 2z^*_{res}$, kapjuk, hogy

$$2z^* \geq \sum_{e \in E_{res}} c_e + \sum_{e \in E_{\frac{1}{2}+}} c_e. \qquad \square$$

Az 4.19 Tétel bizonyítása:
Legyen X egy megengedett bázismegoldás. Ha valamely e élre $X_e = 1$, akkor készen vagyunk. Ha valamely e élre $X_e = 0$, akkor az e élet kihagyhatnánk a gráfból. Feltehető tehát hogy $0 < X_e < 1\ \forall e \in E$.
Minden $S \in V$ halmazra jelölje $\mathcal{A}_G(S)$ az S halmaznak az LP feladatban megfelelő sorvektort. Az A halmazt pontosnak nevezzük, ha $X(\delta(A)) = f(A)$.

4.21. Lemma *Ha A és B pontos halmazok akkor a következő állítások közül legalább az egyik igaz:*
1. $A-B$ és $B-A$ is pontos, és $\mathcal{A}_G(A)+\mathcal{A}_G(B) = \mathcal{A}_G(A-B)+\mathcal{A}_G(B-A)$.
2. $A \cup B$ és $A \cap B$ is pontos, és $\mathcal{A}_G(A)+\mathcal{A}_G(B) = \mathcal{A}_G(A\cup B)+\mathcal{A}_G(A\cap B)$.

Bizonyítás. Mivel f ferdén szupermoduláris, ezért vagy $f(A) + f(B) \leq f(A-B) + f(B-A)$ vagy $f(A) + f(B) \leq f(A \cup B) + f(A \cap B)$. Tegyük fel, hogy az első teljesül (a másik esetben a bizonyítás hasonlóan megy).

Ekkor egyszerű számolással adódik, hogy
$X(\delta(A-B, V-(A\cup B))) + X(\delta(B-A, V-(A\cup B))) + 2X(\delta(A\cup B, V-((A\cup B))) + 2X(\delta(A-B, B-A)) + X(\delta(A-B, A\cap B)) + X(\delta(B-A, A\cap B)) = f(A) + f(B) \leq f(A-B) + f(B-A) \leq X(\delta(A-B, V-(A\cup B))) + X(\delta(B-A, V-(A\cup B))) + 2X(\delta(A\cup B, V-((A\cup B))) + X(\delta(A-B, A\cap B)) + X(\delta(B-A, A\cap B))$.

Az egyenlőtlenségből következik, hogy egyrészt $A \cup B$ és $A \cap B$ is pontos, másrészt $X(\delta(A-B, B-A)) = 0$ ami az élek pozitivitása miatt azt jelenti hogy az $A-B$ és a $B-A$ halmazok között nem megy él, amiből következik, hogy $\mathcal{A}_G(A) + \mathcal{A}_G(B) = \mathcal{A}_G(A-B) + \mathcal{A}_G(B-A)$. □

A $\mathcal{T}$ halmazrendszer álljon a pontos halmazokból. Tetszőleges pontos halmazokból álló $\mathcal{F}$ halmazrendszerre jelölje $\langle \mathcal{F} \rangle$ az $\mathcal{A}_G(S) : S \in \mathcal{F}$ vektorok által kifeszített alteret.

4.22. Lemma *Pontos halmazok minden maximális (azaz nem bővíthető) lamináris $\mathcal{L}$ rendszerére $\langle \mathcal{L} \rangle = \langle \mathcal{T} \rangle$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt hogy létezik $S \in \mathcal{T}$ pontos halmaz, hogy $\mathcal{A}_G(S) \notin \langle \mathcal{L} \rangle$. Legyen ezen belül S olyan, hogy minimális számú $\mathcal{L}$-beli halmazt metsz.
Legyen $L \in \mathcal{L}$ egy S-t metsző pontos halmaz (ilyen létezik mert $\mathcal{L}$ pontos halmazok maximális lamináris rendszere). A 4.21 Lemma miatt a következő két állítás közül legalább az egyik igaz:
1. $S-L$ és $L-S$ is pontosak, és $\mathcal{A}_G(S) = \mathcal{A}_G(S-L) + \mathcal{A}_G(L-S) - \mathcal{A}_G(L)$.
2. $S \cup L$ és $S \cap L$ is pontosak, és $\mathcal{A}_G(S) = \mathcal{A}_G(S \cup L) + \mathcal{A}_G(S \cap L) - \mathcal{A}_G(L)$.
Tegyük fel, hogy az első teljesül (a bizonyítás hasonló a második teljesülése esetén is). Mivel $\mathcal{A}_G(S) \notin \langle \mathcal{L} \rangle$, ezért vagy $\mathcal{A}_G(S-L) \notin \langle \mathcal{L} \rangle$ vagy $\mathcal{A}_G(L-S) \notin \langle \mathcal{L} \rangle$. Nézzük az első esetet (a másik eset lényegében megegyezik). $\mathcal{L}$ laminaritásából könnyen látszik, hogy minden $S-L$-t metsző $\mathcal{L}$-beli halmaz metszi S-t is. Ekkor azonban $S-L$ egy olyan pontos halmaz lenne, melyre $\mathcal{A}_G(S-L) \notin \langle \mathcal{L} \rangle$ és az $S-L$ halmazt kevesebb $\mathcal{L}$-beli halmaz metszi mint S-t, ami ellentmond annak, hogy S-t minimális számú halmaz metsz. □

A lemma alapján $\langle \mathcal{T} \rangle$ bázisát vehetjük lamináris halmazokból is. A bázismegoldás tulajdonsága miatt $\langle \mathcal{T} \rangle$ dimeziója $|E(G)|$-vel egyenlő. A következő állítást kaptuk:

4.23. Lemma *Létezik $\mathcal{B}$ pontos halmazokból álló lamináris halmazrendszer az alábbi tulajdonságokkal:*
1. $|\mathcal{B}| \geq |E(G)|$
2. Az $\mathcal{A}_G(S) : S \in \mathcal{B}$ vektorok lineárisan függetlenek.
3. $\forall S \in \mathcal{B}$ $f(S) \geq 1$.

Az 4.19 Tétel állításával ellentétben tegyük fel, hogy minden él 1/2-nél kisebb értéket vesz fel. Ebben az esetben beláthatjuk az alábbi, önmagának ellentmondó lemmát:

4.24. Lemma *Ha a bázismegoldásban minden él legfeljebb 1/2-t vesz fel, akkor létezik pontos halmaz, amelyből legfeljebb két él megy ki.*

Bizonyítás. Vegyük az 4.23 Lemmában szereplő $\mathcal{B}$ halmazrendszert. Egy $S \subset V$ halmazt rossznak nevezünk, ha

$$0 < |\{A \in \mathcal{B} : A \subset S\}| \leq |e \in E(G) : e \in S \times S|.$$

Ha létezik S rossz halmaz akkor $\mathcal{B}$-t és $E(G)$ módosítsuk az alábbi módon:
1. $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} - \{A \in \mathcal{B} : A \subset S\}$
2. $E(G) \leftarrow E - \{e \in E(G) : e \in S \times S\}$.

A módosítás után $\mathcal{B}$ összes 4.23 Lemmában szereplő tulajdonsága megmarad, ezért feltehető, hogy rossz halmaz nem létezik. A szokásos módon készítsünk egy T gyökeres fát a $\mathcal{B} \cup V$ lamináris rendszeren. A T fának $E(G)$ éle van. Ha V a fa egyetlen nem levél pontja, akkor a $\mathcal{B}$-beli halmazok diszjunktak, s ekkor a tétel nyilvánvalóan igaz. Feltehetjük tehát hogy nem V az egyetlen nem levél pontja T-nek.

4.25. Állítás *A T fa pontjaira rá tudunk írni nemnegatív egész számokat úgy, hogy*
1. A pontokra írt számok összege legfeljebb kétszerese a fa élszámának.
2. Minden pontra, melynek egy gyereke van 2 van írva.
3. Minden levélre 2 vagy 4 van írva, és ha azokat a leveleket melyekre 2 van írva elhagyjuk, nem keletkezik új levél.

Bizonyítás. Legyen W egy még számozatlan levél, és U a W szomszédja. 4 esetet különböztetünk meg attól függően, hogy U-nak $1, 2, 3$,vagy több gyereke van.
1.eset: W az U egyetlen gyereke. Ekkor persze $U \neq V$, különben V lenne az egyetlen nem levél.
Mivel nincs rossz halmaz, ezért nem létezhet olyan él G-ben, melynek egyik végpontja W-ben, a másik pedig U-ban van. Másrészt kell léteznie legalább egy olyan élnek, amely az U halmazból kilép, de a W-ből nem, mert ellenkező esetben $\mathcal{A}_G(W) = \mathcal{A}_G(U)$ teljesülne, ami ellentmondana a lineáris függetlenségnek. Mivel az f halmazfüggvény egész, ezért az olyan élek összege, melyek U-ból kilépnek de W-ból nem, legalább 1, ezért legalább 3 ilyen él van. Mivel W levél, ezért W-ből is legalább 3 él megy ki. Tehát itt legalább 6 élünk van, így W-re írhatunk 4-t, U-ra pedig 2-t. A további 3 esetet hasonlóan lehet megcsinálni, a bizonyítást az olvasóra bízzuk. $\square$

Ha adott a T fa élein egy fenti tulajdonságú számozás, akkor azon leveleket elhagyva, melyekre 2 van írva, egy olyan fát és pontjain olyan számozást kapunk, hogy

1. A pontokra írt számok összege legfeljebb a fa élszáma.
2. Minden levélre 4 van írva.
3. Minden pontra, melynek egy gyereke van, 2 van írva.

Jelölje k_0 a levelek számát, k_1 az egy gyerekű pontok számát, k_2 pedig a legalább két gyerekű pontok számát. A fenti számozás miatt $2(k_0 + k_1 + k_2) \geq 2|E(T)| \geq 4k_0 + 2k_1$, azaz $k_0 < k_2$. Ez azonban ellentmond a következő lemmának

4.26. Lemma *Tetszőleges gyökeres T fában $k_0 > k_2$.*

Bizonyítás. Mivel az élek száma kisebb mint a pontok száma, ezért $k_0 + k_1 + k_2 > |E(T)| \geq k_1 + 2k_2$. □

Ezzel sikerült belátni a 4.19 Tételt.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani Frank Andrásnak, témavezetőmnek, a dolgozat írása során nyújtott segítségéért és hasznos tanácsaiért. Köszönetet mondok továbbá Jüttner Alpárnak a LaTeX -ben nyújtott segítségéért.

Összefoglaló táblázat

probléma	komplexitás	legjobb approximáció	hivatkozás
MP	NP-teljes	1.5 $k = 2$ esetén	[4]
		$1 + 1/k$ $k > 2$ -re	[5]
SMP	NP-teljes	$2\kappa(k)$	[16]
ME	NP-teljes	$17/12$ $k = 2$-re	[10]
		$1 + 2/(k+1)$ $k \geq 3$ esetén	[5]
SME	NP-teljes	2	[3]
EMP	NP-teljes	1.61 $k = 1$-re	[13]
		$1 + 1/k$ $k \geq 2$ esetén	[5]
EME	NP-teljes	1.61 $k = 1$-re	[13]
		2 $2 \leq k \leq 16$ esetén	
		$1 + 4/\sqrt{k}$ $k \geq 17$ esetén	[5]
GYE	megoldható	1	[20]
GYP	megoldható	1	[9]
ÁSF	NP-teljes	2	[17]

A problémák kódjai:

MP: irányítatlan gráf minimális elemszámú k-pontösszefüggő részgráfjának keresése
SMP: az MP probléma súlyozott esetben
ME: irányítatlan gráf minimális elemszámú k-élösszefüggő részgráfjának keresése
SME: az ME probléma súlyozott esetben
EMP: irányított gráf minimális elemszámú k-pontösszefüggő részgráfjának keresése
EME: irányított gráf minimális elemszámú k-élösszefüggő részgráfjának keresése
GYE: irányított gráf minimális súlyú gyökeres k-élösszefüggő részgráfjának keresése
GYP: irányított gráf minimális súlyú gyökeres k-pontösszefüggő részgráfjának keresése
ÁST: általánosított Steiner feladat

Irodalom

[1] D. S. Hochbaum. Approximation algorithms for NP-hard problems. PWS Publishing Company, London.

[2] J. Cheriyan, R. Thurimella. Algorithms for paralell k-vertex connectivity and sparse certificates. *Proc 23rd Annual Symposium on Theory of Computing*, 391-401, 1991.

[3] S. Khuller and U. Vishkin. Biconnectivity approximations and graph carvings. *Journal of the ACM*, 41(2):214-235, 1994.

[4] N. Garg, V. Santosh and Singla. Improved approximation algorithms for biconnected subgraphs via better lower bounding techniques. *Proc. 4th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 103-111 1993.

[5] J. Cheriyan and R. Thurimella. Approximating Minimum-Size k-Connected Spanning Subgraphs via Mathcing. *37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 292-301, 1996

[6] W. Mader. Ecken vom Grad n in minimalen n-fach zusammenh$\ddot{a}$ngenden Graphen. *Archive der Mathematik* 23 (1972), 219-224

[7] S. Khuller and B. Raghavachari. Improved Approximation Algorithms for Uniform Connectivity Problems. *Journal of Algorithms* 21, 434-450 (1996)

[8] M.Penn and H. Shasha-Krupnik. Improved Approximation Algorithms for Weighted 2- and 3-Vertex Connectivity Augmentation Problems. *Journal of Algorithms* 22, 187-196 (1997)

[9] A. Frank, É Tardos. An application of submodular flows. *Linear Algebra and its Applications*, 114/115:320-348, 1989

[10] A. Sebő, J. Cheriyan, Z. Szigeti. An improved approximation algorithm for minimum size 2-edge connected spanning subgraphs, 1997

[11] A. Frank. A survey on T-joins, T-cuts, and conservative weightings. Combinatorics, Paul Erdős is Eighty (Volume 2) (M. Miklós, V. T. Sós, T. SZőnyi, eds)

[12] S. Khuller, B. Raghavachari, N. Young. Approximating the minimum equivalent digraph. *SIAM Journal on Computing*, 24(4):859-872, 1995

[13] S. Khuller, B. Raghavachari, N. Young. On strongly connected digraphs with bounded cycle length. *Discrete Applied Mathematics* 69 (1996) 281-289

[14] M. X.Goemans, D.P.Williamson. A general approximation technique for constrained forest problems. *Proc. 3rd Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms*, 307-316, 1992.

[15] M. Goemans, A. Goldberg, S. Plotkin, D. Shmoys, É. Tardos, D. Williamson. Improved approximation algorithms for network design problems. *Proceedings of the 5th SODA*, 307-316, 1992

[16] R. Ravi, D. Williamson. An approximation algorithm for minimum-cost vetex-connectivity problems. *Proc. 6th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 332-341, 1995

[17] K. Jain. A factor 2 approximation algorithm for the generalized Steiner network problem.

[18] S. Khuller, R. Thurimella. Approximation algoritms for graph augmentation. *Journal of algorithms* 14, 214-225 (1993)

[19] Z. Nutov, M. Penn. Faster algorithms for weighted triconnectivity augmentation problems. Az ORL-ben fog megjelenni.

[20] J. Edmonds. Matroid intersection. *Annals of Discrete Mathematics*, 4:185-204, 1979.

[21] W. Mader. Minimalen n-fach zusammenhängenden Graphen. *Archive der Mathematik* 23 (1972), 219-224

[22] D. P. Williamson, M. X. Goemans, M. Mihail, V. V. Vazirani. A primal-dual approximation for generalized Steiner network problems. *Proc. of the 25th Annual ACM Symposium on Theory of Computing* 708-717, 1993

[23] T. Nishizike, S. Poljak. Highly connected factors with small number of edges. *Discrete Applied Mathematics*, 55(3):295-297, 1994.

[24] H. N. Gabow, R. E. Tarjan. Faster scaling algorithms for general graph mathcing problems. *Journal of the ACM* 38 (1991), 815-853.