Tartalomjegyzék

1 Előszó

A szűrők - és ezen belül az ultraszűrők - fontos szerepet játszanak a modern halmazelméletben, így érdemes megvizsgálni egyes tulajdonságaikat. Mielőtt ehhez hozzáfognánk, lássuk, mik is azok a szűrők. [20]-ben, például ezt olvashatjuk:

1. Definíció Szűrő, *l. Vizszerzés.*

Ebből rögtön megtudjuk, hogy hol tudhatjuk, meg mi is az a szűrő. A következő definíció is inkább sejtelmes, mint precíz:

2. Definíció Viz-szerzés, *l. Vizvezeték.*

Ha arra gondolnánk, hogy vízvezetéket már az ókori Rómában is használtak, így a szűrőkről is, mint a Római Birodalom egyik érdekességéről olvashatunk, alaposan csalódnánk. Nézzük a vízvezeték rövidített definícióját.

3. Definíció Vizvezeték, *vizben szegény vagy rossz vizű helyeknek kellő mennyiségű és minőségű vizzel való ellátására szolgáló létesítmény(...)*

A folyók általában lágy vizet adnak, de igen gyakran, főként áradáskor, zavarosak. Ezért előbb meg kell tisztítani a vizet, mielőtt a város használatára bocsátanák. E célra mesterséges szürőket készítenek, melyek rendesen nagy ülepedő medencékből állnak, hol a víz iszapját hátrahagyva, kavicsrétegen át szűrődik meg, s igen jól megtisztul. De vannak különös szerkezetű szűrő berendezések is, amelyek azonban nem mindig felelnek meg a célnak(...)(a házi) szűrők rendesen kettős falu edények, melyeknek egyik fala likacsos anyag (homokkő, cserép, asbest), s melyen a víz keresztülhatolva iszapját hátrahagyja(...)

Ezzel a fallal fogunk részletesen foglalkozni. Más, szűrővel kapcsolatos dolog definíciója is hasznos lehet, hátha ott is utalnak a szűrőkre.

4. Definíció Szűrés *(bor). A borban lebegő s abból leülepedni nem akaró s annak zavarosságát v. homályosságát okozó anyagok eltávolítására a Sz.-t használják. E célra a legkülönbözőbb szerkezetű szűrőgépek állnak a borkezelő rendelkezésére(...)*

Sz. (filtrálás), igen fontos és nagyon gyakran használatos kémiai művelet, amely arra való, hogy a folyadékot a benne lévő csapadéktól (oldhatatlan *anyagoktól) elválasszuk. A Sz.-hez tölcsért használunk, amelybe alkalmas módon összehajtott szűrőt (filtrum) teszünk(...) A jó szűrő a reá öntött folyadékot gyorsan átereszti, míg a legfinomabb csapadékot is visszatartja, minek során az átszűrt folyadék (filtratum) nem zavaros, hanem egészen kristálytiszta.*

[21]-ben már használhatóbb információkat találunk:

5. Definíció szűrő : 1. *szűkebb értelemben szilárd anyagoknak folyadéktól való elválasztására szolgáló likacsos anyag (→ szűrés)(...)*

A szűrés meghatározását itt is érdemes elolvasni, hiszen itt kerül elő egy számunkra fontos fogalom.

6. Definíció szűrés, *filtráció ⟨gör.-ből⟩ :* **1.** *szilárd anyagok elválasztása folyadékoktól olyan szűrőréteg segítségével, amelynek likacsain a folyadék részecskéi (szűrlet) áthaladnak, a szilárd anyagé azonban nem(...)*

Szubmikroszkópos méretű részecskék (pl. baktériumok) kiszűrésére az ultraszűrők szolgálnak.A vegyiparban használatos szűrők szakaszos v. folytonos üzeműek. Főbb típusai a homok-, szívó-, táskás-, prés-, dobszűrő.

2. *a köznyelvben helytelenül így nevezik a különféle orvosi → szűrővizsgálatokat.*

Ez utóbbi valóban helytelen, de ha már megemlítik az ultraszűrőket különösen finom szerkezetű szűrőkként, nézzük mit írnak róluk:

7. Definíció ultraszűrés : *eljárás kolloid oldatok (→szolok) különböző nagyságú →szubmikroszkópos méretű részecskéinek egymástól, ill. a szubmiroszkópos részecskéknek az → amikroszkópos méretű részecskéktől történő elválasztására. Az ∼hez különlegesen előállított szűrőhártyákat (ultraszűrők) használnak, amelyek pórusnagysága kisebb 1 mikronnál. Szűrőhártya készíthető pl. kollódium oldatából. Újabban megfelelő módon készített dextrán* ($[C_6H_{10}O_5]_x$) *preparátumokat használnak a szubmikroszkópos méretű anyagoknak kis molekulájúaktól való elválasztására. Ezek fordítva működnek, mint az ultraszűrők(...)*

A tudomány előrehaladtával a fogalmak néha új, praktikus jelentést kapnak. [22]-ben a szűrőről kizárólag, mint a fényképezőgép alkatrészéről olvashatunk [1]:

[1] A fordítást angol eredetiből szakfordító nem hitelesítette.

8. Definíció **szűrő,** *a fényképészetben, a vegyes összetételű fény különböző hullámhosszú összetevőinek, a filmhez érkezés előtti szelektív módosítására szolgáló eszköz(...)*

A fekete-fehér filmekben színes szűrőket használnak a fény módosítására, és hogy a képet a szürke megfelelő árnyalatára készítsék. A színes szűrők fényesíteni vagy sötétíteni is tudják a színes tárgy képét(...) Színes fényképezésnél a színes szűrők a fény színét alakítják át a film színérzékenységéhez(...)

2 Az eredendő probléma

A színes szűrők vizsgálatakor merült fel az alábbi kérdés:

Legyen $\lambda > \omega$ számosság, U uniform ultrafilter [2] λ-n. Legyen T olyan ω magas fa, amelynek minden x csúcsából λ él megy fölfelé. Legyen $A(x)$ x fölső szomszédainak halmaza, $A^0(x) = \{x\}$, $A^{n+1}(x) = A(A^n(x))$. Legyenek $A(x)$ elemei megszámozva λ elemeivel és tekintsük $A(x)$-en az U(x) ultrafiltert, ami legyen kanonikus megfeletetése U-nak. Definiáljuk a $(V_U, \mathcal{G})$ topológikus teret! Legyen V T csúcsainak halmaza, legyen $Y \subseteq V$ nyílt, ha minden $x \in Y$ esetén $\{y \in Y \bigcap A(x)\} \in U$.

9. Probléma *Meg tudjuk-e adni V_U-nak egy olyan λ-színezését, hogy minden nem üres nyílt halmaz tartalmazzon minden színű csúcsot?*

Erre rögtön megkísérlünk választ adni.

10. Tétel *$\lambda = \omega_1$, esetén megadható olyan ω_1-színezés, ami a* **9. Probléma** *megoldása.*

Bizonyítás Tekintsünk egy $\langle Y_\alpha : \alpha \in \omega \rangle$ halmazsorozatot, ahol $Y_0 = \omega_1$, továbbá fennáll, hogy $\alpha, \beta \in \omega$, $\alpha < \beta$ esetén $Y_\alpha \supset Y_\beta$ és

$$\bigcap_{\alpha \in \omega} Y_\alpha = \emptyset.$$

Ha $\alpha \in [1, \omega)$, akkor legyen

$$X_\alpha = Y_{\alpha - 1} \setminus Y_\alpha.$$

[2] Itt is, mint a későbbiekben általában, megszokásból az ultrafilter szót használjuk, ultraszűrő helyett.

Ilyen sorozat létezése könnyen látható, a **27. Tétel** speciális eseteként be is fogjuk bizonyítani. $\langle X_\alpha : \alpha \in \omega \rangle$ nyilvánvalóan particionálja ω_1-et.

A csúcsokat ω_1 elemeivel színezzük, minden nem 0-színű csúcsot a saját színe mellett még egy zöld színű indexszel is megjelölünk. Színezzük T gyökerét 0-színűre. Ha egy x csúcsot 0-színűre színeztünk, az $A(x)$ halmaz elemei legyenek rendre $1, 2, ..., \alpha, ...(\alpha \in \omega_1)$ különböző, színűek. Jelöljük meg ezeket a csúcsokat egy zöld színű ω-val. Minden $\alpha \geq \omega$-ra, legyen $f_\alpha : \omega \to \alpha$ bijekció, ahol $f(0) = 0$, ha $\alpha < \omega$, akkor legyen $f_\alpha = id_\alpha : \alpha \to \alpha$. Ha y-t zöld ω-val jelöltük és y színe $\alpha \geq \omega$, $A(y)$-on tekintsük a fent definiált $\langle X_\alpha : \alpha \in \omega \rangle$ partíciót, és $\forall \beta \in \alpha$-ra színezzük $X_{f_\alpha^{-1}(\beta)}$ elemeit β-színűre. Jelöljük meg ezeket a pontokat egy-egy zöld $f_\alpha^{-1}(\beta)$-val. Ha y-t zöld ω-val jelöltük és y színe $\alpha \geq \omega$ és $z \in A(y)$ β-színű és $f_\alpha^{-1}(\beta) = n \in \omega$; vagy ha z-t zöld ω-val jelöltük, z α-színű és $\alpha = n < \omega$, akkor minden $k \in [1, n]$-re és minden $w \in A^n(z)$-re legyen w színe $f_\alpha(n-k)$, jelöljük meg továbbá w-t egy zöld $n-k$-val.

Könnyen látható, hogy minden csúcsot kiszíneztünk. Tekintsünk egy $G \subseteq V$ nem üres nyílt halmazt. Legyen $x \in G$. Ekkor fennáll az alábbi esetek valamelyike:

(1) x 0-színű.

(2) x-et egy zöld $n \in \omega$ számmal jelöltük. Ekkor $A^n(x)$ elemei 0-színűek, és $G \bigcap A^n(x) \neq \emptyset$.

(3) x-et egy zöld ω-val jelöltük. Ekkor $A(x)$ elemeit zöld ω-beli számokkal jelöltük, és van $y \in G \bigcap A(x)$.

Így látjuk, hogy minden halmazban van 0-színű x csúcs. Legyen $\gamma \in \omega_1$. U uniformitása miatt van olyan $y \in g \bigcap A(x)$, aminek a színe $\alpha \geq \gamma$. Legyen $n = f_\alpha^{-1}(\gamma)$. Ekkor az $A(y)$-t partícionáló $\langle X_\alpha : \alpha \in \omega \rangle$ konstrukciója miatt, van olyan $m \in \omega$, $m \geq n$, amire $X_m \bigcap G \neq \emptyset$. Legyen $z \in X_m \bigcap G$. Ekkor $A^{m-n}(z) \bigcap G \neq \emptyset$, és ennek az elemei éppen γ-színűek lesznek. ♠♡♢♣

Ha λ tetszőleges számosság akkor a következővel próbálkozhatunk:
Tegyük fel, hogy minden $\lambda_0 < \lambda$ számosságra már van kostrukciónk.

(i) Legyen a gyökér 0-színű, azaz 0-színű.

(ii) Ha x 0-színű, $A(x)$ elemei legyenek különböző színűek.

(iii) Ha x 0-színű, és $y \in A(x)$ színe ν, akkor legyen $\lambda_0 = cf(|\nu|)$. Rendezzük ν egy kofinális részét λ_0-típusba és ezekkel a színekkel csináljuk meg y fölé a λ_0-ra ismert 0-színű pontok fölé írt konstrukciót, amíg újra 0-színű pontokat nem kapunk.

Itt a (iii) lépéshez arra van szükségünk, hogy

(A) λ-nak létezzen olyan $\langle X_\alpha : \alpha \in \lambda_0 \rangle$ partíciója, hogy $\mu < \lambda_0$, $|S| = \mu$, $S \subset \lambda_0$) esetén $\bigcup_{\alpha \in S} X_\alpha \notin U$.

Így felmerül a következő kérdés:

11. Probléma *Milyen λ-ra és U-ra áll fenn* (A)*?*

A továbbiakban a **11. Problémát** vizsgáljuk.

3 Ismerkedés a fogalmakkal

H. J. Keisler nevéhez fűződik az alábbi definíció:

12. Definíció *Legyen U ultrafilter az I alaphalmazon, λ számosság. Ha van I-nek olyan*

$$I = \bigcup_{\beta < \lambda}{}^{*} X_\beta \tag{1}$$

partíciója, hogy $S \in [\lambda]^{<\lambda}$ esetén $\bigcup_{\beta \in S}{}^{*} X_\beta \notin U$, akkor azt mondjuk, hogy U **λ-felbontható***. Ekkor az* (1) *beli partíciót U* **λ-felbontásának** *nevezzük. U* **λ-felbonthatatlan***, ha nem λ-felbontható.*

Először kimondunk néhány trivialitást.

13. Állítás *Tetszőleges U ultrafilter* 1*-felbontható, és $\lambda < \omega$, $\lambda \neq 1$ esetén λ-felbonthatatlan.*

14. Állítás *Legyen U uniform ultrafilter a λ számosságon. Ekkor U λ-felbontható.*

Egyszerű, de hasznos a következő lemma:

15. Lemma *Legyen U ultrafilter az I alaphalmazon, η, λ számosságok. Legyen $\forall \alpha \in [\eta, \lambda]$ számosságra U α-felbonthatatlan. Ekkor I bármely $I = \bigcup_{\beta<\lambda}{}^{*} X_\beta$ partíciója esetén $\exists S \in [\lambda]^{<\eta}$, hogy*

$$\bigcup_{\beta \in S}{}^{*} X_\beta \in U. \qquad (2)$$

Bizonyítás A **13. Állítás** miatt vagy $\eta = \lambda = \emptyset$ vagy $\eta \geq 2$. Ha $\lambda < \omega$, az állítás triviális. Legyen λ végtelen számosság. Rögzítsük η-t. Ha $\eta \geq \lambda$, U λ-felbonthatósága adja az állítást. Tegyük fel, hogy $\lambda < \lambda_0$-ra az állítás igaz. Legyen $I = \bigcup_{\beta<\lambda_0}{}^{*} X_\beta$. Ekkor U λ_0-felbonthatósága miatt $\exists S \subset \lambda_0$, $|S| = \lambda_1 < \lambda_0$, hogy $\bigcup_{\beta \in S}{}^{*} X_\beta \in U$. Legyen $X_* = \bigcup_{\beta \notin S}{}^{*} X_\beta$. Tekintsük I-nek az $I = X_* \bigcup (\bigcup_{\beta \in S}{}^{*} X_\beta)$ partícióját. Ez $(\lambda_1 + 1)$ részre particionálja U-t, amiből az indukciós feltevés alapján ki tudunk választani $S_1 \subseteq \{*\} \bigcup S$-et, hogy $|S_1| < \eta$ és kielégíti (2)-t, amit $X_* \notin U$ miatt $S_1 \backslash \{*\} \subset \lambda_0$ is megtesz. $\heartsuit$

16. Definíció *Legyen λ számosság U λ-felbontható ultrafilter, $\bigcup_{\beta<\lambda}{}^{*} X_\beta$ λ-felbontása U-nak. Legyen*

$$U(\lambda) = \{S \subseteq \lambda : \bigcup_{\beta \in S} X_\beta \in U\}.$$

$U(\lambda)$-t az U (egy) **visszahúzásának** *nevezzük λ-ra.*

17. Állítás *Legyenek η, λ számosságok, U λ-felbontható ultrafilter. Legyen $U(\lambda)$ U visszahúzása λ-ra. Ekkor*

- *$U(\lambda)$ uniform ultrafilter λ-n.*
- *Ha U η-felbonthatatlan, akkor $U(\lambda)$ is η-felbonthatatlan.*

Triviális, nem bizonyítjuk.

A következő fogalmat *C. C. Chang* vezette be [4]-ben:

18. Definíció *Legyen U ultrafilter az I alaphalmazon, λ számosság. Ha van olyan $\langle Y_\alpha : \alpha \in \lambda \rangle$ sorozat, hogy ha $\alpha \in \lambda$, akkor $Y_\alpha \in U$, és $\alpha < \beta < \lambda$ esetén*

(i) $Y_\alpha \supset Y_\beta$, *illetve*

(ii) $Y_\alpha \supseteq Y_\beta$,

továbbá $\bigcap_{\alpha\in\lambda} Y_\alpha = \emptyset$, *akkor* U*-t az* (i) *esetben (erősen)* λ*-likacsosnak, vagy mai szóhasználattal* **(erősen)** λ**-lyukasnak**, *az* (ii) *esetben* **gyengén** λ**-lyukasnak** *mondjuk. Az* $\langle Y_\alpha\rangle$ *sorozatra azt mondjuk ekkor, hogy* **(gyenge)** λ**-lyuk**. *Ha* U *semmilyen* $\eta < \lambda$ *számosságra sem gyengén* η*-lyukas, akkor* U λ**-teljes**.

19. Állítás *Ha* λ *reguláris, az erős illetve gyenge* λ*-lyukasság ekvivalens. Ha* λ *szinguláris, minden erős* λ*-lyuk gyenge is egyben. Gyenge* λ *lyuknak van olyan része, ami erős* $cf(\lambda)$*-lyuk. Ha* U *minden eleme legalább* λ *számosságú, akkor erős* $cf(\lambda)$*-lyukat ki lehet bővíteni erős* λ*-lyukká.*

Csak az utolsó állítás nem triviális, de az sem okoz nehézséget. A bizonyítását elhagyjuk. A továbbiakban λ-lyuk alatt erős λ-lyukat értünk.

Az alábbi állítás a lyukasság és a felbonthatóság közötti szoros kapcsolatot mutatja. A továbbiakban általában a felbonthatóságot fogjuk vizsgálni, egyrészt a fogalom könnyebb kezelhetősége miatt, másrészt mert szinguláris számosságokra erősebb feltétel.

20. Lemma *Legyen* U *ultrafilter az* I *alaphalmazon,* $\lambda \geq \omega$ *számosság. Ekkor*

U λ*-felbontható* $\Rightarrow$ U λ*-lyukas, és*

U λ*-lyukas* $\Rightarrow$ U $cf(\lambda)$*-felbontható.*

Bizonyítás Legyen $I = \bigcup^*_{\beta<\lambda} X_\beta$ λ-felbontása U-nak. Minden $\alpha < \lambda$-ra legyen $Z_\alpha = \bigcup_{\beta\leq\alpha} X_\beta$, és $Y_\alpha = I\setminus Z_\alpha$. Ekkor Z_α λ-nál kevesebb X_β uniója, így $Y_\alpha \in U$. $\bigcap Y_\alpha = \emptyset$, hiszen X_β-k páronként diszjunktak.

Másik irányba: A **19. Állítás** miatt feltehető, hogy λ reguláris. Legyen $\langle Y_\alpha\rangle$ egy λ-lyuk. Legyen minden $\beta < \lambda$-ra $X_\beta = \bigcap_{\gamma<\beta} Y_\gamma \setminus Y_\beta$. X_β-k nyilván diszjunktak lesznek, és $S \in [\lambda]^{<\lambda}$ esetén van $\sup S < \alpha_0 < \lambda$, így $(\bigcup_{\beta\in S} X_\beta) \bigcap Y_{\alpha_0} = \emptyset$. $\heartsuit$

4 Kis lyukak, nagy lyukak

Először azt vizsgáljuk meg, hogy egy lyuk milyen feltételek mellett garantálja kisebb lyuk létezését. A következő két tétel erről szól.

21. Tétel *Legyenek μ, λ olyan számosságok, hogy $\mu < \lambda \leq 2^{\mu}$, legyen U λ-lyukas ultrafilter az I alaphalmazon. Ekkor U ν-lyukas is valamely $\nu \leq \mu$ számosságra.*

Bizonyítás A **20. Lemma** miatt van U-nak $I = \bigcup_{\alpha\in\lambda}{}^{*}X_{\alpha}$ λ-felbontása. Tekintsünk egy $\mu + 1$ magas 2-fát, azaz olyan fát, aminek minden levéltől különböző csúcsából kettő él indul felfelé. A fa minden x csúcsára legyen $l(x)$ az x fölötti levelek halmaza. Az $X_{\alpha}(\alpha \in \lambda)$ halmazokat írjuk a fa egy-egy levelére, a többi levélre írjunk üres halmazt. A fa levéltől különböző x csúcsaira, pedig $B(x)$-szel jelölve az x csúcsra írt halmazt legyen $B(x) = \bigcup_{y\in l(x)} B(y)$.

Minden $\eta \in \mu$-re az η-dik szinten levő csúcsokra írt halmazok diszjunktak, s uniójuk $I \in U$, így közülük legfeljebb egy U-beli van. Legyen μ_0 a legalsó szint, ahol nincs U-beli. Legyen $Y_0 = B(z) \in U$, ahol z a fa gyökere, és minden $\eta \in \mu$-re Y_{η} legyen az η-dik szinten levő U-beli halmaz, ha $\eta < \mu_0$, különben nem definiáljuk. Könnyen látható, hogy $\langle Y_{\eta} : \eta < \mu_0\rangle$ monoton fogyó és $B = \bigcap_{\eta<\mu_0} Y_{\eta} \notin U$. Legyen $\nu = cf(\mu_0)$ és tekintsük $\langle Y_{\eta}\rangle$-nak egy $\langle Z_{\gamma} : \gamma \in \nu\rangle$ kofinális részsorozatát. Ekkor a $\langle Z_{\gamma}\setminus B\rangle$ sorozat ν-lyuk lesz. ♠♡♢♣

22. Definíció *Legyen λ számosság. Egy fát* **λ-Aronszajn fának** *nevezünk, ha λ-magas, minden szintjén λ-nál kevesebb csúcs van és nincs λ hosszú ága. A λ számosság* **gyengén kompakt**, *ha erősen elérhetetlen és nincs λ-Aronszajn fa.*

23. Tétel *Legyen λ olyan számosság, amire van λ-Aronszajn fa. Legyen U λ-lyukas ultrafilter. Ekkor van olyan $\nu < \lambda$ számosság, amire U ν-lyukas.*

A bizonyítás lényegében megegyezik a **21. Tételével**, ezért elhagyjuk. Az eddigiek alapján megállapíthatjuk, hogy minden mérhető számosság gyengén kompakt. Ezt egyébként *Erdős P.* és *A. Tarski* bizonyították be először 1942-ben.

Ismert tétel, a bizonyítás megtalálható, például [19]-ban:

24. Tétel *Ha U λ-lyukas ultrafilter, és λ kisebb, mint a legkisebb mérhető számosság, akkor U ω-lyukas.*

Most, hogy bizonyos esetekben tudjuk, hogy egy λ-s (nagy) lyuk mellett mindig létezik ω-s (kis) lyuk is, vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek mellett létezik közepes lyuk. Ennek egy fontos esetét fogalmazza meg a következő tétel, amit $2^\lambda = \lambda^+$ feltétel mellett *C. C. Chang* bizonyítoott be először, s aminek bizonyítása megtalálható [1]-ben is. Előbb azonban nézzük a hozzá tartozó segédeszközt:

25. Definíció *Legyen $\lambda \geq \omega$ számosság. Legyen $(A_{\alpha,\beta} : \ \alpha \in \lambda^+, \beta \in \lambda)$ olyan mátrix, hogy minden $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \in \lambda^+, \beta, \beta_1, \beta_2 \in \lambda,\ \alpha_1 \neq \alpha_2$ esetén*

(i) $A_{\alpha_1,\beta} \bigcap A_{\alpha_2,\beta} = \emptyset$,

(ii) $|\lambda^+ \setminus \bigcup_{\beta<\lambda} A_{\alpha,\beta}| < \lambda^+$.

(iii) $A_{\alpha,\beta_1} \bigcap A_{\alpha,\beta_2} = \emptyset$,

Ekkor az $(A_{\alpha,\beta})$ mátrixot **diszjunkt Ulam-mátrixnak**, *ha* (iii)-*t nem teszszük fel, akkor* **Ulam-mátrixnak** *nevezzük.*

26. Lemma *Legyen $\lambda \geq \omega$ számosság. Ekkor létezik $(A_{\alpha,\beta} : \ \alpha \in \lambda^+, \beta \in \lambda)$ diszjunkt Ulam-mátrix.*

Bizonyítás Minden $\eta < \lambda^+$ rendszámra legyen $f_\eta : |\eta| \to \eta$ η-nak $|\eta|$ típusú felsorolása. Legyen $\eta \in A_{\alpha,\beta} \Leftrightarrow f_\eta(\beta) = \alpha$. Ez jó lesz. $\heartsuit$

27. Tétel *Legyen λ számosság, U λ^+-lyukas ultrafilter valamilyen I alaphalmazon. Ekkor*

(a) *ha λ reguláris, akkor U λ-lyukas.*

(b) *ha λ szinguláris, akkor U vagy $cf(\lambda)$-lyukas, vagy van olyan $\mu < \lambda$, hogy minden $\eta \in [\mu, \lambda)$ reguláris számosságra η-lyukas.*

Bizonyítás U λ^+-lyukas, így a **20. Lemma** miatt U λ^+-felbontható is. Ezért I-t felírhatjuk $I = \bigcup_{\alpha<\lambda^+} {}^*X_\alpha$ alakban, hogy minden $S \in [\lambda^+]^{\leq\lambda}$ esetén $\bigcup_{\alpha\in S} X_\alpha \notin U$. Így U a kanonikus hozzárendeléssel meghatároz λ^+-on egy U' uniform ultrafiltert: ha $A \subseteq \lambda^+$, akkor legyen

$$A \in U' \Leftrightarrow \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha \in U.$$

Ez U' egy ν-lyukához is egyértelműen hozzárendel egy U-beli ν-lyukat, ezért elég belátni, hogy U' λ-lyukas vagy η-lyukas minden elég nagy $\eta < \lambda$ reguláris számosságra.

Legyen $(A_{\alpha,\beta})$ a **26. Lemma** szerint létező diszjunkt Ulam-mátrix. Legyen $B_{\alpha,\beta} := \bigcup_{\gamma<\beta} A_{\alpha,\gamma}$. Ha van olyan $\alpha < \lambda^+$, hogy minden $\beta \in \lambda$ esetén $B_{\alpha,\beta} \notin U'$, akkor rögzítve ezt az α-t legyen minden $\beta \in \lambda$-ra $B'_\beta = \bigcup_{\gamma\in[\beta,\lambda)} A_{\alpha,\gamma}$. Ekkor nyilvánvaló, hogy $B'_\beta \in U'$, $\bigcap_{\gamma\in[\beta,\lambda)} B_{\alpha,\gamma} = \emptyset$ és $\langle B'_\beta : \beta \in \lambda\rangle$ monoton fogyó, így (gyenge)λ-lyuk. Ha viszont ilyen α nincs, akkor létezik olyan $\beta \in \lambda$ és λ^+ különböző $\alpha \in \lambda^+$, hogy $B_{\alpha,\beta} \in U'$. Legyen $\eta \in [\beta, \lambda^+)$ reguláris számosság. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\alpha < \eta$ esetén $B_{\alpha,\beta} \in U'$. Legyen minden $\gamma \in \eta$-ra $C_\gamma = \bigcup_{\alpha\in[\gamma+1,\eta)} B_{\alpha,\beta}$, ez nyilvánvalóan U'-beli, így vagy C_γ $(\gamma \in \eta)$ egy η-lyuk U'-n, vagy $\exists b \in \bigcap_{\gamma\in\eta} C_\gamma$, azaz van olyan $B \subset \eta$ kofinális halmaz, hogy $\alpha \in B$ esetén $b \in B_{\alpha,\beta}$. Legyen $g : B \to \beta$ a következő függvény:

$$g(\alpha) = \delta, \text{ ha } b \in A_{\alpha,\delta}.$$

g injektív, hiszen $(A_{\alpha,\beta})$ Ulam-mátrix, így $|B| \leq |\beta| < \eta$ fennáll. Viszont η regularitása miatt $|B| = \eta$, ami ellentmondás. ♠♡♢♣

Így a λ-lyukasságból, ha nem is tudunk feltétlenül következtetni tetszőleges λ-nál kisebb lyukra, bizonyos feltételek mellett a legkisebb (ω) és a legnagyobb (λ^-, ha létezik) létezéséről már tudunk.

Most sok kis lyukból csináljunk nagyot:

28. Definíció *Ha λ reguláris limeszszámosság, akkor* **(gyengén) elérhetetlennek** *mondjuk.*

29. Tétel *(K. Prikry [2]). Legyen U ultrafilter az I alaphalmazon. Legyen λ számosság olyan, hogy fennáll az alábbiak valamelyike.*

(a) *λ elérhetetlen , $2^\lambda = \lambda^+$.*

(b) *λ erős limesz és U $cf(\lambda)$-felbontható.*

(c) *$cf(\lambda) = \omega$ és U $cf(\lambda)$-felbontható.*

Tegyük fel továbbá, hogy $\mu < \lambda$ esetén $\exists \nu \in [\mu^+, \lambda)$, hogy U ν-felbontható. Ekkor U λ-felbontható.

Bizonyítás (b) és (c): Legyen $\nu = cf(\lambda)$. Tekintsünk egy $\langle \lambda'_\xi : \xi \in \nu \rangle$ monoton növő számosság- (vagy rendszám) sorozatot, ahol $\lim \lambda'_\xi = \lambda$.

Megadunk egy $\mathcal{B} = \{(\lambda_\xi, \mathcal{U}_\xi) : \xi \in \nu\}$ sorozatot, ahol $lim \lambda_\xi = \lambda$, $\mathcal{U}_\xi = \{A^\xi_\rho : \rho < \lambda_\xi\}$ λ_ξ-felbontása U-nak, ha $\xi_1 < \xi_2$, akkor $\lambda_{\xi_1} < \lambda_{\xi_2}$ és $\mathcal{U}_{\xi_2}$ finomítása $\mathcal{U}_{\xi_1}$-nek. Továbbá, ha $\xi \in \nu$ limeszrendszám, legyen igaz, hogy:

$$\lambda_\xi > 2^{\sup\limits_{\eta<\xi} \lambda_\eta}.$$

Legyen $\lambda_0 = \nu$, $\mathcal{U}_0$ egy — a tétel feltevései szerint létező — tetszőleges ν-felbontása U-nak. Tegyük fel, hogy $\eta < \xi$-re $(\lambda_\eta, \mathcal{U}_\eta)$-t már definiáltuk. Legyen először $\xi = \xi_0+1$. Legyen $(\lambda_\xi, \mathcal{W}_\xi)$, olyan, amire $\lambda_\xi \in [\max(\lambda^+_{\xi_0}, \lambda'_\xi), \lambda]$, U λ_ξ-felbontható, és $\mathcal{W}_\xi$ λ_ξ-felbontása U-nak. Legyen $\mathcal{U}_\xi$ a kanonikus finomítása $\mathcal{W}_\xi$-nek és $\mathcal{U}_{\xi_0}$-nak. Ez nyilvánvalóan λ_ξ-felbontása U-nak. Most legyen ξ limeszrendszám. Legyen $\mathcal{U}$ az $\mathcal{U}_\eta (\eta < \xi)$ felbontások kanonikus finomítása. Ez I-t ϑ részre osztja valamilyen ϑ számosságra. Ekkor $\mu = \sup\limits_{\eta<\xi} \lambda_\eta$ jelöléssel $\vartheta \leq |\prod\limits_{\eta<\xi} \lambda_\eta| \leq \mu^\xi \leq 2^\mu < \lambda$. Legyen $(\lambda_\xi, \mathcal{W}_\xi)$, olyan, amire $\lambda_\xi \in [\max((2^\mu)^+, \lambda'_\xi), \lambda]$, U λ_ξ-felbontható, és $\mathcal{W}_\xi$ λ_ξ-felbontása U-nak. Legyen $\mathcal{U}_\xi$ a kanonikus finomítása $\mathcal{W}_\xi$-nek és $\mathcal{U}$-nak. Ez is nyilvánvalóan λ_ξ-felbontása U-nak. $\lambda = \lim \lambda'_\xi \leq \lim \lambda_\xi \leq \lambda$, így transzfinit rekurzióval megkaptuk $\mathcal{B}$-t.

Minden $\rho \in \nu$ rendszámra legyen $\mu_\rho \in [(\sup\limits_{\eta<\rho} \lambda_\eta)^+, \lambda_\rho]$ reguláris számosság. Legyen $0 = \nu_0 < \nu_1 < ... < \nu_\rho < ... < \nu$ $(\rho \in \nu)$ rendszámsorozat és legyen minden $\rho \in \nu$-re

$$\mathcal{W}_\rho = \{A^\rho_\vartheta \bigcap A^0_\tau : \sup_{\eta<\rho} \nu_\eta < \tau < \nu_\rho, \vartheta \in \lambda_\rho\}.$$

Ha ν_η és $\mathcal{W}_\eta$ már definiált ($\eta < \rho$)-ra, akkor legyen ν_ρ a legkisebb olyan rendszám, amire $|\mathcal{W}_\rho| \geq \mu_\rho$. Belátjuk $\nu_\rho$létezését: $\bigcup\limits_{\substack{\tau > \sup \nu_\eta \\ \eta<\rho}} A^0_\tau \in U$, így ebbe $\mathcal{U}_\rho$-nak λ_ρ tagja belemetsz, ezért ha

$$\mathcal{V}_{\rho,\tau^*} = \{A^\rho_\vartheta \bigcap A^0_\tau : \sup_{\eta<\rho} \nu_\eta < \tau < \tau^*, \vartheta \in \lambda_\rho\},$$

akkor rögzített ρ mellett $\lim\limits_{\tau^* \to \nu} |\mathcal{V}_{\rho,\tau^*}| \geq \mu_\rho$. Így μ_ρ regularitása miatt van $\tau^*_0 < \nu$, amire $|\mathcal{V}_{\rho,\tau^*_0}| \geq \mu_\rho$. Legyen ν_ρ a legkisebb ilyen τ^*_0. Legyen $\mathcal{W} = \bigcup\limits_{\rho<\nu} \mathcal{W}_\rho$.

Belátjuk, hogy $\mathcal{W}$ λ-felbontása U-nak. Legyen $S \subset W$, $|S| = \mu < \mu_\xi$ valamilyen $\xi < \nu$ mellett. Legyen $S^* = S \bigcap \bigcup\limits_{\nu_\xi<\rho<\nu} \mathcal{W}_\rho$ Ha $\bigcup S \in U$, akkor $\bigcup S^* \in U$, ami viszont ellentmondás, hiszen $\bigcup\limits_{\nu_\xi<\rho<\nu} \mathcal{W}_\rho$ finomítása $\mathcal{U}_\xi$-nek.

(a): Legyen $\Lambda = \{\mu < \lambda :\ U\ \mu\text{-felbontható}\}$. Minden $\mu \in \Lambda$-ra legyen $\mathcal{U}_\mu$ μ-felbontása U-nak. Legyen $\mathcal{W}$ a kanonikus finomítása az $\{\mathcal{U}_\mu : \mu \in \Lambda\}$ partícióknak. Ez I-t kevesebb, mint $\lambda^\lambda = \lambda^+$ részre osztja. Ha $S \subset \mathcal{W}$, $|S| < \lambda$, akkor feltevésünk szerint van olyan $\mu \in \Lambda$, amire $|S| < \mu$. Ekkor $\bigcup S \notin U$, ugyanis $\mathcal{W}$ finomítása $\mathcal{U}_\mu$-nek. Ha $\exists T \subseteq \mathcal{W}$, $|T| = \lambda$, $\bigcup T \in U$, akkor $\mathcal{V} = T \bigcup \{I \setminus \bigcup T\}$ λ-felbontása U-nak. Ha ilyen T nincs, akkor $\mathcal{W}$ λ^+-felbontása U-nak. ♠♡♢♣

5 Ultraszorzatok

A későbbiekben hasznunkra lesz, ha megvizsgáljuk egy U ultrafilter felbonthatósága és U szerinti ultraszorzatok számossága közötti összefüggéseket. Az alábbi tétel szerint, az elég nagy ultraszorzat garantál bizonyos méretű lyukakat.

30. Definíció *Ha μ számosság, akkor legyen $\mu^{(0)} = \mu$, és minden $n > 0$ természetes számra legyen $\mu^{(n)} = (\mu^{(n-1)})^+$.*

31. Tétel *(K. Prikry [2]). Legyen U ultrafilter az I alaphalmazon. Legyen μ végtelen számosság és minden $\mu < \lambda \leq 2^{(2^\mu)^+}$ esetén U λ-felbonthatatlan. Ekkor igazak az alábbiak:*

(i) $|\prod \mu / U| \leq 2^\mu$.

(ii) *Minden* n *természetes számra* $|\prod \mu^{(n)}/U| \leq \mu^{(n)} 2^\mu$.

(iii) *Ha* ν *tetszőleges rendszám,* $\prod \nu/U$*-ban nincs* $(2^\mu)^+$ *típusú fogyó sorozat.*

(iv) *Ha* $\lambda \leq 2^{(2^\mu)^+}$*, akkor* $\prod \lambda/U \leq \lambda^\mu$.

Bizonyítás (i): Tegyük fel, hogy $|\prod \mu/U| > 2^\mu$. Ekkor léteznek olyan $f_\alpha : I \to \mu$ $(\alpha \in (2^\mu)^+)$ függvények, hogy ha $\alpha \neq \beta$ $[f_\alpha] \neq [f_\beta]$, azaz

$$\{i : f_\alpha(i) \neq f_\beta(i)\} \in U. \tag{3}$$

$i \in I$ esetén legyen

$$A_i = \{\{\alpha, \beta\} : f_\alpha(i) \neq f_\beta(i)\},$$

és minden $A \subseteq [(2^\mu)^+]^2$-hoz definiáljuk az

$$X_A = \{i : A_i = A\}.$$

halmazt. $\{X_A : A \subseteq [(2^\mu)^+]^2\}$ I-nek legfeljebb $2^{(2^\mu)^+}$ részre való partíciója. A **15. Lemma** miatt ekkor $\exists \mu^* \leq \mu$ és $\exists A_{i(\xi)}$ $(\xi \in \mu^*)$, hogy $i(\xi) \in I$, $A_{i(\xi)} \neq \emptyset$ és

$$X = \bigcup_{\xi \in \mu^*} X_{A_{i(\xi)}} \in U.$$

Tekintsük $[(2^\mu)^+]^2$ alábbi c színezését:

$$c(\alpha, \beta) = min\{\xi : \{\alpha, \beta\} \in A_{i(\xi)}\}.$$

Ez, (3) miatt, valóban színezés.

Az Erdős-Rado tétel miatt $\exists Z \subset (2^\mu)^+$, $|Z| = \mu^+$ homogén halmaz, azaz $\alpha, \beta \in Z \Rightarrow c(\alpha, \beta) = \xi$. Ezt a ξ-t rögzítve $\mu^+ \leq |\{f_\alpha(i(\xi)) : \alpha \in Z\}| \leq \mu$, ami ellentmondás.

(ii): $n = 0$-ra (i)-ből következik. Tegyük fel, hogy $n-1$-re igaz. A **27. Tétel** miatt $U \mu^{(n)}$-felbonthatatlan, ezért minden $f : I \to \mu^{(n)}$ függvényhez van U-beli halmaz, ahol f kevesebb, mint $\mu^{(n)}$ különböző értéket vesz fel. Így

$$|\prod \mu^{(n)}/U| = |\bigcup_{\nu \in \mu^{(n)}} \prod \nu/U| \leq \mu^{(n)} \mu^{(n-1)} 2^\mu = \mu^{(n)} 2^\mu.$$

(iii): Szinte szóról szóra megegyezik (i) bizonyításával. Tegyük fel, hogy van ilyen sorozat, azaz léteznek $f_\alpha : I \to \nu$ $(\alpha \in (2^\mu)^+)$ függvények, hogy ha $\alpha < \beta$, akkor $[f_\alpha] > [f_\beta]$. Legyen

$$A_i = \{\{\alpha, \beta\} : \alpha < \beta,\ f_\alpha(i) > f_\beta(i)\}.$$

Ugyanúgy, mint (i)-ben, definiáljuk az $X_A :\ A \subseteq [(2^\mu)^+]^2$ halmazokat, $\xi \in \mu^* \leq \mu$-re $i(\xi)$-t és $[(2^\mu)^+]^2$ c színezését.

Az Erdős-Rado tétel miatt most is $\exists Z \subset (2^\mu)^+,\ |Z| = \mu^+$ halmaz, amire $\alpha, \beta \in Z \Rightarrow c(\alpha, \beta) = \xi$ valamely $\xi \in \mu$-re. Ezt a ξ-t rögzítve $\langle f_\alpha(i(\xi)) : \alpha \in Z\rangle$ μ^+ típusú fogyó sorozat a rendszámokon, ami lehetetlen.

(iv): A **15. Lemma** miatt

$$\prod \lambda/U = \bigcup_{S \in [\lambda]^{\leq \mu}} \prod S/U.$$

Így (i) miatt

$$|\prod \lambda/U| \leq 2^\mu \lambda^\mu = \lambda^\mu.$$

♠♡◇♣

(ii)-ben tulajdonképpen többet bizonyítottunk, mondjuk ki ezt a többletet is:

32. Tétel *Legyen U ultrafilter az I alaphalmazon. Legyen λ olyan számosság, hogy U $cf(\lambda)$-felbonthatatlan. Tegyük fel, hogy van olyan ν_α $(\alpha \in cf(\lambda))$ λ-hoz kofinális számosságsorozat és λ_0 számosság, amire $|\prod \nu_\alpha/U| \leq \lambda_0$. Ekkor $|\prod \lambda/U| \leq cf(\lambda)\lambda_0$.*

Bizonyítás Mint a **31. Tétel** (ii). ♠♡◇♣

A továbbiakban nagy szükségünk lesz a következő tételre, ami (ÁKH) mellett megtalálható [2]-ben.

33. Tétel *Legyen U ultrafilter az I alaphalmazon. Legyen μ számosság és U 2^μ-felbonthatatlan. Legyen ν rendszám, $K \subseteq \prod \nu/U$, felülről korlátos halmaz és legyen $cf(K) \geq (2^\mu)^+$. Ekkor K-nak van h minimális felső korlátja.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy nincs ilyen h. Ekkor van egy λ reguláris számosság és egy $f_\alpha : I \to \nu$ $(\alpha \in \lambda)$ sorozat, hogy $[f_\alpha] < [f_\beta]$, *ha* $\alpha > \beta$, $[f_\alpha]$ felső korlátja K-nak és

(i) K minden $[f]$ felső korlátjához $\exists\alpha \in \lambda$, hogy $[f_\alpha] < [f]$.

A **31. Tétel** (iii) miatt $\lambda < (2^\mu)^+$. Legyen $A_i = \{f_\alpha(i) : \alpha \in \lambda\}$. Mivel $|A_i| < (2^\mu)^+$, a **31. Tétel** (ii) miatt

$$|\prod A_i/U| < (2^\mu)^+.$$

Legyen

$$F = \{[f] : [f] \in \prod A_i/U, \ \exists[k] \in K([k] > [f])\}.$$

$|F| < (2^\mu)^+$, így $\exists[k_0] \in K$, hogy $\forall[f] \in F$-ra $([k_0] > [f])$. $\alpha \in \lambda$ esetén legyen

$$I_\alpha = \{i : f_\alpha(i) > k_0(i)\} \in U.$$

Nyilvánvalóan $I_\alpha \supseteq I_{\alpha+1}$, s mivel U nem λ-lyukas $X = \bigcap_{\alpha\in\lambda} I_\alpha \in U$. Legyen

$$h(i) = min\{f_\alpha(i) : i \in I_\alpha\}.$$

Ezzel h-t $\bigcup_{\alpha\in\lambda} I_\alpha \in U$ helyen definiáltuk. Nyilvánvalóan $h(i) < f_\alpha(i)$, ha $i \in I_\alpha \bigcap I_{\alpha+1}$, tehát $\exists[k] \in K : \ [k] > [h]$, emiatt $[h] \in F$, így $[k_0] > [h]$. Másfelől ha $i \in X$, akkor $h(i) \geq k_0(i)$, ami ellentmondás. ♠♡♢♣

6 Normális ultraszűrők

34. Definíció *Legyen A rendezett halmaz, $U \subset P(A)$ ultrafilter. Azt mondjuk, hogy U* **normális ultrafilter**, *ha $[id]$ a legkisebb olyan elem $\prod A/U$-ban, ami minden $a \in A$-ra nagyobb, mint $[c_a]$, ahol $c_a(i) = a$ konstansfüggvény.*

Ez lesz az a segédeszköz, amely megoldja a legtöbb problémánkat. Belátjuk, hogy bizonyos esetekben feltehetjük egy ultrafilter normalitását, normális ultrafilterre meg sokminden igaz. A következő lemma azt mutatja, hogy sok ultrafilter kifejezetten hasonlít egy normálisra.

35. Lemma *Legyen A rendezett halmaz, U ultrafilter I-n. Tegyük fel, hogy $\exists[f] \in \prod A/U$, amire igaz, hogy $\forall a \in A$-ra $[f] > [c_a]$, és $[f]$ a legkisebb ilyen tulajdonságú eleme $\prod A/U$-nak. Legyen $V \subseteq P(A)$ úgy definiálva, hogy:*

$$X \in V \Leftrightarrow f^{-1}(X) \in U.$$

Ekkor V normális ultrafilter A-n és minden λ számosságra:

$$U\ \lambda - felbonthatatlan \Rightarrow V\ \lambda - felbonthatatlan.$$

36. Megjegyzés *Mind az U, mind a V szerinti konstansfüggvényt c_a-val jelöltük, attól még két különböző függvényről van szó.*

Bizonyítás $\{a \in A : a > a_0\} \in U$, hiszen $[f] > [c_{a_0}]$. Így $[id] > [c_{a_0}]$.

Ha adott $g : A \to A$, $[g] < [id_A]$, akkor legyen $h : I \to A$, $h(i) = g(f(i))$. Nyilvánvalóan $[h] < [f]$, tehát $\exists a \in A : \ [h] < [c_a]$. Legyen $X \subset A$ olyan, hogy $g(b) > a$ $(b \in X)$. Ekkor $h(i) > a$ $(i \in f^{-1}(X)$, tehát $X \notin U$, így $[g] < [c_a]$.

Legyen $A = \bigcup\limits_{\alpha\in\lambda}{}^{*} X_\alpha$, ekkor $I = \bigcup\limits_{\alpha\in\lambda}{}^{*} f^{-1}(X_\alpha)$. Ha U λ-felbonthatatlan, akkor $\exists S \subset \lambda$, $|S| < \lambda$, hogy $\bigcup\limits_{\alpha\in S}{}^{*} f^{-1}(X_\alpha) \notin U$. Erre az S-re $\bigcup\limits_{\alpha\in S}{}^{*} X_\alpha \notin V$. $\heartsuit$

Alkalmazzuk rögtön ezt a lemmát! Az alábbi tételre lépten-nyomon fogunk hivatkozni, amikor bizonyos ultrafilterek normalitására lesz szükségünk.

37. Tétel *Legyenek λ, μ olyan számosságok, amelyekre $cf(\lambda) > 2^\mu$. Legyen továbbá U olyan uniform ultrafilter λ-n, hogy ha $\mu < \nu < 2^{(2^\mu)^+}$, akkor U ν-felbonthatatlan. Ekkor van λ-n ugyanezzel a tulajdonsággal rendelkező V normális ultrafilter.*

Bizonyítás Legyen

$$K = \{[c_\gamma] : \gamma \in \lambda\} \subset \prod \lambda/U.$$

Ekkor a **33. Tétel** miatt $\exists [f] \in \prod \lambda/U$, ami K összes elemének minimális felső korlátja. Így a **35. Lemma** adja az állítást. $\spadesuit\heartsuit\diamondsuit\clubsuit$

A normális ultrafilterek egyik fontos tulajdonsága, hogy bizonyos halmazokról be tudjuk látni, hogy az ultrafilterben vannak. Először ilyen tételeket nézünk.

38. Állítás *Legyen U normális ultrafilter a λ számosságon. $C \subseteq \lambda$ kofinális zárt halmaz. Ekkor $C \in U$.*

Bizonyítás Legyen

$$g : \lambda \to \lambda,\ g(\alpha) = max\{\beta : \beta \in C,\ \beta \leq \alpha\}.$$

Ez C zártsága miatt értelmes definíció. Nyilvánvalóan $[g] > [c_\alpha]$, és ha $C \notin U$, akkor $[g] < [id]$. $\heartsuit$

39. Következmény *Ha λ reguláris és U normális ultrafilter λ-n, akkor $\{\alpha : \alpha \in \lambda$ limeszrendszám$\} \in U$. Ha λ elérhetetlen, akkor $\{\alpha : \alpha \in \lambda$ limeszszámosság$\} \in U$. Ha λ erősen elérhetetlen, akkor $\{\alpha : \alpha \in \lambda$ erős limeszszámosság$\} \in U$.*

A **39. Következmény** veti fel az alábbi kérdést.

40. Probléma *U normális ultrafilter és ν reguláris számosság esetén az $\{\alpha : cf(\alpha) < \nu\}$, $\{\alpha : cf(\alpha) = \nu\}$, $\{\alpha : cf(\alpha) > \nu\}$ halmazok közűl melyik van U-ban? Általában a nagy vagy a kis kofinalitású rendszámok halmaza U-beli?*

Mint látni fogjuk ez a kérdés szorosan összefügg az ultraszorzatok méretével és ezen keresztűl a felbonthatósággal. Az alábbi lemmák [2]-ból vannak.

41. Lemma *Legyen λ reguláris számosság, U normális ultrafilter λ-n. Minden $\alpha \in \lambda$ limeszrendszámra legyen $S_\alpha \subseteq \alpha$ $cf(\alpha)$ típusú kofinális halmaz. Minden $\alpha \in \lambda$ rendszámra legyen $S_{\alpha+1} = \{\alpha\}$. Ekkor*

$$\lambda \leq |\prod S_\alpha/U| \leq |\prod \lambda/U| \leq 2^\lambda. \tag{4}$$

Bizonyítás A második egyenlőtlenség triviális, a harmadik egyszerű leszámlálás. Az első egyenlőtlenséget bizonyítjuk:

Ha $[f] \in \prod S_\alpha/U$, akkor a **39. Következmény** miatt $[f] < [id]$. Így U normalitása miatt $[f]$-nek van valamilyen $\gamma \in \lambda$-val $[c_\gamma]$ felső korlátja. Ha $|\prod S_\alpha/U| < \lambda$, akkor λ regularitása miatt van olyan $\gamma_0 \in \lambda$, amire $[c_{\gamma_0}]$ az összes $[f]$-et majorálja. Viszont legyen $f_0(\alpha) = \beta_\alpha$, ha $\alpha > \gamma_0$ limeszrendszám, ahol $\beta_\alpha > \gamma_0$, $\beta_\alpha \in S_\alpha$ tetszőlegesen választható. Ezzel f_0-t 1 mértékű halmazon definiáltuk. Nyilvánvalóan $[f_0] > [c_{\gamma_0}]$, ami ellentmondás. $\heartsuit$

42. Következmény *Ha λ számosság, U normális ultrafilter λ^+-on, akkor*

$$\lambda^+ \leq |\prod \lambda/U| \leq 2^{\lambda^+}. \tag{5}$$

43. Lemma *Legyen η számosság, $\lambda \geq \eta^{++}$ reguláris számosság, U normális ultrafilter λ-n. Ekkor vagy*

$$|\prod \eta/U| \geq \lambda,$$

vagy

$$\{\alpha : \alpha \in \lambda,\ cf(\alpha) > \eta\} \in U.$$

Bizonyítás Tegyük fel, hogy egyik sem áll fenn. Készítsük el a **41. Lemmában** definiált S_α halmazokat. Feltevésünk szerint

$$\{\alpha : \alpha \in \lambda,\ |S_\alpha| > \eta\} \notin U,$$

ezért $|\prod S_\alpha/U| < \lambda$. Ez ellentmond a **41. Lemmának**. ♡

A következő lemma többek között a reguláris számosságok U-beliségére mutat elégséges feltételt.

44. Lemma *Legyen λ (erősen) elérhetetlen számosság, U normális ultrafilter λ-n. Legyen minden $\nu < \lambda$ számosságra*

$$|\prod \nu/U| < \lambda.$$

Ekkor

$$\{\alpha : \alpha < \lambda,\ \alpha (\textit{erősen})\ \textit{elérhetetlen}\} \in U.$$

Bizonyítás Tegyük fel, hogy nem igaz. Készítsük el a **41. Lemmában** definiált S_α halmazokat. Feltevésünk szerint a szinguláris limeszszámosságok halmaza U-beli, és ha α szinguláris limesz, akkor $|S_\alpha| < \alpha$. Így U normalitása miatt van olyan $\nu < \lambda$, hogy $|S_\alpha| < \nu$ egy U-beli halmazon. Így

$$|\prod S_\alpha/U| < \lambda,$$

ami ellentmond a **41. Lemmának**. ♡

A **44. Lemma** és a **38. Állítás** adja az alábbi következményt:

45. Következmény *A* **44. Lemma** *feltételei mellett a λ-nál kisebb (erős) limeszszámosságok halmaza stacionárius, azaz λ (erős) Mahlo.*

A **27. Lemma** analógiájára bizonyos λ limeszszámosságokról is be akarjuk látni, hogy ha egy U ultrafilter λ-lyukas, akkor U bizonyos $\langle\alpha_\eta\rangle$, λ-ban kofinális számosságsorozat elemeire is α_η-lyukas. A következő lemma két ilyen állítást mond ki.

46. Lemma *Legyen λ erősen elérhetetlen, de nem erős Mahlo számosság, U uniform ultrafilter λ-n. Ekkor*

(i) *Ha $\alpha < \lambda$, akkor $\exists\beta \in [\alpha, \lambda)$, hogy U β-felbontható.*

(ii) *(ÁKH)$\exists\alpha < \lambda$, hogy ha $\alpha \leq cf(\beta) < \lambda$, akkor U β-felbontható.*

Bizonyítás (i): Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás, azaz $\exists\alpha < \lambda$, hogy ha $\alpha \leq \beta < \lambda$, akkor U β-felbonthatatlan. Ekkor a **37. Tétel** miatt van V normális ultrafilter λ-n, amire ugyanez fennáll (ugyanezzel az α-val, de ez nem lényeges). **31. Tétel** (i) miatt minden $\beta < \lambda$ esetén $|\prod\beta/U| < \lambda$, a **45. Következmény** miatt λ Mahlo, ami ellentmondás.

(ii) bizonyítása pontosan ugyanúgy megy, mint (i)-é. ♡

G. V. és D. V. Chudnovsky [5]-ben egy [9]-beli eredmény segítségével ennél erősebb tételt igazoltak:

47. Tétel *Legyen λ (erősen) elérhetetlen, de nem (erős) Mahlo számosság, U uniform ultrafilter λ-n. Ekkor $\exists\alpha < \lambda$, hogy ha $\alpha \leq cf(\beta) < \lambda$, akkor U β-felbontható.*

Ezt később a **68. Tételben** mi is igazoljuk. Megemlítjük még, hogy Chudnovsky-ék a következőt is megmutatták ugyanott:

48. Tétel *A* **47. Tétel** *feltételei mellett U vagy minden $\alpha < \lambda$ reguláris számosságra α-lyukas, vagy valamely $\alpha < \lambda$ számosságra (α, λ)-reguláris.*

Az (α, λ)-regularitást később definiáljuk.

A következő cél, hogy n-Mahlo számosságokra is hasonló tételt mondhassunk ki ($n \in \omega$).

49. Lemma *(J. Silver [2]). Legyen λ számosság, $\nu < \lambda$ reguláris számosság, U ν-felbonthatatlan ultrafilter λ-n. Legyen $\delta \in \lambda$ rendszám, amire $cf(\delta) = \nu$. Legyen továbbá $\langle\delta_\xi : \xi \in \nu\rangle$ δ-hoz konvergáló szigorúan növő sorozat. Ekkor $\langle[c_{\delta_\xi}] : \xi \in \nu\rangle$ is konvergál $[c_\delta]$-hoz $\prod\lambda/U$-ban.*

Bizonyítás Legyen $f : \lambda \to \lambda$ olyan, hogy $[f] < [c_\delta]$. Legyen $\xi \in \nu$ esetén

$$A_\xi = \{\rho : \sup_{\eta<\xi} \delta_\eta \leq f(\rho) < \delta_\xi\}.$$

Ekkor az A_ξ-k páronként diszjunktak, így $\bigcup_{\xi\in\nu} A_\xi$ ν-partíciója λ-nak. Feltevésünk szerint létezik $S \subset \nu$, $|S| < \nu$, hogy

$$\bigcup_{\xi\in S} A_\xi \in U.$$

Ha $\xi > \sup S$, akkor $[c_{\delta_\xi}] > [f]$, ezzel a lemmát beláttuk. ♡

50. Lemma *(J. Silver [2]). Legyen λ reguláris számosság, U normális ultrafilter λ-n. Tegyük fel, hogy van $\nu < \lambda$, hogy U ν-felbonthatatlan. Legyen $C \subseteq \prod \lambda/U$ olyan zárt halmaz, amire $\sup(C \bigcap \{[f] : [f] < [id]\}) = [id]$. Legyen*

$$D = \{\delta : [c_\delta] \in C\}.$$

Ekkor $|D| = \lambda$, és D-beli rendszámok ν-típusú sorozatának limesze D-beli.

Bizonyítás Az utóbbi állítás a **49. Lemma** következménye. A számosságra vonatkozó állításhoz megmutatjuk, hogy $D \subseteq \lambda$ kofinális halmaz. Legyen $\alpha \in \lambda$. U normalitása miatt rekurzióval tudunk csinálni egy $\langle [f_\xi] : \xi \in \nu \rangle$ C-beli és egy $\langle \delta_\xi : \xi \in \nu \rangle$ λ-beli sorozatot, ahol

- $\delta_0 > \alpha$,
- $[f_\xi] > [c_{\delta_\xi}]$,
- $[c_{\delta_{\xi+1}}] > [f_\xi]$ és
- Ha ξ limesz, akkor $\delta_\xi = \sup_{\eta<\xi} \delta_\eta$.

Mindkét sorozat szigorúan növő és ekvikonvergensek, így ha $\delta = \sup_{\eta<\nu} \delta_\eta$, akkor a **49. Lemma** miatt $[c_\delta] \in C$, tehát $\delta \in D$ és $\delta > \alpha$. ♡

Az alábbi tételt többször fogjuk használni.

51. Tétel *(J. Silver, K. Prikry [2]). Legyen λ reguláris számosság, U normális ultrafilter λ-n, $S \subseteq \lambda$ stacionárius halmaz. Tegyük fel továbbá, hogy minden $\alpha \in S$-re U $cf(\alpha)$-felbonthatatlan. Ekkor*

$$\{\beta : S \bigcap \beta \text{ stacionárius halmaz } \beta\text{-ban}\} \in U.$$

Bizonyítás Tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz

$$B = \{\beta : S \bigcap \beta \text{ nem stacionárius halmaz } \beta\text{-ban}\} \in U.$$

Minden $\beta \in B$-re legyen $C_\beta \subseteq \beta$ S-től diszjunkt $cf(\beta)$ típusú kofinális zárt halmaz. Legyen $C = \prod C_\beta / U$. Erre, $\nu = cf(\alpha)$ választással valmely $\alpha \in S$ limeszrendszámra, teljesülnek az **50. Lemma** feltételei, így a $D = \{\delta : [c_\delta] \in C\}$ halmaz

(i) λ számosságú, és

(ii) minden $\alpha \in S$-re D zárt a $cf(\alpha)$ típusú limeszképzésre.

D (i) miatt kofinális λ-ban, így a lezártjában van S-beli rendszám. Legyen ez a rendszám α. Ekkor α előáll D-beli rendszámok $cf(\alpha)$ típusú limeszeként, így (ii) miatt $\alpha \in D$, tehát $[c_\alpha] \in C$, ezért van olyan $\beta \in B$, amire C_β a feltevésünkkel ellentétben nem diszjunkt S-től. ♠♡♢♣

52. Lemma *(K. Prikry [2]). Legyen λ reguláris számosság, U normális ultrafilter λ-n. Legyen $C \subset \prod \lambda / U$ olyan zárt halmaz, aminek $[id] \notin C$ a legkisebb felső korlátja. Ekkor fennáll az alábbiak valamelyike:*

(i) $\{\delta : [c_\delta] \in C\} \in U$

(ii) $\{\delta : U$ *$cf(\delta)$-felbontható*$\} \in U$.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy nincs így, azaz

$$F = \{\delta : U\ cf(\delta)\text{-felbonthatatlan}, [c_\delta] \notin C\} \in U.$$

C zártsága miatt értelmes a következő: Minden $\delta \in F$-re legyen

$$[h_\delta] = \max\{[g] \in C : [g] \leq [c_\delta]\}.$$

$[c_\delta] \notin C$, ezért $[h_\delta] < [c_\delta]$. A konstrukcióból nyilvánvaló, hogy $\delta_1 < \delta_2$ esetén $[h_{\delta_1}] \leq [h_{\delta_2}]$. Legyen

$$G = \{[h_\delta] : \delta \in F\}.$$

U normalitása miatt C minden elemének van G-beli felső korlátja. Minden $\delta \in F$-re U δ-felbonthatatlansága miatt van olyan $\gamma \in \lambda$, hogy

$$[h_\delta] < [c_\gamma] < [c_\delta]. \tag{6}$$

Minden $\delta \in F$-re legyen $H(\delta) = \gamma$ valameley (6)-t kielégítő γ-ra. Ekkor H felső korlátja G-nek — tehát C-nek is —, és $[H] < [id]$, ami ellentmondás. ♡

53. Tétel *(K. Prikry [2]).* (ÁKH)*Legyen λ reguláris számosság, U uniform ultrafilter λ-n. Legyen tetszőlegesen nagy reguláris $\mu < \lambda$-ra U μ-felbonthatatlan. Ekkor λ ω-Mahlo.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy λ elérhetetlen. Feltehetjük, hogy U normális. Azt kell belátni, hogy $E = \{\delta \in \lambda : \delta\ n - Mahlo\} \subset \lambda$ stacionárius halmaz. Ennél egy picit többet igazolunk: Megmutatjuk, hogy $E \in U$.

$n = 0$-ra ez a **46. Lemma** (ii) állítása. Tegyük fel, hogy n-re és minden λ-ra igaz az állítás, azaz $E = \{\delta \in \lambda : \delta\ n - Mahlo\} \in U$. Legyen

$$D = \{\delta \in \lambda : \delta\ n - Mahlo,\ U\ \delta\text{-felbontható}\} \subseteq E.$$

Tegyük fel, hogy $D \in U$. Legyen $A = \{\nu : U\nu\text{-felbonthatatlan},\ \nu < \lambda$ reguláris$\}$. Feltevésünk szerint $|A| = \lambda$. Ezért a

$$B = \{\beta : |\beta \bigcap A| = \beta\}$$

halmaz kofinális és zárt λ-ban, tehát $B \bigcap D \in U$. Legyen $\delta \in B \bigcap D$. Ekkor a **17. Állítás** miatt δ-ra és $U(\delta)$-ra alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, így $\delta\ (n+1) - Mahlo$, ami adja az állítást.

Most tegyük fel, hogy $D \notin U$. Tegyuk fel továbbá, hogy nem igaz az állítás. Ekkor

$$F = \{\delta : \delta\ n - Mahlo,\ de\ nem\ (n+1) - Mahlo\} \in U.$$

Legyen minden $\delta \in F$-re $C_\delta \subset \delta$ olyan kofinális zárt halmaz, ami nem tartalmaz n-Mahlo számosságot. Legyen

$$C = \prod C_\delta / U.$$

C zárt és $[id] \notin C$ a legkisebb felső korlátja, így az **52. Lemma** miatt

$$\{\delta : [c_\delta] \in C\} \in U,$$

amiből következik, hogy

$$\{\delta : \delta \; nem \; n - Mahlo\} \in U.$$

Ez ellentmondás. ♠♡♢♣

Vegyük észre, hogy az **53. Tételben** (ÁKH)-t egyedül a **46. Lemmára** való hivatkozásnál használtuk ki. Ezért, a **47. Tételt** használva az **53. Tétellel** analóg módon beláthatjuk, hogy

54. Tétel *Legyen λ (erősen) elérhetetlen számosság, U uniform ultrafilter λ-n. Legyen tetszőlegesen nagy reguláris $\mu < \lambda$-ra U μ-felbonthatatlan. Ekkor λ (erős) ω-Mahlo.*

55. Megjegyzés *A tétel bizonyítása során felhasznált* **47. Tétel** *következik a* **68. Tételből**, *így miután a* **68. Tételt** *beláttuk, fogjuk az* **54. Tételt** *is bizonyítottnak tekinteni.*

(ÁKH)és a **47. Tétel** nélkül az alábbi egyszerűbb tételt tudjuk igazolni:

56. Tétel *Legyen λ reguláris számosság, U uniform ultrafilter λ-n. Legyen minden elég nagy reguláris $\mu < \lambda$-ra U μ-felbonthatatlan. Ekkor λ ω-Mahlo.*

Bizonyítás Indukcióval bizonyítunk: **46. Lemma** (i) miatt λ (1)-Mahlo. Tegyük fel, hogy λ n-Mahlo. Ekkor az elég nagy $(n-1)$-Mahlo számosságok stacionárius halmazt alkotnak λ-ban, így az **51. Tétel** alapján az n-Mahlo számosságok halmaza is stacionárius. ♠♡♢♣

7 (μ,λ)-reguláris ultraszűrők

57. Definíció *Legyen U ultrafilter az I alaphalmazon, λ, μ számosságok. Azt mondjuk, hogy U (μ, λ)-***reguláris***, ha $\exists A \subseteq U$, $|A| = \lambda$, hogy minden $B \subseteq A$, $|B| = \mu$ esetén $\bigcap B = \emptyset$.*

Legyen λ számosság és U uniform ultrafilter λ-n. Azt mondjuk, hogy U **reguláris**, *ha U (ω, λ)-reguláris.*

Először nézzünk ide tartozó trivialitásokat:

58. Állítás (i) *Ha $|I| = \lambda$, akkor U (λ, λ)-reguláris.*

(ii) *Ha $\mu < \nu$ és $\eta < \lambda$, akkor U (μ, λ)-reguláris $\Rightarrow$ U (ν, η)-reguláris.*

A (μ, λ)-regularitás, mint az alábbi lemma mutatja, a λ-lyukasság általánosítása:

59. Lemma *Ha λ reguláris számosság, U ultrafilter, akkor*

U (λ, λ)-reguláris $\Leftrightarrow$ U λ-lyukas.

Bizonyítás Legyenek $\langle A_\alpha : \alpha \in \lambda \rangle$ U-beli halmazok, amelyekre $S \subset \lambda$, $|S| < \lambda$ esetén $\bigcap\limits_{\alpha \in S} A_\alpha = \emptyset$. Legyen minden $\alpha \in \lambda$-ra

$$B_\alpha = \bigcup_{\beta \in [\alpha, \lambda]} A_\beta.$$

Nyilvánvalóan $B_\alpha \in U$, $\alpha_0 < \alpha_1$ esetén $B_{\alpha_0} \supseteq B_{\alpha_1}$. Tegyük fel, hogy $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in \lambda} B_\alpha$, ekkor $\exists S \subset \lambda$ kofinális halmaz, hogy $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in S} A_\alpha$, ami ellentmondás. Ez azt jelenti, hogy $\langle B_\alpha : \alpha \in \lambda \rangle$ λ-lyuk.

Legyen most $\langle B_\alpha : \alpha \in \lambda \rangle$ λ-lyuk. Ennek bármely λ számosságú része kofinális a sorozatban, így $\langle B_\alpha \rangle$ monotonitása miatt a metszete üres. ♡

60. Következmény *Ha λ reguláris számosság, $\eta > \lambda$, U (λ, η)-reguláris ultrafilter, akkor minden $\nu \in [\lambda, \eta]$ számosságra U ν-lyukas.*

61. Megjegyzés *Konzisztens, hogy a* **60. Következmény** *megfordítása nem igaz; azaz előfordulhat, hogy U μ-lyukas minden $\nu \in [\lambda, \eta]$ számosságra, de nem (λ, η)-reguláris. Ilyen példát lehet találni $\eta = \omega_2$-re [12]-ben.*

[10]-ben található az alábbi lemmát:

62. Lemma *Legyen λ szinguláris számosság, $\nu < \lambda$ számosság, U uniform ultrafilter λ-n. Tegyük fel, hogy U minden $\rho < \lambda$ számosságra (μ, ρ)-reguláris. Ekkor U (μ, λ)-reguláris.*

A következő lemmák *K. Prikry*től származnak.

63. Lemma *Legyen A tetszőleges rendezett halmaz, U ultrafilter A-n. Legyenek μ, ν számosságok, és $\rho \in A$-ra legyen $A_\rho \subset A$, $|A| < \nu$. Tegyük fel továbbá, hogy létezik olyan $[f_\xi] \in \prod A_\rho / U$ és $\gamma_\xi \in A$ $(\xi \in \mu)$, amire $\xi_0 < \xi_1 < \mu$ esetén*

$$[c_{\xi_0}] \leq [f_{\xi_0}] < [c_{\xi_1}]. \tag{7}$$

Ekkor U (ν, μ)-reguláris.

Bizonyítás Minden $\xi \in \mu$-re legyen $B_\xi = \{\rho \in A : \gamma_\xi \leq f_\xi(\rho) < \gamma_{\xi+1}$. Legyen $S \subseteq \mu$. Ha $\rho \in \bigcap_{\xi \in S} B_\xi$, akkor az $f_\xi(\rho)$-k mind különbözőek. Legyen

$$R_{\rho,S} = \{f_\xi(\rho) \in A_\rho : \xi \in S\}.$$

Így $|R_{\rho,S}| = |S|$, ezért $|S| < \nu$. ♡

64. Lemma *Legyen A tetszőleges rendezett halmaz, U ultrafilter A-n. Legyenek μ, ν számosságok, $\mu \leq cf(A)$, és $\rho \in A$-ra legyen $A_\rho \subset A$, $|A| < \nu$. Tegyük fel továbbá, hogy U nem (ν, μ)-reguláris. Ekkor a*

$$H = \{[f] \in \prod A_\rho / U : \exists(\delta \in A)([f] < [c_\delta])\} \tag{8}$$

halmaznak létezik valamely $\gamma \in A$-ra $[c_\gamma]$ felső korlátja.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás. Ekkor triviálisan konstruálhatóak (7)-beli $[f_\xi]$-k és γ_ξ-k. Így a **63. Lemma** miatt U (ν, μ)-reguláris, ami ellentmondás. ♡

65. Lemma *Legyen λ reguláris számosság, U normális ultrafilter λ-n. Legyen $\mu < \lambda$ számosság és minden $\rho \in \lambda$-ra legyen $A_\rho \subseteq \rho$, $|A_\rho| < \mu$. Tegyük fel továbbá, hogy $\prod A_\rho / U$ legkisebb felső korlátja $[id]$. Ekkor U (μ, λ)-reguláris.*

Bizonyítás Definiáljuk H-t, mint (8)-ben. U normalitása miatt $H = \prod A_\rho / U$. Alkalmazzuk H-ra a **64. Lemmát**. ♡

66. Tétel *(K. Prikry [2]). Legyenek $\mu < \lambda$ számosságok, λ reguláris, U normális ultrafilter λ-n. Ha U nem (μ, λ)-reguláris, akkor*

$$\{\alpha \in \lambda : cf(\alpha) \geq \mu\} \in U.$$

Bizonyítás Minden $\alpha \in \lambda$-ra legyen $A_\alpha \subseteq \alpha$, $cf(\alpha)$ számosságú kofinális zárt halmaz. Ha $\{\alpha \in \lambda : cf(\alpha) < \mu\} \in U$, akkor a **65. Lemma** miatt U (μ, λ)-reguláris lenne, s épp ennek az ellenkezőjét tettük fel. ♠♡♢♣

Alkalmazva az **59. Lemmát** a **40. Problémára** kapunk részben választ:

67. Következmény *Legyen λ reguláris számosság, U normális ultrafilter λ-n. Ha $\mu < \lambda$-számosságra U μ-felbonthatatlan, akkor $\{\alpha \in \lambda : cf(\alpha) \geq \mu\} \in U$.*

Az alábbi tételben a **47. Tételt** is bebizonyítjuk.

68. Tétel *(K. Prikry [2]). Legyen λ (erősen) elérhetetlen számosság. Ha van olyan U normális ultrafilter λ-n, ami minden $\mu < \lambda$ számosságra U nem (μ, λ)-reguláris, akkor λ (erős) Mahlo.*

Bizonyítás A **39. Következmény** miatt elég megmutatnunk, hogy a λ-beli reguláris számosságok halmaza U-beli.

Tegyük fel, hogy a λ-beli szinguláris számosságok halmaza U-beli. Ekkor $[cf] < [id]$, így U normalitása miatt van olyan $\mu < \lambda$, amire $[cf] < [c_\mu]$. Minden $\alpha \in \lambda$ szinguláris számosságra legyen $A_\alpha \subseteq \alpha$ $cf(\alpha)$ számosságú kofinális zárt halmaz. Az előző megállapításunk miatt $\{\alpha : |A_\alpha| < \mu\} \in U$, így a **65. Lemma** miatt $\prod A_\alpha / U$-nak van $[id]$-nél kisebb felső korlátja. U normalitása miatt van $[c_\beta]$ felső korlátja is, valamely $\beta \in \lambda$-ra. Legyen $\alpha > \beta$. Ekkor $\exists g(\alpha) \in A_\alpha$, $g(\alpha) > \beta$. Ekkor viszont $[g] > [c_\beta]$, ami ellentmondás. ♠♡♢♣

A **68. Tétel** és az **59. Lemma** együttesen adják az alábbit:

69. Következmény *Legyen λ (erősen) elérhetetlen számosság. Ha van olyan U normális ultrafilter λ-n, hogy tetszőlegesen nagy $\mu < \lambda$-ra U λ-felbonthatatlan, akkor λ (erős) Mahlo.*

70. Megjegyzés *Ezzel bebizonyítottuk a* **47. Tételt**, *s így az* **54. Tételt** *is.*

Szükségünk lesz az alábbi tételre, ami speciális esete Chang és Keisler egy közös eredményének.

71. Tétel *Legyenek $\mu < \lambda$ számosságok, tegyük fel, hogy nincs $\nu < \mu$, $2^\nu > \mu$ számosság. Legyen U (μ, λ)-reguláris ultrafilter. Ekkor*

$$\prod \mu/U \geq 2^\lambda.$$

Bizonyítás Legyenek $A_\alpha \in U(\alpha \in \lambda)$ olyanok, hogy közülük bármelyik μ metszete üres. Minden $\beta \in \lambda$-ra legyen

$$R_\beta = \{\alpha : \beta \in A_\alpha\}.$$

Ekkor $|R_\beta| < \mu$. Minden $B \subseteq \lambda$-ra legyen

$$f_B(\beta) = B \bigcap R_\beta.$$

Legyen $B_0 \nsubseteq B_1$. Tekintsünk egy $\alpha \in B_0 \backslash B_1$ rendszámot. Minden $\beta \in A_\alpha$-ra

$$\alpha \in f_{B_0}(\beta), \ de\ \alpha \notin f_{B_1}(\beta).$$

Így $[f_{B_0}] \neq [f_{B_1}]$, tehát

$$2^\lambda \leq |\prod \mathcal{P}(R_\beta)/U| \leq |\prod \lambda/U|.$$

♠♡♢♣

8 A fő eredmények

Nézzünk néhány eredményt a szinguláris számosságokról.

72. Tétel *(K. Prikry [2]). Legyen λ erős szinguláris limeszszámosság, U uniform ultrafilter λ^+-on. Tegyük fel, hogy $\lambda^{<\lambda} < 2^{\lambda^+}$. Ekkor fennáll az alábbiak valamelyike:*

(i) *U λ-felbontható.*

(ii) *U β-felbontható tetszőlegesen nagy $\beta < \lambda$ számosságra.*

Ha (ÁKH)-t is feltesszük, akkor U β-felbontható minden $\beta < \lambda$ számosságra.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy (ii) nem áll fenn. Ekkor a **37. Tétel** miatt feltehetjük, hogy U normális. $cf(\alpha) < \lambda$ minden $\alpha \in \lambda^+$-ra, így a **66. Tétel** alapján U (λ, λ^+)-reguláris, ezért a **71. Tétel** miatt

$$|\prod \lambda/U| \geq 2^{\lambda^+}.$$

Most tegyük fel, hogy (i) sem áll fenn. Ez azt jelenti, hogy nincs olyan $f : \lambda^+ \to \lambda$ függvény, aminek minden minden U-beli halmazon λ számosságú az értékkészlete. Ezért

$$\prod \lambda/U \subseteq \bigcup_{X \in [\lambda]^{<\lambda}} \prod X/U.$$

A **31. Tétel** miatt minden $\mu < \lambda$-ra $|\prod \mu/U| < \lambda$, így

$$|\prod \lambda/U| \leq |[\lambda]^{<\lambda}| \cdot \lambda < 2^{\lambda^+}.$$

És ez ellentmondás. ♠♡♢♣

A szinguláris számosságokról szól a következő két *K. Prikrytől* származó tétel is.

73. Tétel *Legyen λ erős limeszszámosság, $cf(\lambda) = \omega$, $\lambda^{<\lambda} < 2^{\lambda^+}$ és U uniform ultrafilter λ^+-on. Tegyük fel, hogy nincs λ-nál kisebb mérhető számosság. Ekkor U λ-felbontható.*

Bizonyítás A **72. Tétel** szerint elég azzal az esettel foglalkoznunk, ha U β-felbontható tetszőlegesen nagy $\beta < \lambda$ számosságra. Mivel nincs λ-nál kisebb mérhető számosság — és nyilvánvalóan λ, λ^+ sem azok —, U ω-felbontható. Ezért alkalmazhatjuk a **29. Tételt**, ami éppen a kívánt eredményt adja. ♠♡♢♣

74. Tétel *Legyen λ számosság, U uniform ultrafilter λ-n. Tegyük fel, hogy U semmilyen $\mu \in [\omega_1, \lambda)$ számosságra sem μ-felbontható. Ekkor vagy λ ω-Mahlo vagy $cf(\lambda) = \omega$.*

Bizonyítás Ha λ szinguláris, akkor triviális, hogy $cf(\lambda)$-felbontható. Ha λ szinguláris rákövetkezője, akkor a **72. Tétel** adja az állítást, ha λ reguláris rákövetkezője, a **27. Tétel** miatt vagyunk kész. Az utolsó eset, hogy λ

elérhetetlen, ekkor előbb a **68. Tételt**, majd az **54. Tételt** alkalmazva a tételt beláttuk. $\spadesuit\heartsuit\diamondsuit\clubsuit$

Az eddigiek alapján a **11. Problémára** a következőket mondhatjuk:

75. Tétel *λ reguláris számosságra, ha U λ-lyukas ultrafilter, akkor*

*Ha $\lambda = \mu^+$ és μ reguláris, akkor U μ-lyukas. (**27. Tétel**).*

*Ha λ elérhetetlen, de nem ω-Mahlo, akkor $\exists \mu < \nu$, hogy minden $\nu \in [\mu, \lambda)$-ra U ν-lyukas. (**54. Tétel**).*

*Ha λ erősen elérhetetlen, de nem erős ω-Mahlo, akkor $\exists \mu < \nu$, hogy minden $\nu \in [\mu, \lambda)$-ra U ν-lyukas. (**54. Tétel**).*

*Ha $\lambda = \mu^+$ és μ szinguláris, akkor U vagy $cf(\mu)$-lyukas, vagy vagy van olyan $\nu < \mu <$, hogy minden $\eta \in [\nu, \mu)$ reguláris számosságra η-lyukas. (**27. Tétel**).*

(ÁKH)*Ha $\lambda = \mu^+$ és μ szinguláris, akkor U vagy (μ)-felbontható, vagy vagy van olyan $\nu < \mu <$, hogy minden $\eta \in [\nu, \mu)$ reguláris számosságra η-lyukas. (**72. Tétel**).*

Jensen bizonyította be [3]-ben a következő tételt:

76. Tétel *Tegyük fel, hogy $V = L$. Legyenek $\mu < \lambda$ reguláris számosságok, λ nem gyengén kompakt, ekkor van olyan $S \subset \lambda$ stacionárius halmaz, amire*

(i) Minden $\alpha \in S$-re $cf(\alpha) = \mu$.

(ii) $S \bigcap \alpha$ semmilyen $\alpha \in \lambda$-ra sem stacionárius α-ban.

Ennek következménye az alábbi tétel, ami válasz a **11. Problémára** egy speciális esetben.

77. Tétel *(R. Jensen, K.Prikry, J. Silver). Tegyük fel, hogy $V = L$. Legyenek $\mu < \lambda$ reguláris számosságok, λ nem gyengén kompakt, legyen U uniform ultrafilter λ-n. Ekkor U μ-felbontható.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy U μ-felbonthatatlan, valamely $\mu < \lambda$ reguláris számosságra. A **35. Tétel** miatt feltehető, hogy U normális. Legyen $S \subset \lambda$ olyan stacionárius halmaz, amilyent a **76. Tételben** definiáltunk. Ekkor az **51. Tétel** szerint

$$\{\beta : S \bigcap \beta \text{ stacionárius halmaz } \beta\text{-ban}\} \in U,$$

a **76. Tétel** szerint pedig

$$\{\beta : S \bigcap \beta \text{ stacionárius halmaz } \beta\text{-ban}\} = \emptyset,$$

ami ellentmondás. $\spadesuit\heartsuit\diamondsuit\clubsuit$

Visszatérve az eredeti kérdésünkre, az eddigiekből megállapíthatjuk, hogy

78. Tétel *Ha $\lambda < \omega_\omega$, akkor a* **9. Problémára** *van megoldás.*

9 Egyebek

Az alábbi két tétel [2]-ben szerepel bizonyítással.

79. Tétel *Legyen λ erősen elérhetetlen számosság, U olyan uniform ultrafilter λ-n, amely minden $\mu \in [\omega_1, \lambda)$-ra μ-felbonthatatlan. Tegyük fel, hogy λ alatt* (ÁKH)*igaz. Ekkor $2^\lambda = \lambda^+$.*

80. Tétel *Legyen λ erősen elérhetetlen számosság, U olyan uniform ultrafilter λ-n, amely minden $\mu \in [\omega_1, \lambda)$-ra μ-felbonthatatlan. Ekkor λ-ra nem teljesül a Kurepa hipotézis, azaz nincs olyan $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$, $|\mathcal{F}| = \lambda^+$ halmazrendszer, hogy minden $\alpha \in \lambda$-ra*

$$|\{X \bigcap \alpha : X \in \mathcal{F}\}| \leq |\alpha|$$

fennálljon.

Donder bizonyította be [10]-ben a következő tételt:

81. Tétel *Ha λ szinguláris vagy rákövetkező számosság, U uniform ultrafilter λ-n és teljesül a $\Box^+_\lambda$ feltétel, akkor U reguláris.*

A $\Box^+_\lambda$ definíciója szintén [10]-ben található meg. Találunk ugyanott két másik elégséges feltételt a regularitásra.

82. Tétel *Tegyük fel, hogy egy modellben L^μ nem áll fenn. Legyen λ szinguláris számosság, U uniform ultrafilter λ-n. Ekkor U reguláris.*

83. Tétel *Legyen λ olyan reguláris számosság, amire $(\lambda^+)^\lambda = \lambda$. Legyen U uniform ultrafilter λ-n. Tegyük fel továbbá, hogy λ nem mérhető belső modellben. Ekkor U reguláris.*

Nézzünk néhány eredményt a felbonthatatlanságról is! *Prikry* látta be [13]-ben az alábbit:

84. Tétel *Tegyük fel, hogy létezik mérhető számosság. Ekkor van olyan λ szinguláris számosság és U uniform ultrafilter λ-n, hogy U μ-felbonthatatlan, minden $\mu \in [\omega_1, \lambda)$ számosságra.*

M. Magidor [12]-ben *huge* számosság létezését használva konstruált olyan modellt, amiben létezik ω_2-n nem reguláris ultrafilter.

M. Foreman, M. Magidor és *S. Shelah* [16]-ben ugyanezt megmutatták ω_1-re.

H. Woodin azt is megmutatta, hogy elég *majdnem huge* számosság létezésének a konzisztenciáját feltenni. Ekkor is létezik olyan modell, amiben létezik ω_1-en nem reguláris ultrafilter. *H. Woodin* ehhez *R. Laver* egy [14]-beli módszerét használta.

10 Utószó

Egyszer ide is el kellett érkeznünk. Reméljük, aki idáig eljutott, jól szórakozott és sikerült közelebb kerülnie az ultraszűrők és likacsaik varázslatos világához. Rengeteg területet bejártunk a vízszerzésnél használatostól kezdve az ω_1-en nem regulárisig hőseink számos fajtájával megismerkedhettünk. Ha mostanra egy picivel több fény szűrődik be a likacsokon, utunk már nem volt hiábavaló.

A történetnek, azonban, egyáltalán nincs még vége. Akinek sikerült felkeltenünk az érdeklődését, annak további izgalmakat kínálhatunk az *Ultraszűrők legújabb kalandjai* sorozat alábbi, már megjelent írásaiban.

Kötelező és ajánlott olvasmányok

[1] K. Kunen, K. Prikry. *On descendingly incomplete ultrafilters.* J. in Symb. Logic. 36 1971. 650-652 (1972).

[2] K. Prikry. *On descendingly complete ultrafilters.* Cambridge Summer School Math. Logic., Cambridge, 1971. Lecture Notes Math. 337 459-488 (1973).

[3] R. Jensen. *The fine structure of constructible hierarchy.* Annals of Math. Logic., 4 229-308, 1972.

[4] C. C. Chang. *Descendingly incomplete ultrafilters.* Trans. Amer. Math. Soc. 126, 108-118, 1967.

[5] G. V. Chudnovsky, D. V. Chudnovsky. *Regularnije i ubivajuse nepolnije ultrafiltri.* Dolkl. Akad. Nauk SSSR, 198, 779-782, 1971.

[6] M. Benda, J. Ketonen. *Regularity of ultrafilters.* Isr. J. Math. 17 231-240 1974.

[7] A. Kanamori. *Weakly normal filters and irregular ultrafilters* Trans. Am. Math. Soc. 220 393-399 1976.

[8] J. Ketonen. *Nonregular ultrafilters and large cardinals.* Trans. Am. Math. Soc. 224 61-73 1976.

[9] Hajnal A. *Ulam-matrices for inaccessible cardinals.* Bull. Acad. Polon. Soc. XVII, 683-688, 1969.

[10] H.-D. Donder. *Regularity of ultrafilters and the Core model.* Isr. J. Math. 63 289-322 1988.

[11] S. Shelah. *Product of regular cardinals and cardinal invariants of products of Boolean algebras.* Isr. J. Math. 70 129-187 1990.

[12] M. Magidor. *On the existence of nonregular ultrafilters and the cardinality of ultrapowers* Trans. Am. Math. Soc. 249 97-111 1979.

[13] K. Prikry. *Changing mesurable into accessible cardinals.* Diss. Math. 68 5-22 1970.

[14] R. Laver. *Saturated ideals and non-regular ultrafilters.* Patras Logic symposium North-Holland, Amsterdam 297-305 1982.

[15] M. Foreman, M. Magidor, S. Shelah. *Martin's Maximum, saturated ideals and non-regular ultrafilters. Part I.* Annals of Math. 127 1-47 1988.

[16] M. Foreman, M. Magidor, S. Shelah. *Martin's Maximum, saturated ideals and non-regular ultrafilters. Part II.* Annals of Math. 127 521-545 1988.

[17] Juhász István, Soukup Lajos, Szentmiklóssy Zoltán. *Resolvable spaces.* 1998 prilis 16.

[18] P. Lipparini *Productive* $[\lambda, \mu]$*-Compactness And Regular Ultrafilters.* Topology Proceedings, Vol. 21, 1996.

[19] Hajnal András, Hamburger Péter. *Halmazelmélet.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[20] Révai testvérek. A PALLAS NAGY LEXIKONA *az összes ismeretek enciklopédiája.* Pallas irodalmi s nyomdai részvénytársaság, Budapest, 1897.

[21] *Új Magyar Lexikon.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1962.

[22] *The New Encyclopædia Britannica.* 15th edition. Encyclopædia Britannica Inc., Chicago, 1974.