Unitálok

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Harrach Nóra Viola
Témavezető: Kiss György

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Geometriai Tanszék

2001

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A véges geometria, azon belül a projektív geometria egy újonnan felfejlődő ága az unitálok elmélete.

Az 1950-es években Segre bebizonyította, hogy a másodrendű görbék kombinatorikus tulajdonságaival rendelkező ovoidok páratlan rendű síkon éppen a másodrendű görbék. Ugyanígy az Hermite-görbék esetében is az volt a cél, hogy a kombinatorikus tulajdonságaikkal definiált unitálokról belássák, hogy Hermite-görbék. Ez azonban nem csak különleges projektív síkokon nincs így. Buekenhout és Metz az 1960-as években konstrukciót adott tetszőleges rendű desargues-i síkon nemklasszikus unitálokra, azaz olyan unitálokra, amik nem állnak elő Hermite-polaritás autokonjugált pontjaiként. A konstrukció a Bruck és Bose, illetve André által kidolgozott beágyazási elméleten alapul, és az ilyen konstrukcióból előálló unitálokat a szakirodalomban Buekenhout-Metz unitáloknak nevezik. Ezeknek az unitáloknak egy egyszerűbb, úgynevezett koordinátás reprezentációja további kombinatorikus és csoportelméleti jellemzésekhez vezetett.

Az unitálok elmélete jól alkalmazható a kódelméletben, illetve az algebrai geometriában. Ez utóbbi téren szintén érdekes a másodrendű görbékkel való összecsengése: míg a q-adrendű sík egy egy-komponensű másodfokú algebrai görbéje legfeljebb $q+1$ pontból áll, és éppen az másodrendű görbék a $(q+1)$-pontúak, addig egy $(q+1)$-edfokú egy-komponensű algebrai görbe legfeljebb $q\sqrt{q}+1$ pontot tartalmaz, és éppen az Hermite-görbék tartalmaznak ennyit.

Az utóbbi időben az Hermite-görbéket és BM-unitálokat a tetszőleges unitáloktól megkülönböztető, ún. karakterizációs elméletek terén sok új eredmény született. Viszont arra a kérdésre vonatkozóan, hogy létezik-e desargues-i síkon olyan unitál, amit nem állít elő a Buekenhout-Metz-féle konstrukció, máig is csak sejtések vannak.

A dolgozat szerkezete tükrözi az unitálok vizsgálatának történelmi menetét. Az első fejezetben a téma tárgyalásához szükséges alapok találhatók. A második fejezet az Hermite-görbék elmélete, melyben szerepelnek az Hermite-görbék azon tulajdonságai is, melyekkel az unitálok definiálhatók, továbbá olyan tulajdonságai is, melyek a későbbiekben a nemklasszikus unitáloktól való megkülönböztethetőséget szolgálják. A harmadik fejezet a Buekenhout-Metz unitálok elmélete. Itt a BM-unitálok definíciója, konstrukciója és koordinátás előállítása mellett szerepel a BM-unitálok jellemzése is. A Karakterizációs tételek című fejezetben szerepelnek azok a tételek, melyek a $PG(2,q^2)$ sík tetszőleges unitáljaitól a BM-unitálokat, illetve a klasszikus unitálokat megkülönböztetik. Az utolsó fejezet rövid ízelítőt ad a további síkokba beágyazott unitálok elméletéből.

Ezúton is szeretnék hálás köszönetet mondani témavezetőmnek, Kiss Györgynek az érdekes témáért, valamint a kidolgozás során nyújtott sok segítségért. Köszönetemet fejezem ki Korchmáros Gábor professzornak, aki potenzai ösztöndíjas utam során támogatott, és szakdolgozatom témájában értékes tanácsokkal és hasznos szakirodalommal látott el.

2. Véges projektív síkok

2.1. Véges testek

2.1. Definíció. Test*nek nevezünk egy K halmazt, ha zárt az összeadás* $(+)$*, és szorzás* $(\cdot)$ *kétváltozós műveletekre, továbbá:*

- $(K, +)$ *kommutatív csoport, melynek egysége* 0*;*
- $(K, \cdot)$ *kommutatív csoport, melynek egysége* 1*;*
- $x(y+z) = xy + xz$*, és* $(x+y)z = xz + yz$ *minden* $x, z, y \in K$ *esetén.*

2.2. Definíció. Véges test*nek hívunk egy K testet, ha K véges elemszámú.*

2.3. Definíció. *Egy K test* karakterisztikája *az a p legkisebb pozitív egész szám, amire minden $x \in K$ esetén $px = 0$.*

2.4. Állítás. *Egy véges test karakterisztikája szükségképpen prím.*

2.5. Állítás. *Egy véges test elemszáma szükségképpen prímhatvány. Ha karakterisztikája a p prím, akkor elemszáma p^e valamilyen e pozitív egész számra.*

2.6. Definíció. *Ha p prím, akkor a $GF(p)$-vel jelöljük, és p-*edrendű Galois test*nek hívjuk $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-t, azaz a modulo p maradékosztályok testét.*
*Ha $q = p^e$ prímhatvány, akkor a $GF(q)$-val jelöljük, és q-*adrendű Galois test*nek hívjuk $GF(p)[x]/(F(x))$-et, ahol $F(x)$ $GF(p)$ felett irreducibilis e-edfokú polinom.*

2.7. Állítás. *Minden q elemű test izomorf $GF(q)$-val.*

Gyakran használjuk a következő tulajdonságait a $GF(q)$ testeknek.

2.8. Állítás. *Legyen q egy adott prímhatvány.*

- $GF(q)$ *minden elemére* $x^q - x = 0$.
- *Ha* $q = p^e$*, akkor minden* $x, y \in GF(q)$ *elemre* $(x+y)^p = x^p + y^p$.
- *Van olyan $\beta \in GF(q)$ elem, amivel $GF(q) = \{ 0, 1, \beta, \beta^2, \beta^3, ..., \beta^{q-2} \}$. Az ilyen β elemeket $GF(q)$* primitív elemei*nek hívjuk. Másszóval: $GF(q)^* = GF(q) \setminus \{0\}$ a szorzás művelettel ciklikus csoportot alkot.*

- *$GF(q)$ automorfizmuscsoportja $q = p^e$ esetén e-edrendű ciklikus csoport, melyet az $x \mapsto x^p$ automorfizmus generál. Tehát $GF(q)$ minden automorfizmusa $x \mapsto x^{p^i}$ alakú, alkalmas i természetes számmal.*

- *Ha $F(x)$ n-edrendű irreducibilis polinom $GF(q)$ felett, és t $GF(q^n)$-beli gyöke, akkor $\{t, t^q, t^{q^2}, ..., t^{q^{n-1}}\}$ az összes $GF(q^n)$-beli gyöke. Speciálisan: ha egy $GF(q)$ felett irreducibilis másodfokú polinom egyik gyöke $GF(q^2)$-ben t, akkor másik gyöke t^q.*

Szükségünk lesz másodfokú polinomok irreducibilitásának vizsgálatára.

2.9. Állítás. *Páratlan q esetén a $GF(q)$-beli négyzetszámok halmazát jelölje $\square_q$, a nemnégyzetek halmazát pedig $\not\square_q$. Ekkor a $GF(q)$ test nemnulla elemeinek a pont fele négyzetszám, azaz $GF(q) = \{0\} \cup \square_q \cup \not\square_q$, és $|\square_q| = |\not\square_q|$, továbbá:*

- *ha $x, y \in \square_q$, és $u, v \in \not\square_q$, akkor $\frac{1}{x}, xy \in \square_q$, és $\frac{1}{u}, uv, xu \in \not\square_q$;*

- *$GF(q)$ minden $\not\square_q$-beli eleme előáll két négyzetszám összegeként.*

Bizonyítás. Az utolsó állítás kevésbé ismert, így azt bizonyítom.

Ha van olyan $x \in \not\square_q$ elem, ami felírható két négyzet összegeként, azaz $x = a^2 + b^2$, akkor minden $y \in \not\square_q$ is felírható, mert $\frac{y}{x} \in \square_q$, azaz $\frac{y}{x} = c^2$, és így $y = xc^2 = (ac)^2 + (bc)^2$.

Már csak azt kell megmutatni, hogy van olyan $x \in \not\square_q$ elem, ami felírható két négyzet összegeként. Tegyük fel, hogy nincs ilyen. Ekkor $1 + x^2 \notin \square_q$ minden $x \in GF(q)$ elemre. Számoljuk össze az $1 + x^2 = y^2$ egyenlet megoldásait. Ha $-1 \notin \square_q$, akkor $1 + x^2 \neq 0$, így minden x-hez két y megoldás tartozik (y és $-y$), azaz összesen $2q$ megoldáspárja van az egyenletnek. Ha $-1 \in \square_q$, akkor $2(q-2)$ olyan megodáspár van, amiben $y \neq 0$, és emellett még megoldás $x = \sqrt{-1}, y = 0$, illteve $x = -\sqrt{-1}, y = 0$, azaz összesen $2q - 2$ megoldáspárja van az egyenletnek. Vegyük észre azonban, hogy ha $1 = y^2 - x^2 = (x+y)(x-y)$, akkor $y + x = z, y - x = \frac{1}{z}$, és minden $z \in GF(q)^*$ elemhez egyértelmű x, y megoldás adódik, azaz ennek csak $q + 1$ megoldáspárja van. Ezzel $q \geq 3$ esetén ellentmondásra jutottunk, mert $2(q-1) > q+1$. (A $q = 3$ eset viszont könnyen ellenőrizhető: $GF(3) = \{0, 1, 2 \mid 3 = 0\}$, $\square_3 = \{1\}$, $\not\square_3 = \{2\}$, viszont $2 = 1 + 1$ nyilván.) ■

2.10. Állítás. *Páros q esetén a $GF(q)$ test minden eleme négyzetszám.*

Ha $q = 2^e$, akkor jelölje Tr a következő leképezést:

$$Tr : x \mapsto x + x^2 + x^4 + ... + x^{2^{e-1}}.$$

Ekkor $Tr : GF(q) \to GF(2)$, *hiszen* $(Tr(x))^2 = Tr(x)$. *Legyen* $C_0(q) = \{ x \in GF(q) \mid Tr(x) = 0 \}$, $C_1(q) = \{ x \in GF(q) \mid Tr(x) = 1 \}$. *Ekkor* $GF(q) = C_0(q) \cup C_1(q)$, *és* $\mid C_0(q) \mid = \mid C_1(q) \mid$, *továbbá:*

- *ha* $x \in C_i(q)$, $y \in C_i(q)$, *akkor* $x+y \in C_0(q)$, *ha* $i = j$, *és* $x+y \in C_1(q)$, *ha* $i \neq j$;
- *minden* $x \in GF(q)$ *elemre* $x^2 + x \in C_0(q)$.

2.11. Tétel. *Adott egy* $ax^2 + bx + c = 0$ *másodfokú egyenlet (azaz* $a \neq 0$*).*

- *Páratlan q-ra:*
  Legyen $d = b^2 - 4ac$, *ezt hívjuk az egyenlet diszkriminánsának.*
  Ha $d = 0$, *akkor az egyenletnek pontosan egy gyöke van:* $\alpha = \frac{-b}{2a}$.
  Ha $d \not\in \Box_q$, *akkor az egyenletnek nincs* $GF(q)$*-ban megoldása, azaz* $GF(q)$*-ban irreducibilis.*
  Ha $d \in \Box_q$, *akkor az egyenletnek két gyöke van* $GF(q)$*-ban:*
  $\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, *amivel* $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$.

- *Páros q-ra:*
  Ha $b = 0$, *akkor az egyenletnek pontosan egy gyöke van:* $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$.
  Ha $b \neq 0$, *akkor* $y = \frac{ax}{b}$ *és* $d = \frac{ac}{b^2}$ *választással az egyenlet* $y^2 + y + d = 0$ *alakba írható.*
  Ha $d \in C_1(q)$, *akkor ennek az egyenletnek nincs gyöke, és így az eredetinek sincs.*
  Ha $d \in C_0(q)$, *akkor ennek az egyenletnek két gyöke van, és így az eredetinek is. Ha az eredeti egyenlet két gyöke* α_1 *és* α_2, *akkor* $ax^2+bx+c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$.

Bizonyítás. A páros esetet bizonyítom csak, hiszen a páratlan eset állításai nyilvánvalóak.

Az $ax^2 + c = 0$ egyenletnek pontosan egy gyöke van, hiszen GF(q) minden eleme négyzetszám, és $1 = -1$.

A $b \neq 0$ esetben az $y^2 + y + d = 0$ alakra való átírás nyilvánvaló (és az is, hogy a két egyenletnek ugyanannyi gyöke van). Ha $y \in GF(q)$ ez utóbbinak gyöke, akkor $0 = Tr(0) = Tr(y^2+y+d) = (Tr(y))^2 + Tr(y) + Tr(d) = Tr(d)$. Ebből látszik, hogy $d \in C_1(q)$ esetén nincs az $y^2 + y + d = 0$ egyenletnek gyöke, így az eredeti egyenletnek sincs.

Ha $d \in C_0(q)$, akkor az $y^2 + y + d = 0$ egyenlet egy gyöke

$$y = kd^2 + (k + k^2)d^4 + ... + (k + k^2 + ... + k^{2^{e-2}})d^{2^{e-1}},$$

tetszőleges $k \in C_1(q)$ elemmel, mert ekkor $y^2 + y = k(d^2 + d^4 + ... + d^{2^{e-1}}) + (k^2 + k^4 + ... + k^{2^{e-1}})d = d$. (Ez a $q = 2^{2f+1}$ esetben, a $k = 1$ választással az $y = d + d^4 + d^{16} + ... + d^{2^{2f}}$ alakra egyszerűsödik.) Ha y gyöke az $y^2 + y + d = 0$ egyenletnek, akkor a másik gyöke éppen $y + 1$. ■

2.12. Következmény. *Egy $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ polinom akkor és csak akkor irreducibilis $GF(q)$ felett, ha*

- *páratlan q-ra: $b^2 - 4ac \not\in \square_q$;*
- *páros q-ra: $b \neq 0$, és $\frac{ac}{b^2} \in C_1(q)$.*

Sokszor fogjuk használni a következő összefüggéseket $GF(q)$ és $GF(q^2)$ között.

2.13. Tétel. *Adott q prímhatvány esetén tekintsük a $GF(q)$ testet $GF(q^2)$-be ágyazva.*

(1) Egy $x \in GF(q^2)$ elemre $x^q = x$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x \in GF(q)$.

(2) Minden $x \in GF(q^2)$ elemre $x^q + x \in GF(q)$.

(3) Van olyan $t \in GF(q^2)$ elem, $t \neq 0$, amire $t^q = -t$.

(4) Ha $t^q = -t$, valamilyen $t \neq 0$ elemmel, akkor azon $y \in GF(q^2)$ elemek halmaza, amire $y^q = -y$, éppen a $tGF(q) = \{ z \in GF(q^2) \mid z = tx, x \in GF(q) \}$ halmaz.

(5) Ha $y \in GF(q)^*$, akkor $x^{q+1} = y$ pontosan $q+1$ $GF(q^2)$-beli x-re teljesül.

Bizonyítás.

(1) Legyen $GF(q^2) = \{ 0, 1, \beta, \beta^2, \beta^3, ..., \beta^{q^2-2} \}$, egy $\beta \in GF(q^2)$ primitív elemmel. Ekkor $GF(q) = \{ 0, 1, \beta^{q+1}, \beta^{2(q+1)}, \beta^{3(q+1)}, ..., \beta^{(q-2)(q+1)} \}$. Ha $x = 0$, akkor teljesül az állítás. Ha $x \in GF(q^2), x \neq 0$, akkor $x = \beta^m$ valamilyen m egészre, és ekkor az $x^q = x$, azaz $x^{q-1} = 1$ feltétel ekvivalens azzal, hogy $x^{q-1} = \beta^{m(q-1)} = 1$. Mivel β-nak csak $(q^2 - 1)$-gyel osztható hatványa lehet 1, ezért $q^2 - 1 \mid m(q-1)$, amiből $q + 1 \mid m$, azaz $x \in GF(q)$.

(2) Mivel $(x^q + x)^q = x^{q^2} + x^q = x + x^q$, ezért (1) szerint $x^q + x \in GF(q)$.

(3) Ha q páros, akkor $-1 = 1$ így $t = 1$ jó választás. Ha q páratlan, akkor $q+1$ páros, így $2(q-1)$ osztja $(q+1)(q-1) = (q^2-1)$-et. Tehát a $GF(q^2)^* = GF(q^2) \setminus \{0\}$ ciklikus csoportnak van olyan t eleme, aminek rendje $2(q-1)$. Mivel t^{q-1} rendje 2, de $GF(q^2)$ egyetlen másodrendű eleme -1, ezért $t^{q-1} = -1$, azaz $t^q = -t$.

(4) Minden $z = tx$, $x \in GF(q)$ elemre: $z^q = (tx)^q = t^q x^q = -tx = -z$. Ha viszont egy $x \in GF(q^2)$ elemre $x^q = -x$, akkor $(xt^{-1})^q = x^q t^{-q} = (-x)(-t^{-1}) = xt^{-1}$, tehát (1) szerint $xt^{-1} \in GF(q)$, azaz $x \in tGF(q)$.

(5) Itt is a fenti $GF(q) \subset GF(q^2)$ reprezentációt használjuk egy adott β primitív elemmel. Mivel $y \in GF(q), y \neq 0$ ezért valamilyen k egészre $y = \beta^{k(q+1)}$. Ha $x^{q+1} = y$, akkor $x \neq 0$, tehát alkalmas m egésszel $x = \beta^m$. Az egyértelműség kedvéért legyen $0 \leq k \leq q-2$, és $0 \leq m \leq q^2-2$. Az $x^{q+1} = y$ feltétel ekkor ekvivalens azzal, hogy $\beta^{m(q+1)} = \beta^{(q+1)k}$, azaz $\beta^{(m-k)(q+1)} = 1$, ami akkor és csak akkor teljesül, ha $(q^2-1) \mid (m-k)(q+1)$, azaz $q-1 \mid m-k$. Ez adott $0 \leq k \leq q-2$ esetén pontosan $q+1$ különböző $0 \leq m \leq q^2-2$ egész számra teljesül.

■

2.14. Tétel. *A $GF(q^2)$ testet tekinthetjük mint $GF(q)$ feletti vektortér, melynek bázisa $\{1, \epsilon\}$ valamilyen $\epsilon \in GF(q^2) \setminus GF(q)$ elemmel. Az egyszerűbb leírás kedvéért szükségünk lesz a következő tulajdonsággal rendelkező ϵ elemekre.*

- *Ha q páratlan prímhatvány, akkor van olyan $\epsilon \in GF(q^2) \setminus GF(q)$ elem, amire $\epsilon^q = -\epsilon$, és ϵ^2 a $GF(q)$ testnek primitív eleme.*
- *Ha $q \geq 4$ páros prímhatvány, akkor van olyan $\epsilon \in GF(q^2) \setminus GF(q)$ elem, amire $\epsilon^q = 1 + \epsilon$, és $\epsilon^2 = 1 + \lambda$, ahol $\lambda \in C_1(q) \subset GF(q)$ és $\lambda \neq 1$.*

Bizonyítás.

- Az előző tétel (1) pontjának bizonyítása során használt $t = \beta^{\frac{q+1}{2}} = \epsilon$ elemre $\epsilon^q = -\epsilon$, és így nyilván $\epsilon \in GF(q^2) \setminus GF(q)$, továbbá $\epsilon^2 = \beta^{q+1}$, ami primitív eleme $GF(q)$-nak.
- Az $x^q + x + 1$ egyenletnek pontosan q gyöke van $GF(q^2)$-ben, mert ha x gyök, akkor x^{mq} is gyök minden m egészre: $(x^{mq})^q + x^{mq} + 1 = \left(x^{q^2}\right)^m + (x+1)^m + 1 = x^m + x^m + 1 + 1 = 0$ (q páros!). Már csak azt kell megmutatni, hogy az $x^q + x + 1$ egyenletnek van gyöke $GF(q^2)$-ben: az előző tétel (2) és (4) pontja miatt tetszőleges $x \in GF(q^2)^*$ elemhez van

olyan $y \in GF(q)^*$ elem, amivel: $x^q + x = y$. Ekkor $\frac{x^q}{y} + \frac{x}{y} = \left(\frac{x}{y}\right)^q + \frac{x}{y} = 1$, azaz $\frac{x}{y}$ gyök.

Mivel $q \geq 4$, ezért választhatunk egy olyan ϵ gyököt, amire $\epsilon^3 \neq 1$, mert csak három harmadfokú elem van $GF(q^2)$-ben. Ekkor $\epsilon^q = 1 + \epsilon$, és ezért $\epsilon \notin GF(q)$. Továbbá $\epsilon^2 + \epsilon = (\epsilon^q + 1)^2 + (\epsilon^q + 1) = (\epsilon^2 + \epsilon)^q$, és így a $\lambda = \epsilon^2 + \epsilon$ választással $\lambda \in GF(q)$. Mivel ϵ gyöke az $x^2 + x + \lambda$ egyenletnek is, de $\epsilon \notin GF(q)$, ezért $x^2 + x + \lambda$ irreducibilis $GF(q)$ felett, tehát $\lambda \in C_1(q)$. Már csak a $\lambda = 1$ lehetőséget kell kizárnunk. Akkor ugyanis $\epsilon^q = \epsilon^2$ lenne, azaz $\epsilon^3 = \epsilon^q \epsilon = \epsilon^2 + \epsilon = 1$, ami ellent mondana ϵ választásának, hogy $\epsilon^3 \neq 1$.

■

2.2. Projektív terek

2.15. Definíció. Projektív sík*nak nevezzük pontok és egyenesek halmazait, egy olyan illeszkedési relációval ellátva, amivel teljesítik az alábbi axiómákat:*

(P1) Bármely két különböző pontra egyértelműen illeszkedik egy egyenes.

(P2) Bármely két különböző egyenesnek egyértelmű metszéspontja van.

(P3) Van négy általános helyzetű pont, azaz négy olyan pont melyek közül semelyik három nincs egy egyenesen.

2.16. Definíció. Affin sík*nak nevezzük pontok és egyenesek halmazait egy olyan illeszkedési relációval ellátva, amivel teljesítik az alábbi axiómákat:*

(A1) Bármely két különböző pontra egyértelműen illeszkedik egy egyenes.

(A2) Bármely pont-egyenes párhoz pontosan egy olyan egyenes van, ami a pontra illeszkedik, az egyenessel pedig párhuzamos, azaz vagy egybeesik vele, vagy diszjunkt tőle.

(A3) Van három nem kollineáris pont, azaz három olyan pont, melyek nem illeszkednek egy egyenesre.

2.17. Definíció. Véges projektív sík*ról, illetve* véges affin sík*ról beszélünk, ha a pontok illetve az egyenesek halmaza véges elemszámú.*

2.18. Állítás. • *Ha egy projektív sík egy egyenesének $q+1$ pontja van, akkor minden egyenesének $q+1$ pontja van, minden pontjára $q+1$ egyenes illeszkedik, és összesen q^2+q+1 pontja és q^2+q+1 egyenese van. Ekkor azt mondjuk, hogy a projektív sík q-adrendű.*

- *Ha egy affin sík egy egyenesének q pontja van, akkor minden egyenesének q pontja van, minden pontjára $q+1$ egyenes illeszkedik, továbbá összesen q^2 pontja és q^2+q egyenese van. Ekkor azt mondjuk, hogy az affin sík q-adrendű.*

2.19. Állítás. *Egy Π projektív sík* duális síkja *az a Π^* struktúra, aminek pontjai Π egyenesei, egyenesei Π pontjai, az illeszkedés pedig a Π-beli illeszkedés. Ekkor Π^* is projektív sík, és ha Π q-adrendű, akkor Π^* is az.*

2.20. Definíció. *Két projektív síkot* izomorfn*ak mondunk, ha létezik pontjaik, illetve egyeneseik között olyan bijektív leképezés, ami illeszkedéstartó.*

2.21. Definíció. *Egy affin sík* projektív lezárását *úgy kapjuk, hogy minden párhuzamos egyenesekből álló egyenesseregéhez hozzáveszünk egy ideális pontot mint ezek metszetét, majd egy ideális egyenest, melyre az összes ideális pont illeszkedik. Így a lezárt sík pontjainak halmaza az affin pontokból és az ideális pontokból áll, egyeneseinek halmaza pedig az affin egyenesekből és az ideális egyenesből.*

2.22. Állítás. *Egy q-adrendű affin sík projektív lezárása q-adrendű projektív sík. Ha egy q-adrendű projektív síknak elhagyjuk egy egyenesét és az arra illeszkedő összes pontját, akkor a kapott struktúra egy q-adrendű affin sík, melynek projektív lezárása izomorf az eredeti projektív síkkal.*

2.23. Definíció. *Egy projektív sík projektív, illetve affin* részsíkj*ának nevezzük pontjainak és egyeneseinek olyan részhalmazait, melyek az örökölt illeszkedési relációval projektív, illetve affin síkot alkotnak.*

2.24. Definíció. *Egy q^2-rendű projektív sík q-adrendű projektív részsíkját* Baer részsík*nak, vagy* Baer sík*nak nevezzük. Egy egyenes egy Baer sík pontjai közül 1-et vagy $(q+1)$-et tartalmazhat, amit úgy is mondunk, hogy a Baer síkot 1 vagy $q+1$ pontban metszi. Az utóbbi eset pontosan akkor fordul elő, ha az egyenes benne van a Baer részsík egyeneseinek halmazában, és ekkor a metszetet* Baer egyenes*nek hívjuk.*

Megjegyzés. Egy egyenes és egy Baer sík metszete az egyenesnek mint q^2-rendű 1-dimenziós projektív térnek q-adrendű altere.

2.25. Definíció. n dimenziós véges projektív tér*nek nevezzük k-dimenziós alterek halmazait egy olyan tartalmazási relációval ellátva, amivel teljesítik az alábbi axiómákat:*

- *Bármely π altérnek egyértelműen létezik $k \in \{-1, 0, 1, ..., n\}$ dimenziószáma, ahol csak az üres halmaz dimenziója -1, és csak az egész tér dimenziója n. A 0-dimenziós halmazokat* pontoknak, *az 1-dimenziós halmazokat* egyeneseknek, *a 2-dimenziós halmazokat* síkoknak, *az $(n-1)$-dimenziós halmazokat* hipersíkoknak *nevezzük. Egy k-dimenziós alteret általában π_k-val jelölünk.*

- *Ha $\pi_k \subset \pi_r$, akkor $k \leq r$. Ha $\pi_k \subset \pi_r$ és $k = r$, akkor $\pi_k = \pi_r$.*

- *Bármely π_k, π_r alterek esetén a mindkét altérre illeszkedő pontok halmaza pontosan egy altérre illeszkedik és ennek az altérnek minden pontja illeszkedik π_k-ra is és π_r-re is. Ezt az alteret hívjuk a két altér metszetének, és $\pi_k \cap \pi_r$-rel jelöljük.*

- *Ha π_k és π_r két tetszőleges altér, melyekre $\pi_k \cap \pi_r = \pi_m$, továbbá π_t azon alterek metszete, melyek mindkét alteret tartalmazzák, akkor $k + r = m + t$.*

- *Adott egy $q \geq 3$ egész szám, hogy minden egyenes $q + 1$ pontot tartalmaz. Ekkor a teret* q-adrendűnek *nevezzük.*

2.26. Tulajdonságok. *A q-adrendű n-dimenziós térnek:*

- *$q^n + q^{n-1} + ... + q + 1$ pontja, és ugyanennyi hipersíkja van;*

- *bármely $k+1$ általános helyzetű pontjára (semelyik $m+1$ nincs egy m-dimenziós altérben $m < k$ esetén) egyértelműen illeszkedik k-dimenziós altér;*

- *minden k-dimenziós altér k-dimenziós projektív tér az örökölt tartalmazással.*

Ezekből az állításokból már egyszerű kombinatorikus meggondolással kapjuk a tér k-dimenziós altereinek számát, illetve hogy egy rögzített m-dimenziós altérre hány k-dimenziós altér illeszkedik.

2.27. Állítás. *Egy n-dimenziós véges projektív tér* duális terét *úgy kapjuk, hogy k-dimenziós altereit nevezzük a duális tér $(n - k - 1)$-dimenziós altereinek, a tartalmazást pedig megfordítjuk. Ez szintén n-dimenziós véges projektív tér, és ha az eredeti tér q-adrendű, akkor a duális tér is az.*

2.28. Definíció. *Egy projektív teret* desargues-i projektív tér*nek nevezünk, ha teljesíti Desargues axiómáját: ha A, B, C és A', B', C' két olyan ponthármas, melyre az AA', BB' és CC' egyenesek egy pontban metszik egymást, akkor az $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ és $AC \cap A'C'$ pontok egy egyenesre illeszkednek.*

2.29. Állítás. *Ha $n \geq 3$, akkor minden n-dimenziós projektív tér teljesíti Desargues axiómáját, azaz desargues-i.*

2.30. Definíció. *Egy adott K test esetén K feletti* vektortér*nek nevezzük azt a $(V, +, \cdot)$ struktúrát, amire:*

- *$(V, +)$ kommutatív csoport;*
- *a $(\cdot) : K \times V \to V$ szorzás teljesíti a következőket:*
  - *minden $\alpha, \beta \in K$, $x \in V$ esetén $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$;*
  - *minden $\alpha, \beta \in K$, $x \in V$ esetén $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;*
  - *minden $\alpha \in K$, $x, y \in V$ esetén $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;*
  - *minden $x \in V$ esetén $1 \cdot x = x$.*

A V vektortér $e_0, e_1, ..., e_n$ elemeit lineárisan független*nek mondjuk, ha $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i = 0$, $\lambda_i \in K$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\lambda_i = 0$ minden i indexre.*

*A V vektortér n-*dimenziós*, ha van n lineárisan független eleme, de $n+1$ lineárisan független eleme már nincs.*

A V vektortér részhalmaza k-dimenziós altér*, ha az örökölt műveletekkel k-dimenziós vektorteret alkot.*

2.31. Definíció. *Legyen K egy véges test, V pedig egy K feletti $(n+1)$-dimenziós vektortér. Ekkor $PG(n, K)$ jelöli azt a struktúrát, melynek k-dimenziós alterei a V tér $(k+1)$-dimenziós alterei minden $-1 \leq k \leq n$ esetén. Ha $K = GF(q)$, akkor a $PG(n, q)$ jelölést is használjuk.*

Megjegyzés. Felhasználva az $(n+1)$-dimenziós vektorterek ismert tulajdonságait, a $PG(n, q)$ projektív tér pontjait reprezentálhatjuk $(x_0, x_1, ..., x_n)^T$ vektorokkal, ahol minden i-re $x_i \in GF(q)$, és minden $t \in GF(q)^*$ esetén $(x_0, x_1, ..., x_n)^T$ és $(tx_0, tx_1, ..., tx_n)^T$ ugyanazt a pontot reprezentálja, továbbá a $(0, 0, ..., 0)^T$ vektor nem reprezentál pontot. Ugyanez elmondható $PG(n, q)$ hipersíkjaira is, de a jelölés egyértelműsége miatt ezeket szögletes zárójellel használjuk. Hogy a reprezentáció is egyértelmű legyen, a pontkoordinátákat általában balról, a hipersík koordinátákat pedig jobbról normáljuk, azaz azt a reprezentációt választjuk, amiben a legkisebb (illetve legnagyobb) indexű nemnulla koordináta 1.

2.32. Állítás. *A $PG(n, q)$ tér egy $\underline{x}$ pontja pontosan akkor illeszkedik egy $\underline{h}$ hipersíkra, ha bármely $\underline{x} = (x_0, x_1, ..., x_n)^T$, $\underline{h} = [h_0, h_1, ..., h_n]^T$ reprezentációval $\underline{h}^T \underline{x} = h_0 x_0 + h_1 x_1 + ... + h_n x_n = 0$.*

2.33. Állítás. *A $PG(n,q)$ tér desargues-i.*

Minden desargues-i n-dimenziós véges projektív tér izomorf egy $PG(n,q)$ térrel alkalmas q prímhatvánnyal.

2.34. Következmény. *Ha $n > 2$, akkor minden n-dimenziós véges projektív tér izomorf egy $PG(n,q)$ térrel valamilyen q prímhatványra.*

2.35. Állítás. *A $PG(2,q^2)$ síkon teljesülnek az alábbiak:*

- *van Baer részsík;*
- *egy egyenes három pontját pontosan egy Baer egyenes tartalmazza;*
- *egy egyenes két pontját pontosan $q+1$ Baer egyenes tartalmazza;*
- *a sík négy általános helyzetű pontját pontosan egy Baer sík tartalmazza;*
- *két Baer sík metszete a következő lehet:*
  - *az üres halmaz,*
  - *egy pont és egy egyenes,*
  - *két egyenes, amik egy pontban metszik egymást, és még egy pont az egyik egyenesről,*
  - *három általános helyzetű egyenes és a metszéspontjaik,*
  - *$q+1$ pont egy egyenesen, és $q+1$ egyenes az egyik pontján keresztül,*
  - *$q+2$ pont és $q+2$ egyenes, amiből $q+1$ pont kollineáris, $q+1$ egyenes pedig egy pontban metszi egymást.*

Megjegyzés: egy egyenes egy Baer síkhoz tartozik, ha pontjainak halmazát Baer egyenesben metszi. Ezzel a szóhasználattal az, hogy egy egyenes benne van két Baer sík metszetében, csak annyit jelent, hogy mindkét Baer sík tartalmazza egy-egy Baer részegyenesét, de ezek nem feltétlenül egyeznek meg.

2.36. Definíció. *Egy projektív sík k elemű ponthalmazát* k-*ívnek nevezzük, ha a sík minden egyenese legfeljebb két pontban metszi, azaz semelyik három pontja nem kollineáris. Egy k-ívet* teljesnek mondunk, *ha nincs olyan $(k+1)$-ív, aminek része lenne. A sík egy egyenese egy ívre nézve* szelő, érintő, *vagy* elkerülő, *ha az ívvel rendre 2, 1, vagy 0 közös pontja van.* Oválisnak *nevezünk egy olyan ívet, aminek minden pontjában egyetlen érintő egyenese van.*

2.37. Állítás. *A q-adrendű projektív sík oválisai éppen a $(q+1)$-ívek, és ezek páratlan q esetén teljesek.*

A $PG(2,q)$ síkon van ovális.

Ha q páros, akkor az ovális minden érintője egy pontra illeszkedik, és ezt a pontot hozzávéve az oválishoz teljes $(q+2)$-ívet kapunk, melyet hiperoválisnak *nevezünk.*

2.38. Definíció. *A $PG(3,q)$ tér olyan ponthalmazát, aminek nincs három egy egyenesre illeszkedő pontja,* süvegnek *nevezzük. Egy süvegnek legfeljebb q^2+1 pontja van, és ha éppen ennyi van, akkor* ovoidnak *nevezzük.*

2.39. Definíció. *Legyen*

$$Q_n(\underline{x}) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

kvadratikus alak. A $PG(n,q)$ tér azon $\underline{x} = (x_0, ..., x_n)$ pontjainak halmazát, amikre $Q_n(\underline{x}) = 0$ teljesül, másodrendű varietásnak *nevezzük.*

A varietás elfajuló, *ha van olyan koordináta-transzformáció, ami után a meghatározó kvadratikus alak eggyel kevesebb ismeretlent tartalmaz. Ellenkező esetben a varietás* nemelfajuló, *és ekkor a* másodrendű felület, *vagy* másodrendű kvádrika *elnevezést használjuk, illetve $n=2$ esetén a* másodrendű görbe *elnevezés is használatos.*

2.40. Állítás. *Másodrendű felület kvadratikus alakja a $PG(n,q)$ tér alkalmas koordináta-transzformációjával az alábbi* kanonikus alakok *egyikére hozható:*

- *Ha n páros, akkor $Q_n(\underline{x}) = x_0^2 + x_1x_2 + ... + x_{n-1}x_n$.*
  Az ehhez tartozó felületet parabolikus kvádrikának *hívjuk.*
- *Ha n páratlan, akkor vagy*
  - $Q_n(\underline{x}) = x_0x_1 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n$, vagy
  - $Q_n(\underline{x}) = f(x_0,x_1) + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n$, *ahol f irreducibilis homogén másodfokú polinom.*

  Az ezekhez tartozó felületeket rendre hiperbolikus kvádrikának, *illetve* elliptikus kvádrikának *nevezzük.*

Megjegyzés. A $PG(3,q)$ téren az adott f_1 és f_2 irreducibilis polinomok esetén az $\{(x_0,x_1,x_2,x_3) \mid f(x_0,x_1) + f(x_2,x_3) = 0\}$ halmaz hiperbolikus kvádrika.

Általában a következő jelöléseket használjuk:

A $PG(n,q)$ projektív tér egy k-dimenziós alterét Π_k, egy k-dimenziós parabolikus kvádrikáját $\mathcal{P}_k$, egy k-dimenziós elliptikus kvádrikáját $\mathcal{E}_k$, egy k-dimenziós hiperbolikus kvádrikáját $\mathcal{H}_k$ jelöli.

2.41. Definíció. *Ha adott $PG(n,q)$ projektív tér két altere, melyek közül egyik sem tartalmazza a másikat, és mindkettőben adott egy egy ponthalmaz: $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$, akkor $\mathcal{X}\mathcal{Y}$-nal jelöljük azon $PG(n,q)$-beli pontok halmazát, melyek $\mathcal{X}$-beli pontokat $\mathcal{Y}$-beli pontokkal összekötő egyenesekre illeszkednek. Ha az egyik halmaz egy pontból áll, akkor* kúpot *kapunk, máskülönben szokás egy ilyen halmazt* általánosított kúp*nak nevezni.*

A következő állítások bizonyítása megtalálható például a [20], [21], [22], [28] könyvekben.

2.42. Tétel. *Egy másodrendű varietás szükségképpen másodrendű kvádrika vagy másodrendű kvádrikákból származó általánosított kúp.*

Például a $PG(4,q)$ projektív tér másodrenű varietásai: $\mathcal{P}_4$, $\Pi_0\mathcal{H}_3$, $\Pi_0\mathcal{E}_3$, $\Pi_1\mathcal{P}_2$, $\Pi_2\mathcal{H}_1$, $\Pi_2\mathcal{E}_1$, vagy Π_3.

2.43. Tulajdonságok. *A $PG(2,q)$, $PG(3,q)$ és $PG(4,q)$ projektív terek másodrendű kvádrikáinak következő tulajdonságait fogjuk használni.*

$PG(2,q)$ *A $PG(2,q)$ síkon q^5-q^2 másodrendű görbe van. Egy másodrendű görbe ovális, azaz $q+1$ pontja van, egy egyenes vagy elkerüli, vagy érinti, vagy két pontban metszi, és minden pontjára pontosan egy érintő illeszkedik. A sík összes egyenese közül $\frac{s(s-1)}{2}$ kerüli el, és ugyanennyi metszi két pontban.*

$PG(3,q)$ *A $PG(3,q)$ téren $\frac{1}{2}q^4(q^3-1)(q^2-1)$ nemelfajuló hiperbolikus kvádrika van.*

$PG(3,q)$ $q+1$ páronként kitérő egyenesét regulus*nak hívjuk, ha $PG(3,q)$ minden olyan egyenese, ami közülük legalább hármat metsz, metszi mindet. A $PG(3,q)$ tér azon egyenesei, melyek egy adott $\mathcal{R}$ regulus minden egyenesét metszik, szintén regulust alkotnak, erre szokás az $\mathcal{R}^{OPP}$ jelölést használni. Ekkor $\mathcal{R}$ és $\mathcal{R}^{OPP}$ ugyanazt a $(q+1)^2$ pontját fedi a $PG(3,q)$ térnek. A tér bármely 3 páronként kitérő egyenese egyértelműen meghatároz egy regulust.*

Egy hiperbolikus másodrendű felület pontjai regulust alkotnak, és minden regulus egyben egy hiperbolikus kvádrika. Tehát egy hiperbolikus kvádrikának $(q+1)^2$ pontja van, és minden egyenes 0, 1, 2 vagy $q+1$ pontban metszi.

A $PG(3,q)$ téren $\frac{1}{2}q^4(q^3-1)(q^2+1)$ nemelfajuló elliptikus kvádrika van. Egy elliptikus kvádrika ovoid, azaz q^2+1 pontja van, és minden egyenes 0, 1, vagy 2 pontban metszi. Egy sík pedig vagy érinti, vagy másodrendű görbében metszi.

$PG(4,q)$ *A $PG(4,q)$ téren $s^6(s^3-1)(s^5-1)$ nemelfajuló parabolikus kvádrika van. Egy parabolikus kvádrikának q^3+q^2+q+1 pontja van.*

Egy nemelfajuló parabolikus kvádrikát a tér $(s^4+s^2)/2$ hipersíkja metszi hiperbolikus kvádrikában.

2.44. Tétel (Segre). *Ha q páratlan, akkor $PG(2,q)$ minden oválisa másodrendű görbe.*

2.45. Tétel (Barlotti, Panella). *Ha q páratlan, akkor $PG(3,q)$ minden ovoidja elliptikus kvádrika.*

2.46. Definíció. *Egy π projektív sík egy ponthalmaza* $\{0,1,2,t\}$-típusú, *ha π bármely egyenese 0, 1, 2 vagy t pontban metszi.*

2.47. Tétel (Tallini). *Legyen adott a $PG(n,q)$ téren $n \geq 3$, $q > 2$ esetén egy $\{0,1,2,q+1\}$-típusú $\mathcal{T}$ halmaz. Ha $\mathcal{T}$-nek legalább annyi pontja van, mint $PG(n,q)$ egy hipersíkjának, akkor szükségképpen az alábbi esetek valamelyike áll fenn:*

1. *$\mathcal{T}$ egy másodrendű varietás;*

2. *$q=2^e$, n páros, és $\mathcal{T}$ egy másodrendű varietás és egy olyan pont uniója, ami illeszkedik annak minden érintőhipersíkjára;*

3. *$\mathcal{T}$ egy hipersík és egy arra nem illeszkedő pont uniója.*

2.48. Állítás. *Legyen $\mathcal{Q}$ egy $PG(4,q)$-beli ovoid alapú kúp. Erre teljesülnek az alábbiak:*

- *Egy hipersík az alábbiak egyikében metszi:*
  - *egy egyenesben,*
  - *egy ovoidban,*
  - *egy ovális feletti kúpban.*
- *Egy sík az alábbiak egyikében metszi:*
  - *egy pontban,*

– *egy egyenesben,*

– *egy metsző egyenespárban,*

– *egy oválisban.*

Azaz egy sík 1, $q+1$ *vagy* $2q+1$ *pontban metszheti csak.*

Legyen $m \in \mathcal{Q}$ *egy egyenes (azaz* m *az ovoid egy pontját és a csúcsot összekötő egyenes, másnéven* $\mathcal{Q}$ *egy* alkotója). *Ekkor egyértelműen létezik a térnek olyan* Σ_m *hipersíkja, amire* $\mathcal{Q} \cap \Sigma_m = \{m\}$, *és erre a hipersíkra még az is teljesül, hogy tartalmazza a tér minden olyan síkját, ami a* $\mathcal{Q}$ *kúpot egy* m*-beli pontban érinti.*

3. Unitálok

3.1. $PG(n,q)$ polaritásai

3.1. Definíció. *Két $PG(n,q)$ projektív tér pontjai között fennálló bijektív leképezést* kollineáció*nak nevezünk, ha kollineáris ponthalmazt kollineáris ponthalmazba visz.*

Elemi úton belátható, hogy ezzel ekvivalens a következő:

3.2. Definíció. *Két $PG(n,q)$ projektív tér megfelelő alterei közötti bijektív leképezést* kollineáció*nak nevezünk, ha illeszkedés-tartó.*

Az alábbi két leképezés kollineáció:
1. *Lineáris transzformáció*:
egy A $(n+1)\times(n+1)$-es invertálható mátrix által generált leképezés, melyre $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$ minden $\underline{x} \in PG(n,q)$, ahol $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, ..., x_n)^T$.

2. *Test-automorfizmus által generált kollineáció*:
egy $\sigma \in Aut(GF(q))$ által generált leképezés, melyre $\underline{x} \mapsto \underline{x}^\sigma$ minden $\underline{x} \in PG(n,q)$, ahol $\underline{x}^\sigma = (x_0^\sigma, x_1^\sigma, x_2^\sigma, ..., x_n^\sigma)^T$.

A következő tétel szerint nincs is más kollineáció, csak ezeknek szorzatai.

3.3. Tétel (A projektív geometria alaptétele). *$PG(n,q)$ minden kollineációja előállítható egy lineáris transzformáció és egy test-automorfizmus által generált kollineáció szorzataként.*

3.4. Definíció. *Egy $PG(n,q) \to PG(n,q)^*$ kollineációt* korreláció*nak nevezünk.*

3.5. Definíció. *A másodrendű korrelációt* polaritás*nak nevezzük.*

Azaz egy $\mathcal{P} : PG(n,q) \to PG(n,q)^*$ korrelációt polaritásnak hívunk, ha $\mathcal{P}^2 : PG(n,q) \to PG(n,q)^* \to PG(n,q)$ az identitás $PG(n,q)$-ban.
A következőkben $PG(n,q)$ polaritásait osztályozzuk.

Legyen $\mathcal{P}$ $PG(n,q)$ egy polaritása. Ez egyben kollineációja is $PG(n,q)$-nak, így az alaptétel szerint: $\mathcal{P} : \underline{x} \mapsto A\underline{x}^\sigma$ valamilyen $(n+1)\times(n+1)$-es nemelfajuló A mátrixszal, és $\sigma \in Aut(GF(q))$ automorfizmussal. Ezeket szeretnénk jellemezni.

3.6. Lemma. *Egy lineáris transzformáció, aminek mátrixa a nemelfajuló A mátrix a $PG(n,q)$ projektív tér egy $\underline{h} = [h_0, h_1, ..., h_n]^T$ hipersíkját az $\left(A^T\right)^{-1} \underline{h}$ hipersíkba viszi.*

Bizonyítás. PG(n,q) $\underline{h}$ hipersíkja azokból az $\underline{x}$ pontokból áll, melyekre $\underline{h}^T \underline{x} = 0$. Mivel egy lineáris transzformáció hipersíkot hipersíkba visz, ezért valamilyen $(n+1) \times (n+1)$-es nemelfajuló B mátrixszal: $\underline{h} \mapsto B\underline{h}$. A $\underline{h}$-beli pontok képei alkotják $\underline{h}$ képét, ezért: $\underline{h}^T \underline{x} = 0$ akkor és csak akkor, ha $(B\underline{h})^T A\underline{x} = 0$. Ebből már következik, hogy $B = \left(A^T\right)^{-1}$. ■

3.7. Tétel. *Egy $\mathcal{P} : \underline{x} \mapsto A\underline{x}^\sigma$ korreláció akkor és csak akkor polaritás, ha*

$$\left(A^T\right)^{-1} A^\sigma = tI \text{ valamilyen } t \in GF(q) \text{ elemmel, és } \sigma^2 = id.$$

Bizonyítás. $\mathcal{P}$ $PG(n,q)$ egy $\underline{x}$ pontját $PG(n,q)^*$ egy pontjába viszi, ami $PG(n,q)$-nak egy hipersíkja. Így a fenti lemma szerint:
$\mathcal{P}^2 : \underline{x} \mapsto A\underline{x}^\sigma \mapsto \left(A^T\right)^{-1} (A\underline{x}^\sigma)^\sigma$. Ahhoz, hogy $\mathcal{P}$ polaritás legyen, ennek kell az identitásnak lennie, azaz $\left(A^T\right)^{-1} A^\sigma \underline{x}^{\sigma^2} = t\underline{x}$ valamilyen $t \in GF(q)$ elemmel. Ezzel beláttuk a tételt. ■

Most már esetszétválasztással megkapjuk $PG(n,q)$ polaritásait:

1. $\sigma = id$ Ekkor $\left(A^T\right)^{-1} A = tI$, azaz $A = tA^T$ és $A^T = tA$, amiből $A = t^2 A$, azaz $t = \pm 1$.
   (a) Páratlan q esetén
      i. $t = 1, A^T = A$, ennek neve *közönséges polaritás*,
      ii. $t = -1, A^T = -A$
         A. páratlan n esetén nincs ilyen polaritás, mert $detA = 0$ lenne,
         B. páros n esetén neve *nullpolaritás*.
   (b) Páros q esetén (ekkor $t = -1 = 1$, azaz $A^T = A$)
      i. Ha a főátlóban minden elem nulla, akkor megint a *nullpolaritás*t kapjuk,
      ii. ha van nemnulla elem, akkor *pszeudopolaritás*t.

   Számunkra a következő eset lesz igazán érdekes.

2. $\sigma \neq id$

$GF(q)$ automorfizmusai $q = p^e$ esetén éppen az $x \mapsto x^{p^i}$ alakú automorfizmusok. Egy $\sigma : x \mapsto x^{p^i}$ automorfizmus akkor lehet csak másodrendű, azaz $x^{p^{2i}} = x = x^q$, ha $p^i = \sqrt{q}$, tehát q négyzetszám, és szükségképpen $\sigma : x \mapsto x^{\sqrt{q}}$.

$\left(A^T\right)^{-1} A^\sigma = tI$-ből $A^\sigma = tA^T$, amiből
$A = t^\sigma \left(A^T\right)^\sigma$, illetve $(A^\sigma)^T = tA$. Ezeket összevetve: $(A^\sigma)^T = tt^\sigma \left(A^T\right)^\sigma$.
Mivel $(A^\sigma)^T = \left(A^T\right)^\sigma$, ezért $tt^\sigma = 1$, azaz $t^{\sqrt{q}+1} = 1$.

Legyen α olyan testelem, amire $\alpha^{\sqrt{q}-1} = t$. Ha egy lineáris transzformáció mátrixát egy testelemmel megszorozzuk, az tudvalevőleg ugyanaz a transzformáció marad. Tekintsük most A helyett az αA mátrixot mint a polaritás mátrixát. A tétel szerint tehát, hogy $\mathcal{P}$ polaritás legyen, erre (is) szükségképp teljesül $\left((\alpha A)^T\right)^{-1} (\alpha A)^\sigma = tI$, azaz $\alpha^\sigma A^\sigma = t\alpha A^T$, amiből $\alpha^\sigma = \alpha^{\sqrt{q}} = \alpha t$ miatt $A^T = A^\sigma$.

Tehát a $PG(n,q)$-beli $\mathcal{P} : \underline{x} \mapsto A\underline{x}^\sigma$ polaritásra, ha $\sigma \neq id$, akkor $\sigma : x \mapsto x^{\sqrt{q}}$, és $A^T = A^\sigma = A^{\sqrt{q}}$. Ennek a polaritásnak neve: *Hermite-polaritás.*

3.8. Definíció. *Egy $PG(n,q)$-beli polaritás* autokonjugált *pontjainak hívjuk azokat a pontokat, amik illeszkednek a nekik megfeleltetett hipersíkra.*

3.9. Definíció. Hermite-felületnek *hívjuk $PG(n,q)$ egy Hermite-polaritásának autokonjugált pontjait. Az $n = 2$ esetben az* Hermite-görbe *elnevezést is használjuk.*

Bármilyen polaritásnál az $\underline{x}$ pont akkor és csak akkor illeszkedik a neki megfeleltetett $A\underline{x}^\sigma$ hipersíkra, ha $\underline{x}^T A\underline{x}^\sigma = 0$, azaz $\sum_{i,j=0}^n a_{ij} x_i x_j^\sigma = 0$.

3.10. Állítás. *Lineáris transzformáció Hermite-felületet Hermite-felületbe visz. Bármely Hermite-felület a $\sum_{i=0}^n x_i^{\sqrt{q}+1} = 0$ egyenletű Hermite-felületbe vihető alkalmas lineáris transzformációval.*

Bizonyítás. Legyen q egy négyzetszám, és $\sigma : x \mapsto x^{\sqrt{q}}$. Egy A mátrixot *Hermite-mátrixnak* nevezünk, ha $\det A \neq 0$, és $A^T = A^\sigma$. A fentiek szerint egy polaritás akkor és csak akkor Hermite-polaritás, ha mátrixa Hermite-mátrix. Ha A Hermite-mátrix, B pedig egy tetszőleges nemelfajuló mátrix, akkor $\left(B^T\right)^{-1} A \left(B^\sigma\right)^{-1}$ is Hermite-mátrix, hiszen nemelfajuló, és

$$\left(\left(B^T\right)^{-1} A \left(B^\sigma\right)^{-1}\right)^T = \left(\left(B^T\right)^{-1} A \left(B^\sigma\right)^{-1}\right)^\sigma.$$

Viszont a B lineáris transzformáció az $\underline{x}^T A \underline{x}^\sigma = 0$ Hermite-felület pontjait éppen az $\underline{x}^T \left(B^T\right)^{-1} A \left(B^\sigma\right)^{-1} \underline{x}^\sigma = 0$ Hermite-felület potjaiba viszi.

Alkalmas B választással $\left(B^T\right)^{-1} A \left(B^\sigma\right)^{-1}$ diagonális (lásd például a [28] könyvben), így ennek az Hermite-felületnek az egyenlete: $\sum_{i=0}^n a_{ii} x_i x_i^\sigma = \sum_{i=0}^n a_{ii} x_i^{\sqrt{q}+1} = 0$ valamilyen $a_{ii} \in GF(q)$ elemekkel. Az $A^T = A^\sigma$ összefüggés miatt $a_{ii}^\sigma = a_{ii}^{\sqrt{q}} = a_{ii}$, így a 2.13 tétel szerint $a_{ii} \in GF(\sqrt{q})$, és léteznek olyan $b_i \in GF(q)$ elemek, amelyekkel $b_i^{\sqrt{q}+1} = a_{ii}$. Ezekkel az egyenlet $\sum_{i=0}^n (b_i x_i)(b_i x_i)^{\sqrt{q}} = 0$, azaz $\sum_{i=0}^n x_i^{\sqrt{q}+1} = 0$ alakba írható. ■

Megjegyzés. Mivel lineáris transzformáció inverze is lineáris transzformáció, ezért ezzel beláttuk, hogy $PG(n,q)$ bármely két Hermite-felülete lineáris transzformációval egymásba vihető.

Hermite-görbe egyenlete:

Tehát, ha q négyzetszám, akkor $PG(2,q)$ bármely Hermite-görbéje az $x_0^{\sqrt{q}} + x_1^{\sqrt{q}} + x_2^{\sqrt{q}} = 0$ egyenletű Hermite-görbébe vihető egy alkalmas lineáris transzformációval.

3.2. Hermite-görbék kombinatorikus jellemzői

A továbbiakban $q = s^2$, és $PG(2,q) = PG(2,s^2)$ pontjait $(x,y,z)^T$-tal jelölöm. Az előző fejezet értelmében egy $\mathcal{H}$ Hermite-görbe tekinthető azon $(x,y,z)^T \in PG(2,s^2)$ pontok halmazaként, melyre $x^{s+1} + y^{s+1} + z^{s+1} = 0$ teljesül.

3.11. Definíció. *$PGL(3,s^2)$ jelöli a $PG(2,q)$ projektív sík lineáris transzformációinak csoportját, $PGU(3,s^2)$ pedig ennek azon részcsoportját, mely $\mathcal{H}$-t helyben hagyja. Ennek neve* unitér csoport.

3.12. Tétel. *A $PGU(3,s^2)$ unitér csoport 2-tranzitív $\mathcal{H}$ pontjain. Azon részcsoportja, mely $\mathcal{H}$ 2 pontját fixen hagyja, a $GF(s^2)^*$ multiplikatív csoporttal izomorf.*

Bizonyítás. Ennek a tételnek a bizonyítása jelentősen egyszerűbb, ha a $\mathcal{H}$ Hermite-görbe egy olyan alakját használjuk, melyet csak a 4.4.3 fejezetben vezetünk be, így a bizonyítás ott szerepel. ■

Most térjünk rá $\mathcal{H}$ jellemzésére:

3.13. Állítás. *Ha a $PG(2,s^2)$ sík egy egyenese $\mathcal{H}$-t legalább két pontban metszi, akkor pontosan $s+1$ pontban metszi.*

Bizonyítás. Tekintsük az $[1,0,0]$ egyenes és $\mathcal{H}$ metszetét:

$$[1,0,0] \cap \mathcal{H} = \{ (0,1,z) \in PG(2,q) \mid z^{s+1} = -1, z \in GF(s^2) \}.$$

A $z^{s+1} = -1$ egyenletnek pontosan $s+1$ megoldása van $GF(s^2)$-ben (lásd a 2.13 tétel (5) pontját), így ebből már látszik, hogy az $[1,0,0]$ egyenes $\mathcal{H}$-t pontosan $s+1$ pontban metszi. Az állítás most már PGU 2-tranzitivitásából következik: ha egy l egyenes $\mathcal{H}$-t két pontban metszi, találhatunk PGU-nak olyan elemét, ami $[1,0,0] \cap \mathcal{H}$ két pontját ebbe a két pontba viszi, és ekkor $[1,0,0] \cap \mathcal{H}$ minden pontja az $l \cap \mathcal{H}$ halmazba kerül, tehát ez szükségképpen $s+1$ elemű. ■

3.14. Állítás. *$\mathcal{H}$ pontjainak száma s^3+1*

Bizonyítás. $PG(2,s^2)$ összes pontja: $(1,y,z), (0,1,z), (0,0,1)$, ahol $y,z \in GF(s^2)$. Vizsgáljuk meg, hogy melyik típusból hány van $\mathcal{H}$-ban.
$(0,0,1)$: ez nem eleme $\mathcal{H}$-nak.
$(0,1,z)$: ez akkor és csak akkor eleme $\mathcal{H}$-nak, ha $z^{s+1} = -1$. Ennek $s+1$ különböző megoldása van $GF(s^2)$-ben.
$(1,y,z)$: ez akkor és csak akkor eleme $\mathcal{H}$-nak, ha $y^{s+1} + z^{s+1} = -1$. Az $y = 0, z^{s+1} = -1$, illetve a $z = 0, y^{s+1} = -1$ választások együttesen $2(s+1)$ megoldást adnak. A maradék esetben $y^{s+1} = f$, és $z^{s+1} = -1-f$ olyan f elemmel, amire $f \neq -1, f \neq 0$, és $f \in GF(s)$, hiszen $f^s = f$. Ide y-t s^2-s-2 féleképpen választhatjuk, ezekhez z-nek mindig $s+1$ megoldása adódik. Összeszámolva:
$|\mathcal{H}| = (s+1) + 2(s+1) + (s^2-s-2)(s+1) = (s+1)(s^2-s+1) = s^3+1$. ■

3.15. Állítás. *$\mathcal{H}$ bármely pontján áthaladó s^2+1 egyenes közül pontosan 1 érinti, s^2 pedig $s+1$ pontban metszi $\mathcal{H}$-t.*

Bizonyítás. Kössük össze a kiválasztott $\mathcal{H}$-beli pontot $\mathcal{H}$ összes többi pontjával. A korábbi állítás szerint ezek mind $(s+1)$-szelői $\mathcal{H}$-nak, és az adott ponton át minden szelőegyenest megkaptunk. Ezzel s^3 egyenest számoltunk össze, mindegyiket pontosan s-szer, azaz a metsző egyenesek száma az adott ponton keresztül éppen $s^3/s = s^2$. Ebből már azt is látjuk, hogy az adott pontban pontosan egy érintője van $\mathcal{H}$-nak. ■

3.16. Állítás. *A $PG(2,s^2)$ sík s^4+s^2+1 egyenese közül pontosan s^3+1 érinti, és $s^4-s^3+s^2$ metszi $\mathcal{H}$-t.*

Bizonyítás. Az tudjuk hogy $\mathcal{H}$ minden pontjára pontosan egy érítő illeszkedik, azaz összesen s^3+1 érintője van. Csak a $\mathcal{H}$-t metsző egyeneseket kell összeszámolni.

$\mathcal{H}$ pontjai közül $\binom{s^3+1}{2}$-féleképpen lehet kettőt kiválasztani, és ezzel $\mathcal{H}$ minden szelőegyenesét $\binom{s+1}{2}$-ször számoltuk, azaz a szelőegyenesek száma: $\frac{(s^3+1)s^3}{(s+1)s} = s^2(s^2 - s + 1) = s^4 - s^3 + s^2$. ∎

3.17. Következmény. *$PG(2, s^2)$ bármely egyenese vagy érinti $\mathcal{H}$-t, vagy $s + 1$ pontban metszi, azaz nincs olyan egyenes, ami $\mathcal{H}$-t elkerülné.*

3.18. Állítás. *A $PG(2, s^2)$ sík bármely nem $\mathcal{H}$-beli pontjára pontosan $s + 1$ érintő és $s^2 - s$ szelőegyenes illeszkedik.*

Bizonyítás. Jelölje t az adott pontra illeszkedő érintők számát, r pedig a metsző egyenesekét. Ekkor egyfelől: $t + r = s^2 + 1$, mert összesen ennyi egyenes illeszkedik a pontra, másfelől: $t + (s + 1)r = s^3 + 1$, hiszen ezeken az egyeneseken már $\mathcal{H}$ összes pontja rajta van. A második összefüggésből kivonva az elsőt: $sr = s^3 - s^2$, amiből: $r = s^2 - s$, és $t = s + 1$. ∎

3.19. Definíció. *Egy $\mathcal{H}$-ra nem illeszkedő P pont* lábai*nak hívjuk, és P_δ-val jelöljük $\mathcal{H}$ azon pontjainak halmazát, melyek érintői P-re illeszkednek. Az előző állítás szerint P_δ éppen $s + 1$ pont.*

3.20. Állítás. *A $\mathcal{H}$ Hermite-görbére nem illeszkedő P pont lábai egy egyenesen vannak.*

Bizonyítás. Tetszőleges érintőegyenes képe a polaritásnál éppen az érintési pont. A P-ből húzott érintők képei tehát éppen P lábai. A polaritás illeszkedéstartó leképezés, így abból, hogy az érintők mind egy pontban (P-ben) metszik egymást, következik, hogy a lábak egy egyenesen (P képén) vannak. ∎

3.21. Állítás. *Hermite-görbét minden szelőegyenese Baer egyenesben metsz.*

Bizonyítás. Tekintsük az $x^{s+1} + \epsilon yz^s - \epsilon y^s z = 0$ egyenletű $\mathcal{H}$ Hermite-görbét, ahol páratlan s esetén ϵ a 2.14 tételben szereplő elem, páros s esetén pedig $\epsilon = 1$. Ez az egyenlet az alábbi mátrixhoz tartozó Hermite-polaritás autokonjugált pontjait írja le:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & -\epsilon & 0 \end{pmatrix},$$

ami tényleg Hermite-mátrix, hiszen $\epsilon^s = -\epsilon$. Tekintsük ennek metszetét az $[1,0,0]$ egyenessel:

$$[1,0,0] \cap \mathcal{H} = \{ (0,y,z) \mid yz(z^{s-1} - y^{s-1}) \} = \\ = \{(0,0,1),(0,1,0)\} \cup \{ (0,1,z) \mid z^{s-1} = 1 \}.$$

A $z^{s-1} = 1$ feltétel ekvivalens azzal, hogy $z^s - z = 0$, azaz $z \in GF(s)$, tehát ezzel beláttuk, hogy az $[1,0,0]$ egyenes Baer egyenesben metszi $\mathcal{H}$-t.

Mivel $PGU(3,s^2)$ 2-tranzitív U pontjain, ezért ahhoz, hogy ez minden szelőegyenesre teljesüljön, csak azt kell belátnunk, hogy lineáris transzformáció Baer egyenest Baer egyenesbe visz. Ennél több is igaz: kollineáció Baer síkot Baer síkba visz, ami egyszerű következménye annak, hogy a kollineáció illeszkedéstartó leképezés. Ebből már minden Hermite-görbére következik az állítás, hiszen $PG(2,s^2)$ bármely Hermite-görbéje lineáris transzformációval a fenti Hermite-görbébe vihető. ∎

3.22. Következmény. *Adott $\mathcal{H}$ Hermite-görbe és $P \notin \mathcal{H}$ esetén P_δ Baer egyenes.*

3.3. Blokkrendszerek, unitálok

3.23. Definíció. *Adott v, b, k, r pozitív egész számok esetén* illeszkedési struktúrának *nevezzük, és (v_r, b_k)-val jelöljük egy v elemű halmaz b elemű részhalmazrendszerét (azaz a v elemű halmaznak b darab részhalmazát), ha arra teljesülnek a következők:*

(i) minden részhalmazban k elem van;

(ii) minden elem r részhalmazban van benne.

Megjegyzés. Leszámlálással egyszerűen igazolható, hogy $bk = rv$, azaz a v, b, k, r számok közül bármely három már meghatározza a negyediket.

3.24. Definíció. *Adott v, b, k, r, t, λ pozitív egész számok esetén $t-(v,k,\lambda)$* blokkrendszer*nek nevezzük azt a (v_r, b_k) illeszkedési struktúrát, amire teljesül:*

(iii) bármely t elem pontosan λ részhalmazban, azaz blokkban szerepel együtt.

Megjegyzés. Elsőre hibásnak tűnhet a fenti definíció, hiszen a $t-(v,k,\lambda)$ blokkrendszer elnevezésben nem szerepel sem b, sem r, de itt is könnyű belátni, hogy a megadott hat paraméter nem független: a korábbi $bk = rv$

összefüggés mellett teljesül még $\binom{v-1}{t-1}\lambda = r\binom{k-1}{t-1}$ is, ami szintén igazolható leszámlálással.

Megjegyzés. Ezek után természetes módon tekinthető egy $PG(2,s^2)$-beli Hermite-görbe $2-(s^3+1, s+1, 1)$ blokkrendszernek: elemei legyenek $\mathcal{H}$ pontjai, blokkjai pedig legyenek $\mathcal{H}$-nak a metsző egyenesekkel vett metszetei.
Felvetődik a kérdés, hogy vajon minden $PG(2,s^2)$-beli $2-(s^3+1, s+1, 1)$ blokkrendszer Hermite-görbe-e. Ennek vizsgálata során célszerűvé vált a következő fogalom bevezetése.

3.25. Definíció. *Egy tetszőleges projektív sík $2-(s^3+1, s+1, 1)$ blokkrendszerét s-edrendű* unitál*nak hívjuk.*

Megjegyzés. Itt fontos észrevenni, hogy az unitálokat nem csak $PG(2,s^2)$ típusú, azaz desargues-i síkokon definiáltuk. Hol vannak még unitálok?
Az Hermite-görbék unitálok, ezeket mostantól klasszikus unitáloknak is nevezzük. Létezik nemklasszikus unitál is?

Unitálok kombinatorikus jellemzői

Ha az U s-edrendű unitált egy s^2-rendű projektív síkba ágyazva vizsgáljuk, azaz a blokkok a síkon kollineárisak, akkor az előző fejezet kombinatorikus eredményei az utolsók kivételével teljesülnek rá.

3.26. Tétel. *Legyen Π egy s^2-rendű projektív sík, és $U \subset \Pi$ egy unitál. Ekkor:*

- *U-nak s^3+1 pontja van;*
- *Π minden egyenese érinti vagy $s+1$ pontban metszi U-t;*
- *bármely $P \in U$ pontra 1 érintő és s^2 szelőegyenes illeszkedik;*
- *bármely $P \notin U$ pontra $s+1$ érintő és s^2-s szelőegyenes illeszkedik;*
- *a Π sík összes egyenese közül s^3+1 érintője, $s^4-s^3+s^2$ pedig szelőegyenese U-nak.*

Bizonyítás. Az első két állítás a blokkrendszerek definíciójából következik, a többire pedig alkalmazható az Hermite-görbékre vonatkozó megfelelő állítás bizonyítása. ■

Ebben az esetben is definiálhatjuk egy $P \notin U$ pont lábait:

3.27. Definíció. *Egy U-ra nem illeszkedő P pont* lábai*nak hívjuk, és P_δ-val jelöljük a P-re illeszkedő $s+1$ érintőegyenes érintési pontjainak halmazát.*

Emlékezzünk vissza, hogy amikor beláttuk, hogy minden $P \notin \mathcal{H}$ pontra P_δ kollineáris, mitöbb Baer egyenes, akkor felhasználtuk, hogy $\mathcal{H}$ egy polaritás autokonjugált pontjainak halmaza. Tehát, ha egy s^2-rendű projektív síkon létezik egy U nemklasszikus unitál , akkor arra nem feltétlenül teljesül, hogy tetszőleges $P \notin U$ pontra P_δ kollineáris (Baer egyenes). Sőt, ha találunk olyan unitált, ami nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, az szükségképpen nem klasszikus.

3.28. Tétel. *Legyen U egy $PG(2, s^2)$-beli unitál, $\mathcal{B}$ pedig egy Baer sík. Jelölje b_1 azon $\mathcal{B}$-beli egyenesek számát, melyek U-t érintő egyenesek részegyenesei, t pedig a $\mathcal{B} \cap U$-beli pontok számát. Ekkor*

$$b_1 + t = 2(s + 1).$$

Bizonyítás. Számoljuk össze azon (P, l) párokat, melyben P egy U-beli pont, l pedig olyan $PG(2, s^2)$-beli egyenes, ami $\mathcal{B}$-t $s + 1$ pontban metszi, és $P \in l$. Ezt kétféleképpen is tehetjük, a pontokból kiindulva, illetve az egyenesekből kiindulva:

$$t(s + 1) + (s^3 + 1 - t) \cdot 1 = b_1 \cdot 1 + (s^2 + s + 1 - b_1)(s + 1).$$

Ezzel a kívánt összefüggést megkaptuk. ■

4. Buekenhout-Metz unitálok

Ebben a fejezetben a következő kérdésekre keressük a válaszokat:
1. Adott s-re $PG(2, s^2)$-en kívül még milyen s^2-rendű projektív síkokon vannak unitálok?
2. Létezik-e nemklasszikus unitál $PG(2, s^2)$-en? Létezik-e konstrukció nemklasszikus unitálok előállítására?
3. Hogyan lehet $PG(2, s^2)$ klasszikus unitáljait megkülönböztetni a nemklasszikusoktól?

4.1. Transzlációsíkok beágyazása $PG(4, s)$-be

A következőkben leírt eljárás általánosabb dimenziószámokra is hasonlóan működik, de számunkra ez az eset lesz igazán hasznos. R. H. Bruck és R. C. Bose írták le 1964-ben (lásd [9]-ban).

Jelölje a $PG(4, s)$ négydimenziós projektív tér egy rögzített háromdimenziós alterét $\overline{\Sigma}$. Legyen $\mathcal{S}$ egy befedése $\overline{\Sigma}$-nak, azaz pontjainak egy partíciója $s^2 + 1$ kitérő egyenesre.

Definiáljunk egy $\mathcal{A}$ struktúrát a következőképpen:

- $\mathcal{A}$ pontjai legyenek $PG(4, s) \setminus \overline{\Sigma}$ pontjai,
- $\mathcal{A}$ egyenesei legyenek $PG(4, s)$ azon síkjai, amelyek a $\overline{\Sigma}$ alteret $\mathcal{S}$ egy egyenesében metszik.
- Az illeszkedést definiálja a tartalmazás.

4.1. Állítás. *Az $\mathcal{A}$ struktúra egy s^2-ed rendű affin sík.*

Bizonyítás. Legyen adott két $PG(4, s)$-beli sík, ami a $\overline{\Sigma}$ teret $\mathcal{S}$ két különböző elemében: s_1-ben és s_2-ben metszik. Ekkor a két sík metszete nem lehet egyenes, hiszen az metszené s_1-et is, és s_2-őt is, tehát $\overline{\Sigma}$-ban lenne. Ez viszont ellentmond a feltevésnek, hogy a két sík metszete a $\overline{\Sigma}$ térrel s_1, illetve s_2. Ebből következik, hogy $\mathcal{A}$ bármely két egyenese vagy párhuzamos (azaz egybeesik, vagy diszjunkt egymástól), vagy egy pontban metszi egymást.

(A1) Bármely két $PG(4, s) \setminus \overline{\Sigma}$-beli pont által egyértelműen meghatározott egyenes az $\overline{\Sigma}$ hipersíkot egy pontban metszi. Ez a pont szükségképpen rajta van $\mathcal{S}$ egy egyenesén. A két metsző egyenes egyértelműen meghatároz egy síkot, ami $\mathcal{A}$-nak egyenese. Tehát $\mathcal{A}$ bármely két pontjára pontosan egy $\mathcal{A}$-beli egyenes illeszkedik.

(A2) Legyen l egy olyan síkja a $PG(4,s)$ térnek, ami $\overline{\Sigma}$-t az $\mathcal{S}$ befedés egy s_1 elemében metszi, P pedig egy l-re nem illeszkedő $PG(4,s)\setminus\overline{\Sigma}$-beli pont. Az s_1 és P által egyértelműen meghatározott $PG(4,s)$-beli sík $\mathcal{A}$-nak egyenese. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{A}$ bármely nem illeszkedő pont-egyenes párja egyértelműen meghatároz egy egyenest, ami a ponton átmegy, az egyessel pedig párhuzamos.

(A3) Vegyük a $PG(4,s)$ térnek két különböző síkját, amik a $\overline{\Sigma}$ teret $\mathcal{S}$ ugyanazon elemében metszik. Így a két sík metszete $\mathcal{A}$-ban üres. Két pontot véve az egyik síkról, és egyet a másikról, ez a három pont meghatároz egy síkot $PG(4,s)$-ben, ami nem metszheti $\overline{\Sigma}$-t egy $\mathcal{S}$-beli egyenesben a fenti megjegyzés szerint, tehát nem lehet $\mathcal{A}$-beli egyenes. Ezzel beláttuk, hogy van $\mathcal{A}$-ban három nem kollineáris pont.

(s^2) $PG(4,s)$ egy síkján s^2+s+1 pont van. $\mathcal{A}$ egy egyenese olyan sík, ami $\overline{\Sigma}$-t egy egyenesben metszi, így az ilyen síkon levő $PG(4,s)\setminus\overline{\Sigma}$-beli pontok száma $(s^2+s+1)-(s+1)=s^2$. Tehát van $\mathcal{A}$-ban olyan egyenes (mind olyan), amin s^2 pont van.

■

Jelölje $\Pi(\overline{\Sigma},\mathcal{S})$ az $\mathcal{A}$ lezárásaként kapott projektív síkot. Ekkor $\Pi(\overline{\Sigma},\mathcal{S})$ ideális pontjainak megfeleltethetjük $\mathcal{S}$ elemeit, ideális egyenesének pedig $\overline{\Sigma}$-t. Ezáltal a $PG(4,s)$ projektív térben (rögzítve benne egy $PG(3,s)=\overline{\Sigma}$ alteret, és annak egy $\mathcal{S}$ befedését) felépítettünk egy projektív síkot, aminek:

- pontjai: $\{\, PG(4,s)\setminus\overline{\Sigma}$ pontjai $\,\}\cup\{\,\mathcal{S}$ egyenesei $\,\}$
- egyenesei:
  $\{\, PG(4,s)$ azon egyenesei, melyek a $\overline{\Sigma}$ teret $\mathcal{S}$ elemében metszik $\,\}\cup\{\,\overline{\Sigma}\,\}$
- az illeszkedés pedig a tartalmazás.

Transzlációsíkok

Egy kollineáció *centruma* olyan fixpont, amire illeszkedő minden egyenes fixegyenes. Egy kollineáció *tengelye* olyan fixegyenes, amire illeszkedő minden pont fixpont. Ha egy kollineációnak legalább két tengelye, vagy két centruma van, akkor az az identitás. Ha egy kollineációnak van tengelye, akkor van centruma is, illetve ha van centruma, akkor van tengelye is. Ebben az esetben *centrális-axiális kollineáció*nak hívjuk. Ha a centrum a tengelyre illeszkedik, akkor *elációról*, vagy *transzláció*ról beszélünk.

Egy projektív sík (C,l)-*tranzitív* adott C pont és l egyenes esetén, ha minden P,P' párhoz, melyre $P\neq C\neq P'$, és C,P,P' kollineáris, létezik

C centrumú, l tengelyű kollineáció, ami a P pontot a P' pontba viszi. Egy projektív sík (m,l)-*tranzitív* adott m,l egyenesek esetén, ha minden $C \in m$ esetén (C,l)-tranzitív. Egy projektív sík az l egyenesre nézve *transzlációsík*, ha (l,l)-tranzitív, azaz minden l tengelyű transzláció létezik a síkon. Ekkor az l egyenes elhagyásával kapott affin síkot is transzlációsíknak nevezzük, illetve egy affin sík transzlációsík, ha a lezárásaként kapott projektív sík az ideális egyenesére nézve transzlációsík.

A $PG(2,q)$ sík bármely egyenesére nézve transzlációsík.

4.2. Állítás. *A fenti konstrukcióban bármilyen $\overline{\Sigma}$ és $\mathcal{S}$ választás esetén a kapott $\mathcal{A}$ affin sík, illetve a $\Pi(\overline{\Sigma},\mathcal{S})$ projektív sík transzlációsík.*

Bizonyítás. Jelöljük a $PG(4,s)$ tér pontjait (x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) vektorokkal, ahol $x_i \in GF(s)$ nem mind 0. Legyen $\overline{\Sigma}$ a $[1,0,0,0,0]$ hipersík, azaz azon pontok halmaza, melyekre $x_0 = 0$. Legyen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ez a mátrix egy olyan kollineációnak a mátrixa, ami a $\overline{\Sigma}$ hipersík minden pontját fixen hagyja, a $PG(4,s) \setminus \overline{\Sigma}$-beli $(1,0,0,0,0)$ pontot pedig a $PG(4,s) \setminus \overline{\Sigma}$-beli $(1,a,b,c,d)$ pontba viszi. Mivel az $a,b,c,d \in GF(s)$ elemeket tetszőlegesen választhatjuk, és M inverze is hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, bármely $PG(4,s) \setminus \overline{\Sigma}$-beli P,Q pontokra van $PG(4,s)$-nek olyan kollineációja, ami a $\overline{\Sigma}$ hipersíkot fixen hagyja, a P pontot pedig a Q pontba viszi. Egy ilyen kollineáció viszont a $\Pi(\overline{\Sigma},\mathcal{S})$ projektív síkon egy l_∞ tengelyű transzlációt indukál, ami P ősképét Q ősképébe viszi. ■

Megjegyzés. Anélkül, hogy pontosan definiálnám, megemlítem, hogy a $\Pi(\overline{\Sigma},\mathcal{S})$ sík olyan transzlációsík, ami kvázitesttel koordinátázható.

4.3. Tétel ([9]). *Minden s^2-rendű olyan transzlációsík, ami kvázitesttel koordinátázható, beágyazható valamilyen $\overline{\Sigma}$ és $\mathcal{S}$ választással a $PG(4,s)$ négydimenziós projektív térbe.*

Az ilyen transzlációsíkokra érdemes bevezetni a következő elnevezést:

4.4. Definíció. *Azokat a transzlációsíkokat, melyek alkalmas $\overline{\Sigma}$ és $\mathcal{S}$ választással a $PG(4,s)$ négydimenziós projektív térbe ágyazhatók,* beágyazható transzlációsík*oknak nevezzük.*

A fenti tétel szerint ezek éppen a kvázitesttel koordinátázható véges transzlációsíkok.

Emlékeztető: $PG(3,s)$ $s+1$ páronként kitérő egyenesét *regulus*nak hívjuk, ha $PG(3,s)$ minden olyan egyenese, ami közülük legalább hármat metsz, metszi mindet. A $PG(3,s)$ tér bármely 3 páronként kitérő egyenese egyértelműen meghatároz egy regulust.

4.5. Definíció. $\mathcal{S}$ reguláris befedés, *ha bárhogyan választva három egyenesét, az azok által generált regulus minden egyenese a* $\mathcal{S}$ *befedéshez tartozik.*

4.6. Tétel ([9]). *Az* $\mathcal{A}$ *transzlációsík akkor és csak akkor desargues-i, ha* $\mathcal{S}$ *reguláris.*

A $\Pi(\overline{\Sigma},\mathcal{S})$ projektív sík szerkezete erősen függ a megválasztott $\overline{\Sigma}$ altér $\mathcal{S}$ befedésétől. Ha a $\overline{\Sigma}$-ban rögzített $\mathcal{S}$ befedés reguláris, akkor a fenti konstrukcióban $\mathcal{A}=AG(2,s^2)$ és a $\Pi(\overline{\Sigma},\mathcal{S})$ projektív sík éppen $PG(2,s^2)$, azaz egy $PG(2,s^2)\hookrightarrow PG(4,s)$ beágyazást kaptunk.

4.2. Kitérő: Baer síkok beágyazása

4.7. Állítás. *A* $PG(2,s^2)\hookrightarrow PG(4,s)$ *beágyazásnál egy* $\mathcal{B}$ *Baer sík, illetve egy* b *Baer egyenes képe a következő lehet:*

(1) *Ha a* b *Baer egyenes az* l_∞ *egyenes részegyenese, akkor képe a* $PG(4,s)$ *térben egy* $\overline{\Sigma}$*-beli egyenes, ami nem eleme a* $\mathcal{S}$ *befedésnek.*

Ez az egyenes tehát az $\mathcal{S}$ befedés $s+1$ elemét metszi, éppen azokat, melyek a b Baer egyenes pontjainak képei.

Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető az $\mathcal{S}$*-hez nem tartozó,* $\overline{\Sigma}$*-beli egyenesek és* l_∞ *Baer részegyenesei között.*

Leszámlálással igazolható, hogy mindkettőből $s(s^2+1)$ van.

(2) *Ha a* b *Baer egyenesnek egy pontja van az* l_∞ *egyenesen, akkor képe a* $PG(4,s)$ *térben egy* $PG(4,s)\setminus\overline{\Sigma}$*-beli egyenes.*

Ez az egyenes a $\overline{\Sigma}$ hipersíkot egy pontban metszi, az $\mathcal{S}$ befedés azon egyenesének egy pontjában, mely a $b\cap l_\infty$ pont képe.

Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető a $PG(4,s)\setminus\overline{\Sigma}$*-beli egyenesek és a* $PG(2,s^2)$*-beli olyan Baer egyenesek között, melyek egy pontban metszik* l_∞*-t.*

Leszámlálással igazolható, hogy mindkettőből $s^3(s^2+1)(s+1)$ van.

(3) *Ha a b Baer egyenesnek, ami az l egyenes részegyenese, nincs pontja az* l_∞ *egyenesen, akkor képe a* $PG(4,s)$ *térben egy nemelfajuló másodrendű görbe* $PG(4,s)$ *tér azon síkjában, ami az l egyenes képe.*

Azokat a másodrendű görbéket, melyek Baer egyenesek képei, *Baer-féle másodrendű görbé*knek hívjuk. Ezek szükségképpen diszjunktak a $\overline{\Sigma}$ síktól, viszont ebben az esetben nincs kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.

4.8. Állítás. *$PG(2,s)$ egy rögzített egyenesét nem metsző másodrendű görbék száma nagyobb, mint $PG(2,s^2)$ egy rögzített egyenesén a Baer részegyenesek száma.*

Bizonyítás. Jelölje N a $PG(2,s)$ sík egy rögzített egyenesét elkerülő másodrendű görbék számát. Mivel $PG(2,s)$-ben $s^5 - s^2$ másodrendű görbe és s^2+s+1 egyenes van, továbbá egy másodrendű görbét elkerülő egyenesek száma $\frac{1}{2}s(s-1)$, ezért kétféleképpen összeszámolva azon $(\mathcal{C}, l)$ párokat, ahol $\mathcal{C}$ egy másodrendű görbe, l pedig egy elkerülő egyenese:

$$\frac{1}{2}s(s-1)(s^5-s^2) = N(s^2+s+1),$$

amiből $N = \frac{1}{2}s^3(s-1)^2$.

A $PG(2,s^2)$ sík egy rögzített egyenesének három pontja egyértelműen meghatározza egy Baer részegyenesét, így egy egyenes Baer részegyeneseinek száma:

$$\frac{\binom{s^2+1}{3}}{\binom{s+1}{3}} = s(s^2+1).$$

Nyilván $s > 2$ esetén $s(s^2+1) < \frac{1}{2}s^3(s-1)^2$. ■

Tehát rögzítve a $PG(4,s)$ tér egy olyan π síkját, ami a $\overline{\Sigma}$ hipersíkot $\mathcal{S}$ egy m elemében metszi, van olyan másodrendű görbe π-n, ami diszjunkt m-től, de nem Baer-féle másodrendű görbe.

(4) *Ha a $\mathcal{B}$ Baer sík az l_∞ egyenest $s+1$ pontban metszi, akkor képe a $PG(4,s)$ tér olyan síkja, ami nem tartalmazza az $\mathcal{S}$ befedés egy elemét sem.*

Ez a sík tehát nincs a $\overline{\Sigma}$ hipersíkban, és az $\mathcal{S}$ befedés elemei közül pontosan $(s+1)$-et metsz, a $\mathcal{B}\cap l_\infty$ pontok képeit. Az ilyen Baer síkokat lineáris Baer síkoknak is szokták hívni.

Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető az l_∞-t tartalmazó Baer részsíkok és a $\overline{\Sigma}$ hipersíkot nem $\mathcal{S}$-beli egyenesben metsző síkok között.

Leszámlálással igazolható, hogy mindkettőből $s^3(s^2+1)(s+1)$ van.

(5) *Ha a $\mathcal{B}$ Baer sík az l_∞ egyenest 1 pontban, P-ben metszi, akkor képe egy egyenesekből álló harmadrendű felület, ami a $\overline{\Sigma}$ hipersíkot P képében metszi.*

Bizonyítás: Legyen a $\mathcal{B}$ Baer sík képe $PG(4,s)$-ben B, a P pont képe pedig a p egyenes. Az $s+1$ P-re illeszkedő Baer egyenes képe $s+1$ egyenes, melyek p-re illeszkedő különböző síkokban fekszenek. Tehát B-ben van $s+1$ egyenes: $l_1, l_2, ..., l_{s+1}$, melyek mind $PG(4,s)\setminus\overline{\Sigma}$-ban vannak, és semelyik kettő nem esik egy p-re illeszkedő síkba. Ezeket hívjuk B *generátorai*nak.

A generátorok páronként kitérő egyenesek. Valóban, ha lenne kettő, ami p-nek ugyanazon pontját tartalmazná, akkor az általuk meghatározott sík egy olyan Baer síknak lenne képe (hiszen $\overline{\Sigma}$-t egy nem $\mathcal{S}$-beli egyenesben metszi), aminek metszete $\mathcal{B}$-vel tartalmaz négy általános helyzetű pontot, de a Baer síkok tulajdonságai miatt ezzel ellentmondásra jutottunk. Ha egy p-re nem illeszkedő pontban metszené egymást két generátor, akkor azok közös p-re illeszkedő síkban lennének, ami szintén ellentmondás.

Azt kaptuk tehát, hogy p minden pontjára illeszkedik egy generátor. Viszont a pontok összeszámolásával kapjuk, hogy ezeken már B minden pontja rajta van.

Legyen Q egy tetszőleges P-től különböző pontja $\mathcal{B}$-nek, és legyen képe a Q' pont. A $\mathcal{B}$ Baer sík Q-ra illeszkedő egyenesei a QP (Baer) egyenes, és s darab olyan c_i (Baer) egyenes, amik már diszjunktak l_∞-től. Tehát B pontjai egy Q'-re illeszkedő egyenesen, azaz egy generátoron (legyen ez l_{s+1}), és s darab síkbeli másodrendű görbén helyezkednek el (jelölje ezeket $\mathcal{C}_i$). Ez utóbbiak diszjunktak a $\overline{\Sigma}$ hipersíktól, mind Q'-ben metszik egymást, Q'-re illeszkedő különböző síkokban vannak (jelölje ezeket α_i), és e síkok is páronként Q'-ben metszik egymást. Minden $i=1,2,...,s$ idexre legyen az α_i sík metszete a $\overline{\Sigma}$ hipersíkkal az m_i $\mathcal{S}$-beli egyenes. Jelölje α_{s+1} a Q' és p által generált síkot. Mivel $\mathcal{B}$-ben minden P-re illeszkedő Baer egyenes metsz minden Q-ra illeszkedő Baer egyenest (és minden metszet egy elemű), ezért B-ben minden generátor érint minden $\mathcal{C}_i$ másodrendű görbét. A B halmaz éppen az érintési pontok (s^2+1 pont), az l_{s+1} generátor $s-1$ pontja és a p egyenes uniója. Az érintési pontok halmazát tekinthetjük úgy, mint az

l_1, l_2, ... , l_s, l_{s+1} generátorokat tartalmazó (p-re illeszkedő) síkok és az $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ síkok metszeteit (ennek a $PG(2, s^2)$ síkon a következő felel meg: a $(\mathcal{B} \setminus \{PQ\}) \cup \{Q\}$ pontokat úgy kapjuk meg, hogy azokat a P-re illeszkedő egyeneseket, melyek Baer egyenesben metszik $\mathcal{B}$-t elmetsszük azokkal a Q-ra illeszkedő egyenesekkel, melyek Baer egyenesben metszik $\mathcal{B}$-t).

Legyenek $P_1, P_2, ..., P_{s+1}$ a $\mathcal{C}_1$ másodrendű görbe pontjai (valamelyik $P_i = Q'$). Ekkor az az $s+1$ sík, amit a P_i pontok és a p egyenes generál, egy általánosított kúpot alkot, melynek alapja a $\mathcal{C}_1$ másodrendű görbe, "csúcsa" pedig a p egyenes, jelölje ezt $\mathcal{Q}_1$. A $\mathcal{Q}_1$ kúp éppen az l_1, l_2, ... , l_s, l_{s+1} generátorokat tartalmazó (p-re illeszkedő) síkok halmaza.

Most belátjuk, hogy az $m_1, m_2, ...m_s, p$ egyenesek $\mathcal{S}$ egy regulusát alkotják. Tekintsük a Q' és l_1 által generált β síkot. Ez egy $PG(2, s^2)$-beli lineáris Baer sík képe, hiszen nem tartalmaz egy $\mathcal{S}$-beli egyenest sem (mert p-nek pontosan egy pontját tartalmazza). Jelölje ezt a Baer síkot $\mathcal{B}^*$. Nyilván $\mathcal{B}^*$ tartalmazza a Q és P pontokat, továbbá az l_1 egyenes ősképét, így $\mid \mathcal{B} \cap \mathcal{B}^* \mid \geq s+2$. Ekkor a Baer síkokról írtak szerint $\mathcal{B}$ és $\mathcal{B}^*$ metszete $s+2$ pont, amiből $s+1$ kollineáris, és $s+2$ egyenes, amiből $s+1$ egy pontban metszi egymást. (Egy egyenes két Baer sík metszetében van, ha mindkét Baer sík Baer egyenesben metszi, de ez a két Baer egyenes nem feltétlenül egyezik meg.) Ez az $s+2$ egyenes éppen az l_1 egyenes ősképe (ez Baer egyenes), és a Q pontot ennek pontjaival összekötő egyenesek. Így a β sík éppen ezeknek az egyeneseknek]a képeit metszi, azaz éppen a $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s, \alpha_{s+1}$ síkokat. Ekkor a $\beta \cap \overline{\Sigma}$ egyenes szükségképpen az m_i egyeneseket és a p egyenest metszi. Viszont egy $\overline{\Sigma}$-beli egyenes vagy az $\mathcal{S}$ befedéshez tartozik, vagy regulusban metszi $\mathcal{S}$-et, hiszen $\mathcal{S}$ reguláris befedés. Ezzel beláttuk, hogy az $m_1, m_2, ...m_s, p$ egyenesek regulust alkotnak, azaz egy hiperbolikus másodrendű felület pontjait fedik.

Így az α_i síkok egy kúpot alkotnak, melynek alapja az $m_1, m_2, ...m_s, p$ egyenesek által lefedett hiperbolikus másodrendű felület, csúcsa pedig a Q' pont, jelölje ezt $\mathcal{Q}_2$.

A fentiek szerint:

$$B = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2.$$

Ez a metszet viszont éppen egy egyeneseket tartalmazó harmadrendű felület (lásd a [22] könyvben). ■

4.3. Parabolikus és hiperbolikus unitálok beágyazása

A $\Pi = \Pi(\overline{\Sigma}, \mathcal{S})$ projektív sík egy adott X ponthalmazának képét a $\Pi \hookrightarrow PG(4,s)$ beágyazásban a továbbiakban $\widetilde{X}$ jelöli. Ennek milyensége nagyban függ attól, hogy X hogyan metszi Π ideális egyenesét, amit mostantól jelöljön l_∞. Egy $U \subset \Pi(\overline{\Sigma}, \mathcal{S})$ unitált (ha van ilyen) az ideális egyenes érintheti, vagy metszheti.

4.9. Definíció. *Egy U unitál* parabolikus unitál, *ha az l_∞ egyenes érintőegyenese, ellenkező esetben, azaz ha l_∞ az U-nak metsző egyenese, akkor U* hiperbolikus unitál.

Hány pontja van $\widetilde{U}$-nak?
1. Ha $l_\infty \cap U$ egy pont, azaz l_∞ érinti az U unitált, akkor az $\widetilde{U}$ kép s^3 $PG(4,s) \setminus \overline{\Sigma}$-beli pontból, és egy $\mathcal{S}$-beli egyenesből áll, tehát s^3+s+1 pontja van.
2. Ha $l_\infty \cap U$ $s+1$ pont, azaz l_∞ metszi az U unitált, akkor az $\widetilde{U}$ kép s^3-s $PG(4,s) \setminus \overline{\Sigma}$-beli pontból, és $s+1$ $\mathcal{S}$-beli egyenesből áll, tehát $s^3-s+(s+1)^2 = s^3+s^2+s+1$ pontja van.

4.3.1. A $PG(2,s^2) \hookrightarrow PG(4,s)$ beágyazás

A $PG(2,s^2) \hookrightarrow PG(4,s)$ beágyazást konkrétan, koordinátákkal is le lehet írni. Célszerű a pont-koordinátákat balról normálni, az egyenes-koordinátákat pedig jobbról. Ebben a beágyazásban az ideális egyenes szerepét bármelyik egyenes játszhatja, de nem megy az általánosság rovására, ha $l_\infty = [1,0,0]$, és $\overline{\Sigma} = [1,0,0,0,0]$. Ekkor:

- $PG(2,s^2)$ pontjai: (x,y,z), ahol $x,y,z, \in GF(s^2)$, (nem mind 0).
- $PG(2,s^2) \setminus l_\infty = AG(2,s^2)$ pontjai: $(1,y,z)$, ahol $y,z \in GF(s^2)$.
- $PG(4,s) \setminus \overline{\Sigma} = AG(4,s)$ pontjai: $(1,y_1,y_2,z_1,z_2)$, ahol $y_1,y_2,z_1,z_2 \in GF(s)$.
- $PG(4,s)$ pontjai: (x,y_1,y_2,z_1,z_2), ahol $x,y_1,y_2,z_1,z_2 \in GF(s)$, (nem mind 0).

A megfeleltetés:
Legyen $\{1,\alpha\}$ $GF(s^2)$ egy bázisa $GF(s)$ felett, azaz legyen α a $GF(s)$ felett irreducibilis t^2-ut-v polinom egyik gyöke $GF(s^2)$-ben. Ekkor nyilván α^s a másik gyök, ezért teljesül: $\alpha+\alpha^s = u$, és $\alpha\alpha^s = -v$. Bármely $x \in GF(s^2)$ egyértelműen írható fel $x = x_1 + \alpha x_2$ alakban, ahol $x_1, x_2 \in GF(s)$.

Így az affin pontok megfeleltetése már nyilvánvaló:

- $(1, y, z) \leftrightarrow (1, y_1, y_2, z_1, z_2)$, ha $y = y_1 + \alpha y_2$, és $z = z_1 + \alpha z_2$.

A leírás megkönnyebbítésére célszerű bevezetni a következő jelölést.
Jelölés: $\{ f_1 = g_1, f_2 = g_2, ..., f_k = g_k \}$ jelöli azon $PG(n, q)$, illetve $AG(n, q)$-beli pontok halmazát, melyek koordinátáira $f_i(x_0, x_1, ..., x_n) = g_i(x_0, x_1, ..., x_n)$ teljesül minden $1 \leq i \leq k$ indexre. Az egyenlőségek helyén egyenlőtlenség is állhat.

$\{ y = c \}$ illetve $\{ z = ay + b \}$ írja le az összes $AG(2, s^2)$-beli egyenest $(a, b, c \in GF(s^2))$. A fenti megfeleltetés ezeknek az $\{ y_1 = c_1, y_2 = c_2 \}$, illetve a $\{ z_1 = a_1 y_1 + v a_2 y_2 + b_1, z_2 = a_2 y_1 + (a_1 + u a_2) y_2 + b_2 \}$ síkokat felelteti meg $AG(4, s)$-ben $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in GF(s))$. Az $\{ y = c \}$ típusú egyenesek a $(0, 0, 1)$ ideális pontban metszik egymást, az $\{ y_1 = c_1, y_2 = c_2 \}$ típusú síkok az $\{ x = 0, y_1 = 0, y_2 = 0 \}$ $\overline{\Sigma}$-beli egyenesben. A $\{ z = ay + b \}$ típusú egyenesek az $(0, 1, a)$ ideális pontban metszik egymást, a $\{ z_1 = a_1 y_1 + v a_2 y_2 + b_1, z_2 = a_2 y_1 + (a_1 + u a_2) y_2 + b_2 \}$ típusú síkok pedig az $\{ x = 0, z_1 = a_1 y_1 + v a_2 y_2, z_2 = a_2 y_1 + (a_1 + u a_2) y_2 \}$ $\overline{\Sigma}$-beli egyenesben. Tehát $\overline{\Sigma}$-nak az $AG(2, s^2)$-hez tartozó befedésbeli egyenesei az $\{ x = 0, y_1 = 0, y_2 = 0 \}$, illetve az $\{ x = 0, z_1 - a_1 y_1 - v a_2 y_2 = 0, z_2 - a_2 y_1 - (a_1 + u a_2) y_2 = 0 \}$ egyenesek.

Így az ideális pontok megfeleltetése a következő:

- $(0, 0, 1) \leftrightarrow \{ x = 0, y_1 = 0, y_2 = 0 \}$;
- $(0, 1, a) \leftrightarrow \{ x = 0, z_1 - a_1 y_1 - v a_2 y_2 = 0, z_2 - a_2 y_1 - (a_1 + u a_2) y_2 = 0 \}$.

4.3.2. Buekenhout parabolikus konstrukciója

4.10. Tétel. *Ha az $U \in PG(2, s^2)$ klasszikus unitál parabolikus, akkor a beágyazásnál kapott képe egy elliptikus kvádrika feletti kúp, melynek metszete a $\overline{\Sigma}$ hipersíkkal egy olyan $\mathcal{S}$-beli egyenes, ami a kúpnak alkotója.*

Bizonyítás. Nem megy az általánosság rovására, ha az $x^s z + x z^s + y^{s+1} = 0$ egyenletű Hermite-görbére bizonyítjuk a tételt. Ez egy parabolikus unitál, melyet jelöljünk U-val. Ekkor $U = \{ (0, 0, 1) \} \cup \{ (x, y, z) \mid x \neq 0, x(z + z^s) + y y^s = 0 \}$, mert U affin pontjait normálhatjuk úgy, hogy $x \in GF(s)$ legyen. A fent leírt $PG(2, s^2) \hookrightarrow PG(4, s)$ beágyazásban az affin pontoknak az $\{ x \neq 0, x(z_1 + \alpha z_2 + z_1 + \alpha^s z_2) + (y_1 + \alpha y_2)(y_1 + \alpha^s y_2) = 0 \} = \{ x \neq 0, x(2z_1 + u z_2) + y_1^2 + u y_1 y_2 - v y_2^2 = 0 \} = \{ x \neq 0, x(2z_1 + u z_2) + f(y_1, y_2) = 0 \}$ ponthalmaz felel meg, ahol $f(y_1, y_2) = y_1^2 + u y_1 y_2 - v y_2^2$, és ez irreducibilis $GF(s)$ felett, mivel a $t^2 - ut - v$ polinom is az. A $(0, 0, 1)$ ideális pont képe pedig az $\{ x = 0, y_1 = 0, y_2 = 0 \}$ egyenes.

Az első halmazt tetszőleges x-re tekintve, a $\overline{\Sigma}$ altérrel vett metszete (f irreducibilitása miatt) rajta van az $\{ x = 0, y_1 = 0, y_2 = 0 \}$ egyenesen, és ennek az egyenesnek minden pontja kielégíti az $x(2z_1 + uz_2) + f(y_1, y_2) = 0$ feltételt. Ezzel beláttuk, hogy $\widetilde{U}$ (azaz U képe a beágyazásnál) $PG(4, s)$ azon pontjaiból áll, melyekre $\{\, x(2z_1 + uz_2) + f(y_1, y_2) = 0 \,\}$. Tegyük fel, hogy $u \neq 0$, és $2 \neq 0$. A $\{\, z_1 + uz_2 = 0 \}$ hipersík $\widetilde{U}$-val vett metszete $\{\, xz_1 + f(y_1, y_2) = 0, z_1 + uz_2 = 0 \,\}$, aminek első fele éppen egy elliptikus kvádrika egyenlete. Tehát:

- Az $\{\, (1, y_1, y_2, -f(y_1, y_2)) \mid y_1, y_2 \in GF(s) \,\} \cup \{\, (0, 0, 0, 1) \,\} \subset PG(3, s)$ ponthalmaz egy elliptikus kvádrika, melynek egyenlete $xz_1 + f(y_1, y_2) = 0$ a fenti f irreducibilis polinommal.

- Ágyazzuk ezt be a $PG(4, s)$ tér $\{\, z_1 + uz_2 = 0 \,\}$ hipersíkjába, és jelölje ezt a $PG(4, s)$-beli ponthalmazt $\mathcal{E}$.
  $\mathcal{E} = \{\, (1, y_1, y_2, -f(y_1, y_2), \frac{f(y_1,y_2)}{u}) \mid y_1, y_2 \in GF(s) \,\} \cup \{\, (0, 0, 0, 1, -\frac{1}{u}) \,\}$.

- *Az $\mathcal{E}$ alapú,* $(0, 0, 0, u, -2)$ *csúcsú kúp éppen* $\widetilde{U}$*.*

  Azt kell belátni ehhez, hogy $\mathcal{E}$ bármely pontját és a $(0, 0, 0, u, -2)$ pontot összekötő egyenes $\widetilde{U}$-ban van.

  A $(0, 0, 0, u, -2)$ és $(0, 0, 0, 1, -\frac{1}{u})$ pontok összekötőegyenese $\{\, (0, 0, 0, u\lambda + 1, -2\lambda - \frac{1}{u}) \mid \lambda \in GF(s) \,\} \cup \{\, (0, 0, 0, u, -2) \,\}$, ami tartalmazza a $(0, 0, 0, 0, 1)$ és $(0, 0, 0, 1, 0)$ pontokat (a $\lambda = -\frac{1}{u}$ és $\lambda = -\frac{2}{u}$ választással), azaz éppen az $\{\, x = 0, y_1 = 0, y_2 = 0 \,\}$ egyenes, tehát része $\widetilde{U}$-nak.

  Rögzített $y_1, y_2 \in GF(s)$ esetén a $(0, 0, 0, u, -2)$ és az $(1, y_1, y_2, -f(y_1, y_2), \frac{f(y_1,y_2)}{u})$ pontok összekötőegyenese $\{\, (1, y_1, y_2, u\lambda - f(y_1, y_2), -2\lambda + \frac{f(y_1,y_2)}{u}) \mid \lambda \in GF(s) \,\} \cup \{\, (0, 0, 0, u, -2) \,\}$, ami szintén része $\widetilde{U}$-nak, mert $0(2u - 2u) + f(0, 0) = 0$, és $2(u\lambda - f(y_1, y_2)) + u(-2\lambda + \frac{f(y_1,y_2)}{u}) + f(y_1, y_2) = 0$.

  Ezzel beláttuk, hogy a kúp része $\widetilde{U}$-nak, de pontjait összeszámolva megkapjuk, hogy éppen $\widetilde{U}$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy $u = 0$, vagy $2 = 0$ esetén a fenti bizonyítás egyszerűsödik, az $u = 0 = 2$ eset pedig nem fordulhat elő, hiszen egy 2 karakterisztikájú test felett a $t^2 - v^2$ polinom soha nem irreducibilis (lásd a 2.10 állítást). ∎

4.11. Tétel. *Ha* $\widetilde{U}$ *olyan ovoid feletti kúp* $PG(4, s)$*-ben, melynek metszete a* $\overline{\Sigma}$ *hipersíkkal egy olyan* $\mathcal{S}$*-beli egyenes, ami a kúpnak alkotóegyenese, akkor az* $\widetilde{U}$*-hoz tartozó* U *egy parabolikus unitál* $\Pi(\overline{\Sigma}, \mathcal{S})$*-ben.*

Bizonyítás. $\widetilde{U}$ pontjainak száma s^3+s+1, hiszen egy ovoidnak s^2+1 pontja van, így a kúpnak $s(s^2+1)+1$. Ebből $s+1$ pont egy $\mathcal{S}$-beli egyenes, tehát U-nak $s^3+s+1-(s+1)+1=s^3+1$ pontja van.

$PG(2,s^2)$ egy egyenesének, ami nem l_∞, a beágyazásnál $PG(4,s)$ olyan síkja felel meg, ami $\mathcal{S}$-nek egy elemében metszi a $\overline{\Sigma}$ hiperteret. Egy ilyen sík vagy egy pontban, vagy egy oválisban, vagy két egyenesben metszi $\widetilde{U}$-ot. Az utóbbi esetben a két egyenes a kúp csúcsában metszi egymást, és egyikük $\mathcal{S}$-nek eleme. Ebből már látszik, hogy $PG(2,s^2)$ affin egyenesei U-t 1 vagy $s+1$ $PG(2,s^2)$-beli pontban metszik, l_∞ pedig érinti.

Ezzel beláttuk, hogy U egy $2-(s^3+1,s+1,1)$ blokkrendszer, azaz unitál, hiszen U bármely két pontjának az összekötőegyenese a fentiek szerint $s+1$ pontban metszi U-t, azaz bármely két pontja pontosan egy blokkban szerepel együtt. ■

Megjegyzés. Az első tételben egy $PG(2,s^2)$-beli *klasszikus* unitálból kiindulva kaptunk egy $PG(4,s)$-beli elliptikus alapú kúpot. A második tételben egy $PG(4,s)$-beli ovoid alapú kúpból kiindulva kaptunk egy $\Pi(\overline{\Sigma},\mathcal{S})$-beli unitált. Ha s páratlan prímhatvány, akkor $PG(3,s)$ minden ovoidja elliptikus kvádrika. A második tételből a $\Pi(\overline{\Sigma},\mathcal{S})=PG(2,s^2)$ speciális esetben sem következik, hogy a kapott unitál klasszikus lenne.

4.12. Következmény. *Minden s^2-rendű beágyazható transzlációsíkon van parabolikus unitál.*

Ezt a konstrukciót hívják Buekenhout parabolikus konstrukciójának, az így kapott unitálokat pedig *Buekenhout-féle parabolikus unitáloknak.*

4.3.3. Buekenhout hiperbolikus konstrukciója

4.13. Tétel. *Ha az $U\in PG(2,s^2)$ klasszikus unitál hiperbolikus, akkor a beágyazásnál kapott képe egy nemelfajuló kvádrika, mely a $\overline{\Sigma}$ hipersíkot egy hiperbolikus kvádrika pontjaiban metszi.*

Bizonyítás. Nem megy az általánosság rovására, ha az $x^{s+1}+y^{s+1}+z^{s+1}=0$ egyenletű Hermite-görbére bizonyítjuk a tételt. Ez egy hiperbolikus unitál, melyet jelöljünk U-val. Ekkor U affin pontjait $x\in GF(s)$-re normálva kapjuk, hogy $U=\{\,(0,1,z)\mid 1+z^{s+1}=0\,\}\cup\{\,(x,y,z)\mid x\neq 0, x^2+y^{s+1}+z^{s+1}=0\,\}$. A fent leírt $PG(2,s^2)\hookrightarrow PG(4,s)$ beágyazásban az affin pontoknak az $\{\,x\neq 0, x^2+(y_1+\alpha y_2)(y_1+\alpha^s y_2)+(z_1+\alpha z_2)(z_1+\alpha^s z_2)=0\,\}=\{\,x\neq 0, x^2+y_1^2+uy_1y_2-vy_2^2+z_1^2+uz_1z_2-vz_2^2=0\,\}=\{\,x\neq 0, x^2+f(y_1,y_2)+f(z_1,z_2)=0\,\}$ ponthalmaz felel meg, ahol $f(a,b)=a^2+uab-vb^2$, és ez irreducibilis $GF(s)$ felett a t^2-ut-v polinom irreducibilitása miatt. Az ideális pontoknak bizonyos $\mathcal{S}$-beli egyenesek felelnek meg, azonban a fenti ponthalmazt tetszőleges x-re nézve (mivel nemszinguláris) egy négydimenziós kvádrika pontjait kapjuk, ami az $\overline{\Sigma}$ hipersíkot éppen ezekben az egyenesekben metszi. Ez a metszet $\{\, y_1^2 + uy_1y_2 - vy_2^2 + z_1^2 + uz_1z_2 - vz_2^2 = 0 \,\}$, azaz egy hiperbolikus kvádrika pontjai. ■

Megjegyzés. A fenti beágyazásban $\widetilde{U} \cap \overline{\Sigma}$ egy hiperbolikus kvádrika, így pontjai két regulust alkotnak, az $\mathcal{R}$ és az $\mathcal{R}^{OPP}$ regulusokat, melyek ugyanazokat a pontokat tartalmazzák. Másfelől az $\widetilde{U} \cap \overline{\Sigma}$ metszet $s+1$ páronként kitérő $\mathcal{S}$-beli egyenes. Ha ezek között az $\mathcal{S}$-beli egyenesek között van olyan, ami nem esik egybe $\mathcal{R}$ egyik egyenesével sem, akkor szükségképpen metszi mind az $s+1$ egyenesét $\mathcal{R}$-nek, és ezért $\mathcal{R}^{OPP}$-nak egyenese. Ekkor azonban $\mathcal{S}$ minden $\widetilde{U} \cap \overline{\Sigma}$-ba eső egyenese $\mathcal{R}^{OPP}$-hoz tartozik. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{S}$-ben szükségképpen van egy regulus.

4.14. Tétel. *Ha $\widetilde{U}$ nemelfajuló kvádrika $PG(4,s)$-ben, mely a $\overline{\Sigma}$ hipersíkot egy hiperbolikus kvádrika pontjaiban metszi, ami egy $\mathcal{S}$-beli regulus, akkor az $\widetilde{U}$-hoz tartozó U egy hiperbolikus unitál $\Pi(\overline{\Sigma}, \mathcal{S})$-ben.*

Bizonyítás. Egy nemelfajuló négydimenziós kvádrikának $s^3 + s^2 + s + 1$ pontja van. Ebből a tétel feltétele szerint $s^2 + 2s + 1$ van $\overline{\Sigma}$-ban, és ezek az $\overline{\Sigma}$ tér $\mathcal{S}$ befedésének $s+1$ egyenesét alkotják. Tehát U-nak $s^3 - s$ affin pontja, és $s+1$ ideális pontja van.

Könnyen látható, hogy ezt a parabolikus kvádrikát $PG(4,s) \setminus \overline{\Sigma}$ minden síkja úgy metszi, hogy U a $\Pi(\overline{\Sigma}, \mathcal{S})$ síkon $2-(s^3+1, s+1, 1)$ blokkrendszert, azaz unitált alkot. ■

4.15. Definíció. *Egy $\Pi = \Pi(\overline{\Sigma}, \mathcal{S})$ beágyazható transzlációsík* származtatható transzlációsík, *ha az $\mathcal{S}$ befedésben van egy $\mathcal{R}$ regulus.*

Megjegyzés. Ez a konstrukció tehát csak abban az esetben alkalmazható, amikor a beágyazandó projektív sík származtatható transzlációsík.

4.16. Következmény. *Minden s^2-rendű származtatható transzlációsíkon, van hiperbolikus unitál.*

Ezt a konstrukciót hívják Buekenhout hiperbolikus konstrukciójának, az így kapott unitált pedig *Buekenhout-féle hiperbolikus unitálnak.*

4.3.4. A BM-unitál

Kérdésünkre, hogy létezik-e nemklasszikus unitál $PG(2, s^2)$-en, a fenti tételek nem adtak választ. Hiperbolikus és parabolikus unitálokat konstruáltunk többek között $PG(2, s^2)$-en is, de ezekről nem tudjuk, hogy Hermite-görbék-e vagy sem.

4.17. Tétel (Barwick). *A $PG(2, s^2)$ síkon a Buekenhout-féle hiperbolikus konstrukcióval nyert unitál mindig izomorf a klasszikus unitállal, azaz mindig Hermite-görbe.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $PG(2, s^2)$ egy egyenesén rögzítve egy b Baer egyenest, és $PG(4, s)$ egy hipersíkjában rögzítve egy $\mathcal{S}$ reguláris befedést, illetve annak egy $\mathcal{R}$ regulusát, a b-t tartalmazó klasszikus unitálok száma megegyezik az $\mathcal{R}$-et tartalmazó, nemelfajuló parabolikus kvádrikák számával.

(1) $PG(2, s^2)$ *egy rögzített egyenesének egy rögzített Baer részegyenesét tartalmazó klasszikus unitálok száma* $s^4(s-1)$.

Jelölje K azon klasszikus unitálok számát, melyek egy rögzített egyenes egy rögzített Baer részegyenesét tartalmazák. Mivel $PG(2, s^2)$ Hermite-görbéinek száma $s^3(s^3-1)(s^2+1)$ (lásd például a [20] könyvben), és egy Hermite-görbe szelőinek száma $s^4 - s^3 + s^2$, továbbá $PG(2, s^2)$ egyeneseinek száma $s^4 + s^2 + 1$, és egy egyenes $s(s^2+1)$ Baer részegyenest tartalmaz (egyszerű kombinatorikus meggondolás), ezért kétféleképpen összeszámolva azon (U, l) párokat, ahol U egy klasszikus unitál, l pedig egy egyenes, ami (Baer egyenesben) metszi U-t:

$$[s^3(s^3-1)(s^2+1)][s^4 - s^3 + s^2] = K[s^4 + s^2 + 1][s(s^2+1)].$$

Ebből $K = s^4(s-1)$.

(2) $PG(4, s)$ *egy rögzített regulusát tartalmazó nemelfajuló parabolikus kvádrikák száma* $s^4(s-1)$.

Jelölje M azon nemelfajuló parabolikus kvádrikák számát, melyek egy rögzített hipersíkot egy rögzített regulusában metszenek. Ez független mind a hipersík, mind a regulus megválasztásától. Mivel $PG(4, s)$ parabolikus kvádrikáinak száma $s^6(s^3-1)(s^5-1)$, és egy rögzített parabolikus kvádrikát $\frac{1}{2}(s^4+s^2)$ hipersík metsz nemelfajuló hiperbolikus kvádrika pontjaiban, továbbá $PG(4, s)$ hipersíkjainak száma $s^4 + s^3 + s^2 + s + 1$, és egy hipersíkon $\frac{1}{2}s^4(s^3-1)(s^2+1)$ hiperbolikus kvádrika van, ezért kétféleképpen összeszámolva azon $(\mathcal{P}, \Sigma)$ párokat, ahol $\mathcal{P}$ egy nemelfajuló parabolikus kvádrika, Σ pedig olyan hipersík, ami $\mathcal{P}$-t egy nemelfajuló hiperbolikus kvádrika pontjaiban metszi:

$$[\frac{1}{2}(s^4+s^2)][s^6(s^3-1)(s^5-1)] = M[s^4+s^3+s^2+s+1][\frac{1}{2}s^4(s^3-1)(s^2+1)]$$

Ebből $M = s^4(s-1)$.

Ezzel beláttuk a tételt, hiszen $PG(4,s)$ minden nemelfajuló parabolikus kvádrikájának, mely tartalmazza az $\mathcal{R}$ regulust, egyértelműen megfelel $PG(2,s^2)$ egy Buekenhout-féle hiperbolikus unitálja, mely tartalmazza a b Baer egyenest, továbbá minden klasszikus unitál, mely tartalmazza a b Baer egyenest egyben Buekenhout-féle hiperbolikus unitál is, azaz képe a beágyazásnál $PG(4,s)$ egy nemelfajuló parabolikus kvádrikája, mely tartalmazza a $\mathcal{R}$ regulust. ■

4.18. Tétel (Buekenhout, Metz). *Ha $s > 2$ prímhatvány, akkor $PG(4,s)$ térben mindig található olyan ovoid alapú kúp, ami a rögzített $\overline{\Sigma}$ hiperteret a rögzített reguláris befedésének egy elemében metszi, és az így kapott parabolikus unitál nem klasszikus.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy létezik olyan U Buekenhout-féle parabolikus unitál, melynek létezik olyan l szelőegyenese, ami U-t nem Baer egyenesben metszi. Ekkor a 3.21 állítás szerint U nem Hermite-görbe, tehát nemklasszikus unitál.

Az alábbi segédállítást használjuk:

Legyen π és π' két rögzített síkja $PG(3,s)$-nek, melyek az l egyenesben metszik egymást. Legyen adva egy $\mathcal{C} \subset \pi$, l-től diszjunkt másodrendű görbe és egy $P \in \pi' \setminus l$ pont. Ekkor létezik olyan háromdimenziós elliptikus kvádrika, ami tartalmazza $\mathcal{C}$-t és P-t, és aminek a π' sík érintősíkja P-ben.

A $PG(3,s)$ tér pontjait (x_0, x_1, x_2, x_3)-mal jelölve, legyen π az $\{x_3 = 0\}$ sík, π' az $\{x_2 = 0\}$ sík. Ekkor metszetük az $l = \{x_2 = 0, x_3 = 0\}$ egyenes. Legyen $P = (0,0,0,1) \in \pi' \setminus l$, és $\mathcal{C} = \{f(x_0,x_1) + x_2^2 = 0, x_3 = 0\} \subset \pi$. Ha $f(x_0,x_1)$ a $GF(s)$ test felett irreducibilis polinom, akkor $\mathcal{C}$ az l egyenestől diszjunkt másodrendű görbe.

Ekkor az $\mathcal{E} = \{f(x_0,x_1) + x_2^2 + x_2x_3 = 0\}$ elliptikus kvádrika megfelel a követelményeknek: tartalmazza a $\mathcal{C}$ másodrendű görbét, és metszete a π' síkkal a P pont.

Most legyen P egy tetszőleges $\pi' \setminus l$-beli pont: $P = (a_0, a_1, 0, 1)$. Az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_0 \\ 0 & 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix által definiált lineáris transzformáció helyben hagyja a π és π' síkokat, és a $\mathcal{C} = \{f(x_0,x_1) + x_2^2 = 0, x_3 = 0\}$ másodrendű görbét, a P pontot pedig a $(0,0,0,1)$ pontba viszi. Erre már illeszthetünk egy megfelelő elliptikus kvádrikát, amit a fenti lineáris transzformáció inverze a kívánt tulajdonságú elliptikus kvádrikába visz.

Mivel $PG(3,s)$ bármely két síkja lineáris transzformációval a fenti π és π' síkokba vihető, ezért ezzel beláttuk a segédállítást. Most térjünk rá a tétel bizonyítására!

Legyen π egy olyan sík, ami a $PG(4,s)$ tér rögzített $\overline{\Sigma}$ hipersíkját a rögzített $\mathcal{S}$ befedés egy l egyenesében metszi. A 4.8 állítás szerint a π síkon van olyan $\mathcal{C}$ másodrendű görbe, ami nem metszi az l egyenest, és nem Baer-féle másodrendű görbe, azaz ősképe nem Baer egyenes. Legyen Σ' egy π-re illeszkedő hipersík, ami a $\overline{\Sigma}$ hipersíkot egy π' síkban metszi, ekkor $\pi \cap \pi' = \{l\}$. Legyen továbbá Q egy tetszőleges $\overline{\Sigma} \setminus \pi'$-beli pont, és az $\mathcal{S}$ befedés Q-ra illeszkedő eleme (ami szükségképpen nem l) messe a π' síkot a P pontban. Ekkor a segédállítás szerint a Σ' hipersíkban van olyan $\mathcal{E}$ elliptikus kvádrika, ami tartalmazza a $\mathcal{C}$ másodrendű görbét és a P pontot is, és melynek érintősíkja a P pontban π'. Ekkor a Q csúcsú, $\mathcal{E}$ alapú kúp olyan Buekenhout-féle parabolikus unitál képe, mely nem Hermite-görbe, hiszen a π sík egy olyan szelőegyenesének képe, ami nem Baer egyenesben metszi. ■

Megjegyzés. Tehát $PG(2,s^2)$-ben $s>2$ esetén van nemklasszikus unitál.

Mivel a tétel bizonyítása során csak az olyan ovoid feletti kúpokat tekintettük, ahol az ovoid elliptikus kvádrika, célszerű a következő elnevezés bevezetése.

4.19. Definíció. Buekenhout-Metz unitáloknak, *röviden* BM-unitál*oknak hívjuk a Buekenhout-féle parabolikus konstrukcióból nyert unitálokat abban a speciális esetben, amikor a megválasztott kúp alapja elliptikus kvádrika.*

Megjegyzés. Ez utóbbi feltételnek csak a páros prímhatványok esetén van jelentősége, hiszen páratlan s esetén $PG(3,s)$ minden ovoidja elliptikus kvádrika. Ha azonban s 2-hatvány, léteznek például a Suzuki-Tits ovoidok, melyek nem elliptikus kvádrikák. Az ezek felhasználásával konstruált unitálokat Buekenhout-Tits unitáloknak nevezik. Ezek Buekenhout-féle parabolikus unitálok, de megállapodás szerint *nem* BM-unitálok.

Az Hermite-görbék is BM-unitálok. Ezek olyan szempontból speciális BM-unitálok, hogy bármely érintőjüket tekintve l_∞-nek, a beágyazásnál kapott kép egy elliptikus kvádrika feletti kúp. Ez nem minden unitálra teljesül (vegyük észre, hogy a 4.10 tétel feltételei között szerepelt, hogy U klasszikus). Általában egy BM-unitálnak egy speciális érintőjére teljesül csak.

Nem ismert, hogy páratlan s esetén létezik-e olyan unitál $PG(2,s^2)$-ben, ami nem BM-unitál.

4.4. BM-unitálok koordinátázása

Legyen $a, b \in GF(s^2)$ esetén U_{ab} a következő $PG(2, s^2)$-beli halmaz:

$$U_{ab} = \{\, (1, y, ay^2 + by^{s+1} + r) \mid y \in GF(s^2), r \in GF(s) \,\} \cup \{\, (0, 0, 1) \,\}.$$

Erről fogjuk belátni, hogy alkalmas a, b elemekkel BM-unitál.

4.4.1. Páratlan s esetén

A $PG(2, s^2) \hookrightarrow PG(4, s)$ beágyazásnál használt konkrét leírást most abban a speciális esetben használjuk, amikor $GF(s^2)$ bázisa $GF(s)$ felett $\{\, 1, \epsilon \,\}$, ahol $\epsilon \in GF(s^2) \setminus GF(s)$, $\epsilon^s = -\epsilon$, és ϵ^2 primitív eleme $GF(s)$-nek. Ilyen van a 2.14 tétel miatt. (Ekkor ϵ a $GF(s)$ felett irreducibilis $t^2 + \epsilon^{s+1}$ polinom gyöke, így a korábbi jelölésekkel $\alpha = \epsilon, u = 0, v = -\epsilon^{s+1}$.)

4.20. Tétel. *Ha $d := 4a^{s+1} + (b^s - b)^2 \in \not\square_s$, akkor U_{ab} BM-unitál.*

Bizonyítás. $(1, y, z) \in U_{ab}$ akkor és csak akkor, ha $z - ay^2 - by^{s+1} \in GF(s)$. Ezeknek a $PG(2, s^2)$-beli pontoknak azok a $PG(4, s)$-beli pontok felelnek meg, amikre teljesül $x = 1$, és
$(z_1 + \epsilon z_2) - (a_1 + \epsilon a_2)(y_1 + \epsilon y_2)^2 - (b_1 + \epsilon b_2)(y_1 + \epsilon y_2)(y_1 - \epsilon y_2) \in GF(s)$,
vagy az ezzel ekvivalens: $x = 1$ és $z_2 - a_2(y_1^2 + \epsilon^2 y_2^2) - b_2(y_1^2 - \epsilon^2 y_2^2) - 2a_1 y_1 y_2 = 0$, vagy az ezzel ekvivalens: $x = 1$ és $xz_2 - f(y_1, y_2) = 0$, ahol $f(y_1, y_2) = (a_2 + b_2)y_1^2 + 2a_1 y_1 y_2 + (\epsilon^2 a_2 - \epsilon^2 b_2) y_2^2$. A $(0, 0, 1)$ ideális pontnak az $\{\, x = 0, y_1 = 0, y_2 = 0 \,\}$ egyenes felel meg.

Ha f irreducibilis $GF(s)$ felett, akkor $PG(4, s)$ azon pontjai közül, melyre $x = 0$, pontosan azokra teljesül $xz_2 - f(y_1, y_2) = 0$, melyekre $y_1 = 0, y_2 = 0$. Tehát $U_{ab} \subseteq PG(2, s^2)$ pontjainak pontosan azok a $PG(4, s)$-beli pontok felelnek meg, melyekre: $xz_2 - f(y_1, z_2) = 0$ az adott f-fel. Ha ezek egy elliptikus alapú kúp pontjai, akkor U_{ab} BM-unitál. Ez akkor és csak akkor lesz így, ha f irreducibilis. Tehát U_{ab} BM-unitál, ha f diszkriminánsa nemnégyzet, azaz $4a_1^2 - 4\epsilon^2(a_2^2 - b_2^2) \in \not\square_s$ teljesül, vagy az ezzel ekvivalens $4(a_1^2 - \epsilon^2 a_2^2) + 4\epsilon^2 b_2^2 \in \not\square_s$, vagy az ezzel ekvivalens $4a^{s+1} + (b^s - b)^2 \in \not\square_s$. ∎

4.21. Tétel. *Páratlan s esetén minden $PG(2, s^2)$-beli BM-unitál felírható U_{ab} alakban alkalmas $a, b \in GF(s^2)$ elemekkel, melyekre $d = 4a^{s+1} + (b^s - b)^2 \in \not\square_s$.*

Bizonyítás. A definícióból következik, hogy minden BM-unitál felírható valamilyen f irreducibilis kétváltozós függvénnyel $xz_2 + f(y_1, y_2) = 0$ alakban (nem megy az általánosság rovására, ha $\overline{\Sigma} = \{\, z_2 = 0 \,\}$, az $\{\, y_1 = 0, y_2 =$

$0, z_2 = 0\,\}$ egyenes tagja a befedésnek, és a kúp csúcsa a $(0,0,0,1,0)$ pont). Viszont adott f irreducibilis kétváltozós függvényhez találhatunk olyan $a, b \in GF(s^2)$ elemeket, amelyekre $f(y_1, y_2) = (a_2 + b_2)y_1^2 + a_1 y_1 y_2 + (\epsilon^2 a_2 - \epsilon^2 b_2)y_2^2$, és ekkor $d = 4a^{s+1} + (b^s - b)^2 \not\in \Box_s$. ∎

4.4.2. Páros s esetén

Ebben az esetben a $PG(2, s^2) \hookrightarrow PG(4, s)$ beágyazásnál használt konkrét leíráshoz olyan $\{\,1, \epsilon\,\}$ bázisát vegyük $GF(s^2)$-nek $GF(s)$ felett, melyre $\epsilon \in GF(s^2) \setminus GF(s)$, $\epsilon^s = 1 + \epsilon$, továbbá $\epsilon^2 = \lambda + \epsilon$ valamilyen $\lambda \in C_0(s)$, $\lambda \neq 1$ elemmel. Ilyen van 2.14 tétel miatt. (Ekkor ϵ a $GF(s)$ felett irreducibilis $t^2 + t + \lambda$ polinom gyöke, tehát a korábbi jelöléseinkkel: $\alpha = \epsilon, u = 1, v = \lambda$.)

4.22. Tétel. *Ha $b \notin GF(s)$ és $d = \frac{a^{s+1}}{(b^s+b)^2} \in C_0(s)$, akkor U_{ab} BM-unitál.*

Bizonyítás. A páratlan esettel teljesen analóg módon bizonyítjuk. $(1, y, z) \in U_{ab}$ akkor és csak akkor, ha $z - ay^2 - by^{s+1} \in GF(s)$. Ezeknek a $PG(2, s^2)$-beli pontoknak azok a $PG(4, s)$-beli affin pontok felelnek meg, amikre teljesül $x = 1$, és
$(z_1 + \epsilon z_2) - (a_1 + \epsilon a_2)(y_1 + \epsilon y_2)^2 - (b_1 + \epsilon b_2)(y_1 + \epsilon y_2)(y_1 + (1+\epsilon)y_2) \in GF(s)$.
Sok helyet igénylő, de egyszerű számolás adja, hogy ezzel ekvivalens:
$x = 1$ és $z_2 - (a_2 + b_2)y_1^2 - b_2 y_1 y_2 - (a_1 + a_2 + \lambda(a_2 + b_2))y_2^2 = 0$, azaz:
$x = 1$ és $z_2 - f(y_1, y_2) = 0$, ahol $f(y_1, y_2) = (a_2 + b_2)y_1^2 + b_2 y_1 y_2 + (a_1 + a_2 + \lambda(a_2 + b_2))y_2^2$.

A $(0,0,1)$ ideális pontnak az $\{\,x = 0, y_1 = 0, y_2 = 0\,\}$ egyenes felel meg. Ha f irreducibilis $GF(s)$ felett, akkor $PG(4, s)$ azon pontjai közül, melyre $x = 0$, pontosan azokra teljesül $xz_2 - f(y_1, y_2) = 0$, melyekre $y_1 = 0, y_2 = 0$. Tehát $U_{ab} \subseteq PG(2, s^2)$ pontjainak pontosan azok a $PG(4, s)$-beli pontok felelnek meg, melyekre: $xz_2 - f(y_1, y_2) = 0$ az adott f-fel. Ha ezek egy elliptikus alapú kúp pontjai, akkor U_{ab} BM-unitál. Ez akkor és csak akkor lesz így, ha f irreducibilis, mert ekkor $\mathcal{E} = \{\,(x, y_1, y_2, z_1, z_2) \mid xz_2 - f(y_1, y_2) = 0, z_1 = 0\,\}$ egy elliptikus kvádrika a $PG(4, s)$ tér $\{\,z_1 = 0\,\}$ hipersíkjában, és U_{ab} képe éppen az $\mathcal{E}$ alapú, $P = (0,0,0,1,0)$ csúcsú kúp.

Az f kétváltozós polinom akkor és csak akkor irreducibilis, ha $b_2 \neq 0$, és $\frac{(a_2+b_2)(a_1+a_2+\lambda(a_2+b_2))}{b_2^2} \in C_1(s)$, azaz $\frac{a_1a_2+a_2^2+\lambda(a_2^2+b_2^2)+(a_1+a_2)b_2}{b_2^2} \in C_1(s)$, ami ekvivalens azzal, hogy $\frac{a_1^2+a_1a_2+\lambda(a_2^2+b_2^2)}{b_2^2} \in C_1(s)$, hiszen $\frac{a_1+a_2}{b_2} + \left(\frac{a_1+a_2}{b_2}\right)^2 \in C_0(s)$. Ez viszont ekvivalens azzal, hogy $\frac{a_1^2+a_1a_2+\lambda a_2^2}{b_2^2} \in C_0(s)$, hiszen $\lambda \in C_1(s)$, és így $d = \frac{a^{s+1}}{(b^s+b)^2} = \frac{a_1^2+a_1a_2+\lambda a_2^2}{b_2^2} \in C_0(s)$. ∎

4.23. Tétel. *Páros s esetén minden $PG(2,s^2)$-beli BM-unitál felírható U_{ab} alakban alkalmas $a,b \in GF(s^2)$ elemekkel, melyekre $b \notin GF(s)$, $d = \frac{a^{s+1}}{(b^s+b)^2} \in C_0(s)$*

Bizonyítás. A definícióból következik, hogy minden BM-unitál felírható valamilyen f irreducibilis kétváltozós függvénnyel $xz_2 + f(y_1,y_2) = 0$ alakba. Viszont adott f irreducibilis kétváltozós függvényhez találhatunk olyan $a,b \in GF(s^2)$ elemeket, amelyekre $f(y_1,z_2) = (a_2 + b_2)y_1^2 + b_2y_1y_2 + (a_2 + \lambda a_2 + a_1 + \lambda b_2)y_2^2$, és ekkor szükségképpen $d = \frac{a^{s+1}}{(b^s+b)^2} \in C_0(s)$. ■

4.4.3. A klasszikus unitál

Milyen $a,b \in GF(s^2)$ elemekre lesz az U_{ab} BM-unitál klasszikus?

4.24. Állítás. *Ha $a = 0$, és $b \notin GF(s)$, akkor az U_{ab} BM-unitál klasszikus.*

Bizonyítás.

$$U_{0b} = \{\,(1,y,by^{s+1}+r) \mid y \in GF(s^2), r \in GF(s)\,\} \cup \{\,(0,0,1)\,\}.$$

Páratlan s-re ez BM-unitál, mert ha $b \notin GF(s)$, azaz $b_2 \neq 0$, akkor $d = (b^s - b)^2 = 4b_2^2\epsilon^2 \in \not\square_s$ a 2.9 állítás szerint, hiszen ϵ^2 primitív eleme $GF(s)$-nek, tehát nemnégyzet, $4b_2^2$ pedig négyzet. Páros s-re is BM-unitál, hiszen ha $b \notin GF(s)$ és $d = 0 \in C_0(s)$.

Egy $PG(2,s^2)$-beli affin pont akkor és csak akkor tartozik U_{0b}-hoz, ha koordinátáira teljesül $x = 1$ és $z - by^{s+1} \in GF(s)$. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 1$ és $(z - by^{s+1})^s - (z - by^{s+1}) = 0$ teljesül, vagy az ezzel ekvivalens $x = 1$ és $z^s + (b - b^s)y^{s+1} - z = 0$. Az ideális pontot is hozzávéve, ezzel ekvivalens $xz^s + (b - b^s)y^{s+1} - x^sz = 0$. Tehát U_{0b} egyenlete felírható a következő Hermite-mátrixszal:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & \epsilon(b - b^s) & 0 \\ -\epsilon & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ahol páros s esetén $\epsilon = 1$, páratlan s esetén ϵ a beágyazáskor használt ϵ, és így mindkét esetben $\epsilon^s = -\epsilon$, tehát a fenti mátrix valóban Hermite-mátrix, tehát U_{0b} egy Hermite-polaritás autokonjugált pontjainak halmaza:

$$U_{0b} = \{\underline{x} \in PG(2,s^2) \mid \underline{x}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & \epsilon(b - b^s) & 0 \\ -\epsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}^\sigma = 0\,\}.$$

■

A 4.36 következmény szerint ha $a \neq 0$, akkor U_{ab} nem klasszikus, és ezzel kapjuk a következő tételt:

4.25. Tétel. *Az U_{ab} BM-unitál akkor és csak akkor klasszikus, ha $a = 0$ és $b \notin GF(s)$.*

A 3.2 fejezetben $PGU(3, s^2)$-ról bizonyítatlanul maradt tétel bizonyítása következik most.

4.26. Tétel. *A $PG(2, s^2)$-beli U klasszikus unitál pontjain a $PGU(3, s^2)$ unitér csoport 2-tranzitív, továbbá azon részcsoportja, mely U-nak 2 pontját fixen hagyja, a $GF(s^2)^*$ multiplikatív csoporttal izomorf.*

Bizonyítás. Felhasználva e fejezet eredményeit, és azt, hogy $PG(2, s^2)$ bármely két Hermite-görbéje lineáris transzformációval egymásba vihető, feltehetjük, hogy rögzített $b \notin GF(s)$ elemmel

$$U = \{\, (1, y, by^{s+1} + r) \mid y \in GF(s^2), r \in GF(s) \,\} \cup \{\, (0, 0, 1) \,\}.$$

Az első állítás bizonyításához elég belátni, hogy rögzítve U egy tetszőleges pontját, $PGU(3, s^2)$ tranzitív U többi pontján. Nem megy az általánosság rovására, ha a kiválasztott pont $(0, 0, 1)$ (azaz alkalmas koordinátatranszformációval elérhetjük ezt). Tekitsük a következő két mátrix hatását U pontjain:

$$\Phi_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ bc^{s+1} & (b - b^s)c^s & 1 \end{pmatrix}, \Psi_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor $\Phi_c : (1, y, by^{s+1} + r)^T \mapsto (1, c + y, b(c + y)^{s+1} + q)^T$, ahol $q = r - (bcy^s + b^s c^s y) \in GF(s)$, és $\Psi_f : (1, y, by^{s+1} + r)^T \mapsto (1, y, by^{s+1} + r + f)^T$, a $(0, 0, 1)$ ideális pontot pedig mindkét mátrix helyben hagyja. Ha $c \in GF(s^2), f \in GF(s)$, akkor az ilyen típusú mátrixok U-t önmagára képezik, viszont alkalmas $c \in GF(s^2), f \in GF(s)$ választással bármely affin pontot bármely másikba átvihetünk.

A második állítás bizonyításakor az első rész értelmében feltehetjük, hogy a két rögzített pont $(0, 0, 1)$ és $(1, 0, 0)$. Azok a lineáris transzformációk, amik helyben hagyják U-t, U érintőit szükségképpen érintőkbe képezik. A fixen hagyott pontok érintői $[1, 0, 0]$ és $[0, 1, 0]$ tehát önmagukba képződnek, így metszetük, a $(0, 1, 0)$ pont is fixpont. Tehát ezeknek a lineáris transzformációknak diagonális a mátrixuk.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&u&0\\0&0&v\end{pmatrix}:(1,y,by^{s+1}+r)^T\mapsto(1,uy,bvy^{s+1}+vr).$$

$(1,uy,bvy^{s+1}+vr)\in U$ akkor és csak akkor, ha $bvy^{s+1}+vr=b(uy)^{s+1}+t$, ahol $t\in GF(s)$. Ennek minden $y\in GF(s^2),r\in GF(s)$ esetén teljesülnie kell, és ebből már következik, hogy $v=u^{s+1}$. Tehát $PGU(3,s^2)$ azon részcsoportját, ami a P és Q pontokat fixen hagyja, a következő mátrixok indukálják:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&u&0\\0&0&u^{s+1}\end{pmatrix},$$

ahol $u\in GF(s^2)^*$. Ebből már nyilvánvaló, hogy ez a részcsoport izomorf $GF(s^2)^*$-gal. ∎

4.5. BM-unitálok csoportelméleti jellemzői

4.5.1. Érintők, szelők, lábak

$$U_{ab}=\{\,(1,y,ay^2+by^{s+1}+r)\mid y\in GF(s^2),r\in GF(s)\,\}\cup\{\,(0,0,1)\,\}\subset PG(2,s^2).$$

4.27. Állítás. *U_{ab} érintője a $P_\infty=(0,0,1)$ pontban az $l_\infty=[1,0,0]$ egyenes.*

Bizonyítás. l_∞ a $PG(2,s^2)$ tér ideális pontjainak hamaza, és U_{ab} egyetlen ideális pontot tartalmaz, P_∞-t. ∎

4.28. Állítás. *U_{ab} érintője a $Q=(1,0,0)$ pontban a $[0,0,1]$ egyenes.*

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy $U_{ab}\cap[0,0,1]$ nemüres, egy $(1,y,0)$ pontot tartalmaz, ahol $y\in GF(s^2)$. Ekkor szükségképpen $ay^2+by^{s+1}+r=0$ alkalmas $r\in GF(s)$ elemmel, tehát: $a^2+by^{s+1}\in GF(s)$.

A klasszikus unitálra, azaz $a=0$ és $b\notin GF(s)$ esetén ez nyilván csak az $y=0$ választással teljesülhet.

Páratlan s esetén:

A fenti feltételből: $ay^2+by^{s+1}=a^sy^{2s}+b^sy^{s+1}$, amiből $(b^s-b)^2\,y^{2(s+1)}=(ay^2-a^sy^{2s})^2$. Ebből következik, hogy $(ay^2+a^sy^{2s})^2=(b^s-b)^2\,y^{2(s+1)}+4a^{s+1}y^{2s+2}=dy^{2s+2}$ a d diszkriminánssal. De U_{ab} BM-unitál, ezért $d\in\not\square_s$, így $y=0$ szükségképpen, mert $(ay^2+a^sy^{2s})^2$ is és $y^{2(s+1)}$ is vagy 0, vagy egy $GF(s)$-beli négyzetszám. Tehát az $U_{ab}\cap[0,0,1]$ metszetben ebben az esetben is csak a Q pont van.

Páros s esetén:

A fenti feltételből következik, hogy $ay^2 + a^s y^{2s} = (b + b^s)y^{s+1}$. Az $u = \frac{a}{(b^s+b)y^{s-1}}$ választással: $u + u^2 = \frac{a}{(b^s+b)y^{s-1}} + \frac{a^2}{(b^s+b)^2 y^{2s-2}} = \frac{a(b^s+b)y^{s-1}+a^2}{(b^s+b)^2 y^{2s-2}} = a\left(\frac{(b^s+b)y^{s+1}+ay^2}{(b^s+b)^2 y^{2s}}\right) = \frac{a^{s+1}}{(b^s+b)^2} = d$, ahol d az U_{ab} unitál diszkriminánsa, és ezért $d \in C_0(s)$ teljesül. Ebből viszon következik, hogy az $x^2 + x + d$ polinom nem irreducibilis $GF(s)$-ben, tehát midkét gyöke $GF(s)$-beli elem, azaz $u \in GF(s)$. Mivel $(b^s + b) \in GF(s)$, ezért ebből $\frac{a}{y^{s-1}} \in GF(s)$ következik, amiből $a^s y^{2s} = ay^2$, amiből $(b^s + b)y^{s+1} = 0$, és ebből $y = 0$, hiszen U_{ab} BM-unitál, azaz $b \notin GF(s)$. Tehát a $[0, 0, 1]$ egyenes egyetlen pontban metszi U_{ab}-t, a Q pontban. ■

4.29. Állítás. *U_{ab} érintője az $(1, y, ay^2 + by^{s+1} + r)$ pontban:*

- *páratlan s esetén: $[ay^2 - b^s y^{s+1} - r, -2ay + (b^s - b)y^s, 1]$*
- *páros s esetén: $[ay^2 + b^s y^{s+1} + r, (b^s + b)y^s, 1]$.*

Bizonyítás. A $Q = (1, 0, 0) \in U_{ab}$ pont érintője a $[0, 0, 1]$ egyenes az előző állítás szerint, és erre teljesül az állítás. Mivel egy unitált helybenhagyó lineáris transzformáció az unitál minden érintőjét a megfelelő érintőbe viszi, a 4.26 tétel bizonyításához hasonlóan olyan lineáris transzformácókat keresünk, melyek U-t helyben hagyják, a Q pontot tetszőleges U-beli pontba viszik, majd ezek hatását vizsgáljuk a $[0, 0, 1]$ egyenesen. Legyen:

$$\Phi_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ ac^2 + bc^{s+1} & 2ac - (b^s - b)c^s & 1 \end{pmatrix}, \text{ és } \Psi_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ahol $c \in GF(s^2), f \in GF(s)$. (Vegyük észre, hogy a 4.26 tétel bizonyítása során is ezeket a lineáris transzformációkat használtuk, az $a = 0$ speciális esetben.) Ekkor $\Phi_c : (1, y, ay^2+by^{s+1}+r)^T \mapsto (1, c+y, a(c+y)^2+b(c+y)^{s+1}+t)^T$, ahol $t = r + (b^s c^s y - bcy^)) \in GF(s)$, és $\Psi_f : (1, y, ay^2 + by^{s+1} + r)^T \mapsto (1, y, ay^2 + by^{s+1} + r + t)^T$, és a P_∞ ideális pontot mindkettő önmagába képezi. Továbbá $\Psi_r\Phi_y : (1, 0, 0)^T \mapsto (1, y, ay^2 + by^{s+1} + r)^T$. Tehát a Φ_c és Ψ_f mátrixok által indukált lineáris transzformációk $c \in GF(s^2), f \in GF(s)$ elemekkel megfelelnek a követelményeinknek.

A 3.6 lemma szerint egy A mátrix által generált lineáris transzformáció az $\underline{l} = [x, y, z]^T$ egyenest az $\left(A^{-1}\right)^T \underline{l}$ egyenesbe viszi. Egyszerű számolás adja, hogy

$$(\Phi_c^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & -c & ac^2 - b^s c^{s+1} \\ 0 & 1 & -2ac + (b^s - b)c^s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ és } \left(\Psi_f^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -f \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Így az $(1, y, ay^2 + by^{s+1} + r)$ pont érintője:
$\left(\Psi_r^{-1}\right)^T \left(\Phi_y^{-1}\right)^T [0,0,1]^T = [ay^2 - b^s y^{s+1} - r, -2ay + (b^s - b)y^s, 1]^T$.
Ha s páros, akkor:
$[ay^2 - b^s y^{s+1} - r, -2ay + (b^s - b)y^s, 1]^T = [ay^2 + b^s y^{s+1} + r, (b^s - b)y^s, 1]^T$. ■

4.30. Állítás. *Az U_{ab} unitálnak a $[w, 1, 0]$ egyenes semilyen $w \in GF(s^2)$ esetén sem lehet érintője.*

Bizonyítás. $[w,1,0] = \{\,(1, -w, z) \mid z \in GF(s^2)\,\} \cup \{(0,0,1)\}$. Tehát minden ilyen egyenes tartalmazza a P_∞ pontot, de nem érintője U_{ab}-nek ebben a pontban, így szükségképpen tartalmaz további U_{ab}-beli pontokat. ■

4.31. Állítás. *Az $[u, v, 1]$ egyenes akkor és csak akkor érintője U_{ab}-nak, ha*

- *páratlan s esetén: $a^s v^2 + b^s v^{s+1} - du \in GF(s)$,*
- *páros s esetén: $a^s v^2 + b^s v^{s+1} + (b^s + b)^2 u \in GF(s)$.*

Bizonyítás.

- Páros s esetén: $[u, v, 1]$ akkor és csak akkor érintő, ha $u = ay^2 + b^s y^{s+1} + r$, és $v = (b^s + b)y^s$ alkalmas $y \in GF(s^2), r \in GF(s)$ elemekkel. Ekkor:

$$a^s v^2 + b^s v^{s+1} + (b^s + b)^2 u = a^s (b^s + b)^2 y^{2s} + b^s (b^s + b)^2 y^{s+1} + (b^s + b)^2 (ay^2 + b^s y^{s+1} + r) = (b^s + b)^2((ay^2)^s + (ay^2) + r) \in GF(s).$$

  Mivel az $a^s v^2 + b^s v^{s+1} + (b^s + b)^2 u$ kifejezésben v helyére s^2 elemet választhatunk, és minden v-hez s darab u elemmel lesz ez $GF(s)$-beli, így s^3 olyan $[u, v, 1]$ egyenes van, ami teljesíti az $a^s v^2 + b^s v^{s+1} + (b^s + b)^2 u \in GF(s)$ feltételt. Az 4.30 állítás szerint az U_{ab} unitál $[u, v, 1]$ $(u, v \in GF(s^2))$ típusú érintőinek száma s^3, és ezek az előbbiek szerint teljesítik a feltételt, így csakis ezek teljesítik.

- Páratlan s esetén teljesen analóg, de több helyet igénylő számolás adja a bizonyítást.

■

4.32. Tétel. *Ha U parabolikus típusú Buekenhout-unitál egy Π beágyazható transzlációsíkon az l_∞ egyenesre nézve, akkor minden $R \in (l_\infty \setminus U)$ pont lábai kollineárisak.*

Bizonyítás. Ezzel a feltétellel ekvivalens az, hogy a $P_\infty = U \cap l_\infty$ pontra illeszkedő bármely t szelőegyenesre teljesül, hogy U érintői t pontjaiban egy sugársorhoz tartoznak, azaz egy pontban metszik egymást (ami szükségképpen pontja l_∞-nek). Az ekvivalencia abból következik, hogy mindkét feltétel egyértelmű megfeleltetést létesít a P_∞-re illeszkedő szelők és l_∞ pontjai között.

Tekintsük a következő megfeleltetést a $\Pi \hookrightarrow PG(4,s)$ beágyazásnál:

Π	$PG(4,s)$
l_∞ egyenes, illetve ideális pontok	$\overline{\Sigma}$ hipersík, illetve $\mathcal{S}$ befedés elemei
U parabolikus B-unitál	$\widetilde{U}$ ovoid feletti kúp
P_∞ pont	p egyenes
P_∞-re illeszkedő t szelőegyenes	τ sík, ami az $\widetilde{U}$ kúpot $p \cup m$-ben metszi, ahol m egyenes, $m \cap p = V$ a kúp csúcsa
$F_i \in t \cap (U \setminus \{P_\infty\})$ $(i = 1, 2, ..., s)$	$F_i' \in (m \setminus \{V\}) \subset (\tau \cap \widetilde{U})$ $(i = 1, 2, ..., s)$
g_i érintője U-nak F_i-ben	γ_i érintősíkja $\widetilde{U}$-nak F_i'-ben
$R_i = g_i \cap l_\infty$	$r_i = \gamma_i \cap \overline{\Sigma}$, $\mathcal{S}$-beli egyenes

A 2.48 állítás szerint $\widetilde{U}$-nak egyértelműen létezik egy m-re illeszkedő érintőhipersíkja, azaz egy olyan Σ_m hipersík, amire $\Sigma_m \cap \widetilde{U} = m$. Erre a hipersíkra az is teljesül, hogy $\widetilde{U}$ minden olyan érintősíkját tartalmazza, melynek érintési pontja az m egyenesre illeszkedik. Tehát mindegyik γ_i sík része a Σ_m hipersíknak, de ekkor szükségképpen mindegyik r_i egyenes is része a Σ_m hipersíknak. A $\overline{\Sigma}$ és a Σ_m hipersíkok metszete egy sík, ami a $\mathcal{S}$ befedésnek pontosan egy elemét tartalmazza, hiszen ezek az egyenesek páronként kitérők, tehát többet nem tartalmazhat, de a sík pontjainak száma több annál, hogy minden $\mathcal{S}$-beli egyenes csak 1 pontban messe. Tehát az r_i egyenesek szükségképpen megegyeznek: a γ_i síkok mind ebben az $\mathcal{S}$-beli egyenesben metszik egymást, azaz a g_i érintők mind egy (l_∞-re illeszkedő) pontban metszik egymást. Ezzel beláttuk hogy tetszőleges t szelőjét választva U-nak a $t \cap U$-beli pontokra illeszkedő érintők mind egy pontban metszik egymást. ■

4.33. Tétel. *Egy BM-unitált, illetve egy Buekenhout-féle parabolikus unitált a P_∞ pontjára illeszkedő szelőegyenesei Baer egyenesben metszik.*

Bizonyítás. Tekintsük az U Buekenhout-féle parabolikus unitál képét a $PG(2,s^2) \hookrightarrow PG(4,s)$ beágyazásban, és használjuk a szokásos jelöléseket, melyek megtalálhatók a 4.32 tétel bizonyításának táblázatában.

Az U unitál P_∞-re illeszkedő t szelőegyenesének képe egy nem $\overline{\Sigma}$-beli τ sík, ami a $\widetilde{U}$ kúpot a p alkotójában és egy m egyenesben metszi. Ez az m egyenes nincs a $\overline{\Sigma}$ hipersíkban, tehát a 4.7 állítás szerint ősképe egy $PG(2,s^2)$-beli Baer egyenes, ami tartalmazza a P_∞ pontot, míg a p egyenes ősképe éppen a P_∞ pont. ∎

4.34. Következmény. *Ha U_{ab} BM-unitál, és egy $R \notin U_{ab}$ pont lábai kollineárisak, akkor azok Baer egyenest alkotnak.*

Megjegyzés. A klasszikus unitál minden érintőjére nézve BM-unitál, azaz bármely pontjára alkalmazhatjuk a fenti tételt és következményét. Ezzel újabb bizonyítást kaptunk a 3.21 tételre, vagyis arra, hogy a klasszikus unitált minden szelőegyenese Baer egyenesben metszi, és következményére, hogy minden $R \notin U$ pont lábai Baer egyenest alkotnak.

4.35. Tétel. *Ha $a \neq 0$, akkor egy $R \notin U_{ab}$ pont lábai akkor és csak akkor illeszkednek egy egyenesre, ha $R \in l_\infty$.*

Bizonyítás. A tétel egyik iránya a 4.32 tétel állítása. A másik irány bizonyítására két lehetőség kínálkozik. A szelőket pontosan meghatározó 4.31 állítás segítségével hosszú és bonyolult számolások útján jutunk eredményre. A 5 fejezet 5.3 karakterizációs tételének bizonyítása során viszont úgymond az ölünkbe hullik. ∎

4.36. Következmény. *Ha $a \neq 0$, akkor az U_{ab} unitál nem klasszikus.*

4.37. Következmény. *Ha U_{ab} nemklasszikus BM-unitál, akkor egy $R \notin U_{ab}$ pont lábai akkor és csak akkor alkotnak Baer egyenest, ha $R \in l_\infty$.*

4.38. Definíció. *Egy π projektív sík egy ponthalmaza $\{0,1,2,t\}$-típusú, ha π bármely egyenese 0, 1, 2 vagy t pontban metszi.*

4.39. Tétel (Wantz).

- *Ha U páratlan rendű nemklasszikus BM-unitál, akkor egy $P \in \pi \setminus (U \cup l_\infty)$ pont lábai $\{0,1,2,4\}$-típusú halmazt alkotnak. Abban a speciális esetben, amikor U oválisok uniója, a lábak egy $(q+1)$-ívet alkotnak.*
- *Ha U páros rendű nemklasszikus BM-unitál, akkor egy $P \in \pi \setminus (U \cup l_\infty)$ pont lábai $(q+1)$-ívet alkotnak.*

4.5.2. BM-unitálok kollineációcsoportja

Legyen $U_{ab} \subset PG(2, s^2)$ egy rögzített unitál. Jelölje:

$$G = \{\, \Theta \in PGL(3, s^2) \mid \Theta(U_{ab}) = U_{ab} \,\},$$

$$H = \{\, \Theta \in P\Gamma L(3, s^2) \mid \Theta(U_{ab}) = U_{ab} \,\},$$

azaz G az adott unitált helybenhagyó lineáris transzformációk csoportja, H pedig az adott unitált helybenhagyó kollineációk csoportja.

Ha $a \neq 0$, akkor az érintőkről írtak szerint mindkettő szükségképpen önmagára képezi az l_∞ egyenest, és a P_∞ pontot. Ebből már következik, hogy mindkét csoport elemeit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g & e & 0 \\ h & i & f \end{pmatrix}$$

alakú mátrixok indukálják bizonyos tulajdonságú $e, f, g, h, i \in GF(s^2)$ elemekkel. Ezen tulajdonságok további vizsgálata a következő ([1]-ben és [15]-ben megtalálható) eredményeket adja H-ra és G-re:

4.40. Tétel. *Legyen $m = dim_F(GF(s^2))$, ahol az $a = 0$ esetben $F = GF(p)$, az $a \neq 0$ esetben pedig páratlan s esetén F a $GF(s)$ test legkisebb részteste, ami tartalmazza a $\frac{(b^s+b)^2}{4a^{s+1}}$ elemet, páros s esetén F a $GF(s^2)$ test legkisebb részteste, ami tartalmazza az $\frac{a^{s+1}}{(b^s+b)^2}$ elemet.*

Ekkor

$$o(H) = \begin{cases} s^3(s^2-1)m, & \text{ha } a = 0; \\ s^3 2(s-1)m, & \text{ha } s \text{ páratlan, és } b \in GF(s); \\ s^3(s-1)m & \text{minden más esetben.} \end{cases}$$

4.41. Tétel. *Ha $a \neq 0$, akkor*

$$G = T \times \mathbb{Z}_t,$$

ahol $T \in Syl_p(G)$ s^3-rendű, $\mathbb{Z}_t$ pedig t-edrendű ciklikus részcsoport és

$$t = \begin{cases} 2(s-1) & \text{páratlan } s \text{ és } b \in GF(s) \text{ esetén;} \\ s-1 & \text{minden más esetben.} \end{cases}$$

Továbbá T akkor és csak akkor Abel-csoport, ha s páratlan és $b \in GF(s)$.

Ennél konkrétabban is tudunk írni erről a csoportról. A korábbról ismert

$$\Phi_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ ac^2 + bc^{s+1} & 2ac - (b^s - b)c^s & 1 \end{pmatrix}, \ \Psi_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixokkal:

$$T = \{\, \Phi_c \Psi_f \mid c \in GF(s^2), f \in GF(s) \,\}.$$

Továbbá, ha $< a >$ jelöli az a elem által generált ciklikus csoportot, és

$$\mu_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & h^2 \end{pmatrix}$$

$h \in GF(s)^*$ esetén, akkor

$$\mathbb{Z}_t = \begin{cases} < \mu_\epsilon > & \text{páratlan } s \text{ és } b \in GF(s) \text{ esetén;} \\ < \mu_{\epsilon^2} > & \text{minden más esetben.} \end{cases}$$

A $K = \{\, \Psi_f \mid f \in GF(s) \,\}$ csoport elemi Abel p-csoport, melynek rendje s. Ez minden P_∞-re illeszkedő egyenest önmagára képez úgy, hogy U_{ab}-vel vett metszetén tranzitívan hat (és persze a P_∞ pontot helyben hagyja). Tehát K egy s-edrendű elációcsoport, melynek centruma P_∞, tengelye pedig l_∞.

4.42. Tétel. *Ha $a \neq 0$, akkor G tranzitív az $\{U_{ab} \setminus P_\infty\}$ és az $\{l_\infty \setminus P_\infty\}$ ponthalmazokon, a $\{PG(2,s^2) \setminus (U_{ab} \cup l_\infty)\}$ ponthalmazon pedig két pályája van páratlan s és $b \in GF(s)$ esetén, és tranzitív minden más esetben.*

4.5.3. Egy speciális alakú unitál

A fenti eredmények felvetik a kérdést, hogy mitől speciálisak azok az $U_{ab} \subset PG(2,s^2)$ unitálok, melyekre s páratlan és $b \in GF(s)$. Az ilyen típusú unitálokra a fenti G csoport nagyobb, mint a többi esetben, és a p-Sylow részcsoportja kommutatív.

4.43. Tétel. *Egy $U_{ab} \subset PG(2,s^2)$ BM-unitál akkor és csak akkor tartalmaz oválist, ha s páratlan és $b \in GF(s)$, továbbá ha ez teljesül, akkor U_{ab} s nemelfajuló másodrendű görbe uniója, melyek mind illeszkednek a $P_\infty = (0,0,1)$ pontra.*

Bizonyítás. Legyen s páratlan, $U_{ab} \subset PG(2,s^2)$ pedig olyan BM-unitál, melyre $b \in GF(s)$. A hozzátartozó diszkrimináns ekkor: $d = 4a^{s+1} + (b^s - b)^2 = 4a^{s+1}$. Mivel $d \in \not\Box_s$, ezért $a \neq 0$, tehát U_{ab} nem klasszikus.

Legyen $C_r = \{\, (1, y, ay^2 + r) \mid y \in GF(s^2) \,\} \cup \{\, (0,0,1) \,\}$. Ekkor minden $r \in GF(s^2)$-re C_r nemelfajuló másodrendű görbe $PG(2,s^2)$-ben, melynek egyenlete $rx^2 + ay^2 = xz$ (ez nemelfajuló, mert a hozzárendelt mátrix determinánsa $-\frac{a}{4} \neq 0$). Ekkor $U_{ab} = \{\, (1, y, ay^2 + by^{s+1} + r) \mid y \in GF(s^2), r \in GF(s) \,\} \cup \{\, (0,0,1) \,\} = \cup \{\, C_r \mid r \in GF(s) \,\}$, mivel a $by^{s+1} \in GF(s)$ tagot beolvaszthatjuk az r-be. Ezzel beláttuk a tétel egyik irányú állítását.

A másik irányt külön bizonyítjuk páros és páratlan s esetén.

Páros s esetén:

Tegyük fel, hogy az U_{ab} BM-unitál tartalmaz egy O oválist, ennek s^2+1 pontja van. Tudjuk, hogy U_{ab} minden pontjában pontosan egy érintője van U_{ab}-nek, de ha ez a pont O-nak is pontja, akkor az érintő O-nak is érintője. Mivel s páros, ezért ezek az érintők mind egy pontra illeszkednek, de akkor ez a pont olyan $PG(2,s^2) \setminus U_{ab}$-beli pont, aminek s^2+1 lába van. Ezzel ellentmondásra jutottunk.

Páratlan s esetén:

Tegyük fel, hogy az U_{ab} BM-unitál tartalmaz egy olyan C másodrendű görbét, ami illeszkedik a P_∞ pontjára. Mivel U_{ab} kollineációcsoportja helyben hagyja P_∞-t, és tranzitív az $U_{ab} \setminus P_\infty$ pontokon, ezért feltehetjük, hogy a $Q = (1,0,0)$ pont is pontja C-nek. Az előző fejezetben meghatároztuk, hogy U_{ab} érintői ezekben a pontokban $[1,0,0]$ és $[0,0,1]$, így ezek érintői C-nek is. A P_∞-t és Q-t tartalmazó szelője C-nek a $[0,1,0]$ egyenes, és ezek alapján C másodrendű görbe egyenlete (lásd például a [38] könyvben): $xz - ky^2 = 0$, ahol $k \in GF(s^2)^*$. Így $C \subset U_{ab}$ affin pontjaira teljesül: $x = 1$ és $z - ay^2 - by^{s+1} \in GF(s)$, illetve $x = 1$ és $z - ky^2 = 0$. Ezeket összevetve kapjuk, hogy minden $y \in GF(s^2)$-re teljesülnie kell $(a-k)y^2 + by^{s+1} \in GF(s)$-nek. Az $y = 1$ és $y = \epsilon$ választásokkal (itt ϵ a páratlan koordinátázásnál használt báziselem) kapjuk, hogy $a - k + b \in GF(s)$, és $(a-k-b)\epsilon^2 \in GF(s)$, amiből $\epsilon^2 \in GF(s)$ miatt $b \in GF(s)$, és $(a-k)y^2 \in GF(s)$ minden y-ra, de ez csak úgy tekjesülhet, ha $a - k = 0$. Ezzel beláttuk, hogy páratlan s esetén ha U_{ab} tartalmaz egy másodrendű görbét az ideális pontján keresztül, akkor szükségképpen $a \neq 0$, azaz U_{ab} nem klasszikus, és $b \in GF(s)$. Ekkor ebből a bizonyításból is láthatjuk, hogy U_{ab} másodrendű görbék uniója: minden $Q \in U_{ab} \setminus P_\infty$ ponthoz egyértelműen van egy U_{ab}-beli másodrendű görbe, aminek eleme.

Legyen most U_{ab} olyan BM-unitál, ami egy olyan C másodrendű görbét tartalmaz, ami a P_∞ pontot nem tartalmazza. U_{ab} kollineációcsoportjának tranzitivitási tulajdonságai miatt feltehetjük, hogy $Q = (1,0,0)$ pontja C-nek, és a Q és P_∞ pontok összekötőegyenese (a $[0,1,0]$ egyenes) szelője C-nek. Ekkor C másik pontja a $[0,1,0]$ egyenesen $R=(1,0,r)$, ahol $r \in GF(s)^*$. A Q és R pontokban U_{ab}, illetve C érintői $[0,1,0]$ és $[-r,0,1]$ (ezt pontosan ugyanúgy lehet bizonyítani, mint a 4.28 állítást: ha $(1,y,r) \in U_{ab} \cap [-r,0,1]$, akkor szükségképpen $ay^2+by^{s+1} \in GF(s)$). Ezek szerint C egyenlete: $z(z-rx)-ky^2=0$, ahol $k \in GF(s^2)^*$. A P_∞ ponton keresztül a $[0,1,0]$ egyenesen kívül legalább $\frac{s^2-3}{2}$ szelője van C-nek, és ezek mind $[-c,1,0]$ alakúak alkalmas $c \in GF(s^2)$ elemekkel. Minden ilyen szelőn a két C-beli elemre teljesülnie kell a $z^2-rz-kc^2=0$ egyenlőségnek, tehát ez a polinom minden szelőre reducibilis $GF(s^2)$ felett, azaz $r^2+4kc^2 \in \square_{s^2}$. Emellett, mivel $C \subset U_{ab}$, és egy $[-c,1,0]$ szelőn az y koordináták megegyeznek, a két elem z koordinátáinak különbsége egy $GF(s)$-beli elem kell legyen. Tehát minden ilyen szelőegyenesre a $z^2-rz-kc^2=0$ polinom gyökeinek különbsége egy $GF(s)$-beli elem, azaz 2.11 miatt $\sqrt{r^2+4kc^2} \in GF(s)$. Mivel $k \neq 0$, lehetetlen $\frac{s^2-3}{2}$ olyan c elemet találni, amire ez teljesül, tehát ellentmondásra jutottunk. ■

Megjegyzés. Érdemes megjegyezni, hogy amikor U_{ab} másodrendű görbék uniója, akkor a p-Sylow részcsoportja a G lineáris-transzformációcsoportnak nemcsak kommutatív, hanem elemi Abel is. Minden más esetben azonban a p-Sylow részcsoport még csak nem is kommutatív. A geometria és az algebra ilyen fokú összehangoltsága elkápráztató. Ezeket az unitálokat egymástól függetlenül fedezte fel Baker és Ebert, illetve Hirschfeld és Szőnyi (lásd a [2], [24] cikkeket).

4.44. Következmény. *Páratlan s-re a $PG(2,s^2)$ síkon mindig van olyan unitál, ami tartalmaz másodrendű görbét.*

4.5.4. Projektíve ekvivalens unitálok

4.45. Definíció. *Legyen U_{ab} és $U_{a'b'}$ két olyan unitál melyekhez létezik $\Theta \in P\Gamma L(3,s^2)$ kollineáció, ami az elsőt a másodikba viszi. Ekkor azt momdjuk, hogy U_{ab} és $U_{a'b'}$ ekvivalensek, és erre az $U_{ab} \cong U_{a'b'}$, vagy $(a,b) \sim (a',b')$ jelölést használjuk.*

A következő állításból látható, hogy ez tényleg ekvivalencia-reláció a BM-unitálok halmazán.

4.46. Állítás. *$U_{ab} \cong U_{a'b'}$ akkor és csak akkor, ha $a'=a^\sigma r^2 f$, és $b'=b^\sigma r^{s+1} f+\mu$, alkalmas $\sigma \in Aut(GF(s^2))$, $r \in GF(s^2)^*$, $f \in GF(s)^*$, $\mu \in GF(s)$ elemekkel.*

Bizonyítás. $U_{ab} \cong U_{a'b'}$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $\Theta \in P\Gamma L(3,s^2)$ kollineáció, amire $\Theta(U_{ab})=U_{a'b'}$.

Először azt látjuk be, hogy mindig van olyan $\Theta : U_{ab} \mapsto U_{a'b'}$ kollineáció is, ami a $P_\infty = (0,0,1)$ és a $Q = (1,0,0)$ pontokat fixen hagyja. Az U_{ab}, és $U_{a'b'}$ unitálok kollineációcsoportjai (rendre G és G') helybehagyják a P_∞ pontot, és tranzitívak az unitálok többi pontján. Tehát $\Theta^{-1}G\Theta$ az $U_{a'b'}$ unitál olyan kollineációcsoportja, ami fixen hagyja a $\Theta(P_\infty)$ pontot, és tranzitív az unitál többi pontján. Ha $\Theta(P_\infty) \neq P_\infty$, akkor a G' és $\Theta^{-1}G\Theta$ csoportok egy tranzitív kollineációcsoportot generálnak $U_{a'b'}$-n, így a Θ kolineáció helyett vehetünk egy olyan Θ' kollineációt, ami a P_∞ pontot helyben hagyja. Ha Θ' a Q pontot nem önmagára képzi, akkor tekintsük azt a $\Psi \in G'$ kollineációt, amire $\Psi(\Theta'(Q)) = Q$, és vegyük Θ' helyett a $\Psi\Theta'$ kollineációt.

Tehát feltehetjük, hogy Θ a $P_\infty = (0,0,1)$ pontot, és a $Q = (1,0,0)$ pontot is fixen hagyja. Ekkor szükségképpen fixen hagyja az $l_\infty = [1,0,0]$ egyenest is. Mivel Θ felírható egy M mátrix és egy σ automorfizmus által generált kollineáció szorzataként, ezért alkalmas $\sigma \in Aut(GF(s^2))$ és $e, f, g \in GF(s^2)$, $ef \neq 0$ elemekkel $\Theta(\underline{x}) = M\underline{x}^\sigma$, ahol

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & g & f \end{pmatrix}.$$

Mivel $(1,0,1) \in U_{ab}$, ezért $\Theta((1,0,1)) = (1,0,f) \in U_{a'b'}$, és emiatt $f \in GF(s)^*$.

Ha $(1,y,z) \in U_{ab}$, akkor $ay^2 + by^{s+1} - z \in GF(s)$. Ekkor $\Theta((1,y,z)) = (1, y^\sigma e, y^\sigma g + z^\sigma f) \in U_{a'b'}$, és emiatt $a'(y^\sigma e)^2 + b'(y^\sigma e)^{s+1} - y^\sigma g - z^\sigma f \in GF(s)$. Felhasználva, hogy $f(ay^2 + by^{s+1} - z)^\sigma \in GF(s)$:

$$(a'e^2 - a^\sigma f)(y^\sigma)^2 + (b'e^{s+1} - b^\sigma f)(y^\sigma)^{s+1} - y^\sigma g \in GF(s).$$

Legyen most s páratlan (páros s-re hasonlóan megy a bizonyítás). Emlékezzünk vissza a $PG(2,s^2) \hookrightarrow PG(4,s)$ beágyazásnál használt $\{1, \epsilon\}$ bázis tulajdonságaira: $\epsilon + \epsilon^s = 0$, $\epsilon^2 \in GF(s)$. A fenti egyenletben y^σ helyére rendre 1-et (-1)-et, ϵ-t, $(-\epsilon)$-t, $(1+\epsilon)$-t írva, a következő egyenletrendszert kapjuk:

- $(a'e^2 - a^\sigma f) + (b'e^{s+1} - b^\sigma f) - g \in GF(s)$,
- $(a'e^2 - a^\sigma f) + (b'e^{s+1} - b^\sigma f) + g \in GF(s)$,
- $\epsilon^2(a'e^2 - a^\sigma f) - \epsilon^2(b'e^{s+1} - b^\sigma f) - \epsilon g \in GF(s)$,
- $\epsilon^2(a'e^2 - a^\sigma f) - \epsilon^2(b'e^{s+1} - b^\sigma f) + \epsilon g \in GF(s)$,
- $(\epsilon^2 + 2\epsilon + 1)(a'e^2 - a^\sigma f) + (1 - \epsilon^2)(b'e^{s+1} - b^\sigma f) - (1+\epsilon)g \in GF(s)$.

Ebből:

- $a'e^2 - a^\sigma f = 0$,
- $b'e^{s+1} - b^\sigma f \in GF(s)$,
- és $g = 0$.

(Ha s páros, akkor y^σ helyére az $1, \delta, \delta^s, \lambda$, és $\delta\lambda$ helyettesítések adnak hasonló egyenletrendszert.)

Tehát $U_{ab} \cong U_{a'b'}$ akkor és csak akkor, ha $a' = a^\sigma r^2 f$, és $b' = b^\sigma r^{s+1} f + \mu$, ahol $r = e^{-1} \in GF(s^2), f \in GF(s)^*, \mu \in GF(s), \sigma \in Aut(GF(s^2))$. ■

Megjegyzés. A következőkben a projektíve inekvivalens unitálok számát vizsgáljuk. Projektív ekvivalencia szerint osztályokba sorolva $PG(2, s^2)$ unitáljait, nyilván egy osztályt alkotnak a klasszikus unitálok. Egy másik osztály az oválisok uniójaként előálló unitálok osztálya.

4.47. Tétel. *Legyen $s = p^e \geq 4$. Ekkor a projektíve inekvivalens s-edrendű BM-unitálok száma:*

$$\tfrac{1}{2e}[e_0 + \textstyle\sum_{n|e} \phi(\frac{2e}{n})p^n],$$

ahol ϕ az Euler-féle ϕ-függvény, továbbá:

- *páros s-re $e_0 = 0$;*
- *páratlan s-re $e = 2^t e_0$, ahol e_0 páratlan, t nemnegatív egész, azaz e_0 az e páratlan része.*

4.48. Következmény. *Ha s páratlan prím, akkor $PG(2, s^2)$-ben a projektíve inekvivalens s-edrendű BM-unitálok száma éppen $\frac{s+1}{2}$.*

4.49. Következmény. *$PG(2, 9)$-ben csak a klasszikus unitál, és az oválisok uniójából álló unitál van.*

Megjegyzés. Kis s-ek esetén számítógépes módszerekkel lehet az s^2-rendű síkok unitáljait vizsgálni. Az $s = 3$ esetben A. E. Brouwer 138 nem izomorf $2 - (28, 4, 1)$ blokkrendszert találtak, melyekből 11 ágyazható be unitálként 9-edrendű projektív síkba: 2 a $PG(2, 9)$ síkba, 4 a Hughes síkba, 2 a Hall síkba, 2 a duális Hall síkba, 1 pedig mind a Hall, mind a duális Hall sikba.

4.50. Következmény. *Ha s páros, akkor a projektíve inekvivalens s-edrendű BM-unitálok száma aszimptotikusan $\left(\frac{s}{log_2(s)}\right)$.*

4.51. Következmény. *Ha $s = 2^{p'}$ valamilyen p' prímmel, akkor a projektíve inekvivalens s-edrendű BM-unitálok száma éppen 2, ha $p' = 2$, és $1 + \frac{2^{p'-1}-1}{p'}$, ha $p' > 2$.*

Például:

- $s = 2^3 = 8$: $PG(2, 8^2)$-ben két fajta BM-unitál van.
- $s = 2^5 = 32$: $PG(2, 32^2)$-ben négy fajta BM-unitál van.

Megjegyzés. A $PG(2, 2^2)$ síkon csak klasszikus unitál van.

4.5.5. Duális alakzat

Ha U egy s-edrendű unitál egy s^2-rendű projektív síkba ágyazva, akkor tekinthetjük duális képét, U^*-ot a projektív sík duális síkjában, melynek:

- pontjai legyenek U éritői;
- blokkjai legyenek a sík U-ra nem illeszkedő pontjai;
- az illeszkedés legyen a tartalmazás.

Könnyen látható, hogy U^* is unitál. Mit tudunk U^*-ról, ha U egy $PG(2, s^2)$-beli BM-unitál?

4.52. Tétel. *Ha $U \subset PG(2, s^2)$ BM-unitál, akkor $U \cong U^*$, azaz $PG(2, s^2)$ minden BM-unitálj önduális.*

Bizonyítás. Páros s-re bizonyítjuk csak, mert páratlanra pontosan ugyanígy meggondolható.

Legyen rögzített $a, b \in GF(s^2)$ elemekkel, melyekre $b \notin GF(s), d = \frac{a^{s+1}}{(b^s+b)^2} \in C_0(s)$:
$U = U_{ab} = \{\, (1, y, ay^2 + by^{s+1} + r) \mid y \in GF(s^2), r \in GF(s) \,\} \cup \{\, (0, 0, 1) \,\}$. Az állítás nyilvánvaló, ha $a = 0$, hiszen egy polritás autokonjugált pontjainak halmaza önduális halmaz. Így feltehetjük, hogy $a \neq 0$. Ekkor $(1, y, z) \in U_{ab}$ akkor és csak akkor, ha $ay^2 + by^{s+1} + z \in GF(s)$.

A 4.31 állítás szerint az $[u, v, 1]$ egyenes akkor és csak akkor érintője U-nak, ha $a^s v^2 + b^s v^{s+1} + (b^s + b)^2 u \in GF(q)$. Így $(b^s + b) \in GF(s)^*$ miatt:

$U^*_{ab} = \{\, [\frac{a^s}{(b^s+b)^2} v^2 + \frac{b^s}{(b^s+b)^2} v^{s+1} + t, v, 1] \mid v \in GF(s^2), t \in GF(s) \,\} \cup \{\, [1, 0, 0] \,\}$.

Legyen $\overline{a} = \frac{a^s}{(b^s+b)^2}$, és $\overline{b} = \frac{b^s}{(b^s+b)^2}$. Ekkor :

$$\frac{\overline{a}^{s+1}}{(\overline{b}^s+\overline{b})^2} = \frac{\left(\frac{a^s}{(b^s+b)^2}\right)^{s+1}}{\left(\left(\frac{b^s}{(b^s+b)^2}\right)^s + \frac{b^s}{(b^s+b)^2}\right)^2} = \frac{\frac{a^{s+1}}{(b^s+b)^4}}{\frac{(b^s+b)^2}{(b^s+b)^4}} = \frac{a^{s+1}}{(b^s+b)^2} \in C_0(s),$$

ezért $U_{\overline{a}\overline{b}}$ is BM-unitál. Megcserélve az első és utolsó koordinátákat, és gömbölyű zárójel helyett szögleteset írva láthatjuk, hogy $U^*_{ab} \cong U_{\overline{a}\overline{b}}$.

A 4.46 állítás szerint $U_{ab} \cong U_{a'b'}$ akkor és csak akkor, ha $(a', b') = (a^\sigma r^2 f, b^\sigma r^{s+1} f + \mu)$, ahol $r \in GF(s^2)^*, f \in GF(s)^*, \mu \in GF(s), \sigma \in Aut(GF(s^2))$. Ezt többször felhasználva: $(\overline{a}, \overline{b}) \sim (a^s, b^s) \sim (a^s a^2 a^{-(s+1)}, b^s a^{s+1} a^{-(s+1)}) \sim (a, b^s) \sim (a, b^s + (b^s + b)) \sim (a, b)$, azaz $U^\perp_{ab} \cong U_{ab}$. ■

5. Karakterizációs tételek

Ebben a fejezetben célunk, hogy a $PG(2,s^2)$-beli klasszikus, illetve BM-unitálokat karakterizáljuk.

5.1. Geometriai karakterizációk

5.1.1. Baer egyenesekkel

5.1. Tétel (Barwick). *Legyen U egy $PG(2,s^2)$-beli unitál, ahol $s>2$.*

Legyen l_∞ egy rögzített szelője az U unitálnak. Az U unitál akkor és csak akkor Buekenhout-féle hiperbolikus unitál l_∞-re nézve, ha minden Baer egyenes, aminek van l_∞-en pontja, U-t 0, 1, 2, vagy $s+1$ pontban metszi.

Bizonyítás. Jelölje $\widetilde{U}$ az U képét a $\Pi \hookrightarrow PG(4,s)$ beágyazásnál, és használjuk a szokásos jelöléseket.

(1) *$\widetilde{U}$ egy $(0,1,2,s+1)$-típusú halmaz $PG(4,s)$-ben.*

Elég az belátnunk, hogy különböző $P,Q\in\widetilde{U}$ pontokra a PQ egyenes és $\widetilde{U}$ metszete vagy két pont, vagy $s+1$ pont, azaz vagy P és Q, vagy az egész PQ egyenes.

Ha $P,Q\in\overline{\Sigma}$, és P és Q az $\mathcal{S}$ befedésnek ugyanazon egyenesén van, akkor ez az egyenes szükségképpen $\widetilde{U}$-hoz tartozik, tehát $PQ\cap\widetilde{U}$ az egész PQ egyenes. Ha $P,Q\in\overline{\Sigma}$, és P és Q az $\mathcal{S}$ befedésnek különböző egyenesein van, akkor a PQ egyenes az l_∞ egyenes egy Baer részegyenesének képe, ami a tétel feltételei szerint U-t 0, 1, 2, vagy $s+1$ pontban metszi, tehát PQ a $\widetilde{U}$ halmazt 2 vagy $s+1$ pontban metszi.

Most tegyük fel, hogy P és Q közül legalább az egyik nincs $\overline{\Sigma}$-ban. Ekkor a PQ egyenes egy pontban metszi a $\overline{\Sigma}$ hipersíkot, jelölje ezt a pontot X (ez lehet P vagy Q is). Legyen m az X-re illeszkedő $\mathcal{S}$-beli egyenes, és α a PQ és m egyenesekre illeszkedő sík. Ekkor α egy $PG(2,s^2)$-beli a egyenes képe, míg a PQ egyenes a egy olyan Baer részegyenesének képe, aminek van pontja l_∞-en. A tétel feltételei szerint ez U-t 0, 1, 2, vagy $s{+}1$ pontban metszi, így $PG(4,s)$-ben a PQ egyenes $\widetilde{U}$-t 2 vagy $s+1$ pontban metszi.

(2) *A $\widetilde{U}$ ponthalmaz nem tartalmaz $PG(4,s)$-beli síkot.*

Tegyük fel, hogy $\widetilde{U}$ tartalmaz egy α síkot. A $\overline{\Sigma}$ hipersík nem tartalmazhatja ezt az α síkot, hiszen egy $\overline{\Sigma}$-beli sík $\mathcal{S}$-nek pontosan egy elemét tartalmazza, az összes többit pedig egy-egy pontban metszi, $\widetilde{U}$ viszont pontosan $s+1$ elemét tartalmazza a befedésnek. Egy $PG(4,s)\setminus\overline{\Sigma}$-beli sík a 4.7 állítás szerint $PG(2,s^2)$ egy egyenesének vagy Baer részsíkjának képe. Mivel U nem tartalmaz egyenest, és a 3.28 tétel szerint Baer síkot sem, ezért $\widetilde{U}$ nem tartalmazhat síkot.

(3) Tehát beláttuk, hogy $\widetilde{U}$ olyan $(0,1,2,s+1)$ típusú halmaz, aminek

$$s^3+1-(s+1)+(s+1)(s+1)=s^3+s^2+s+1$$

pontja van. Alkalmazzuk a 2.47 tételt. Ennek harmadik esete nem jöhet szóba, mert $\widetilde{U}$-nak kevesesebb pontja van annál, így $\widetilde{U}$ vagy egy másodrendű varietás, vagy egy másodrendű varietás és egy pont uniója.

A $PG(4,s^2)$ projektív tér egy másodrendű varietása szükségképpen az alábbi hét fajta ponthalmaz egyike: $\mathcal{P}_4, \Pi_0\mathcal{H}_3, \Pi_0\mathcal{E}_3, \Pi_1\mathcal{P}_2, \Pi_2\mathcal{H}_1, \Pi_2\mathcal{E}_1$, vagy Π_3.

A négy utóbbi tartalmaz síkot, így (2) szerint U nem lehet egyik sem. Az első háromnak rendre s^3+s^2+s+1, s^3+2s^2+s+1 és s^3+s+1 pontja van, így nyilván csak $\widetilde{U}=\mathcal{P}_4$ lehetséges.

Tehát $\widetilde{U}$ egy parabolikus kvádrika, aminek metszete a $\overline{\Sigma}$ hipersíkkal egy regulus, azaz U szükségképpen Buekenhout-féle hiperbolikus unitál.

■

Megjegyzés. A tételt Barwick tetszőleges s^2-rendű származtatható transzlációsíkokra bizonyította. A 4.17 tétellel összevetve:

5.2. Következmény. *Legyen U egy unitál $PG(2,s^2)$-ben, l pedig egy rögzített szelője U-nak. Ekkor U akkor és csak akkor klasszikus unitál, ha $PG(2,s^2)$ minden olyan Baer egyenese, aminek van pontja l-en, U-t 0, 1, 2, vagy $s+1$ pontban metszi.*

5.3. Tétel ([30], [18], [4]). *Legyen U egy $PG(2,s^2)$-beli unitál, ahol $s>2$.*

- *Az U unitál akkor és csak akkor klasszikus, ha minden szelőegyenesét Baer egyenesben metszi.*
- *Az U unitál akkor és csak akkor klasszikus, ha $PG(2,s^2)$ minden Baer egyenese U-t 0, 1, 2, vagy $s+1$ pontban metszi.*

Bizonyítás. A két feltétel ekvivalens:

Ha U minden szelőegyenesét Baer egyenesben metszi, és b az l egyenes egy olyan Baer részegyenese, ami U-t legalább három pontban metszi, akkor $|\, l\cap U\,|=s+1$, azaz egy b_1 Baer egyenes, és akkor $|\, b\cap b_1\,|\geq 3$ miatt $b=b_1$, tehát $b \cap U$ éppen a b_1 Baer egyenes, azaz $s+1$ pont. Tehát ekkor U-t minden Baer egyenes 0, 1, 2, vagy $s+1$ pontban metszi.

Ha U-t minden Baer egyenes 0, 1, 2, vagy $s+1$ pontban metsz, és l egy tetszőleges szelőegyenese, akkor az $l \cap U$ metszet bármely három pontját kiválasztva, az azokat tartalmazó Baer egyenes szükségképpen megegyezik a metszettel. Tehát ekkor minden szelőegyenessel vett metszete Baer egyenes.

Azt tudjuk, hogy egy klasszikus unitált minden szelőegyenese Baer egyenesben metsz. Ebből következik mindkét állítás egyik iránya. A 5.2 következményből viszont következik a másik: ha U-t minden Baer egyenes 0, 1, 2, vagy $s+1$ pontban metsz, akkor egy rögzített l szelőegyenesét metsző Baer egyenesekre is teljesül ez, és alkalmazható a 5.2 következmény, azaz U klasszikus. ■

Megjegyzés. Lefèvre-Pércsy fenti tétel bizonyítása során először azt látta be, hogy $\widetilde{U}$ ovoid alapú kúp. Ahhoz, hogy ez olyan kúp legyen, amit a szelőknek megfelelő minden (nem p-re illeszkedő) sík Baer-féle másodrendű görbében metsz, elég volt feltenni, hogy legalább egy ilyen sík van.

5.4. Tétel. *Legyen U egy $PG(2, s^2)$-beli unitál, ahol $s > 2$. Az U unitál akkor és csak akkor parabolikus típusú Buekenhout unitál, ha van olyan P pontja, hogy P-n keresztül minden szelőegyenes U-t egy Baer egyenesben metszi.*

Megjegyzés. Páratlan s esetén tehát egy jellemzését kaptuk a BM-unitáloknak.

Bizonyítás. Ha U parabolikus típusú Buekenhout unitál, akkor az l_∞ érintő, és a P_∞ érintési pont a 4.33 tétel szerint teljesíti a fenti feltételeket.

Több lépésben bizonyítjuk, hogy ha U olyan unitál, ami teljesíti a tétel feltételeit, akkor a P pontbeli érintőjét tekintve l_∞-nek, a $PG(2, s^2) \hookrightarrow PG(4, s)$ beágyazásnál vett képe egy ovoid feletti kúp. Legyen P képe a beágyazásnál a p egyenes, és használjuk a korábbi jelöléseket: $PG(4, s)$ rögzített hipersíkja $\overline{\Sigma}$, ennek rögzített befedése $\mathcal{S}$, U képe $\widetilde{U}$.

(1) *Ha α egy p-t tartalmazó, nem $\overline{\Sigma}$-beli sík, akkor $\alpha \cap \widetilde{U}$ a p egyenesből és egy l egyesből áll.*

$PG(2, s^2)$-ben α ősképe U-nak egy szelője, így a tétel feltételei szerint $\alpha \cap \widetilde{U}$ ősképe egy Baer egyenes, aminek van pontja l_∞-en. A 4.7 állítás szerint tehát ez a metszet a p egyenes és egy másik egyenes.

A $\overline{\Sigma}$-tól diszjunkt, p-t tartalmazó síkok száma s^2, az ezek metszeteit jelölje $\{\, l_i \mid 1 \le i \le s^2 \,\}$.

(2) *Ha az* $1 \leq i, j \leq s^2$, $i \neq j$ *indexekre* $l_i \cap l_j$ *nemüres, akkor az általuk kifeszített síkban nincs több pontja* $\widetilde{U}$*-nak.*

Az l_i és l_j egyenesek által kifeszített β sík nem tartalmazza p-t, mert akkor a képe olyan egyenes lenne $PG(2, s^2)$-ben, ami az U unitált túl sok pontban metszi. Így l_i és l_j szükségképpen p-n metszik egymást, és β a $\overline{\Sigma}$ teret egy nem $\mathcal{S}$-beli egyenesben metszi. A 4.7 állítás szerint ez egy $\mathcal{B}$ Baer sík képe, aminek legalább egy egyenese érinti U-t (például az l_∞ egyenes is), tehát a 3.28 tétel szerint $\mathcal{B}$ legfeljebb $2s+1$ pontban metszi U-t, azaz $\mathcal{B} \setminus l_\infty$ legfeljebb $2s$ pontban. De $l_i \cup l_j \setminus p$ éppen $2s$ pont, így $(\beta \setminus \overline{\Sigma}) \cap \widetilde{U} = l_i \cup l_j \setminus p$.

(3) *Tegyük fel, hogy van olyan* l_i *és* l_j *egyenes, amire* $l_i \cap l_j$ *nemüres* ($1 \leq i, j \leq s^2$, $i \neq j$). *Jelölje ezt a* p*-beli pontot* V, *az általuk kifeszített síkot* β, *és a* β *sík és* p *egyenes által kifeszített hipersíkot* Σ. *Ekkor* $\Sigma \cap \widetilde{U}$ *egy ovális alapú,* V *csúcsú kúp.*

Először azt látjuk be, hogy az $\{\, l_i \mid 1 \leq i \leq s^2 \,\}$ egyenesek közül legalább s megy át a V ponton. A p-t tartalmazó s^2 nem $\overline{\Sigma}$-beli sík mindegyike tartalmaz egy l_i egyenest (1) szerint. E síkok közül s van a Σ hipersíkban, és ha az általuk tartalmazott l_i egyenesek között lenne olyan, ami nem V-ben metszené a β síkot, akkor az egy $\beta \setminus (l_i \cup l_j)$ pontban döfiné, de ez ellentmond (2)-nek. Ezzel beláttuk, hogy $\Sigma \cap \widetilde{U}$ éppen a p egyenes és az $\{\, l_i \mid 1 \leq i \leq s^2 \,\}$ egyenesek közül s darab, melyek mind a V pontban metszik egymást. Feltehetjük, hogy ezek $l_1, l_2, ..., l_s$. Tehát $l_1, l_2, ..., l_s$ kúpot alkotnak, és ahhoz, hogy ez ovális alapú kúp legyen, azt kell belátnunk, hogy a Σ hipersík V-re illeszkedő síkjai közül egyik sem tartalmaz az $l_1, l_2, ..., l_s$ egyenesek közül kettőnél többet. A p-t tartalmazó síkokra ez (1) miatt teljesül, a p-t nem tartalmazó síkokra pedig (2) miatt.

(4) *Az előző pont feltevései mellet, és jelöléseit használva, ha egy* $s+1 \leq i \leq s^2$ *index esetén az* l_i *egyenes is tartalmazza a* V *pontot, akkor minden* l_i $(1 \leq i \leq s^2)$ *tartalmazza a* V *pontot.*

Legyen l_{s+1} az az egyenes, ami még tartalmazza V-t. Az előző pont szerint minden $1 \leq i \leq s$ indexre az l_{s+1}, p és l_i egyenesek által kifeszített altér olyan Σ_i hipersík, ami $\widetilde{U}$-t egy V csúcsú, ovális alapú kúpban metszi. Különböző i indexekre ezek különböző hipersíkok, amiknek metszete a p és l_{s+1} egyenesek által kifeszített sík, tehát a Σ_i hipersíkok $(1 \leq i \leq s^2)$ együttesen $s(s-1)+1$ egyenest tartalmaznak az $\{\, l_i \mid 1 \leq i \leq s^2 \,\}$ rendszerből, azaz $(s-1)$-et nem.

Definiáljunk most egy $\mathcal{Q}$ struktúrát a következőképpen: pontjai legyenek a $PG(4,s)$ tér azon síkjai, melyek a p egyenesre illeszkednek, egyenesei pedig a p-re illeszkedő hipersíkok. Nem nehéz ellenőrizni, hogy $\mathcal{Q}$ éppen egy s-edrendű projektív sík. Ennek pontjait, illetve egyeneseit jelöljük mindig ugyanúgy, mint $PG(4,s)$-ben. Egy $\mathcal{Q}$-beli pontot *telítettnek* nevezünk, ha tartalmaz egy V-re illeszkedő l_i egyenest.

$\mathcal{Q}$-ban a $\overline{\Sigma}$ egyenes egyik pontja sem telített. A Σ egyenesnek egy pontja nem telített (a $\gamma = \overline{\Sigma} \cap \Sigma$ pont) a többi pontja viszont telített. Jelölje τ a p és l_{s+1} egyenesek által kifeszített síkot $PG(4,s)$-ben, ill. pontot $\mathcal{Q}$-ban. Ez telített pont, és a Σ egyenes pontjaival összekötve, a Σ_i egyeneseket kapjuk, melyeknek minden pontja telített, és a $\tau\gamma$ egyenest, melynek $s-1$ pontjáról nem tudjuk, hogy telített-e vagy sem.

Tehát a $\mathcal{Q}$ projektív sík $s+1$ pontjáról tudjuk, hogy nem telített, $s^2 - s + 1$ pontjáról tudjuk, hogy telített, és a maradék $s-1$ pontról nem tudunk semmit.

A (3)-as rész szerint, ha $\mathcal{Q} \backslash \overline{\Sigma}$ két pontja telített, akkor az őket összekötő egyenes minden pontja telített, tehát $\mathcal{Q}$ telített pontjainak halmaza egy affin részsíkja a $\mathcal{Q}$ projektív síknak, így vagy üres, vagy egy pontból áll, vagy egy affin egyenesből, vagy az egész $\mathcal{Q} \setminus \overline{\Sigma}$. Pontjait megszámolva csak ez utóbbi eset lehetséges, azaz a telített pontok halmaza az egész $\mathcal{Q} \setminus \overline{\Sigma}$, tehát $PG(4,s) \setminus \overline{\Sigma}$ minden síkja $\widetilde{U}$-ot egy V-n áthaladó l_i egyenesben metszi valamilyen i-re. Ezzel beláttuk, hogy az $l_1, l_2, ..., l_{s^2}$ egyenesek V-ben metszik egymást.

(5) *Ha az $l_1, l_2, ..., l_{s^2}$ egyenesek mind p egy pontjában metszik egymást, akkor U egy BM-unitál.*

A feltevés szerint $\widetilde{U}$ a p egyenesből, és annak egy pontján áthaladó s^2 darab $PG(4,s) \setminus \overline{\Sigma}$-beli egyenesből áll. Mivel a V-t tartalmazó minden sík legfeljebb két egyenest tartalmaz ezek közül, ez egy ovoid feletti kúp.

(6) *Ha az $l_1, l_2, ..., l_{s^2}$ egyenesek nem mind egy pontban metszik egymást, akkor s kúpot alkotnak (jelölje ezeket $C_1, C_2, ..., C_s$), amelyek különböző terekben vannak (rendre $\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_s$), és csúcsaik a p egyenes s különböző pontja (rendre $V_1, V_2, ..., V_s$). Továbbá, a $\overline{\Sigma}, \Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_s$ terek közös metszete egy π sík, ami mindegyik kúpnak érintője.*

Az egyenesek elhelyezkedése (3) és (4) egyértelmű következménye. Legyen $\pi = \overline{\Sigma} \cap \Sigma_1$. Mivel az $\widetilde{U} \cap \overline{\Sigma}$ éppen a p egyenes, ezért a π sík mindegyik C_i kúpot a V_i csúcsban érinti. Ez a π sík azonban mindegyik Σ_i hipersíkban benne van, mert $2 \leq i \leq s$ esetén bármely Σ_i

hipersík, metszete a Σ_1 hipersíkkal olyan p-re illeszkedő sík, ami nem tartalmaz l_i egyenest, azonban a p-re illeszkedő $s+1$ darab síkja közül csak egyre, a $\overline{\Sigma} \cap \Sigma_i$ síkra teljesül.

(7) *Az $l_1, l_2, ..., l_{s^2}$ egyenesek nem tudnak s kúpot alkotni különböző $V_1, V_2, ..., V_s$ csúcsokkal.*

Ez páros s-re, $s = 3$-ra, és páratlan $s > 3$-ra különböző kezelést igényel, mely megtalálható az [11] és [12] cikkekben.

■

5.5. Tétel. *Legyen U egy $PG(2, s^2)$-beli unitál, ahol $s > 2$. Az U unitál akkor és csak akkor parabolikus típusú Buekenhout unitál, ha van olyan l_∞ érintője, hogy $PG(2, s^2)$ minden olyan Baer egyenese, aminek l_∞-en van pontja, U-t 0, 1, 2, vagy $s+1$ pontban metszi.*

Bizonyítás. Ha U parabolikus típusú Buekenhout unitál, akkor a beágyazásnál képe egy $\widetilde{U}$ ovoid alapú kúp, és minden olyan Baer egyenes képe, aminek van pontja az ideális egyenesen, egy $PG(4, s) \setminus \overline{\Sigma}$-beli egyenes. Egy egyenes egy ovoid alapú kúpot 0, 1, 2 vagy $s+1$ pontban metszhet, és ebből már következik a tétel egyik iránya.

Ha U teljesíti a tétel feltételeit, akkor az l érintő érintési pontján át minden szelőegyenesét Baer egyenesben metszi, így az előző tétel szerint parabolikus típusú Buekenhout unitál. ■

Megjegyzés. A fenti tételt Lefèvre-Pércsy bizonyította tetszőleges s^2-rendű transzlációsíkra.

5.6. Következmény. *Legyen U egy $PG(2, s^2)$-beli unitál, ahol $s > 2$ páratlan.*

- *Az U unitál akkor és csak akkor BM-unitál, ha van olyan P_∞ pontja, amire illeszkedő minden szelőegyenesét Baer egyenesben metszi.*
- *Az U unitál akkor és csak akkor BM-unitál, ha van olyan l_∞ érintője, hogy $PG(2, s^2)$ minden olyan Baer egyenese, aminek l-en van pontja, U-t 0, 1, 2, vagy $s+1$ pontban metszi.*

Ha $s > 2$ páros, akkor mindkét állítás BM-unitál helyett parabolikus típusú Buekenhout unitálokra igaz.

Megjegyzés. Korábbi vizsgálódásaink szerint a klasszikus unitál a BM-unitáloknak olyan speciális fajtája, hogy ha BM-unitálokra teljesül egy tulajdonság egy speciális pont-érintőegyenes párra (ezt szokás speciális *zászló*nak is hívni), akkor a klasszikus unitál *minden* pont-érintőegyenes párja teljesíti azt. A fenti karakterizációs tételek viszont a Buekenhout-féle parabolikus unitálok családját állítják párba ily módon a klasszikus unitálokkal. Páratlan s esetén persze ez a két osztály megegyezik. Így az 5.3 tétel páratlan s esetén az 5.6 következménnyel párosítható, tetszőleges s esetén pedig az 5.4 és 5.5 tételekkel.

5.7. Tétel. *Legyen U egy unitál a $PG(2, s^2)$ síkon, $s > 2$ esetén. Az U unitál akkor és csak akkor klasszikus unitál, ha minden érintőjére nézve parabolikus típusú Buekenhout unitál.*

Bizonyítás. Ha U klasszikus, akkor minden érintőjére nézve BM-unitál, azaz parabolikus típusú Buekenhout unitál. Legyen most U egy olyan unitál, ami minden érintőjére nézve parabolikus típusú Buekenhout unitál. Ekkor a 5.4 tételt minden érintési pontra alkalmazhatjuk, azaz U-t minden szelőegyenese Baer egyenesben metszi, de ekkor a 5.3 tétel miatt klasszikus. ■

A 5.3 tétel utáni megjegyzés szerint egy $PG(2, s^2)$-beli U unitál szükségképpen klasszikus, ha van $s^2 + 1$ megfelelően elhelyezkedő olyan szelője, melyek mind Baer egyenesben metszik. Ezt az eredményt javította S. Ball, A. Blokhuis és C. M. O'Keefe:

5.8. Tétel ([3]). *Legyen U egy $PG(2, p^2)$-beli unitál, ahol p prím. Ekkor U akkor és csak akkor klasszikus, ha legalább $(p^2 - 1)p$ olyan szelőegyenese van, amit Baer egyenesben metsz.*

5.1.2. Baer síkokkal

Emlékeztető: lineáris Baer síknak nevezünk egy Baer síkot, ha $s+1$ pontban metszi az l_∞ egyenest.

5.9. Tétel. *Legyen U egy parabolikus típusú unitál egy s^2-rendű beágyazható transzlációsíkon. Az U unitál akkor és csak akkor Buekenhout-féle parabolikus unitál, ha minden lineáris Baer részsík 1 modulo s pontban metszi.*

Bizonyítás. A 3.28 tétel szerint egy B Baer síknak és egy U unitálnak legfeljebb $2s + 2$ közös pontja lehet, így a feltétel, hogy $B \cap U$ 1 modulo s pontból áll, ekvivalens azzal, hogy 1, $s + 1$, vagy $2s + 1$ pontot tartalmaz.

Ha U egy Buekenhout-féle parabolikus unitál, akkor képe $PG(4, s)$-ben egy ovoid alapú kúp, míg a 4.7 tétel szerint egy lineáris Baer sík képe $PG(4, s)$-ben olyan sík, ami az $\overline{\Sigma}$ hipersíkot nem $\mathcal{S}$-beli egyenesben metszi. A 2.48 tétel szerint egy ilyen kúp és sík metszete egy pont, egy egyenes, egy metsző egyenespár vagy egy ovális lehet, és ezek őskép ei 1, $s + 1$ vagy $2s + 1$ pontúak.

Következzen most a másik irány: tegyük fel, hogy az U parabolikus unitált minden lineáris Baer részsík 1, $s+1$, vagy $2s+1$ pontban metsz.

(1) *Ha B olyan lineáris Baer részsík, ami nem tartalmazza a $P_\infty = l_\infty \cap U$ pontot, akkor $B \cap U$ 1 vagy $s+1$ pontból áll.*

Jelölje $\mathcal{N}$ azon Baer részsíkok halmazát, melyek nem tartalmazzák a P_∞ pontot, és jelölje rendre x, y, z $\mathcal{N}$ azon elemeinek számát, melyek U-t 1, $s+1$, illetve $2s+1$ pontban metszik.

Egyszerű kombinatorikus meggondolás adja, hogy egy s^2-rendű projektív síkon $s^6 - s^4$ olyan Baer sík van, ami egy rögzített l_∞ egyenest tartalmaz, de annak egy rögzített P_∞ pontját nem tartalmazza, továbbá

- ezek között $s^4 - s^2$ olyan van, ami egy rögzített $T \notin l_\infty$ pontot tartalmaz;
- illetve $s^2 - 1$ olyan van, ami rögzített T, R pontokat tartalmaz (ekkor persze P_∞, R, T szükségképpen nem kollineárisak).

Ezekből kapjuk, hogy

- $x + y + z = s^6 - s^4$;
- $x + (s+1)y + (2s+1)z = s^3(s^4 - s^2) = s^7 - s^5$ összeszámolva azokat a (T, B) párokat, ahol $B \in \mathcal{N}$, $T \in U \setminus P_\infty$, és $T \in B$;
- $(s+1)sy + (2s+1)2sz = (s^3(s^3 - s))(s^2 - 1) = s^8 - 2s^6 + s^4$ összeszámolva azokat a (T, R, B) hármasokat, ahol $B \in \mathcal{N}$, $T, R \in U \setminus P_\infty$, és $T, R \in B$.

Ezeknek egyetlen megoldása: $x = s^5 - s^3, y = s^6 - s^5 - s^4 + s^3, z = 0$.

Nevezzük *érintősík*nak $PG(4, s) \setminus \overline{\Sigma}$ azon síkjait, melyek az $U \subset \Pi$ unitál érintőinek képei (az l_∞ kivételével).

(2) *Ha $t \neq p$ egy $\mathcal{S}$-beli egyenes, és Σ egy t-re illeszkedő hipersík, ami nem tartalmaz t-re illeszkedő érintősíkot, akkor $\Sigma \cap \widetilde{U}$ egy kúp, melynek csúcsa a $V = \Sigma \cap p$ pont, alapja pedig egy $(s+1)$-ív.*

A Σ hipersíkban $s+1$ sík illeszkedik a t egyenesre. Ebből egy az $\alpha = \Sigma \cap \overline{\Sigma}$ sík, ami egy $\mathcal{S}$-beli egyenest tartalmaz (a t egyenest), a többi $\mathcal{S}$-beli egyenes pedig egy-egy pontban metszi. Tehát $\alpha \cap \widetilde{U} = \alpha \cap p = V$. A t-re illeszkedő további s Σ-beli sík a feltétel szerint U szelőegyeneseinek képe, azaz $s+1$ pontban metszi $\widetilde{U}$-t (mert a metszetben nem lehet p, tehát a metszet elemszáma megegyezik az ősképek elemszámával). Ezzel beláttuk, hogy $\mid \Sigma \cap \widetilde{U} \mid = s(s+1) + 1$.

Legyen l olyan Σ-beli egyenes, ami nem illeszkedik V-re, és nincs a $\overline{\Sigma}$ hipersíkban. Ekkor l egy Baer egyenes képe. Tegyük fel, hogy az $l \cap \widetilde{U}$ metszet k elemű, ahol $k \geq 2$. Ekkor az l és V által generált β sík egy Baer részsík képe (nyilván nem tartalmaz $\mathcal{S}$-beli egyenest, hiszen nem tartalmazza p-t). A feltevés szerint ez a Baer sík 1 modulo s pontban metszi U-t, tehát $\beta \cap \widetilde{U}$ is 1 modulo s pontot tartalmaz. Az l egyenes már legalább két $\widetilde{U}$-beli pontot tartalmaz, így ez a metszet $s+1$, vagy $2s+1$ elemű, továbbá őse képe tartalmazza a P_∞ pontot. Az l-re illeszkedő további s darab sík vagy P_∞-t nem tartalmazó Baer síkok képei, vagy U szelőegyeneseinek képei, tehát (1) szerint ezek $\widetilde{U}$-nak $s+1$ pontját tartalmazzák. Számoljuk össze $\widetilde{U}$ pontjait az l-re illeszkedő síkokon: aszerint, hogy β hány pontban metszi $\widetilde{U}$-t, vagy $(s+1-k)+s(s+1-k)+k = s(s+1)+1$, amiből $k=1$, és ellentmondásra jutottunk, vagy $(2s+1-k)+s(s+1-k)+k = s(s+1)+1$, amiből $k=2$. Tehát beláttuk, hogy egy V-re nem illeszkedő, $\Sigma \setminus \overline{\Sigma}$-beli egyenes $\widetilde{U}$-t 0, 1, vagy 2 pontban metszi.

Legyen R most egy Σ-beli pont, $R \neq V$. Nem lehet $\Sigma \cap \widetilde{U}$ minden pontja az RV egyenesen, tehát az előző okfejtés szerint kell lennie olyan R-re illeszkedő egyenesnek, ami $\widetilde{U}$-t 2 pontban metszi, legyen egy ilyen l. Az l egyenes és V pont által generált β sík a fentiek szerint az l-re illeszkedő síkok közül az egyetlen, ami $\widetilde{U}$-t $2s+1$ pontban metszi. Az R-re illeszkedő β-beli egyeneseken $\widetilde{U}$-nak csak további egy-egy pontja lehet az RV egyenes kivételével, tehát azon szükségképpen $s+1$ pontja van $\widetilde{U}$-nak, azaz az RV egyenes része $\widetilde{U}$-nak. Ezzel beláttuk, hogy minden ilyen R pont egy $\widetilde{U}$-hoz tartozó, V-re illeszkedő egyenesen van, azaz $\widetilde{U} \cap \Sigma$ $s+1$ V-re illeszkedő egyenes uniója. Mivel a Σ hipersík minden V-re nem illeszkedő egyenese $\widetilde{U}$-t 0, 1, vagy 2 pontban metszi, ezért $\widetilde{U} \cap \Sigma$ egy $(s+1)$-ív feletti V csúcsú kúp.

(3) *Ha t egy p-től különböző $\mathcal{S}$-beli egyenes, akkor legalább $s-1$ olyan t-re illeszkedő hipersík van, ami nem tartalmaz t-re illeszkedő érintősíkot.*

A $\overline{\Sigma}$ hipersíkon kívül s^2+s hipersík illeszkedik t-re, és öszesen s érintősík (hisz képére $s+1$ érintő illeszkedik, de azokból egy az l_∞ egyenes). A $PG(4,s)$ tér egy rögzített egyenesre illeszkedő sík az egyenesre illeszkedő hipersíkok közül $s+1$-ben van benne, és bármely két metsző sík egyértelműen meghatározza a rájuk illeszkedő hipersíkot. Tehát a t-re illeszkedő hipersíkok közül összeszámolva azokat, amik tartalmaznak legalább egy t-re illeszkedő érintősíkot, ebből legfeljebb $(s+1)s-(s-1)$ van, és egyenlőség csak abban az esetben lehet, ha az s darab érintősík mind egy hipersíkban fekszik (mert $(s+1)s$ olyan érintősík-hipersík pár van, ami teljesíti a feltételeket, de ekkor többször számoltuk azokat a hipersíkokat, amik több érintősíkot is tartalmaznak, így le kell vonni $\sum_{i=1}^{s^2}(k_i-1) = [(s-1)+r]$-et, ahol k_i jelöli, hogy az i-edik hipersík hány érintősíkot tartalmaz, r pedig azon hipersíkok számát, melyek több érintősíkot tartalmaznak).

(4) *Az $\widetilde{U}$ ponthalmaz s^2+1 egyenesből áll, melyek mind p egy V pontjában metszik egymást, és az egyenesek közül csak p fekszik a $\overline{\Sigma}$ hipersíkban.*

Legyen $t \neq p$ egy $\mathcal{S}$-beli egyenes. Ekkor az előzőek szerint legalább $s-1$ olyan t-re illeszkedő hipersík van, ami nem tartalmaz t-re illeszkedő érintősíkot, és ezek mindegyike $\widetilde{U}$-ot egy $(s+1)$-ív alapú kúpban metszi. Ez a kúp diszjunkt t-től, tehát ha két ilyen kúpnak lenne közös l egyenese, akkor a hozzájuk tartozó hipersíkok tartalmaznák a kitérő t és l egyeneseket, tehát egybeesnének. Ha két ilyen kúpnak p-re illeszkedő különböző pontok lennének a csúcsai, de lenne közös pontjuk. akkor a közös pont és p által generált sík U egy olyan szelőjének lenne képe, ami U-t túl sok pontban metszené. Tehát a kúpok $PG(4,s) \setminus \overline{\Sigma}$-ban páronként diszjunktak. Felhasználva, hogy $PG(4,s) \setminus \overline{\Sigma}$-ban $\widetilde{U}$-nak s^3 pontja van, és hogy ezek mind rajta vannak a kúpokon és a t-re illeszkedő s érintősíkon, kapjuk, hogy szükségképpen $s-1$ kúp van, tehát (3) szerint az érintősíkok egy hipersíkban vannak, jelölje ezt Σ.

Legyen $\Sigma \cap \overline{\Sigma} = \alpha$, és $\alpha \cap p = V$. Az α síkra illeszkedő $s-1$ Σ-tól, illetve $\overline{\Sigma}$-tól különböző hipersík $\widetilde{U}$-t egy-egy V-csúcsú kúpban metszi, ami összesen $(s-1)(s+1) = s^2-1$ V-re illeszkedő egyenesét adja $\widetilde{U}$-nak, és $s(s^2-1)+1 = s^3-s+1$ pontját. A maradék s pontja az érintősíkokon van. Legyen R egy ilyen pont. Ekkor az R és p által generált β sík U egy szelőjének képe, tehát $\widetilde{U} \setminus \overline{\Sigma}$-nak s pontját tartalmazza. A β sík az α-ra illeszkedő mindegyik hipersíkot egy olyan V-re illeszkedő egyenesben metszi, ami nem tartalmazza az R pontot. Ha a kúpokat tartalmazó hipersíkok közül valamelyiket egy m egyenesben metszi, akkor $m \cap \widetilde{U}$ vagy csak a V pont, vagy a kúp egyik alkotója, tehát az egész egyenes, azaz $s+1$ pont. Ez utóbbi azonban ellentmond annak, hogy a β sík tartalmazza az R pontot is, és így $s+2$ pontját tartalmazná $\widetilde{U}$-nak. Tehát a β sík metszete a Σ hipersíkon kívül minden hipersíkkal a V pont, így szükségképpen a $\Sigma \cap \beta$ metszet tartalmaz $s+1$ $\widetilde{U} \cap \beta$-beli pontot, azaz a $\widetilde{U} \cap \Sigma$ pontok egy egyenesen helyezkednek el, ami szintén illeszkedik a V pontra Ezzel beláttuk, hogy $\widetilde{U}$ a kívánt alakú, azaz ovoid alapú kúp, hiszen minden V-re illeszkedő sík vagy U egy szelőjének képe, vagy egy lineáris Baer sík képe, tehát $\widetilde{U}$-t legfeljebb két egyenesben metszi. ■

5.10. Tétel. *Egy $PG(2,s^2)$-beli unitál akkor és csak akkor klasszikus, ha minden Baer részsík 1 modulo s pontban metszi.*

Bizonyítás. Az előző tételt a 5.7 tétellel összevetve kapjuk, hogy egy $U \subset PG(2,s^2)$ unitál akkor és csak akkor klasszikus, ha bármely l érintőjére az l-et tartalmazó Baer síkok U-t 1 modulo s pontban metszik. Viszont a 3.28 tétel szerint egy Baer sík szükségképpen tartalmaz olyan egyenest, ami U-nak érintőegyenese. ■

5.1.3. Lábakkal

5.11. Tétel (Thas). *Legyen U egy $PG(2, s^2)$-beli unitál. Ha minden $R \notin U$ pont lábai kollineárisak, akkor U Hermite-görbe.*

Bizonyítás. Az ezzel ekvivalens következő állítást bizonyítjuk:

Ha U kollineáris pontjainak érintői egy pontban metszik egymást, akkor U Hermite-görbe.

Legyenek P_0, P_1, P_2 nemkollineáris pontjai U-nak, l_0, l_1, l_2 pedig U érintői ezekben a pontokban. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük (avagy a koordináták alkalmas megválasztásával elérhetjük), hogy $l_1 \cap l_2 = E_0 = (1, 0, 0)$, $l_2 \cap l_0 = E_1 = (0, 1, 0)$, $l_0 \cap l_1 = E_2 = (0, 0, 1)$ legyen.

Először azt látjuk be, hogy a $P_0 = (0, b, 1), P_1 = (1, 0, c), P_2 = (a, 1, 0)$ jelöléssel: $(abc)^{s+1} = 1$.

- $P_0P_1 \cap U = \{P_0\} \cup \{P_1\} \cup \{\, Z_i = (t_0^i, 1, t_2^i) \mid i = 1, ..., s-1\,\}$
- $P_1P_2 \cap U = \{P_1\} \cup \{P_2\} \cup \{\, X_i = (r_0^i, r_1^i, 1) \mid i = 1, ..., s-1\,\}$
- $P_2P_0 \cap U = \{P_2\} \cup \{P_0\} \cup \{\, Y_i = (1, s_1^i, s_2^i) \mid i = 1, ..., s-1\,\}$.

Nyilván $t_0^i \neq 0, r_1^i \neq 0, s_2^i \neq 0$.
A feltétel szerint:

- U érintői az X_i pontokban illeszkednek az E_0 pontra,
- U érintői az Y_i pontokban illeszkednek az E_1 pontra,
- U érintői az Z_i pontokban illeszkednek az E_2 pontra.

Legyen $P = (y_0, y_1, y_2)$ egy tetszőleges $U \setminus \{P_0, P_1, P_2\}$-beli pont. Ekkor szükségképpen $y_0y_1y_2 \neq 0$, hiszen $P \notin l_i$ $(i = 0, 1, 2)$, így:

- az E_0P egyenes egyenlete $y = \omega_0^P z$, ahol $\omega_0^P = y_1/y_2$;
- az E_1P egyenes egyenlete $z = \omega_1^P x$, ahol $\omega_1^P = y_2/y_0$;
- az E_2P egyenes egyenlete $x = \omega_2^P y$, ahol $\omega_2^P = y_0/y_1$.

Tehát $\omega_0^P\omega_1^P\omega_2^P = 1$, és tekintve ezt minden $U \setminus \{P_0, P_1, P_2\}$-beli P pontra:

$$\prod_P \omega_0^P\omega_1^P\omega_2^P = 1. \qquad (*)$$

Legyen

- $F = GF(s) \setminus \{0, r_1^1, ..., r_1^{s-1}, b\}$;
- $G = GF(s) \setminus \{0, s_2^1, ..., s_2^{s-1}, c\}$;
- $H = GF(s) \setminus \{0, t_0^1, ..., t_0^{s-1}, a\}$.

Vizsgálva az $U \setminus \{P_0, P_1, P_2\}$-beli P pontokat rendre az E_0, E_1, E_2 pontokra illeszkedő egyeneseken kapjuk, hogy ω_i^P a következő értékeket vehetei föl:

	felvett érték	multiplicitás	ok
ω_0^P	r_1^i	minden i-re egyszer	mert E_0X_i érintője U-nak
	b	s-szer	mert E_0P_0 szelője U-nak, de a metszetben van P_0 is
	f	$s+1$-szer minden $f \in F$-re	a többi szelőn
ω_1^P	s_2^i	minden i-re egyszer	mert E_1Y_i érintője U-nak
	c	s-szer	mert E_1P_1 szelője U-nak, de a metszetben van P_1 is
	g	$s+1$-szer minden $g \in G$-re	a többi szelőn
ω_2^P	t_0^i	minden i-re egyszer	mert E_2Z_i érintője U-nak
	a	s-szer	mert E_2P_2 szelője U-nak, de a metszetben van P_2 is
	h	$s+1$-szer minden $h \in H$-ra	a többi szelőn

Felhasználva, hogy $GF(s)^*$ minden elemét összeszorozva (-1)-et kapunk:

$$b\prod_{i=1}^{s-1} r_1^i \prod_{f\in F} f = c\prod_{i=1}^{s-1} s_2^i \prod_{g\in G} g = a\prod_{i=1}^{s-1} t_0^i \prod_{h\in H} h = -1. \qquad (**)$$

A (*) összefüggést átírva:

$$\left(\prod_{i,j,k} r_1^i s_2^j t_0^k\right)(abc)^s \left(\prod_f f \prod_g g \prod_h h\right)^{s+1} = 1,$$

azaz:

$$\left(\left(\prod_{i,j,k} r_1^i s_2^j t_0^k\right)(abc)\left(\prod_f f \prod_g g \prod_h h\right)\right)^{s+1} = \left(\prod_{i,j,k} r_1^i s_2^j t_0^k\right)^s (abc).$$

Ezt összevetve (**)-gal:

$$(abc)\left(\prod_{i,j,k} r_1^i s_2^j t_0^k\right)^s = (-1)^{s+1} = 1,$$

azaz

$$(abc)^s\left(\prod_{i,j,k} r_1^i s_2^j t_0^k\right) = 1. \tag{***}$$

Válasszunk most új koordinátákat úgy, hogy teljesüljön $P_0 = (1,0,0), P_1 = (0,1,0), P_2 = (0,0,1)$. A transzformációkat a következő mátrixok adják meg:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ b & 0 & 1 \\ 1 & c & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} -c & ac & 1 \\ 1 & -a & ab \\ bc & 1 & -b \end{pmatrix},$$

azaz a régi koordinátákkal felírt (u,v,w) pont új koordinátáit $A(u,v,w)^T$ adja, a régi koordinátákkal felírt $[u,v,w]$ egyenes új koordinátáit $[u,v,w]A^{-1}$ adja. Felhasználva, hogy az (u_1,v_1,w_1), (u_2,v_2,w_2), (u_3,v_3,w_3) pontok akkor és csak akkor kollineárisak, ha

$$det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = 0,$$

mivel P_0, P_1, P_2 nem kollineárisak, ezért:

$$abc + 1 \neq 0,$$

és mivel $X_i \in P_1P_2$, $Y_i \in P_2P_0$, $Z_i \in P_0P_1$, ezért:

$$1 - s_1^i a + s_2^i ab = 1 - t_2^i b + t_0^i bc = 1 - r_0^i c + r_1^i ac = 0. \tag{****}$$

PONTOK:

pont	régi koordináták	új koordináták
E_0	$(1,0,0)$	$(-c,1,bc)$
E_1	$(0,1,0)$	$(ac,-a,1)$
E_2	$(0,0,1)$	$(1,ab,-b)$
Y_i	$(1,s_1^i,s_2^i)$	$(-c+s_1^i ac+s_2^i, 0, bc+s_1^i-s_2^i b) = (as_2^i,0,1)$
Z_i	$(t_0^i,1,t_2^i)$	$(-t_0^i c+ac+t_2^i, t_0^i-a+t_2^i ab, 0) = (1,bt_0^i,0)$
X_i	$(r_0^i,r_1^i,1)$	$(0, r_0^i-r_1^i a+ab, r_0^i bc+r_1^i-b) = (0,1,cr_1^i)$

EGYENESEK:

egyenes	régi koordináták	új koordináták
l_0	$[1,0,0]$	$[0,a^{-1},1]$
l_1	$[0,1,0]$	$[1,0,b^{-1}]$
l_2	$[0,0,1]$	$[c^{-1},1,0]$
E_0X_i	$[0,1,-r_1^i]$	$[b-r_1^i,-cr_1^i,1]$
E_1Y_i	$[-s_2^i,0,1]$	$[1,c-s_2^i,-as_2^i]$
E_2Z_i	$[1,-t_0^i,0]$	$[-bt_0^i,1,a-t_0^i]$

Térjünk át a duális síkra, ahol P_0, P_1, P_2 szerepét l_0, l_1, l_2 veszi át, X_i, Y_i és Z_i szerepét pedig E_0X_i, E_1Y_i, és E_2Z_i. Alkalmazzuk itt (***)-ot:

$$(a^{-1}b^{-1}c^{-1})^s\prod_{i,j,k}(-cr_1^i)(-as_2^j)(-bt_0^k)=1,$$

azaz

$$(abc)^{-1}\prod_{i,j,k}r_1^is_2^jt_0^k=1.$$

Ezt összevetve (***)-gal, beláttuk, hogy

$$(abc)^{s+1}=1.$$

Most térjünk vissza az eredeti koordinátákra!

Tegyük fel, hogy a kiindulási koordinátáinkkal az E_0X_1 egyenes egyenlete $y=z$ (illetve alkalmas koordinátatranszformációval elérhetjük ezt). Ekkor $X_1=(r_0^1,r_1^1,1)=(a+\frac{1}{c},1,1)$, azaz $r_1^1=1$.

Legyen $E_0X_i\cap E_1E_2=X_i'$, $i=1,2,...,s-1$, ekkor $X_i'=(0,r_1^i,1)$.

Változtassunk most a koordinátákon úgy, hogy $E_0=(1,0,0)$, $E_2=(0,0,1)$, $X_i'=(0,1,0)$ legyen egy rögzített $i\in\{1,2,...,s-1\}$ indexre. A transzformációt a következő mátrixok írják le:

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&r_1^i&0\\0&1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}r_1^i&0&0\\0&1&0\\0&-1&r_1^i\end{pmatrix}.$$

Ekkor:

pont	régi koordináták	új koordináták
X_i	$(r_0^i,r_1^i,1)$	$(r_0^i,1,0)$
P_0	$(0,b,1)$	$(0,\frac{b}{(r_1^i-b)},1)$
P_1	$(1,0,c)$	$(1,0,c)$

Vegyük észre, hogy $P_0 \notin E_0X_i$ miatt $r_1^i - b \neq 0$.

Tehát most a rögzített X_i' vette át E_2 szerepét, és X_i vette át P_2 szerepét. Ezekre alkalmazva az előbb bizonyított állítást:

$$\left(\frac{r_0^i cb}{r_1^i - b}\right)^{s+1} = 1,$$

amiből $1 - r_0^i c + r_1^i ac = 0$ miatt (lásd (****)-ot)

$$\left(\frac{b + abcr_1^i}{r_1^i - b}\right)^{s-1} = 1,$$

azaz $ab^{s+1}cr_1^i + a^s b^{s+1} c^s (r_1^i)^s + (abc)^{s+1}(r_1^i)^{s+1} = -b^s r_1^i - b(r_1^i)^s + (r_1^i)^{s+1}$.

Felhasználva, hogy $(abc)^{s+1} = 1$, ebből $b^{s-1} + (r_1^i)^{s-1}(abc+1)^{s-1} = 0$ következik. Ezt az eljárást mindegyik X_i-re $(i = 1, 2, ..., s-1)$ elvégezhetjük, így azt kapjuk, hogy minden $i = 1, 2, ..., s-1$ esetén

$$b^{s-1} + (r_1^i)^{s-1}(abc+1)^{s-1} = 0,$$

illetve az $i = 1$ választással, $r_1^1 = 1$ miatt: $b^{s-1} + (abc+1)^{s-1} = 0$. Ezt visszahelyettesítve az előzőbe:

$$(r_1^i)^{s-1} = 1 \text{ minden } i = 1, 2, ..., s-1 \text{ indexre.}$$

Ez ekvivalens azzal, hogy $\{0, r_1^1 = 1, r_1^2, ..., r_1^{s-1}\}$ a $GF(s^2)$ test egy $GF(s)$ részteste, ami viszont éppen azt jelenti, hogy $P_1P_2 \cap U$ egy Baer egyenes.

Mivel P_1P_2 egy tetszőleges szelője U-nak, ezért beláttuk, hogy U-t minden szelője Baer egyenesben metszi, de ekkor a 5.3 tétel miatt U szükségképpen Hermite görbe. ■

Megjegyzés. A fenti bizonyítás első része ugyanazt a trükköt használja, mint B. Segre híres tétele. Segre tétele a másodrendű görbéket karakterizálja páratlan rendű projektív síkokon: ezek éppen az oválisok. Hasonlóképpen, ez a tétel az Hermite-görbéket karakterizálja: ezek éppen az olyan unitálok, melyek teljesítik a lábakra tett feltételt.

A következő tétel volt az Hermite-görbék első karakterizációs tétele, melyet Tallini-Scafati bizonyított 1966-ban.

5.12. Tétel ([35]). *Legyen U egy $PG(2, s^2)$-beli unitál. U akkor és csak akkor klasszikus, ha teljesíti a következő feltételt: ha P_1, P_2, P_3 és P_4 tetszőleges négy nem-kollineáris pontja, és érintői ezekben a pontokban rendre l_1, l_2, l_3 és l_4, akkor $l_1 \cap l_2 \in P_3P_4$ csak akkor teljesül, ha $l_3 \cap l_4 \in P_1P_2$ is teljesül.*

Bizonyítás. Nem nehéz belátni, hogy a feltételből következik, hogy minden pont lábai kollineárisak.

Sejtés: Az $U \subset PG(2, s^2)$ unitál akkor és csak akkor Buekenhout-féle parabolikus unitál, ha van olyan érintőegyenese, melynek minden pontjának lábai kollineáris ponthalmazt alkotnak.

5.2. Egyéb karakterizációs tételek

5.13. Tétel ([23]). *Legyen $s > 2$, és Γ egy $PG(2, s^2)$-beli $(s+1)$-edfokú algebrai görbe. Ha Γ-nak legalább $s^3 + 1$ pontja van, és nincs lineáris tagja, akkor szükségképpen Hermite-görbe.*

5.14. Tétel ([7], [8]). *Legyen U egy $PG(2, s^2)$-beli unitál. U akkor és csak akkor klasszikus, ha az U-t helyben hagyó lineáris transzformációk csoportja tranzitív U pontjain.*

5.15. Tétel ([17]). *Legyen U egy unitál $PG(2, s^2)$-ben. U akkor és csak akkor Hermite-görbe, ha létezik U-t helyben hagyó lineáris transzformációknak olyan G csoportja, ami izomorf $S \times R$-rel, ahol S s^3-rendű, R pedig $(s^2 - 1)$-rendű részcsoportja G-nek.*

5.16. Tétel ([17]). *Legyen U egy unitál $PG(2, s^2)$-ben. U akkor és csak akkor BM-unitál, ha létezik U-t helyben hagyó lineáris transzformációk olyan G csoportja, ami izomorf $S \times R$-rel, ahol S s^3-rendű, R pedig egy $(s-1)$-rendű részcsoportja G-nek. Továbbá S akkor és csak akkor kommutatív, ha U oválisok uniója, amikoris s szükségképpen páratlan, és S elemi Abel.*

6. További unitálok

A következőkben olyan unitálokat vizsgálunk, amik nem BM-unitálok, illetve nem is $PG(2, s^2)$ típusú síkokba vannak beágyazva. Mutatunk példát olyan unitálra is, amit két egymással nem izomorf projektív síkba is be lehet ágyazni.

6.1. A Buekenhout-Tits unitál

A BM-unitálokat definíció szerint, egy ovoid feletti kúpra alkalmazott Buekenhout parabolikus konstrukcióból kapjuk abban a speciális esetben, amikor az ovoid egy elliptikus kvádrika. Ez utóbbi feltételnek csak páros s esetén van jelentősége, hiszen páratlan s esetén $PG(3, s)$ minden ovoidja elliptikus kvádrika. A $PG(3, 2^e)$ térben páratlan e esetén léteznek olyan ovoidok, amik nem elliptikus kvádrikák: a Suzuki-Tits-ovoidok. Az ezek feletti tetszőleges kúpra alkalmazott parabolikus eljárásból nyert ponthalmazt vizsgáljuk. Kiderül, hogy ez is nemklasszikus unitál. Megállapodás szerint ezeket nem nevezzük BM-unitáloknak. A lineáris transzformációk azon részcsoportjának vizsgálata, melyek egy ilyen unitált helyben hagynak, alátámasztja ezt az elhatározást.

6.1.1. Suzuki-Tits-ovoidok

Legyen most $s = 2^e \geq 8$, ahol e páratlan egész.

Jelölje σ a következő $GF(s) \to GF(s)$ leképezést:

$$\sigma : t \mapsto t^{2^{(e+1)/2}}.$$

Ekkor $t^{\sigma^2} = t^2$.

Egy $PG(3, s)$-beli Suzuki-Tits ovoidot a következőképpen koordinátázhatunk (lásd a [37] cikkben):

$$\mathcal{O} = \{ (1, p, t, p^{\sigma+2} + t^\sigma + pt) \mid p, t \in GF(s) \} \cup \{ (0, 0, 0, 1) \}.$$

Az $\mathcal{O}$ ovoid egy $(1, p, t, p^{\sigma+2} + t^\sigma + pt)$ pontjában a $[p^{\sigma+2} + t^\sigma + pt, t, p, 1]$ sík érintősík. Bármely síknak $\mathcal{O}$-val vett nemtriviális metszete olyan ovális, ami nem másodrendű görbe (ez nem mond ellent Segre tételének, mert s páros).

6.1.2. A BT-unitál

Továbbra is $s = 2^e \geq 8$, ahol e páratlan egész.

Ágyazzuk be az $\mathcal{O}$ Suzuki-Tits-ovoidot a $PG(4, s)$ tér egy $\Sigma^* = PG(3, s)$ hipersíkjába, továbbá rögzítsünk $PG(4, s)$-ben egy $\overline{\Sigma} = PG(3, s)$ hipersíkot és annak egy $\mathcal{S}$ befedését. Jelölje a $PG(4,s)$ tér pontjait (x, y_1, y_2, z_1, z_2). Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy a $\overline{\Sigma}$ hipersík egyenlete $x = 0$, a Σ^* hipersík egyenlete $z_1 = 0$, és az $\{\, x = 0, y_1 = 0, y_2 = 0 \,\}$ egyenes tagja az $\mathcal{S}$ befedésnek Ekkor $\mathcal{O} \cap \overline{\Sigma} = (0,0,0,0,1)$, és választhatjuk a kúp csúcsának a $P = (0,0,0,1,0)$ pontot. Így az $\mathcal{O}$ feletti P csúcsú kúp:

$$Q = \{\, (0,0,0,0,1) \,\} \cup \{\, (0,0,0,1,\lambda) \mid \lambda \in GF(s) \,\} \cup \\ \cup \{\, (1,p,t,r,p^{\sigma+2} + t^{\sigma} + pt) \mid r,p,t \in GF(s) \,\}.$$

A páros rendű sík beágyazásánál használt ϵ elemmel ez a következő parabolikus unitálnak felel meg:

$$U_T = \{\, (0,0,1) \,\} \cup \{\, (1, p + t\epsilon, r + (p^{\sigma+2} + t^{\sigma} + pt)\epsilon) \mid r,p,t \in GF(s) \,\}.$$

Ennek neve: *Buekenhout-Tits unitál*, vagy rövidítve: *BT-unitál*.

6.1.3. Érintők, szelők, lábak

Most is legyen $P_\infty = (0,0,1)$, $l_\infty = [1,0,0]$. Mivel P_∞ az U_T unitál egyetlen ideális pontja, ezért l_∞ az érintő ebben a pontban.

6.1. Állítás. *Az U_T unitál érintője az $(1, p+t\epsilon, r+(p^{\sigma+2}+t^{\sigma}+pt)\epsilon)$ pontjában a $[(p^2 + t^2\lambda + pt + r) + (p^{\sigma+2} + t^{\sigma} + pt)\epsilon, (p+t) + t\epsilon, 1]$ egyenes.*

Bizonyítás. Tekintsünk először egy $Q_p = (1, p, p^{\sigma+2}\epsilon)$ pontot. Ez U_T-nek pontja, és az $l_p = [p^2 + p^{\sigma+2}\epsilon, p, 1]$ egyenes U_T érintője ebben a pontban, ugyanis ha $(1, p_1 + t_1\epsilon, r_1 + (p_1^{\sigma+2} + t_1^{\sigma} + p_1t_1)\epsilon)$ egy $l_p \cap U_T$-beli pont, akkor teljesül: $p^2 + p^{\sigma+2}\epsilon + pp_1 + pt_1\epsilon + r_1 + (p_1^{\sigma+2} + t_1^{\sigma} + p_1t_1)\epsilon = 0$, azaz:

$$\begin{cases} p^2 + pp_1 + r_1 = 0, \\ p^{\sigma+2} + pt_1 + p_1^{\sigma+2} + t_1^{\sigma} + p_1t_1 = 0. \end{cases}$$

Egy $PG(3,s)$-beli Suzuki-Tits ovoid $(1,p,0,p^{\sigma})$ pontjában az érintősík a $[p^{\sigma+2}, 0, p, 1]$ sík. A fenti egyenletek szerint ez a sík tartalmazza az ovoid $(1, p_1, t_1, p_1^{\sigma+2} + t_1^{\sigma} + p_1t_1)$ pontját, ezért csak $p = p_1$, és $t = t_1$ lehetséges, amiből már következik $r_1 = 0$.

A BM-unitálok esetéhez hasonlóan ebből úgy bizonyítjuk az állítást tetszőleges $P \in U_T$ pontra, hogy adunk egy olyan lineáris transzformációt, ami valamelyik Q_p pontot P-be viszi, az U_T unitált helyben hagyja, és a Q_p-beli érintőt a megfelelő egyenesbe viszi. Legyen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t\epsilon & 1 & 0 \\ r + tp + t^{\sigma}\epsilon & t + t\epsilon & 1 \end{pmatrix}, (M^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & t\epsilon & r + tp + t^2\lambda + (t^{\sigma} + t^2)\epsilon \\ 0 & 1 & t + t\epsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez megfelel a követelményeinknek. ■

6.2. Állítás. *Egy $R \notin U_T$ pont lábai akkor és csak akkor kollineárisak, ha $R \in l_\infty$.*

Bizonyítás. A 4.32 tétel szerint minden $R \in l_\infty \setminus U_T$ pont lábai kollineárisak, így elég a másik irányt belátni.

Legyen most $R \notin l_\infty \cup U_T$, $R = (1, y, z)$, ahol $y, z \in GF(s^2)$. Ezeket felírva $y = y_1 + \epsilon y_2$ és $z = z_1 + \epsilon z_2$ alakban, ahol $y_1, y_2, z_1, z_2 \in GF(s)$, nem nehéz belátni, hogy az $s+1$ R-re illeszkedő érintőegyenes a következő:
$[(p^2 + t^2\lambda + pt + r) + (p^{\sigma+2} + t^\sigma + pt)\epsilon, (p+t) + t\epsilon, 1]$, ahol

$$\begin{cases} r, s, t \in GF(s), \\ p^2 + t^2\lambda + pt + r + y_1 p + y_1 t + y_2 \lambda t + z_1 = 0, \\ p^{\sigma+2} + t^\sigma + pt + y_2 p + y_1 t + z_2 = 0. \end{cases}$$

Felhasználva, hogy $p^2 + t^2\lambda + pt + y_1 p + y_1 t + y_2\lambda t + z_1 = r$, az érintési pontok olyan $(1, u, v)$ pontok, amire:

$$\begin{cases} u = p + t\epsilon, \\ v = p^2 + t^2\lambda + pt + y_1 p + y_1 t + y_2\lambda t + z_1 + (p^{\sigma+2} + t^\sigma + pt)\epsilon), \\ p^{\sigma+2} + t^\sigma + pt = y_2 p + y_1 t + z_2. \end{cases}$$

Ha ezek egy $[A, B, 1]$ egyenesre illeszkednének, ahol $A = a_1 + \epsilon a_2$, $B = b_1 + \epsilon b_2$, akkor szükségképpen:

$$\begin{cases} p^2 + t^2\lambda + pt + (y_1 + b_1)p + (y_1 + y_2\lambda + b_2\lambda)t + z_1 + a_1 = 0 \\ p^{\sigma+2} + t^\sigma + pt = b_2 p + (b_1 + b_2)t + a_2. \end{cases}$$

Azonban a (p, t) párokat egy $AG(2, s)$ affin sík pontjaiként tekintve, az első egyenletet teljesítő (p, t) pontok egy másodrendű görbe pontjai, a második egyenletet teljesítő pontok pedig egy Suzuki-Tits ovoid síkmetszetének pontjai. Mivel a lábakat reprezentáló $s+1$ (p, t) pár szükségképpen teljesíti mindkét egyenletet, ezért ellentmondásra jutottunk.

Ha a lábak egy $[A, 1, 0]$ egyenesen lennének, akkor a (p, t) pároknak az $a_1 + a_2\epsilon + p + t\epsilon = 0$ egyenletet kellene teljesíteniük, azaz $p = a_1$, és $t = a_2$ lenne, ami ellentmond annak, hogy $s+1$ (p, t) párunk kell legyen. ■

Megjegyzés. A 4.39 állítás szerint egy BM-unitálra nem illeszkedő pont lábai vagy Baer egyenest alkotnak, vagy egy $\{0, 1, 2, 4\}$ típusú halmazt. Ez nem teljesül a A BT-unitálok esetén, ekkor egy $P \in \pi \setminus (l_\infty \cup U)$ pont lábai általában nem alkotnak $\{0, 1, 2, 4\}$ típusú halmazt, és leírásuk igen nehéz feladatnak tűnik.

6.1.4. BT-unitálok kollineációcsoportja

Legyen G az U_T unitált helybenhagyó lineáris transzformációk csoportja:

$$G = \{\, \Theta \in PGL(3,s^2) \mid \Theta(U_T) = U_T \,\}.$$

A fentiek szerint G szükségképpen önmagára képezi l_∞-t, és P_∞-t.

6.3. Tétel ([16]). *Az U_T unitált helybenhagyó lineáris transzormációk G csoportja s^2-rendű kommutatív csoport, melyet a következő mátrixok generálnak:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u\epsilon & 1 & 0 \\ v+u^\sigma\epsilon & u+u\epsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

6.4. Állítás. *G helyben hagyja P_∞-t, s^2 elemű pályái vannak $\{\, U_T \setminus P_\infty \,\}$-en, s elemű pályái vannak $\{\, l_\infty \setminus P_\infty \,\}$-en, és $s^2 - s$ darab s^2 elemű pályája van sík többi pontján.*

6.5. Tétel. *Egy BT-unitál nem tartalmazhat oválist.*

Bizonyítás. A korábbi bizonyításunk páros s-re itt is működik. ∎

6.6. Tétel. *Minden BT-unitál duális alakzata is BT-unitál.*

Bizonyítás. Jelölje U^* a duális alakzatot. Tehát U^* pontjai U érintői, U^* blokkjai pedig az $R \notin U$ pontok. Az 6.1 állítás szerint U^* pontjai:
$\{\, [p^2+t^2\lambda+pt+r+(p^{\sigma+2}+t^\sigma+pt)\epsilon, p+t+t\epsilon, 1] \mid r,p,t \in GF(s) \,\} \cup \{\, [1,0,0] \,\} =$
$= \{\, [r+(p^{\sigma+2}+t^\sigma+pt)\epsilon, p+t+t\epsilon, 1] \mid r,p,t \in GF(s) \,\} \cup \{\, [1,0,0] \,\}.$

Jelölje ψ azt a kollineációját $PG(2,s^2)$-nek, amire $\psi(x,y,z) = (z^s, y^s, x^s)$. Felidézve, hogy $\epsilon^s = 1+\epsilon$, és
$U = \{\, (1, p+t\epsilon, r+(p^{\sigma+2}+t^\sigma+pt)\epsilon) \mid r,p,t \in GF(s) \,\} \cup \{\, (0,0,1) \,\}$:

$$\begin{aligned} &\psi(U) = \\ &= \{\, (r+(p^{\sigma+2}+t^\sigma+pt)(\epsilon+1), p+t(1+\epsilon), 1) \mid r,p,t \in GF(s) \,\} \cup \{\, (1,0,0) \,\} = \\ &\quad = \{\, (r+(p^{\sigma+2}+t^\sigma+pt)\epsilon, p+t+t\epsilon, 1) \mid r,p,t \in GF(s) \,\} \cup \{\, (1,0,0) \,\}. \end{aligned}$$

A kerek zárójeleket szögletesre cserélve megkapjuk a kívánt megfeleltetést.
∎

6.2. Unitálok Hall síkon és duális Hall síkon

6.2.1. A Hall sík

Legyen F egy test, és $f(t) = t^2 - at - b$ egy irreducibilis polinom F felett. Legyen H kétdimenziós vektortér F felett, azaz olyan struktúra, melynek elemei $x+\lambda y$ alakúak $x, y \in F$ elemekkel. Definiáljuk a H-beli elemek összegét a szokásos vektorösszegként, a szorzatukat pedig a következőképpen:

- ha $y \neq 0$, akkor $(x + \lambda y)(u + \lambda v) = xu - y^{-1}vf(x) + \lambda(yu - xv + av)$
- ha $y = 0$, akkor $x(u + \lambda v) = xu + \lambda(xv)$.

6.7. Állítás ([25]). *A H struktúra kvázitest, neve* Hall kvázitest.

6.8. Tulajdonságok. *1. Minden $H \setminus F$-beli elem gyöke f-nek.*

2. F a H magja.

3. F minden eleme felcserélhető H minden elemével.

4. Ahhoz, hogy H teljesítse a fentieket, a szorzást szükségképpen így kell definiálni.

5. H akkor és csak akkor test, ha $F = GF(2)$. H akkor és csak akkor asszociatív, ha $F = GF(2)$, vagy $F = GF(3)$, és $f(s) = s^2 + 1$.

6. Legyen Q egy kvázitest, ami kétdimenziós a magja felett. Ekkor Q akkor és csak akkor Hall kvázitest, ha Q automorfizmusainak csoportja tranzitív a nem magbeli elemeken.

6.9. Definíció. *A Hall kvázitesttel koordinátázott transzlációsíkot* Hall sík*nak hívjuk.*

6.10. Következmény. *Egy Hall sík nem desargues-i, ha a rendje nagyobb, mint 4.*

Számunkra célravezetőbb a Hall síkok származtatással való megadása.

6.2.2. Származtatás

6.11. Definíció. *Legyen* Π *egy* s^2*-rendű projektív sík, melynek ideális egyenese az* l_∞ *egyenes. Ekkor* származtatási rendszer*nek nevezzük a* $\mathcal{D} \subset l_\infty$ *ponthalmazt, ha* $\mid \mathcal{D} \mid= s+1$*, és minden olyan* $P, Q \in \Pi \setminus l_\infty$ *pontpárhoz, melyre* $PQ \cap l_\infty \in \mathcal{D}$*, létezik olyan Baer részsíkja a* Π *síknak, ami tartalmazza a* P *és* Q *pontokat, és* $\mathcal{D}$ *pontjait is.*

Legyen $\mathcal{A}$ egy affin sík, aminek lezárása a Π projektív sík, és legyen $\mathcal{D}$ ennek egy származtatási rendszere. Tekintsük az $\mathcal{A}'$ síkot, melyet a következőképpen definiálunk:

- pontjai legyenek $\mathcal{A}$ pontjai;
- a P és Q pontokra illeszkedő egyenese pedig legyen
  - ha az $\mathcal{A}$ síkon $PQ \cap l_\infty \notin \mathcal{D}$, akkor az $\mathcal{A}$-beli PQ egyenes;
  - ha az $\mathcal{A}$ síkon $PQ \cap l_\infty \in \mathcal{D}$, akkor $\mathcal{B} \setminus l_\infty$, ahol $\mathcal{B}$ az a Π-beli Baer sík, ami tartalmazza a P, Q pontokat és $\mathcal{D}$ pontjait is;
- az illeszkedés legyen a tartalmazás.

6.12. Állítás. *Az* $\mathcal{A}'$ *sík* s^2*-rendű affin sík.*

Bizonyítás. Nevezzük származtatott egyeneseknek $\mathcal{A}'$ azon egyeneseit, melyek Π-beli Baer síkoknak felelnek meg. Két nem származtatott egyenes szükségképpen vagy egy pontban metszi egymást, vagy párhuzamos. Ha egy nem származtatott és egy származtatott egyenes legalább két pontban metszené egymást, P-ben és Q-ban, akkor megfelelőik a Π síkon egy egyenes és egy azt Baer egyenesben metsző Baer részsík lenne. Ez utóbbi Baer egyenesben metszi az l_∞ egyenest is, így a Π síkon $PQ \cap l_\infty \in \mathcal{D}$ lenne, de ez ellentmond annak, hogy az $\mathcal{A}'$ síkon a PQ egyenes nem származtatott. Ha két származtatott egyenes legalább két pontban metszi egymást, P-ben és Q-ban, akkor ezeknek a Π síkon két olyan Baer részsík felel meg, melyek metszete tartalmazza a $\mathcal{D}$ származtatási rendszer $s+1$ pontját, és a P és Q pontokat. Ezek között van négy általános helyzetű pont, tehát a két Baer sík egybeesik. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{A}'$ bármely két egyenese vagy párhuzamos, vagy egy pontban metszi egymást.

(A1) Két $\mathcal{A}'$-beli pontra a definíció és a fentiek szerint egyértelműen illeszkedik egyenes.

(A3) Legyen R és S a Π sík két $(l_\infty \setminus \mathcal{D})$-beli pontja, és k egy ezekre nem illeszkedő egyenes. Ekkor bármely két k-beli P, Q pontra az $RP \cap SQ$ pont és P és Q nemkollineáris ponthármasa az $\mathcal{A}'$ síknak.

(s^2-rendű) Mind a származtatott, mind a nem származtatott egyeneseknek könnyen láthatóan s^2 pontja van.

(A2) A fentiekből látjuk be, hogy $\mathcal{A}'$ bármely P pontja és k egyenese esetén pontosan egy P-re illeszkedő, k-val párhuzamos egyenes van. Ha $P \in k$, akkor ez éppen a k egyenes. Ha $P \notin k$, akkor tekintsük a P pontot k pontjaival összekötő, $\mathcal{A}'$-beli egyeneseket. Ez éppen s^2 különböző egyenes, amik mind illeszkednek P-re, tehát összesen $s^2(s^2-1)$ pontját tartalmazzák a síknak. Mivel a síknak összesen s^4 pontja van, ebből már következik, hogy P-re szükségképpen illeszkedik egy olyan egyenese a síknak, ami nem metszi a k egyenest, és az is, hogy ez egyértelmű.

■

Jelölje Π' a $\mathcal{A}'$ affin sík lezárását. Ekkor Π' ideális pontjai a Π sík $l_\infty \setminus \mathcal{D}$ pontjai, és további $s+1$ pont, melyek halmazát jelölje $\mathcal{D}'$.

6.13. Tulajdonságok ([25]).

- *Ha k egy $\mathcal{A}$-beli egyenes, ami az l_∞ egyenest egy $\mathcal{D}$-beli pontban metszi, akkor megfelelője az $\mathcal{A}'$ sík egy Baer részsíkja, aminek Baer egyenesei az l'_∞ egyenest $\mathcal{D}'$ pontjaiban metszik.*
- *$\mathcal{D}'$ származtatási rendszere az $\mathcal{A}'$ síknak.*
- *Ha $\mathcal{A}$ egy transzlációsík, akkor $\mathcal{A}'$ származtatott transzlációsík.*
- *Az $AG(2, s^2)$ síknak mindig van származtatási rendszere.*
- *Ha $\mathcal{A}$ desargues-i, és rendje nagyobb, mint 4, akkor $\mathcal{A}'$ nem desargues-i.*
- *A $\mathcal{D}_t = \{(0,1,x) \mid x^{s+1} = t\}$ rendszer származtatási rendszer minden $t \in GF(s)^*$ esetén. A $\mathcal{D}_0 = \{(0,1,x) \mid x^{s+1} = 0\} \cup \{(0,0,1)\}$ rendszer származtatási rendszer.*
- *Legyen $t \in GF(s)$ adott, ekkor az $\mathcal{D}_t$ származtatási rendszerrel a $PG(2, s^2)$ síkból konstruált sík Hall sík.*

6.14. Definíció. *A fenti konstrukciót* származtatásnak *hívjuk. A származtatás a fenti tulajdonságok szerint többször is végrehajtható. Az így kapott projektív síkot* származtatott síknak *nevezzük.*

Legyen a $PG(4,s)$ tér egy rögzített $\overline{\Sigma}$ hipersíkjának $\mathcal{S}$ egy olyan befedése, ami tartalmaz egy $\mathcal{R}$ regulust. Könnyen ellenőrizhető, hogy ennek ősképe a $\Pi(\overline{\Sigma},\mathcal{S})$ síkon egy származtatási rendszer, jelölje ezt $\mathcal{D}_R$. Ha az $\mathcal{R}$ regulust lecserélem az $\mathcal{R}^{OPP}$ regulusra, azaz $\mathcal{S}'=(\mathcal{S}\setminus\mathcal{R})\cup\mathcal{R}^{OPP}$, akkor a $\Pi(\overline{\Sigma},\mathcal{S}')$ sík éppen a $\Pi(\overline{\Sigma},\mathcal{S})$ síkból a $\mathcal{D}_R$ származtatási rendszerrel származtatott sík.

Megjegyzés. A 4.3.3 fejezetben szerepelt a származtatható transzlációsík fogalma: ezek az olyan beágyazható $\Pi(\overline{\Sigma},\mathcal{S})$ transzlációsíkok, melyekhez az $\mathcal{S}$ befedésben van regulus. A fentiek szerint ez éppen azt jelenti, hogy van származtatási rendszerük, azaz végrehajtható rajtuk a származtatás. Mivel a származtatást kétszer végrehajtva az eredeti síkot kapjuk, ezért ezek azok a síkok, melyek egy másik síkból származtatással kaphatók.

6.15. Tétel ([25]). *Legyen $\mathcal{S}$ a $PG(4,s)$ tér $\overline{\Sigma}$ hipersíkjának reguláris befedése, amikoris $\Pi(\overline{\Sigma},\mathcal{S})=PG(2,s^2)$. Legyen $\mathcal{R}$ a befedésnek egy regulusa, és ennek ősképét a $PG(2,s^2)$ síkon jelölje $\mathcal{D}_R$. Ekkor a $PG(2,s^2)$ síkból a $\mathcal{D}_R$ származtatási rendszerrel származtatott sík éppen az s^2-rendű Hall sík.*

6.2.3. Származtatott unitálok

Egyik módja, hogy unitálokat keressünk a Hall síkokot, hogy megvizsgáljuk, egy $PG(2,s^2)$-beli unitál képét a származtatás után.

6.16. Tétel ([5]). *Legyen U egy Buekenhout-féle unitál a $PG(2,s^2)$ síkon. Jelölje U' a $PG(2,s^2)$-ből származtatással kapott Hall síkon U képét.*

(1) Ha U hiperbolikus unitál, és $l_\infty\cap U=\mathcal{D}$, akkor U' Buekenhout-féle hiperbolikus unitál a Hall síkon, és nem izomorf U-val.

(2) Ha U hiperbolikus unitál, és $\mathcal{D}\cap U=\emptyset$, akkor U' Buekenhout-féle hiperbolikus unitál a Hall síkon, és nem izomorf sem U-val, sem az előző eset U' unitáljával.

(3) Ha U hiperbolikus unitál, és $l_\infty\cap U=k$, ahol $0<k<s+1$, akkor U' nem unitál a Hall síkon. Ha $s>3$, akkor a Hall síkon nincs olyan Buekenhout-féle hiperbolikus unitál, ami a származtatási rendszerből $0<k<s+1$ pontot tartalmazna.

(4) Ha U parabolikus unitál, és $l_\infty\cap U\in\mathcal{D}$, akkor U' nem unitál a Hall síkon. Azonban van a Hall síkon olyan Buekenhout-féle parabolikus unitál, ami a származtatási rendszer egy elemében érinti az ideális egyenest.

(5) *Ha U parabolikus unitál, és $l_\infty \cap U \notin \mathcal{D}$, akkor U' BM-unitál a Hall síkon, és nem izomorf a klasszikus unitállal.*

6.17. Tétel ([19]). *A fenti tétel első esetéből származó U' unitál blokkrendszerként tekintve önduális.*

6.18. Tétel ([13]). *A Hall-féle projektív sík nem izomorf duális síkjával.*

6.19. Következmény. *Van olyan unitál, ami egymással nem izomorf projektív síkokba ágyazható.*

6.3. Unitálok Hughes síkon

6.3.1. A Hughes-féle asszociatív kvázitest

A következőkben s páratlan prímhatvány.

6.20. Definíció. *Egy $(N, +, \cdot)$ algebrai struktúrát* asszociatív kvázitest*nek nevezünk, ha az N halmazon értelmezett összeadás $(+)$, és szorzás $(\cdot)$ kétváltozós műveletekkel $(N, +)$ és $(N \setminus \{0\}, \cdot)$ csoportok, és minden $a, b, c \in N$ esetén $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ teljesül.*

Jelölje F a $GF(s^2)$ test elemeinek halmazát rögzített s páratlan prímhatvány esetén. Legyen N a következő algebrai struktúra: $N = (F, +, \cdot)$, ahol az összeadás megegyezik az $GF(s^2)$-beli összeadással, a szorzás pedig a következő:

$$a \cdot b = \begin{cases} ab & \text{ha } a \in \square_{s^2}, \\ ab^s & \text{ha } a \not\in \square_{s^2}, \\ 0 & \text{ha } a = 0, \end{cases}$$

ahol két elem egymás mellé írása az $GF(s^2)$-beli szorzást jelöli.

6.21. Állítás. *A fenti struktúra asszociatív kvázitest.*

Megjegyzés. A $\sigma : x \mapsto x^s$ Frobenius automorfizmus N-nek is automorfizmusa.

Legyen V egy háromdimenziós vektortér $GF(s^2)$ felett, $V^* = V \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Vezessünk be egy ekvivalenciarelációt V^*-on:

$(x, y, z) \cong (u, v, w)$ akkor és csak akkor, ha $u = a \cdot x$, $v = a \cdot y$, $w = a \cdot z$ valamilyen $a \in N$ elemmel.

Ez az ekvivalenciareláció V^* elemeit $s^4 + s^2 + 1$ ekvivalenciaosztályra osztja. Egy rögzített $\epsilon \in GF(s^2) \setminus GF(s)$ elem esetén $\{1, \epsilon\}$ a $GF(s^2)$ egy bázisa $GF(s)$ felett. Definiáljunk egy J illeszkedési relációt V^* ekvivalenciaosztályain:

$(x, y, z)J(u, v, w) \leftrightarrow xu_1+yv_1+zw_2+(xu_1+yv_1+zw_2)\cdot t = 0$, ahol $u = u_1+\epsilon u_2$, $v = v_1 + \epsilon v_2$, $w = w_1 + \epsilon w_2$.

6.22. Definíció. *Hughes síknak hívjuk azt az illeszkedési struktúrát, melynek pontjai és egyenesei V^* ekvivalenciaosztályai, és az illeszkedést a fenti J illeszkedési reláció indukálja.*

6.23. Állítás. *A kapott Hughes sík s^2-rendű projektív sík.*

6.24. Tulajdonságok ([25]). *Hughes síkok tulajdonságai:*

1. *Hughes síkokat nem lehet lineáris planáris gyűrűvel koordinátázni.*
2. *A sík teljes kollineációcsoportjának nincs egyetlen fixegyenese vagy fixpontja sem.*

6.3.2. Hughes síkok unitáljai

Legyen adott egy s^2-rendű Hughes sík. A pontokat reprezentáló V^*-beli hármasokat gömbölyű zárójelbe írjuk és balról normáljuk, az egyeneseket reprezentáló V^*-beli hármasokat szögletes zárójelbe írjuk és jobbról normáljuk, így egyértelmű reprezentációt kapunk. Ekkor a Hughes sík pontjai és $PG(2, s^2)$ pontjai között egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

6.25. Tétel ([27]). *Ha X a Hughes sík pontjainak olyan halmaza, melyet a Frobenius automorfizmus helyben hagy, akkor X akkor és csak akkor unitál, ha az X pontjainak megfelelő $PG(2, s^2)$-beli pontok halmaza unitál.*

Hughes síkon nincs Hermite-polaritás, mégis definiálhatunk klasszikus unitált, amit U_R-rel jelölünk, mivel Rosati bizonyította létezését.

6.26. Tétel ([34]). *Az $U_R = \{(x, y, z) \mid x^{s+1} + y^{s+1} + z^{s+1} = 0\}$ halmaz unitál.*

B. C. Kestenband a [27] cikkben egy olyan unitálcsaládot konstruált, aminek minden tagja projektíve ekvivalens a fenti unitállal.

A következő eredmények K. L. Wantz [39] cikkében találhatók.

6.27. Tétel ([39]). *Legyen*

$$U_{ab}^H = \{(1, y, ay^2 + by^{s+1} + r\epsilon) \mid y \in GF(s^2), r \in GF(s)\} \cup \{(0,0,1)\},$$

ahol ϵ a 2.14 tétel páratlan esetének eleme. Ha $a, b \in GF(s)$ és $b^2 - a^2 \in \square_s$, akkor U_{ab}^H unitál a Hughes síkon.

Megjegyzés. Az $a = 0$, $b \neq 0$ esetben $U_{0b}^H = U_R$.

6.28. Tétel. *Legyen G az s^2-rendű Hughes sík olyan lineáris transzformációinak csoportja, amik egy adott U_{ab}^H unitált helyben hagynak. Ekkor:*

$$o(G) = \begin{cases} s(s^2-1), & \text{ha } a = 0 \\ s(s-1), & \text{ha } a \neq 0. \end{cases}$$

Ha $a \neq 0$, akkor G minden eleme helyben hagyja a $P_\infty = (0,0,1)$ pontot.

6.29. Tétel. *Legyen G_0 a fenti G csoport azon részcsoportja, ami a P_∞ pontot helyben hagyja. Ekkor $G_0 = T \times Z$, ahol G_0 s-edrendű elemi Abel csoport, Z pedig $(s-1)$-edrendű ciklikus csoport.*

6.30. Tétel. *Legyen $s = p^e$, ahol $e = 2^t e_0$, t természetes szám, e_0 pedig páratlan szám. Ekkor a projektíve inekvivalens U_{ab}^H unitálok száma:*

$$\frac{1}{2e}[e_0 + \sum_{m|e} \phi(\frac{2e}{m})p^m] - 1,$$

és ebből egy osztály Rosati-féle klasszikus unitálok osztálya.

6.31. Tétel. *Az $U_{a,b}^H$ unitált blokkrendszerként tekintve, duálisa az $U_{a,-b}^H$ unitál.*

6.32. Következmény. *Ha $a = 0$ vagy $b = 0$, akkor U_{ab}^H önduális.*

Hivatkozások

[1] R. D. Baker and G. L. Ebert, On Buekenhout-Metz unitals of odd order, *J. of Combin. Theory, Ser. A*, **60** (1992), 67-84.

[2] R. D. Baker and G. L. Ebert, Intersections of unitals in the Desarguesian plane, *Congr. Numer.*, **70** (1990), 87-94.

[3] S. Ball, A. Blokhuis and Christine M. O;Keefe, On unitals with many Baer sublines, *Designs, Codes and Cryptography*, **17** (1999), 237-252.

[4] S. G. Barwick, A characterization of the classical unital, *Geom. Dedicata*, **52** (1994), 175-180.

[5] S. G. Barwick, Unitals in the Hall plane, *Journal of Geometry*, **58** (1997), 26-42.

[6] M. Barwick, Christine M. O'Keefe and L. Storme, Unitals which meet Baer subplanes in 1 modulo q points, *Journal of Geometry*, **68** (2000), 16-22.

[7] M. Biliotti and G. Korchmáros, Collineation groups preserving a unital of a projective plane of odd order, *J. of Algebra*, **122** (1989), 130-142.

[8] M. Biliotti and G. Korchmáros, Collineation groups preserving a unital in a projective plane of even order, *Geom. Dedicata*, **31** (1989), 333-344.

[9] R. H. Bruck and R. C. Bose, The construction of translation planes from projective spaces, *J. of Algebra*, **1** (1964), 85-102. Collineation groups preserving a unital of a projective plane of odd order,

[10] A. E. Brouwer, Some unitals on 28 points and their embeddings in projective planes of order 9, *Geometries and Groups*, Springer Lecture Notes in Mathematics, No. **893** (1981), 183-188.

[11] L. R. A. Casse, Christine M. O'Keefe and Tim Pentilla, Characterizations of Buekenhout-Metz unitals, *Geom. Dedicata*, **59** (1996), 29-42.

[12] Catherine T. Quinn and L. R. A. Casse, Concerning a characterization of Buekenhout-Metz unitals, *Journal of Geometry*, **52** (1995), 159-167.

[13] P. Dembowski, *Finite Geometries*, Springer, Berlin, (1968)

[14] J. Dover, Some design-theoretic properties of Buekenhout unitals, *J. Combin. Des.*, Vol. **4**, No. **6** (1996), 449-456.

[15] G. L. Ebert, On Buekenhout-Metz unitals of even order, *Europ. J. Combin.*, **13** (1992), 109-117.

[16] G. L. Ebert, Buekenhout-Tits Unitals, *J. Alg. Combin.*, **6** (1997), 133-140.

[17] G. L. Ebert and K. Wantz, A group theoretic characterization of Buekenhout-Metz Unitals, *J. Combin. Designs*, **4** (1996), 143-152.

[18] G. Faina and G. Korchmáros, A graphic characterization of Hermitian curves, *Ann. Discrete Math.*, **18** (1983), 335-342.

[19] K. Grüning, A class of unitals of order q which can be embedded in two different planes of order q^2, *Journal of Geometry*, **29** (1987), 61-77.

[20] J. W. P. Hirschfeld, *Projective Geometries over Finite Fields*, Clarendon Press, Oxford, (1979).

[21] J. W. P. Hirschfeld, *Finite Projective Spaces of Three Dimensions*, Clarendon Press, Oxford, (1985).

[22] J. W. P. Hirschfeld and J. A. Thas, *General Galois geometries*, Oxford University Press, (1991).

[23] J. W. P. Hirschfeld, L. Storme, J. A. Thas and J. F. Voloch, A characterization of Hermitian curves, *Journal of Geometry*, **41** (1991), 72-78.

[24] J. W. P. Hirschfeld and T. Szőnyi, Sets in a finite plane with few intersection numbers and a distinguished point, *Discrete Math.*, **97** (1991), 229-242.

[25] D. R. Hughes and F. C. Piper, *Projective Planes*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1973).

[26] Kárteszi Ferenc, *Bevezetés a véges geometriákba*, Akadémiai Kiadó, Budapest (1972).

[27] B. C. Kestenband, A family of unitals in the Hughes plane, *Can. J. Math.*, Vol. **XLII**, No. **6** (1996), 1067-1083.

[28] Kiss György és Szőnyi Tamás, *Véges geometriák*, Polygon, Szeged (2001).

[29] C. Lefèvre-Pércsy, Characterization of Buekenhout-Metz unitals, *Arch. Math.*, **36** (1981), 565-568.

[30] C. Lefèvre-Pércsy, Characterization of Hermitian curves, *Arch. Math.*, **39** (1982), 476-480.

[31] R. Metz, On a class of unitals, *Geom. Dedicata*, **8** (1979), 125-126.

[32] Gloria Rinaldi, Hyperbolic unitals in the Hall planes, *Journal of Geometry*, **54** (1995), 148-154.

[33] Gloria Rinaldi, Construction of unitals in the Hall planes, *Geom. Dedicata*, **56** (1995), 249-255.

[34] L. A. Rosati, Disegni unitari nei piani di Hughes, *Geom. Dedicata*, **27** (1988), 295-299.

[35] M. Tallini-Scafati, $\{k;n\}$-archi di un piano grafico finito, con particolare riguardo a quelli con due caratteri, *Atti Acad. Naz. Lincei. Rend.*, **40** (1966), Nota I, 812-818, Nota í, 1020-1025.

[36] J. A. Thas, A combinatorial characterization of Hermitian curves, *J. Alg. Combin.*, **1** (1992), 97-102.

[37] J. Tits, Ovoides et groupes de Suzuki *Arch. Math.*, **13** (1962), 187-198.

[38] O. Veblen and J. W. Young, *Projective Geometry*, Vol. I., Ginn, Waltham, MA (1910). *Geom. Dedicata*, **8** (1979), 125-126.

[39] K. L. Wantz, *Unitals Embedded in Finite Projective Planes* Ph. D. thesis, Univ. of Delaware, Newark, DE (1995).

[40] K. L. Wantz, A new class of unitals in the Hughes plane, *Geom. Dedicata*, **70** (1998), 125-138.

[41] H. Wilbrink, A characterization of the classical unitals, *Finite Geometries*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. **82**, (1986), 445-454.