# Kvázilineáris elliptikus egyenletek megoldásairól

**Bozi Imre**
ELTE-TTK matematikus szak
Témavezető: Karátson János

2002 június

# Tartalomjegyzék

# Előszó

Ebben a dolgozatban a következő, úgynevezett kvázilineáris Dirichlet-féle peremérték-problémával foglalkozunk.

$$\left.\begin{aligned}&(\phi_p(u'))' + f(t,u) = 0\\&u(a) = u(b) = 0\end{aligned}\right\}\qquad (P),$$

ahol $\phi_p(s) := |s|^{p-2} \cdot s$, ha $s \neq 0$, $\phi_p(s) := 0$, ha $s = 0$; és feltesszük, hogy $p > 1$. Ilyen típusú egyenletek megoldásszámára szeretnénk részleges diszkussziót nyerni. Végig ebben a dolgozatban megoldáson olyan $u$ függvényt értünk, amely a nyílt $(a,b)$ intervallumon pozitív, ezért amikor megoldásról beszélünk, vagy pozitív megoldásról, akkor mindig $(a,b)$-n pozitív megoldásra gondolunk. A dolgozatban majd pontosítjuk, hogy $f$-re milyen feltételeket kötünk ki, illetve, hogy az $u$ függvényt milyen függvénytérben keressük. Látni fogjuk, hogy a probléma matematikailag sokrétű eszközökkel kezelhető, lesznek könnyebbek és nehezebbek. A megoldásszám becslésére alkalmazott egyik módszerünk egy mély funkcionálanalízisbeli eszközre: a Leray-Schauder degree fogalmára, a másik pedig elemi számolásokra épül: a time-map tulajdonságaiból következtetünk a megoldásszámra. Ugyanakkor az elemi time-mapes eredményeinket fel fogjuk használni a nehezebb számolásokat igénylő degree-s okoskodásnál. Látni fogjuk, hogy a degree-vel egy végtelen sok megoldás létezését garantáló tételt tudunk bizonyítani, míg a time-map segítségével az általunk vizsgált esetekben véges sok megoldást tudunk igazolni.

Megemlítjük, hogy az ilyen típusú egyenletek megfelelő magasabb dimenziós általánosításai– amikor adott egy $B \subset \mathbb{R}^n$ gömb, az n-dimenziós p-Laplace operátor: $\Delta_p(u) = div(|\nabla|^{p-2}(u)\nabla(u))$, és a $\Delta_p(u) + f(t,u) = 0$ egyenlet olyan megoldásait keressük, amelyek a gömb belsejében pozitívak, a peremén pedig eltűnnek– több fizikai modellben is előfordulnak, például klimatológiában, asztrofizikában. Ilyen típusú egyenletekkel írhatók le a földfelszín hőmérsékletének egyensúlyi állapotai egy bizonyos modellben. A dolgozat a következőképpen épül fel:

Az első fejezetben bevezetjük a Leray-Schauder degree fogalmát, amely alapvető segédeszköz lesz a dolgozat további részében. Az első fejezet eredményei a [3] könyvre épülnek.

A második fejezetben definiáljuk a time-mapet, elemi egyenlőtlenségeket igazolunk rá, majd bizonyos speciális esetekben teljes klasszifikációt nyerünk a megoldásszámra. Ezeknél a számolásoknál végig feltesszük, hogy az $f$ függvény nem függ $t$-től, azaz az alapegyenlet autonóm.

A harmadik fejezetben a degree segítségével igazolunk egy megoldásszámra vonatkozó eredményt, melyben azt igazoljuk, hogy bizonyos feltételek mellett meg lehet mutatni végtelen sok megoldás létezését.

A negyedik fejezetben egy saját alkalmazásomat írom le, amelyben egy speciális $f$ függvény esetén a time-map monotonitása és konvexitása alapján arra lehet következtetni, hogy előfordulhat 0,1,2 megoldás az intervallum méretétől függően. Ez egy olyan típusú probléma lesz, amelyre a második fejezetben leírt klasszifikációs tételek nem adnak választ. Ebben a részben feltesszük, hogy a megoldást egy origóra szimmetrikus $[-R, R]$ intervallumon keressük, és itt is autonóm egyenletet vizsgálunk.

Végül tisztázunk néhány jelölést, amelyeket a dolgozatban használunk.

$\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$,

$\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$,

$\overline{\mathbb{R}_+} := [0, \infty]$,

$\mathbb{N}$ jelölje a természetes számok halmazát a 0-t kihagyva.

$B(0, R)$ jelölje adott normált térben a 0 középpontú $R$ sugarú nyílt gömböt.

# 1. fejezet

# A degree definíciója és alaptulajdonságai

Ebben a fejezetben megadjuk a Leray-Schauder degree fogalmát, amely a negyedik fejezetben leírt tételnél lesz egy alapvető segédeszköz. Először definiáljuk $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvények Brouwer-degree-jét, majd ezt kiterjesztjük tetszőleges Banach-térből ugyanabba a Banach-térbe képező függvényekre. Az egyszerűség kedvéért itt végig elhagyjuk a degree jelzőjét és a Brouwer-degree-t, a Leray-Schauder degree-t röviden degree-nek nevezzük, illetve használni fogjuk szinonímaként a fok kifejezést is.

## 1.1. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény foka

Vezessük be az alábbi jelöléseket: Legyen $C$ az $\mathbb{R}^n$ zárt részhalmazain értelmezett $\mathbb{R}^n$-be képező folytonos függvények halmaza, azaz

$$C := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid \mathcal{D}_f \text{ zárt és } f \text{ folytonos}\}.$$

Legyen továbbá $\mathcal{G}_n$ az $\mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmazainak halmaza, és

$$\mathcal{M} := \left\{(F, U, y) \in C \times \mathcal{G}_n \times \mathbb{R}^n \;\middle|\; F : \overline{U} \to \mathbb{R}^n \text{ folytonos}, \forall\, x \in \partial U : \;\; F(x) \neq y\right\}.$$

Olyan $d : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ leképezést keresünk, amely kielégíti az alábbi axiómákat.

**(A1)**

$$d(I, U, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } y \in U \\ 0 & \text{ha } y \notin \overline{U}, \end{cases}$$

ahol $I = id_{\mathbb{R}^n}$ az $\mathbb{R}^n$ identikus függvénye.

**(A2)**

$$d(F, U, y) \neq 0 \Longrightarrow \exists x \in U, \text{amelyre } F(x) = y.$$

**(A3)** Legyenek $U_i \subset U, (1 \leqslant i \leqslant m)$ diszjunkt nyílt halmazok, amelyekre $\bigcup\limits_{i=1}^{m} (\overline{U_i}) = \overline{U}$ és bármely $x \in \partial U_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ esetén $F(x) \neq y$. Ekkor

$$d(F, U, y) = \sum_{i=1}^{m} d(F, U_i, y).$$

**(A4)** Legyen $H : \overline{U} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ folytonos és $H(x,t) \neq y$ bármely $x \in \partial U$, és $t \in [0,1]$ esetén. Ekkor

$$t \mapsto d(H(\cdot,t), U, y)$$

konstans függvény.

Belátható, hogy létezik pontosan egy olyan $d : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ leképezés, amelyik kielégíti ezeket az axiómákat, ezt nevezzük egy $\mathcal{M}$ -beli $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény fokának.

## 1.2. Banach-térből Banach-térbe képező függvény foka

Most röviden vázoljuk, hogy miként lehet a most bevezetett degree-fogalmat kiterjeszteni Banach-térből ugyanabba a Banach-térbe képező függvényekre. Megmutatható, hogy ebben az esetben a degree értelmezési tartományát le kell szűkíteni, mert ekkor a folytonosság már nem elegendő, szükségünk van a kompakt függvény fogalmára.

**1.1. Definíció.** Ha $X$ és $Y$ Banach-terek, akkor egy $f : X \to Y$ függvényt kompaktnak nevezünk, ha folytonos és bármely $B \subset X$ korlátos halmaz esetén $\overline{f(B)}$ kompakt.

Mivel az $I : X \to X$ identikus operátor csak véges dimenziós estben kompakt, ezért az előző degree fogalom felépítését módosítani kell. Most az $I - f$ alakú függvényeket fogjuk tekinteni, ahol $f$ kompakt. Az ilyen függvények között már ott van az $I : X \to X$ identikus függvény is. Legyen tehát $X$ egy Banach-tér, $C$ pedig az $X$ zárt részhalmazain értelmezett $X$-be képező folytonos függvények halmaza, továbbá $\mathcal{G}_X$ az $X$ korlátos, nyílt halmazainak rendszere. Most

$$\mathcal{M} := \left\{ (I - f, U) \in C \times \mathcal{G}_X \;\middle|\; \mathcal{D}_f = \overline{U}, \overline{f(\overline{U})} \text{ kompakt}, \quad \forall x \in \partial U : \;\; f(x) \neq x \right\}.$$

**1.1. Megjegyzés.** A véges dimenziós esetben $\mathcal{M}$ definíciójában szereplő $y$-nak most 0 felel meg. Az ott szereplő $F(x) = y$ feltétel most az $(I - f)(x) = 0$ feltételbe megy át, azaz az $\mathcal{M}$ halmaz megadásában szereplő $x$-ek pontosan $f$ fixpontjai. Továbbá $f$ pontosan akkor kompakt, ha bármely $U \in \mathcal{G}_X$ esetén $\overline{f(\overline{U})}$ kompakt.

Az axiómákat némileg módosítani kell. Most a következő axiómákat tesszük fel.

**(A1*)**

$$d(I, U) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \in U \\ 0 & \text{ha } 0 \notin U, \end{cases}$$

ahol $I : X \to X$ $X$ identikus függvénye.

**(A2*)**

$$d(I - f, U) \neq 0 \Longrightarrow \exists x \in U, \text{amelyre } (I - f)(x) = 0.$$

**(A3*)** Legyenek $U_i \subset U, (1 \leqslant i \leqslant m)$ diszjunkt nyílt halmazok, amelyekre $\bigcup_{i=1}^{m} (\overline{U_i}) = \overline{U}$ és bármely $x \in \partial U_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ esetén $(I - f)(x) \neq 0$. Ekkor

$$d(I - f, U) = \sum_{i=1}^{m} d(I - f, U_i).$$

**(A4*)** Legyen $H : \overline{U} \times [0,1] \to X$ kompakt és $H(x,t) \neq x$ bármely $x \in \partial U$ és $t \in [0,1]$ esetén. Ekkor

$$t \mapsto d(I - H(\cdot,t), U)$$

konstans függvény.

Belátható, hogy létezik pontosan egy olyan $d : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ leképezés, amelyik kielégíti ezt a négy axiómát, a továbbiakban ezt fogjuk használni. A most bevezetett (A4*) axiómára a degree homotópia-invarianciájaként fogunk hivatkozni. Az

$$(f, U) \mapsto d(I - f, U), \ \ f \quad \text{kompakt}, \ U \in \mathcal{G}_X$$

leképezést fixpont-indexnek is fogjuk nevezni, továbbá az előbbi leképezés alkalmas $F \times \mathcal{G}_X \subset \mathcal{M}$ halmazra való leszűkítését – ahol $F$ az $X \to X$ kompakt függvények halmazának részhalmaza – az $F$-hez tartozó fixpont-indexnek fogjuk nevezni, és $i_F$-fel fogjuk jelölni. Az axiómákból könnyen látszik, hogy a degree teljesíti a következő tulajdonságot:

$$(I - f, U), \ (I - f, V) \in \mathcal{M}, \ \overline{V} \subset U \Longrightarrow d(I - f, U \setminus \overline{V}) = d(I - f, U) - d(I - f, V).$$

Ezt a degree kivágási tulajdonságának fogjuk nevezni.

# 2. fejezet

# A time-map fogalma és alkalmazása a megoldásszám becslésére

Ebben a fejezetben végig a

$$(\phi_p(u'))' + f(u) = 0 \tag{2.1}$$

alakú autonóm egyenlettel foglalkozunk, ahol $p > 1$ és $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Most bizonyos típusú kezdeti érték feladatokhoz hozzárendelünk egy time-mapnek nevezett leképezést, majd a time-mapre – $f$-ről megfelelő simaságot feltételezve – integrálformulás előállítást adunk. Ezután a time-map értelmezési tartományát kibővítjük és ezen a bővebb halmazon az integrálformulás előállítás lesz a time-map értelmezése. A time-mapre igazolunk néhány egyenlőtlenséget, amelyek segítségével bizonyos függvényosztályokra megkapjuk a pontos megoldásszámot, valamint a következő fejezetben is alkalmazzuk őket az ott leírt multiplicitás-eredményben. Látni fogjuk, hogy – az $f$ függvényre tett bizonyos megszorítások mellett, origóra szimmetrikus $[-R, R]$ intervallumon keresve a megoldást – a megoldások száma pontosan megegyezik $T^{-1}(\{R\})$ elemszámával. Ily módon bizonyos esetekben a time-map alakjából, monotonitásából, konvexitásából következtethetünk a megoldásszámra. Tegyük fel, hogy a következő kezdeti feltételek teljesülnek az eredeti (2.1) egyenlőségre

$$u(0) = c, \quad u'(0) = 0.$$

Jelöljük a (2.1) egyenletet és a fenti kezdeti feltételeket együtt a $(\mathcal{T})$ problémának. Később – a time-mapen keresztül – látni fogjuk a kapcsolatot a $(\mathcal{T})$ kezdetiérték probléma és az eredeti peremértékprobléma origóra szimmetrikus intervallumon való megoldásai között. Tegyük fel, hogy az $f$ függvény $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$-beli, amelynek a gyökei izoláltak, azaz – a folytonosság miatt – nem létezik olyan valódi intervallum, amelyen konstans 0. Ekkor belátható (lásd [2]), hogy bármely olyan $[0, R]$ intervallumon, amelyen létezik pozitív megoldás, ott létezik egy egyértelmű minimális globális pozitív megoldás, jelöljük ezt $u(r, c)$-vel. Minden ilyen típusú problémához hozzárendelhetünk egy $T$-vel jelölt time-mapet az alábbi módon (lásd [8, 10, 7]).

**2.1. Definíció.**

$$D(T) := \{c > 0 \mid \exists r > 0 \ \ u(r, c) = 0\}\,; \quad T(c) := \min\{r > 0 \mid u(r, c) = 0\}\,.$$

Látható, hogy a time-map fogalma szemléletesen az, hogy a 0 időpontban a $c$-ből induló megoldás mikor éri el legkorábban ismét a 0-t. Vezessük be a következő jelölést:

$$F(s) := \int_0^s f(u)du. \tag{2.2}$$

Belátható, hogy ha $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, akkor $T$-re teljesül a következő integrálformula:

$$T(c) = c_p \cdot \int_0^c \frac{1}{(F(c) - F(s))^{1/p}} \quad ,$$

ahol $c_p = \frac{1}{(p^*)^{1/p}} = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{1/p}$, és $p^* = \frac{p}{p-1}$ a $p$-hez konjugált szám (ami kielégíti az $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ azonosságot). Most az integrálformulás előállítás segítségével a time-mapet már bővebb függvényosztályon is értelmezhetjük, majd elemi egyenlőtlenségeket bizonyítunk rá, amelyek a továbbiakban fontos segédeszközök lesznek.

## 2.1. A time-mapre vonatkozó elemi egyenlőtlenségek.

Ennek a szakasznak az eredményei nagyrészt az [1] cikk eredményeire támaszkodnak. Tekintsük most a

$$(\phi_p(u'))' + f(u) = 0$$

alakú autonóm egyenletet, ahol $p > 1$, $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, és legyen

$$F(s) = \int_0^s f(u)du.$$

A továbbiakban bármely $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$-beli függvény esetén a megfelelő nagybetűs függvény az előzővel analóg integrálfüggvényt fogja jelölni. Definiáljuk a következő $\mathcal{C}$ halmazt.

$$\mathcal{C} := \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid \exists d_0 = d_0(f) : f(s) > 0, \quad \text{ha} \quad s > d_0 \quad \text{és} \quad \lim_{\infty} F = \infty \right\}.$$

Tekintsük továbbá a $\mathcal{C}$ következő $\mathcal{C}_{\#}$ részhalmazát:

$$\mathcal{C}_{\#} := \{f \in \mathcal{C} \mid d_0(f) = 0\}.$$

Bármely $f \in \mathcal{C}$ esetén definiálhatjuk a következő két time-map függvényt:

$$T_f(x, v) := c_p \cdot \int_v^x \frac{du}{(F(x) - F(u))^{1/p}} \quad , \tag{2.3}$$

$$T_f(x) := 2T_f(x, 0) = 2c_p \cdot \int_0^x \frac{du}{(F(x) - F(u))^{1/p}}. \tag{2.4}$$

Emlékeztetünk arra, hogy itt $c_p = (\frac{p-1}{p})^{1/p}$. A most definiált time-map a fejezet bevezetőjében definiált time-maptől némileg eltér, a most bevezetett time-map az origóra szimmetrikus intervallum esetének felel meg, ennek megfelelően a bevezetőben említett time-mapnek 2-szerese.

**2.1. Megjegyzés.** Világos, hogy létezik olyan $d_1 = d_1(f) \geqslant d_0$, hogy $T_f(x,v)$ és $T_f(x)$ definiált $v \geqslant d_1$ és $x \geqslant v$ esetén.

**2.1. Tétel.** *Legyen $g, h \in \mathcal{C}$ és $k \in \overline{\mathbb{R}_+}$. Ekkor*

*(i)*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} \geqslant k \Longrightarrow \limsup_{x\to\infty} \frac{T_g(x)}{T_h(x)} \leqslant \frac{1}{k^{1/p}} \quad ,$$

*(ii)*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} \leqslant k \Longrightarrow \liminf_{x\to\infty} \frac{T_g(x)}{T_h(x)} \geqslant \frac{1}{k^{1/p}} \quad .$$

A tétel bizonyításához szükségünk van egy lemmára.

**2.1. Lemma.** *Legyen $g \in \mathcal{C}$ és $x, v \geqslant d_1(g)$, $v$ rögzített. Jelölje:*

$$I_g(v,x) := c_p \cdot \int_0^v \frac{du}{(G(x)-G(u))^{1/p}} \quad . \tag{2.5}$$

*Ekkor*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2I_g(v,x)}{T_g(x)} = 0.$$

**Bizonyítás.** Ha $x, v \geqslant d_1(g)$, akkor $\frac{2I_g(v,x)}{T_g(x)} = \frac{1}{1+L(x)}$ , ahol

$$L(x) = \frac{\int_v^x \frac{du}{(G(x)-G(u))^{1/p}}}{\int_0^v \frac{du}{(G(x)-G(u))^{1/p}}} \quad . \tag{2.6}$$

Könnyen látható, hogy

$$\int_v^x \frac{du}{(G(x)-G(u))^{1/p}} > \int_v^x \frac{du}{(G(x)-G(v))^{1/p}} = \frac{x-v}{(G(x)-G(v))^{1/p}}. \tag{2.7}$$

Másrészt, ha $u \in (0,v)$, akkor minden elég nagy $x > v$ esetén

$$0 < \frac{|G(u)|}{G(x)} < \frac{1}{2},$$

és így

$$\int_0^v \frac{du}{(G(x)-G(u))^{1/p}} < \frac{2^{1/p}}{(G(x))^{1/p}} \cdot v. \tag{2.8}$$

(2.6)$-$(2.8)-ból következik, hogy

$$L(x) > \frac{x-v}{2^{1/p} v \left(1 - G(v)/G(x)\right)^{1/p}} \quad .$$

Ezért $\lim\limits_{x\to\infty} L(x) = \infty$, amiből a lemma következik. ∎

**A 2.1. tétel bizonyítása:** Elég belátni az egyik változatot, így csak (i)-t bizonyítjuk. $k = 0$-ra a tétel triviális, így a továbbiakban feltesszük, hogy $k > 0$. Legyen $L \in (0, k)$ tetszőleges. (i) miatt

$$(\exists v = v_L) \quad (\forall x \geqslant v) \quad (g(x) \geqslant h(x) \cdot L),$$

ahol $v_L$ csak a $L$-től függő konstans. Feltehető, hogy $v > \max\{d_1(g), d_1(h)\}$. Így rögtön adódik, hogy

$$(\forall u \in [v, x)) \quad (\; G(x) - G(u) \geqslant L\,(H(x) - H(u)\;)\;),$$

és így

$$(\forall x > v) \quad \left(T_g(x, v) \leqslant \frac{1}{L^{1/p}} \cdot T_h(x, v)\right).$$

(2.3)–(2.5)-ból kapjuk, hogy

$$T_g(x) - 2I_g(v, x) \leqslant \frac{1}{L^{1/p}} \cdot (T_h(x) - 2I_h(v, x)),$$

és így

$$T_g(x) \leqslant \frac{1}{L^{1/p}} T_h(x) + 2I_g(v, x).$$

Ebből és a 2.1. lemmából kapjuk, hogy elég nagy $x$-re

$$\frac{T_g(x)}{T_h(x)} \leqslant \frac{1}{L^{1/p}} \cdot \left(\frac{1}{1 - (2I_g(v, x)/T_g(x))}\right),$$

és így

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{T_g(x)}{T_h(x)} \leqslant \frac{1}{L^{1/p}}. \tag{2.9}$$

Ebből következik, hogy

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{T_g(x)}{T_h(x)} \leqslant \inf\left\{\frac{1}{L^{1/p}} \;\middle|\; 0 < L < k\right\} \Longrightarrow \limsup_{x \to \infty} \frac{T_g(x)}{T_h(x)} \leqslant \frac{1}{k^{1/p}}. \quad \blacksquare$$

Megemlítjük az előbbi tétel egy triviális, ám alkalmazás szempontjából fontos következményét.

**2.1. Következmény.** *Legyen $g, h \in \mathcal{C}$. Ekkor:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{h(x)} = k \Longrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{T_g(x)}{T_h(x)} = \frac{1}{k^{1/p}}.$$

**2.2. Megjegyzés.** Ebből $k = 1$ esetén

$$\lim_{\infty} \frac{g}{h} = 1 \Longrightarrow \lim_{\infty} \frac{T_g}{T_h} = 1.$$

Ezért $T_g(s)$ $s \to \infty$ melletti aszimptotikus becsléséhez elég a $g \in \mathcal{C}_\#$ függvényeket tekinteni. A most következő tételben ilyen függvényekre bizonyítunk becsléseket.

**2.2. Tétel.** *Legyen $g, h \in \mathcal{C}_\#$. Ekkor*

*(i)*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{T_g(x)}{T_h(x)} \leqslant k \Longrightarrow \liminf_{x\to\infty} \frac{G(x)}{H(x)} \geqslant \frac{1}{k^p},$$

*(ii)*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{T_g(x)}{T_h(x)} \geqslant k \Longrightarrow \limsup_{x\to\infty} \frac{G(x)}{H(x)} \leqslant \frac{1}{k^p}.$$

**Bizonyítás.** A $k = 0$ és a $k = \infty$ eset triviális, ezért legyen $k \in \mathbb{R}^+$. Mivel (i)-ből következik (ii), azért csak (i)-t bizonyítjuk. Nyilván elég belátni, hogy bármely $M > k$-ra

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{T_g(x)}{T_h(x)} < M \Longrightarrow \liminf_{x\to\infty} \frac{G(x)}{H(x)} \geqslant \frac{1}{M^p}, \tag{2.10}$$

vagy a vele ekvivalens

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{T_g(x)}{T_h(x)} < 1 \Longrightarrow \liminf_{x\to\infty} \frac{G(x)}{H(x)} \geqslant 1 \tag{2.11}$$

formulát. Ezért csak (2.11)-et igazoljuk.

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{T_g(x)}{T_h(x)} < 1. \tag{2.12}$$

Ebből következik, hogy

$$(\exists c \in \mathbb{R}^+) \quad (\forall x > c) \quad \left( \int_0^x \frac{du}{(G(x) - G(u))^{1/p}} < \int_0^x \frac{du}{(H(x) - H(u))^{1/p}} \right). \tag{2.13}$$

Azt állítjuk, hogy (2.13)-ból következik, hogy létezik olyan $d \in [c, \infty)$, amelyre $g(d) \geqslant h(d)$. Ugyanis, ha ez nem így lenne, akkor bármely $x > c$ esetén $g(x) < h(x)$ teljesülne, és így $\limsup\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} \leqslant 1$ lenne. Ám e kkor a 2.1. tétel (ii) részéből $\liminf\limits_{x\to\infty} \frac{T_g(x)}{T_h(x)} \geqslant 1$ teljesülne, ami viszont ellentmond (2.12)-nek. Vegyük észre, hogy $c = d$ is vehető és így $g(c) \geqslant h(c)$. Most definiáljuk a $\tilde{g}(x)$ függvényt a következőképpen:

$$\tilde{g}(x) :\overset{def}{=} \begin{cases} \max\{g(x), h(x)\} & \text{ha } x \in [0, c] \\ g(x) & \text{ha } c \leqslant x. \end{cases}$$

Ekkor könnyen látható, hogy $\tilde{g}$ folytonos, $\tilde{g}(x) \geqslant g(x)$ bármely $x \in \mathbb{R}_+$ esetén és $x \in [0, c]$ esetén $\tilde{g}(x) \geqslant h(x)$. Ezért teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$\tilde{g}(x) \geqslant g(x) \Longrightarrow \quad \forall x > 0 : \quad \int_0^x \frac{du}{(\tilde{G}(x) - \tilde{G}(u))^{1/p}} \leqslant \int_0^x \frac{du}{(G(x) - G(u))^{1/p}}. \tag{2.14}$$

$$\tilde{g}(x) \geqslant h(x) \Longrightarrow \quad \forall x \in [0, c] : \quad \int_0^x \frac{du}{(\tilde{G}(x) - \tilde{G}(u))^{1/p}} \leqslant \int_0^x \frac{du}{(H(x) - H(u))^{1/p}}. \tag{2.15}$$

(2.13)–(2.15)-ból következik, hogy (2.15) valójában minden $x > 0$-ra teljesül, azaz

$$(\forall x > 0) \quad (T_{\tilde{g}}(x) \leqslant T_h(x)).$$

Most [4] 1.tételének gondolatmenetét követve kapjuk, hogy

$$H(x) \leqslant \tilde{G}(x).$$

Ezért

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\tilde{G}(x)}{H(x)} \geqslant 1. \tag{2.16}$$

Most $\lim\limits_{x\to\infty} G(x) = \infty$-t és $\tilde{G}$ definícióját használva nyerjük, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\tilde{G}(x)}{G(x)} = 1$. Így (2.16)-ból $\liminf\limits_{x\to\infty} \frac{G(x)}{H(x)} \geqslant 1$, amivel a bizonyítás kész. ∎

A 2.2. tételből közvetlenül adódik az alábbi:

**2.2. Következmény.**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{T_g(x)}{T_h(x)} = l \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{G(x)}{H(x)} = \frac{1}{l^p}.$$

A most következő eredményünkben egy fontos speciális esetre nyerünk becsléseket: arra az esetre, amikor a 2.1. tételben szereplő $h$ függvényre $h(x) = a \cdot \phi_p(x)$ teljesül valamely $a > 0$ esetén. Először $T_h$-t számoljuk ki erre az esetre. A definícióból következik, hogy

$$T_h(x) = 2c_p \cdot \int\limits_0^x \frac{du}{\left(a\left(\Phi_p(x) - \Phi_p(u)\right)\right)^{1/p}} \quad ,$$

ahol

$$\Phi_p(s) = \int\limits_0^s \phi_p(u)du = \frac{|s|^p}{p}, s \in \mathbb{R}$$

a már bevezetett jelöléseinkkel összhangban. Ezért

$$T_h(x) = \frac{2c_p p^{1/p}}{a^{1/p}} \cdot \int\limits_0^x \frac{du}{(|x|^p - |u|^p)^{1/p}} \quad .$$

Most alkalmazzuk az $s = \frac{u}{x} \cdot (p-1)^{1/p}$ helyettesítést az integrálban, és használjuk fel $c_p$ definícióját. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\forall x > 0: \quad T_h(x) = \frac{2}{a^{1/p}} \cdot \int\limits_0^{(p-1)^{1/p}} \frac{ds}{\left(1 - \frac{s^p}{(p-1)}\right)^{1/p}} = \frac{\pi_p}{a^{1/p}},$$

ahol a $\pi_p$ konstans a következő:

$$\pi_p := 2 \cdot \int\limits_0^{(p-1)^{1/p}} \frac{ds}{\left(1 - \frac{s^p}{(p-1)}\right)^{1/p}}.$$

Azaz – a most kapott eredményt külön kiemelve –:

$$T_{\phi_p} \equiv \pi_p.$$

Most leírjuk az eddig elmondottak néhány következményét.

**2.3. Következmény.** *Az alábbi implikációk teljesülnek bármely $g \in \mathcal{C}$ és $k \in \overline{\mathbb{R}_+}$ esetén.*

*(i)*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{g(x)}{\phi_p(x)} \geqslant k \Longrightarrow \limsup_{x\to\infty} T_g(x) \leqslant \frac{\pi_p}{k^{1/p}},$$

*(ii)*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{g(x)}{\phi_p(x)} \leqslant k \Longrightarrow \liminf_{x\to\infty} T_g(x) \geqslant \frac{\pi_p}{k^{1/p}},$$

*(iii)*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{\phi_p(x)} = k \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} T_g(x) = \frac{\pi_p}{k^{1/p}},$$

*(iv)*

$$\liminf_{x\to\infty} T_g(x) \geqslant \pi_p k \Longrightarrow \limsup_{x\to\infty} \frac{G(x)}{\Phi_p(x)} \leqslant \frac{1}{k^p},$$

*(v)*

$$\limsup_{x\to\infty} T_g(x) \leqslant \pi_p k \Longrightarrow \liminf_{x\to\infty} \frac{G(x)}{\Phi_p(x)} \geqslant \frac{1}{k^p},$$

*(vi)*

$$\lim_{x\to\infty} T_g(x) = \pi_p k \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{G(x)}{\Phi_p(x)} = \frac{1}{k^p}.$$

*Ha továbbá g folytonosan differenciálható, akkor*

*(vii)*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{(p-1)x^{p-2}} \geqslant k \Longrightarrow \limsup_{x\to\infty} T_g(x) \leqslant \frac{\pi_p}{k^{1/p}},$$

*(viii)*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{(p-1)x^{p-2}} \leqslant k \Longrightarrow \liminf_{x\to\infty} T_g(x) \geqslant \frac{\pi_p}{k^{1/p}}.$$

**Bizonyítás.** (i)$-$(iii) közvetlenül következik a 2.1.tételből és a 2.1. következményből, míg (iv)-(vi) következik a 2.2. tételből és a 2.2. következményből, végül (vii) és (viii) következik (i) és (ii)-ből és az általánosított L'Hospital szabályból (lásd [6] Lemma 4.1). ∎

Mivel láttuk, hogy a time-map aszimptotikus becsléséhez elegendő $\mathcal{C}_\#$-beli függvényekre szorítkozni, azért a most következő eredményünkben feltesszük, hogy $f \in \mathcal{C}_\#$ és $f(0) > 0$. (2.2)-ből azt kapjuk, hogy $F'(x) = f(x) > 0$, ha $x > 0$, ezért $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ diffeomorfizmus, $F^{-1}$ ugyanilyen tulajdonságú. Legyen $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ a következő:

$$w(y) := F^{-1}\left(\frac{y^p}{p}\right), \quad y \in \mathbb{R}_+. \tag{2.17}$$

Ekkor

$$w'(y) = \frac{y^{p-1}}{f(w(y))} = \frac{[pF(w(y))]^{1/p^*}}{f(w(y))}. \tag{2.18}$$

(2.4)-ből az $x := w(y)$ jelölés bevezetésével nyerjük:

$$T_f(x) = T_f(w(y)) = 2 \cdot \int\limits_0^{(p-1)^{1/p}} \frac{w'\left(ys/(p-1)^{1/p}\right) ds}{(1 - s^p/(p-1))^{1/p}}.$$

A következő tételben további becsléseket kapunk, amelyek a time-map és az eredeti $f$ függvény nagyságrendi viszonyát mutatják.

**2.3. Tétel.** *Teljesülnek az alábbi implikációk.*

*(i)*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{p^{1/p^*} F(x)^{1/p^*}}{f(x)} \leqslant k \Longrightarrow \limsup_{x\to\infty} T_f(x) \leqslant k\pi_p,$$

*(ii)*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{p^{1/p^*} F(x)^{1/p^*}}{f(x)} \geqslant k \Longrightarrow \liminf_{x\to\infty} T_f(x) \geqslant k\pi_p.$$

*Ekvivalens módon a $\tilde{k} := \frac{1}{k^{p^*}}$ jelölés bevezetésével (i) és (ii) így írható:*

*(i')*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{(f(x))^{p^*}}{pF(x)} \geqslant \tilde{k} \Longrightarrow \limsup_{x\to\infty} T_f(x) \leqslant \frac{\pi_p}{\tilde{k}^{1/p^*}},$$

*(ii')*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{(f(x))^{p^*}}{pF(x)} \leqslant \tilde{k} \Longrightarrow \liminf_{x\to\infty} T_f(x) \geqslant \frac{\pi_p}{\tilde{k}^{1/p^*}}.$$

**Bizonyítás.** Csak (i)-t bizonyítjuk $k < \infty$ esetén. (i)-ből és (2.18)-ból:

$$\limsup_{s\to\infty} w'(s) \leqslant k.$$

Ekkor

$$(\forall \varepsilon > 0 \ \exists s_e) \quad (\forall s \geqslant s_\varepsilon : w'(s) \leqslant k + \varepsilon).$$

Továbbá

$$\frac{ys}{(p-1)^{1/p}} \geqslant s_\varepsilon \iff s \geqslant \varrho_\varepsilon := \frac{s_\varepsilon (p-1)^{1/p}}{y},$$

és

$$0 < \frac{ys}{(p-1)^{1/p}} \leqslant s_\varepsilon \iff 0 < s \leqslant \varrho_\varepsilon.$$

Ezekből nyerjük, hogy

$$T_f(w(y)) = 2 \cdot (I_1(y) + I_2(y)), \tag{2.19}$$

ahol

$$I_1(y) := \int\limits_0^{\varrho_\varepsilon} \frac{w'\left(ys/(p-1)^{1/p}\right)}{(1 - s^p/(p-1))^{1/p}} ds; \quad I_2(y) := \int\limits_{\varrho_\varepsilon}^{(p-1)^{1/p}} \frac{w'\left(ys/(p-1)^{1/p}\right)}{(1 - s^p/(p-1))^{1/p}} ds.$$

Világos, hogy

$$\lim_{y\to\infty} I_1(y) = 0. \tag{2.20}$$

Továbbá, mivel $I_2(y)$-ban $s \geqslant \varrho_\varepsilon$, nyerjük, hogy

$$w'\left(\frac{y}{(p-1)^{1/p}}\cdot s\right) \leqslant k+\varepsilon.$$

Így

$$I_2(y) \leqslant (k+\varepsilon)\cdot \int_0^{(p-1)^{1/p}} \frac{ds}{\left(1-s^p/\left(p-1\right)\right)^{1/p}} = \left(\frac{k+\varepsilon}{2}\right)\cdot \pi_p$$

elég nagy $y$-ra, mivel

$$\limsup_{y\to\infty} I_2(y) \leqslant \frac{k\pi_p}{2}. \tag{2.21}$$

Végül (2.19)$-$(2.21)-ből nyerjük (i)-t. ■

**2.3. Megjegyzés.** A 2.3. tétel Schaaf (lásd:[9]) $p=2$-re vonatkozó time-mapes becsléseinek kiterjesztése tetszőleges $p>1$-re.

Az alábbi következmény rögtön adódik:

**2.4. Következmény.**

$$l = \lim_{x\to\infty} \frac{pF(x)}{(f(x))^{p^*}} \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} T_f(x) = l^{1/p^*}\cdot \pi_p.$$

Most definiálunk néhány állandót, amelyeket ennek a szakasznak az utolsó tételében használunk.

$$\begin{aligned}
a &:= \liminf_{x\to\infty} \frac{F(x)}{\Phi_p(x)}, \quad & A &:= \limsup_{x\to\infty} \frac{F(x)}{\Phi_p(x)};\\
b &:= \liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\phi_p(x)}, \quad & B &:= \limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\phi_p(x)};\\
c &:= \liminf_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\phi_p'(x)}, \quad & C &:= \limsup_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\phi_p'(x)};\\
d &:= \liminf_{x\to\infty} T_f(x), \quad & D &:= \limsup_{x\to\infty} T_f(x);\\
e &:= \liminf_{x\to\infty} \frac{(f(x))^{p^*}}{pF(x)}, \quad & E &:= \limsup_{x\to\infty} \frac{(f(x))^{p^*}}{pF(x)}.
\end{aligned}$$

**2.4. Tétel.** *A fenti jelölésekkel a következők teljesülnek:*

*(i)*

$$c \leqslant b \leqslant \left(\frac{\pi_p}{D}\right)^p \leqslant a \leqslant A \leqslant \left(\frac{\pi_p}{d}\right)^p \leqslant B \leqslant C.$$

*(ii)*

$$\frac{b}{A^{1/p^*}} \leqslant e^{1/p^*} \leqslant \frac{\pi_p}{D} \leqslant \frac{\pi_p}{d} \leqslant E^{1/p^*} \leqslant \frac{B}{a^{1/p^*}}.$$

*A fentiekkel ekvivalens alakok:*

*(i')*

$$\frac{\pi_p}{C^{1/p}} \leqslant \frac{\pi_p}{B^{1/p}} \leqslant d \leqslant \frac{\pi_p}{A^{1/p}} \leqslant \frac{\pi_p}{a^{1/p}} \leqslant D \leqslant \frac{\pi_p}{b^{1/p}} \leqslant \frac{\pi_p}{c^{1/p}}.$$

*(ii')*

$$\frac{\pi_p}{B} \cdot a^{1/p^*} \leqslant \frac{\pi_p}{E^{1/p^*}} \leqslant d \leqslant D \leqslant \frac{\pi_p}{e^{1/p^*}} \leqslant \frac{\pi_p}{b} \cdot A^{1/p^*}.$$

**Bizonyítás.** (i) bizonyítása: $c \leqslant b$ és $C \leqslant B$ közvetlenül adódik az általánosított L'Hospital szabályból (lásd:[6]Lemma 4.1). $b \leqslant \left(\frac{\pi_p}{D}\right)^p$, $\left(\frac{\pi_p}{d}\right)^p \leqslant B$ pedig azonnal következik a 2.3. következmény (i), illetve (ii) részéből. Végül $\left(\frac{\pi_p}{D}\right)^p \leqslant a$ és $A \leqslant \left(\frac{\pi_p}{d}\right)^p$ azonnal adódik a 2.3. következmény (iv) és (v) részéből.
(ii) bizonyítása: $e^{1/p^*} \leqslant \frac{\pi_p}{D}$ és $\frac{\pi_p}{d} \leqslant E^{1/p}$ a 2.3. tétel (i') és (ii') részéből következik.
$\frac{b}{A^{1/p^*}} \leqslant e^{1/p^*}$ bizonyítása:

$$e = \liminf_{x\to\infty} \frac{(f(x))^{p^*}}{pF(x)} = \liminf_{x\to\infty} \left[\frac{(f(x))^{p^*}}{[\phi_p(x)]^{p^*}} \cdot \frac{\Phi_p(x)}{F(x)}\right] \geqslant$$
$$\geqslant \left(\liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\phi_p(x)}\right)^{p^*} \cdot \frac{1}{\limsup\limits_{x\to\infty} \frac{F(x)}{\Phi_p(x)}} = \frac{b^{p^*}}{A}.$$

Annak igazolása, hogy $E^{1/p^*} \leqslant \frac{B}{a^{1/p^*}}$ teljesen hasonló az előzőhöz, ezt nem részletezzük. ■

## 2.2. $p$-konvex függvényekre vonatkozó eredmények

Ebben a szakaszban végig feltesszük, hogy $p \geqslant 2$, és $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$, majd bevezetjük a $p$-konvex, illetve szigorúan $p$-konvex függvény fogalmát. A megoldásszámra – $f$-ről még több simaságot feltételezve – teljes klasszifikációt nyerünk. Látni fogjuk, hogy legtöbbször véges sok megoldás létezését tudjuk igazolni. Az alapprobléma ebben a szakaszban kicsit más lesz, mint az eddigiekben, mert most a megoldást origóra szimmetrikus intervallumon keressük. Pontosabban most a következő peremértékprobléma megoldásszámára szeretnénk következtetni:

$$\left.\begin{aligned} &(\phi_p(u'))' + f(u) = 0 \\ &u(-R) = u(R) = 0, \quad u > 0(-R,R)\text{-en.} \end{aligned}\right\} \qquad (\mathcal{R})$$

Kezdetben megadjuk az általunk vizsgálni kívánt $p$-konvex függvények definícióját.

**2.2. Definíció.** Legyen $p \geqslant 2$ és $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ olyan függvény, amelynek létezik abszolút minimuma. $f$-et $p$-konvexnek, illetve szigorúan $p$-konvexnek nevezzük, ha bármely $\alpha$ abszolút minimumhelyére teljesül, hogy a

$$k(u) := \frac{f'(u)}{|u-\alpha|^{p-2}}; \quad u \in \mathbb{R}_+, \quad u \neq \alpha$$

függvény monoton növő, illetve szigorúan monoton növő.

**2.4. Megjegyzés.** (1) Könnyen látszik, hogy a (szigorú) 2-konvexitás ekvivalens a (szigorú) konvexitással az olyan $C^1(\mathbb{R}_+)$-beli függvények osztályán belül, amelyeknek létezik abszolút minimuma.

(2) Ha $f$ (szigorúan) $p$-konvex, akkor $f$ (szigorúan) konvex.

(3) Ha $f$ szigorúan $p$-konvex, akkor az $\alpha \in [0, \infty)$ abszolút minimumhelye egyértelmű.

A megoldásszám és a time-map tulajdonságainak kapcsolatát szeretnénk vizsgálni. Ehhez először szükségünk van két halmaz definíciójára.

**2.3. Definíció.**

$$D_- := \left\{ c > 0 \,\middle|\, \exists \varepsilon > 0, \;\; f\big|_{(c-\varepsilon, c)} > 0, \;\; \int\limits_{c-\varepsilon}^{c} \frac{1}{(F(c) - F(s))^{1/p}} < \infty \right\}.$$

$$D_+ := \left\{ c > 0 \,\middle|\, \exists \varepsilon > 0, \;\; f\big|_{(c, c+\varepsilon)} > 0, \;\; \int\limits_{c}^{c+\varepsilon} \frac{1}{(F(c) - F(s))^{1/p}} < \infty \right\}.$$

**2.5. Megjegyzés.** Bebizonyítható, hogy a következők teljesülnek:

$$f(c) > 0 \Longrightarrow c \in D_-, \quad c \notin D_+,$$

$$f(c) < 0 \Longrightarrow c \in D_+, \quad c \notin D_-,$$

$$f(c) = 0 \;\; \text{és} \;\; f \;\; \text{balról lokálisan negatív} \;\; \Longrightarrow c \notin D_-,$$

$$f(c) = 0 \;\; \text{és} \;\; f \;\; \text{jobbról lokálisan pozitív} \;\; \Longrightarrow c \notin D_+.$$

Most kimondunk egy lemmát, amelynek segítségével kapcsolatot teremthetünk a megoldásszám és a time-map között.

**2.2. Lemma.** *Tegyük fel, hogy az $f$ függvény bármely $\beta$ gyökére (amennyiben létezik) teljesül, hogy $\beta \notin D_- \cup D_+$. Ekkor a következő két állítás ekvivalens:*

*(i)*

$$u > 0 \;\; \textit{megoldása} \;\; (\mathcal{R}) - \textit{nek}.$$

*(ii) $u$ szimmetrikus 0-ra és van olyan $c \in D(T)$, amelyre $T(c) = R$ és $u$ minimális pozitív megoldása a $(T)$ problémának.*

**Bizonyítás.** A bizonyítás megtalálható a [2] cikkben. ■

**2.5. Következmény.** *A 2.2. lemma feltételei mellett az $(\mathcal{R})$ probléma megoldásszáma azonos $T^{-1}(\{R\})$ elemszámával. Ezért, amikor azt vizsgáljuk, hogy az $(\mathcal{R})$ problémának $R$-től függően hány megoldása van, akkor a time-map grafikonjáról leolvashatjuk a megoldásszámot: azt kell megvizsgálni, hogy adott $R$ magasságban húzott vízszintes egyenes hányszor metszi $T$ grafikonját.*

Most kimondunk három lemmát bizonyítás nélkül, amelyek a klasszifikációs tételek bizonyításában lesznek alapvető fontosságúak.

**2.3. Lemma.** *Legyen $f \in C^2([0,\infty))$ olyan szigorúan $p$-konvex függvény, amelynek létezik gyöke és $\alpha \geqslant 0$ az abszolút minimumhelye. Ekkor $T$ szigorúan monoton fogyó $D(T) \cap (\alpha, \infty)$-en.*

Most vezessük be a

$$\Pi_p := 2 \cdot \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^p)^{1/p}}$$

jelölést.

**2.6. Megjegyzés.** $\Pi_p = \frac{\pi_p}{(p-1)^{1/p}}$ , és belátható, hogy $\Pi_p = \frac{2\pi}{p \sin \frac{\pi}{p}}$.

**2.4. Lemma.** *Legyen $0 \in \partial D(T)$. Ekkor:*

*(i)*

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = \infty \Longrightarrow \lim_0 T = 0,$$

*(ii)*

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = L \in (0,\infty) \Longrightarrow \lim_0 T = \left(\frac{p-1}{L}\right)^{1/p} \cdot \frac{\Pi_p}{2},$$

*(iii)*

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = 0 \Longrightarrow \lim_0 T = \infty.$$

**2.5. Lemma.** *Egy $c$ pozitív szám pontosan akkor van benne $D(T)$-ben, ha bármely $s \in [0,c]$ esetén a következő két állítás közül az egyik teljesül:*

*(i)* $F(s) < F(c)$,

*(ii)* $F(s) = F(c)$ *és* $s \in (D_- \cup \{0\}) \cap (D_+ \cup \{0\})$.

A következő tételek teljes klasszifikációt adnak bizonyos esetekben. Az első és a második tétel olyan eseteket ír le, amikor egyértelműség teljesül, a harmadik pedig olyat, amikor megsérül az egyértelműség, sőt akár végtelen sok megoldás is létezhet.

**2.5. Tétel.** *Legyen $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ szigorúan $p$-konvex, $f(0) \leqslant 0$, és $\lim_{u \to \infty} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = \infty$. Ekkor*

*(i) Ha $f(0) = 0$ és $\lim_{u \to 0} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = 0$, akkor minden $R > 0$-ra $(\mathcal{R})$-nek létezik pontosan egy megoldása.*

*(ii) Legyen $f(0) = 0$ és $\lim_{u \to 0} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = m \in (0,\infty)$. Legyen továbbá $R_0 := (\frac{p-1}{m})^{1/p} \cdot \frac{\Pi_p}{2}$. Ekkor $(\mathcal{R})-$nek létezik pontosan egy megoldása $R < R_0$-ra és nincs megoldása $R \geqslant R_0$-ra.*

*(iii) Legyen $f(0) = 0$ és $f'(0) < 0$, vagy legyen $f(0) < 0$. Ekkor van olyan $R_1 > 0$, amelyre $(\mathcal{R})-$nek pontosan egy megoldása van $R \leqslant R_1$ esetén és nincs megoldása $R > R_1$-re.*

**Bizonyítás.** Csak röviden vázoljuk a bizonyítást. Belátható, hogy $\infty \in \partial D(T)$. A 2.3. következmény (iii) részéből a tétel $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = \infty$ feltétele miatt tudjuk, hogy $\lim\limits_{\infty} T = 0$.
(i)-(ii): Ekkor triviálisan teljesül, hogy $f'(0) = 0$, ezért $f$ szigorú $p$-konvexitásából és $u > 0$ miatt kapjuk, hogy $f(u) > 0$, ezért $D(T) = (0, \infty)$. A 2.3. lemma miatt $T$ szigorúan monoton fogyó, a 2.4. lemma szerint pedig $\lim\limits_{0} T = \infty$. Ezért ebben az esetben $T$ minden $R > 0$ értéket pontosan egyszer vesz fel, $(\mathcal{R})$ megoldása ekkor tehát egyértelmű bármely $R > 0$-ra. A (ii) eset hasonló, ekkor $\lim\limits_{0} T = R_0$, ezért ekkor $T$ bármely $0 < R < R_0$ értéket pontosan egyszer vesz fel, azaz ilyenkor $(\mathcal{R})$ megoldása $R < R_0$ esetén egyértelmű, és nincs megoldás $R \geqslant R_0$ esetén.
(iii): Ekkor az $F$ integrálfüggvény először szigorúan monoton fogyó, majd szigorúan monoton növő módon tart $\infty$-hez. Így a 2.5. lemma szerint $D(T)$ olyan intervallum, amelynek bal végpontjára $\beta$-ra $F(\beta) > 0$ teljesül, ezért $\beta \in D(T)$. Nyilvánvaló, hogy $\beta > \alpha$, ha $\alpha$ az $f$ függvény abszolút minimumhelye, ezért a 2.3. lemma szerint $T$ szigorúan monoton fogyó a $[\beta, \infty)$ intervallumon. Így a tétel állítása azonnal adódik a $R_1 := T(\beta)$ jelölés bevezetésével. ■

**2.6. Tétel.** *Legyen $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ szigorúan $p$-konvex, $f(0) \leqslant 0$, és $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = L \in (0, \infty)$. Legyen $R_\infty := (\frac{p-1}{L})^{1/p} \cdot \frac{\Pi_p}{2}$. Ekkor:*

- *(i) Ha $f(0) = 0$ és $\lim\limits_{u\to 0} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = 0$, akkor $(\mathcal{R})$-nek nincs megoldása , ha $R \leqslant R_\infty$ és egy megoldása van, ha $R > R_\infty$.*
- *(ii) Legyen $f(0) = 0$ és $\lim\limits_{u\to 0} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = m \in (0, \infty)$. Legyen továbbá $R_0 := (\frac{p-1}{m})^{1/p} \cdot \frac{\Pi_p}{2}$. Ekkor $(\mathcal{R})$-nek nincs megoldása $R \leqslant R_\infty$ , vagy $R \geqslant R_0$ esetén és létezik pontosan egy megoldása, ha $R_\infty < R < R_0$.*
- *(iii) Legyen $f(0) = 0$ és $f'(0) < 0$, vagy legyen $f(0) < 0$. Ekkor van olyan $R_1 > 0$, amelyre $(\mathcal{R})-$nek pontosan egy megoldása van $R_\infty < R \leqslant R_1$ esetén és nincs megoldása, ha $R \leqslant R_\infty$, vagy $R > R_1$.*

**Bizonyítás.** A bizonyítás az előző tétel mintájára történik, most $\lim\limits_{\infty} T = R_\infty$-t használva. ■

A most következő tétel is az előzőhöz hasonló jellegű, de most $f$-ről azt fogjuk feltenni, hogy $f(0) > 0$, és létezik pozitív gyöke. Látni fogjuk, hogy ebben az esetben a megoldások viselkedése eltér az előző két tételben leírtaktól. Most az a jelenség is felléphet, hogy egyes részintervallumokon az $u$ megoldás konstans lesz. Ebben az esetben nem érvényesek a 2.2. lemma feltételei, ekkor a megoldásszám nem egyezik meg $T^{-1}(\{R\})$elemszámával.

**2.7. Tétel.** *Legyen $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ szigorúan $p$-konvex, $f(0) > 0$, és $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = \infty$.*

- *(i) Tegyük fel, hogy $f$-nek létezik egy $\alpha$ gyöke. Ha $\alpha \notin D_-$, akkor $(\mathcal{R})$-nek bármely $R > 0$ esetén pontosan két megoldása létezik. Ha $\alpha \in D_-$, akkor jelölje $R_\alpha := c_p \cdot \int\limits_0^\alpha \frac{1}{(F(\alpha)-F(s))^{1/p}} ds$. Ekkor $(\mathcal{R})$-nek két megoldása van $R < R_\alpha$-ra és egy megoldása van $R \geqslant R_\alpha$-ra.*

(ii) *Tegyük fel, hogy $f$-nek létezik két gyöke, melyekre $\alpha_1 < \alpha_2$. Ekkor létezik pontosan egy olyan $\beta > \alpha_1$, amelyre $F(\alpha_1) = F(\beta)$. Legyen $R^* := T(\beta)$. (Ekkor $R^* > T(\alpha_1)$.) Ha $R \leqslant R^*$, akkor $(\mathcal{R})$-nek megszámlálhatónál több megoldása létezik, amelyek karakterizálhatóak bizonyos módon (lásd: [2] Theorem 3).*

Az itt leírt eredmények a [2] cikkre épültek, itt a további részletek is megtalálhatók. Az előző klasszifikációs tételek nem jellemezték azt az esetet, amikor $f$ szigorúan $p$-konvex, $f(0) > 0$, és $f$-nek nincs gyöke. Erre az esetre még nem ismert a pontos jellemzés a megoldásszámmal kapcsolatban. A 2.2. lemma feltétele ilyenkor nyilván teljesül, hiszen $f$-nek nincs gyöke. Ezért a megoldások száma ilyenkor megadható $T^{-1}(\{R\})$ elemszámával. így a time-map vizsgálatára vezethető vissza a megoldásszám megkeresése. Az utolsó fejezetben jellemezzük egy speciális $f$ szigorúan $p$-konvex függvény esetén a time-map viselkedését, és ebből következtetünk a megoldásszámra. Látjuk majd, hogy a time-map alakja, és így a megoldások száma az előzőektől eltérő tulajdonságokat mutat.

# 3. fejezet

# Egy alkalmazás a maximum-elv és a degree segítségével

Ebben a fejezetben végig a kvázilineáris Dirichlet-féle peremérték problémával foglalkozunk. Eredményeink jórészt az [1] cikkre épülnek.

$$\left.\begin{aligned} &(\phi_p(u'))' + f(t,u) = 0 \\ &u(a) = u(b) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (P),$$

ahol $'$ a $t$ szerinti deriválást jelöli és $(\phi_p(\cdot,\ '))'$ az egydimenziós p-Laplace operátor. $(P)$ olyan $u \in C^1([a,b],\mathbb{R}_+)$ megoldásait keressük, amelyekre $u\big|_{(a,b)} > 0$ , $(\phi_p(u'))'$ abszolút folytonos és u kielégíti $(P)$-t. Az egzisztencia és a megoldások számának meghatározása a célunk. A fejezet első felében egy segédeszközt, a maximum-elv egy általánosított alakját tárgyaljuk, a második részben pedig a fejezet fő eredményét bizonyítjuk, mely egzisztenciatétel és a megoldásszámra is kapunk alsó becslést, legalább megszámlálhatóan végtelen sok megoldás létezését igazoljuk. A bizonyítás vázlata a következő: Tekintsük a

$$\left.\begin{aligned} -(\phi_p(u'))' &= h \\ u(a) = u(b) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (D)$$

problémát, ahol $h \in L^1((a,b),\mathbb{R})$. Olyan $u$ megoldásait keressük $(D)$-nek, amelyekre $u \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, és $\phi_p(u')$ abszolút folytonos. [5] eredményeiből következik, hogy

$$\forall h \in\ L^1((a,b),\mathbb{R})\ \exists!\ u,$$

amely kielégíti $(D)$-t. Ezáltal definiálhatunk egy

$$\mathcal{G} : L^1((a,b),\mathbb{R}) \to C^0([a,b],\mathbb{R})$$

operátort, amelyet úgy értelmezünk, hogy adott $h \in L^1((a,b),\mathbb{R})$ esetén legyen $u = \mathcal{G}(h)$ az egyértelműen létező megoldás. A $\mathcal{G}$ operátor kompakt. Most tekintsük a $(P)$ problémában szereplő $f$ függvényt. Nem nehéz belátni, hogy az $f$-re tett feltétel mellett tudunk definiálni egy

$$\mathcal{F} : C^0([a,b],\mathbb{R}) \to L^1([a,b],\mathbb{R})$$

operátort a következőképpen:

$$\mathcal{F}(u)(t) := f(t,|u(t)|) \quad mm.t \in (a,b) \ \text{ esetén.}$$

Nem nehéz belátni, hogy $\mathcal{F}$ folytonos, és korlátos halmazt korlátos halmazba képez, azért a

$$\mathcal{G}_f := \mathcal{G} \circ \mathcal{F} : C^0([a,b],\mathbb{R}) \to C^0([a,b],\mathbb{R})$$

operátor kompakt. Így a $(P)$ probléma egy (a,b)-n pozitív megoldásának megtalálása egyenértékű a

$$u = \mathcal{G}_f(u)$$

operátor-egyenlet $(a,b)$-n pozitív megoldásainak megtalálásával. A most bevezetett jelölések a fejezet tételeinek leírásában alapvető fontosságúak lesznek, hivatkozás nélkül fogjuk használni őket.

A bizonyítás főbb lépései a következők: Először találunk egy $(\Omega_1, \Omega_2)$ párt, ahol $\Omega_i \subset C^0([a,b],\mathbb{R})$, és $\Omega_i$ korlátos nyílt halmaz a szuprémum norma szerint i=1,2 esetén, amelyekre $0 \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ és a $u = \mathcal{G}_f(u)$ egyenletnek nincs megoldása $u \in \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ esetén. Ahhoz, hogy ezt bebizonyítsuk, a time-mapes becsléseket használjuk a $(P)$ -hez kapcsolódó összehasonlító egyenlőtlenségekre. Majd megbecsüljük $\deg(I - \mathcal{G}_f, \Omega_1, 0)$-t és $\deg(I - \mathcal{G}_f, \Omega_2, 0)$-t és megmutatjuk, hogy különbözőek. Ez a bizonyítás egyik kulcsfontosságú lépése. Az ilyen számolásokban felhasználjuk [4] eredményeit, figyelembe véve a nemlineáris tagra vonatkozó feltevéseket és az általánosabb differenciáloperátort. Végül legalább egy megoldást találunk $\Omega_2 \backslash \Omega_1$-en. Ebből következik a maximum-elven keresztül, hogy $(P)$-nek létezik legalább egy olyan $u$ megoldása, amely pozitív $(a,b)$-n, feltéve, hogy $\Omega_1$ átmérője elég nagy. Ezt a gondolatmenetet követve kapjuk $\left(\Omega_n^{(1)}, \Omega_n^{(2)}\right)$ korlátos, nyílt halmazokból álló pároknak egy sorozatát, amely bizonyítja egy olyan $(u_n)$ sorozat létezését, amelynek minden tagja $(a,b)$-n pozitív megoldását adja $(P)$-nek és $\lim\limits_{n\to\infty} (\max\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n) = \infty$.

## 3.1. A maximum-elv általánosított alakja

Legyen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ páratlan, folytonos, szigorúan monoton növő bijekció. Ekkor persze az inverze is ilyen tulajdonságú. Legyen továbbá $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható függvény, és

$$W(t) = \int_a^t w(s)ds.$$

Legyen $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, $(a,b)$-n differenciálható, továbbá $\varphi(u')$ abszolút folytonos $(a,b)$-n és

$$-(\varphi(u'(t))' \geqslant w(t) \ mm. \ t \in [a,b] \ \text{ esetén}, \tag{3.1}$$
$$u(a) = u(b) = 0. \tag{3.2}$$

**3.1. Lemma.** *(maximum-elv)*
*A fenti feltételek mellett*

$$\|u\|_\infty > (b-a)\varphi^{-1}(2 \cdot \|W\|_\infty) \Longrightarrow \ \forall t \in (a,b) : u(t) > 0.$$

*Speciálisan, ha $w(t) \geqslant 0$ mm. $t \in (a,b)$-re, akkor $u(t) \geqslant 0$ minden $t \in (a,b)$-re. Továbbá, ha $u \not\equiv 0$, akkor $u(t) > 0$ minden $t \in (a,b)$-re.*

**Bizonyítás.** Legyen $\varepsilon > 0$ olyan kicsi, hogy

$$\|u\|_\infty > (b-a)\varphi^{-1}\left(2\cdot\|W\|_\infty + 2\varepsilon\,(b-a)\right) := L$$

és $\widetilde{w}(t) := w(t) - \varepsilon \not\equiv 0$. Jelölje

$$\widetilde{W}(t) := \int_a^t \widetilde{w}(s)ds = W(t) - \varepsilon(t-a),$$

és (3.1)-et írjuk a következő alakba:

$$-[\varphi(u'(t)) + \widetilde{W}(t)]' \geqslant \varepsilon > 0 \ \ mm.\ t \in (a,b).$$

Legyen

$$y(t) \overset{def}{:=} \varphi(u'(t)) + \widetilde{W}(t) \ \ \forall t \in (a,b). \tag{3.3}$$

Így $y$ szigorúan monoton fogyó $(a,b)$-n és

$$u'(t) = \varphi^{-1}\left(y\,(t) - \widetilde{W}\,(t)\right) \ \ \forall t \in (a,b).$$

Legyen $t_0 \in (a,b)$ olyan, hogy $|u(t_0)| = \|u\|_\infty > L$.
Világos, hogy $u'(t_0) = 0$ és így (3.3)-ból azt kapjuk, hogy

$$|y(t_0)| = |\varphi(0) + \widetilde{W}(t_0)| \leqslant \|\widetilde{W}\|_\infty.$$

Legyen $[t_1,t_2] \subset [a,b]$ a maximális olyan részintervallum, amely tartalmazza $t_0$-t és $|y(t)| \leqslant \|\widetilde{W}\|_\infty$ bármely $t \in (t_1,t_2)$ esetén.

$$t \in (t_1,t_2) \Longrightarrow |u'(t)| = \left|\varphi^{-1}\left(y\,(t) - \widetilde{W}\,(t)\right)\right| \leqslant \varphi^{-1}\left(|y(t)| + |\widetilde{W}(t)|\right) \leqslant$$
$$\leqslant \varphi^{-1}\left(\|\widetilde{W}\|_\infty + \|\widetilde{W}\|_\infty\right) = \varphi^{-1}\left(2\cdot\|\widetilde{W}\|_\infty\right).$$

Így azt kapjuk, hogy

$$\|u\|_\infty = |u(t_0)| \leqslant |u(t)| + \left|\int_t^{t_0} u'(s)ds\right| \leqslant |u(t)| + (b-a)\cdot\varphi^{-1}(2\cdot\|\widetilde{W}\|_\infty) \leqslant$$
$$\leqslant |u(t)| + (b-a)\varphi^{-1}(2\cdot\|W\|_\infty + 2\varepsilon(b-a)) = |u(t)| + L \Longrightarrow |u(t)| \geqslant \|u\|_\infty - L \ \ \forall t \in (t_1,t_2).$$

Most $u$ folytonosságát felhasználva

$$|u(t)| \geqslant \|u\|_\infty - L \qquad \forall t \in [t_1,t_2]. \tag{3.4}$$

Mivel $u(a) = u(b) = 0$ , azért (3.4)-ből kapjuk, hogy $a < t_1 \leqslant t_2 < b$ és $[t_1,t_2]$ maximalitását felhasználva kapjuk, hogy

$$y(t) > \|\widetilde{W}\|_\infty \qquad \forall t \in (a,t_1), \tag{3.5}$$

$$y(t_1) = \|\widetilde{W}\|_\infty, \quad |y(t)| < \|\widetilde{W}\|_\infty \qquad \forall t \in (t_1,t_2),\ y(t_2) = -\|\widetilde{W}\|_\infty \tag{3.6}$$

$$y(t) < -\|\widetilde{W}\|_\infty \qquad \forall t \in (t_2,b), \tag{3.7}$$

(ahol $u\big|_{(a,b)}$ szigorú növekedését is használtuk).
(3.5)-ből kapjuk, hogy

$$u'(t) = \varphi^{-1}(y(t) - \widetilde{W}(t)) \geqslant \varphi^{-1}(y(t) - \|\widetilde{W}\|_\infty) > 0 \qquad \forall t \in (a, t_1),$$

és (3.7)-ből $u'(t) < 0$ minden $t \in (t_2, b)$-re. Ezt és $u$ folytonosságát felhasználva $u$ szigorúan növő $[a, t_1]$-en és $u$ szigorúan fogyó $[t_2, b]$-n. Tehát

$$\left.\begin{array}{l} u : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ folytonos,} \\ u(a) = 0 \\ u\big|_{[a,t_1]} \text{ szigorúan növő} \\ |u(t)| > 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2] \\ u\big|_{[t_2,b]} \text{szigorúan fogyó} \\ u(b) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow u(t) > 0 \quad \forall t \in (a,b).$$

**3.1. Megjegyzés.** Nem nehéz belátni, hogy $\varphi$ páratlansága elhagyható. $\varphi(0) = 0$ elegendő annak bizonyításához, hogy

$$\|u\|_\infty > (b-a) \cdot \max\left\{\varphi^{-1}\left(2\|W\|_\infty\right),\ \left|\varphi^{-1}\left(-2\|W\|_\infty\right)\right|\right\}.$$

A 3.1. lemma bizonyításából $u$-ra több információt is nyerhetünk, ez következik most.

**3.2. Lemma.** *Legyen $u$ a (3.1) és (3.2) megoldása. Ekkor minden $M \geqslant \|W\|_\infty$ esetén igaz, hogy*

$$\forall t \in \mathcal{A}_M := \{s \in (a,b) \mid u(s) < \|u\|_\infty - K_M\} \text{ esetén:}$$
$$\|u\|_\infty > K_M := (b-a) \cdot \varphi^{-1}(2M) \Longrightarrow |u'(t)| > \varphi^{-1}(M - \|W\|_\infty).$$

**Bizonyítás.** Legyen $\|u\|_\infty > K_M$. A 3.1. lemmából tudjuk, hogy $u(t) > 0$ minden $t \in (a,b)$-re. Továbbá $y(t) := \varphi(u'(t)) + W(t)$ monoton fogyó. Legyen $t_0 \in (a,b)$ olyan, hogy $u(t_0) = u_{\max} > K_M$, és jelölje $[\tau_M, \sigma_M] \subset [a,b]$ a maximális olyan részintervallumot, amely tartalmazza $t_0$-t és $|y(t)| \leqslant M$ minden $t \in [\tau_M, \sigma_M]$-re. $t \in (\tau_M, \sigma_M)$-re ugyanúgy okoskodva, mint előbb, kapjuk, hogy

$$|u'(t)| \leqslant \varphi^{-1}(2M), \text{ így } u(t) > u_{\max} - K_M \qquad \forall t \in (\tau_M, \sigma_M),$$

és így $u(t) \geqslant u_{\max} - K_M$ minden olyan $t \in (\tau_M, \sigma_M)$ esetén, amelyre $[\tau_M, \sigma_M] \subset (a,b)$. $[\tau_M, \sigma_M]$ maximalitásából következik, hogy $|y(t)| > M$ bármely $t \in (a,b) \setminus [\tau_M, \sigma_M]$ esetén. Speciálisan $y(t) > M$ $(a, \tau_M)$-en, $y(t) < -M$ $(\sigma_M, b)$-n. Használva, hogy $|u'(t)| = |\varphi'(y(t) - W(t))| > \varphi^{-1}(M - \|W\|_\infty)$ minden $t \in (a, \tau_M) \cup (\sigma_M, b)$-re, és

$$(a, \tau_M) \cup (\sigma_M, b) \supset \{t \in (a,b) \mid u(t) < u_{\max} - K_M\},$$

azért a bizonyítás kész. ∎

**3.3. Lemma.** *Legyen $u$ a (3.1) és (3.2) olyan megoldása, hogy $\|u\|_\infty > (b-a)\varphi^{-1}(2M) = K_M$ valamely $M \geqslant \|W\|_\infty$-re, és tegyük fel, hogy $w(t) > 0$ mm. $t \in \mathcal{B}_M$ esetén, ahol*

$$\mathcal{B}_M := \{s \in (a,b) \mid \|u\|_\infty - K_M \leqslant u(s) \leqslant \|u\|_\infty\}.$$

*Ekkor létezik pontosan egy olyan $t^* \in (a,b)$, amelyre $u(t^*) = \|u\|_\infty$, továbbá $u'(t) \neq 0$ minden $t \in (a,b) \setminus \{t^*\}$ esetén.*

**Bizonyítás.** A 3.1. és a 3.2. lemma jelöléseit használva legyen $(a, \gamma_M^-)$ a maximális olyan $(a, t)$ intervallum, hogy
$$\forall s \in (a,t) : u'(s) > 0,$$
$(\gamma_M^+, b)$ pedig a maximális olyan $(t, b)$ intervallum, amelyre
$$\forall s \in (t,b) : u'(s) < 0.$$
A 3.2. lemmából $(a, \tau_M) \subset (a, \gamma_M^-)$ és $(\sigma_M, b) \subset (\gamma_M^+, b)$.
Így
$$[\gamma_M^-, \gamma_M^+] \subset [\tau_M, \sigma_M] \subset \mathcal{B}_M \qquad \text{és} \qquad |u'(t)| > 0 \quad \forall t \in (a,b) \setminus [\gamma_M^-, \gamma_M^+].$$
Jelölje $\tilde{t} := \max\{s \in (a,b) \mid u(s) = \|u\|_\infty\}$. Világos, hogy $\tilde{t} \in [\gamma_M^-, \gamma_M^+]$ és $u'(\tilde{t}) = 0$. Tekintsük az $y(t) = \varphi(u'(t)) + W(t)$ monoton fogyó függvényt. Az előzőekből azt kapjuk, hogy $\gamma_M^- \leqslant t \leqslant \tilde{t}$ esetén
$$\varphi(u'(t)) + W(t) \geqslant \varphi(u'(t)) + W\left(\tilde{t}\right) = \varphi(0) + W(\tilde{t}) = W\left(\tilde{t}\right).$$
és így
$$u'(t) \geqslant \varphi^{-1}\left(\int_t^{\tilde{t}} w(s)ds\right).$$
Továbbá
$$w\big|_{\mathcal{B}_M} > 0 \Longrightarrow u'(t) > 0 \quad \gamma_M^- \leqslant t < \tilde{t}\text{-re}.$$
A $(0, \gamma_M^-)$ intervallum maximalitásából $\tilde{t} = \gamma_M^-$. Teljesen hasonlóan a
$$\hat{t} = \min\{s \in (a,b) \mid \|u\|_\infty = u(s)\}$$
jelölés bevezetésével kapjuk, hogy $\hat{t} = \gamma_M^+$. Ezért
$$\tilde{t} \geqslant \hat{t} \Longrightarrow \gamma_M^- = \tilde{t} = \hat{t} = \gamma_M^+,$$
amiből a lemma következik. ■

## 3.2. A fő eredmény

Ebben a részben bebizonyítjuk a fejezet főtételét, amelyben a tétel feltevései mellett végtelen sok megoldás létezését tudjuk garantálni. A tétel kimondása előtt bevezetünk egy definíciót.

**3.1. Definíció.** Egy $f : [a,b] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ függvényt $L^1$-Caratheodory-függvénynek nevezünk, ha $f(t, \cdot)$ folytonos mm. $t \in [a,b]$-re, $f(\cdot, u)$ folytonos mm. $t \in [a,b]$-re, $f(\cdot, u)$ mérhető bármely $u \in \mathbb{R}_+$-ra, és minden $\varrho > 0$-hoz létezik olyan $h_\varrho \in L^1((a,b), \mathbb{R}_+)$, hogy $|f(t,u)| \leqslant h_\varrho(t)$ minden $u \in [0, \varrho]$ és mm. $t \in [a,b]$-re.

Ennek a fejezetnek a fő célja a következő tétel bizonyítása:

**3.1. Tétel.** *Legyen* $f : [a,b] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *egy* $L^1$*-Caratheodory-függvény. Tegyük fel, hogy* $g, h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *két folytonos függvény, amelyekre* $g(s) > 0,\ h(s) > 0$*, ha* $s$ *elég nagy és* $G(s) \to \infty,\ H(s) \to \infty$*, ha* $s \to \infty$*, ahol*

$$G(s) := \int_0^s g(u)du \qquad \text{és} \qquad H(s) := \int_0^s h(u)du.$$

*Legyen* $d > 0$ *olyan, hogy*

$$g(s) \leqslant f(t,s) \leqslant h(s) \ \ mm.\ t \in [a,b] \ \text{ és } \forall s \geqslant d. \tag{3.8}$$

*Végül tegyük fel, hogy*

$$\liminf_{s\to\infty} T_g(s) < b - a < \limsup_{s\to\infty} T_h(s). \tag{3.9}$$

*Ekkor a*

$$\left.\begin{aligned} &(\phi_p(u'))' + f(t,u) = 0 \\ &u(a) = u(b) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{P}$$

*problémának létezik egy olyan* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *megoldássorozata, amelyre* $u_n(t) > 0$ *minden* $t \in (a,b)$*-re, és* $\lim\limits_{n\to\infty} (\max u_n) = \infty$.

**3.2. Megjegyzés.** A tétel (3.9) feltétele teljesül például akkor, ha $g = d \cdot \phi_p$ – ekkor láttuk, hogy $T_g(x) = 2c_p \cdot \frac{1}{d^{1}/p}$ – és bármely $s \in \mathbb{R}_+$ esetén $2c_p \cdot \frac{1}{d^{1}/p} < b - a < T_h(s)$.

Végig ebben a részben legyen

$$X := \left\{ x \in C^0([a,b],\mathbb{R}) \mid x(a) = x(b) = 0 \right\}.$$

$\mathcal{P} \subset X$ jelölje az $(a,b)$-n pozitív függvények halmazát. A 3.1. tétel bizonyítása előtt bebizonyítunk egy lemmát. Legyen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ folytonos és tekintsük az alábbi problémát:

$$\left.\begin{aligned} &(\phi_p(u'))' + h(u) = 0 \\ &u(a) = u(b) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Ez a probléma ekvivalens az

$$u = \mathcal{G}_h(u) \tag{3.10}$$

egyenlettel, ahol $\mathcal{G}_h : X \to X$ az előszóban definiált kompakt operátor. Továbbá a maximum-elvből $\mathcal{G}_h(X) \subset \mathcal{P}$.

**3.4. Lemma.** *Legyen* $R > 0$ *és* $\Omega = B(0,R) \subset X$*. Ekkor:*

*(i)*

$$T_h(R) > b - a \Longrightarrow deg(I - \mathcal{G}_h, \Omega, 0) = 1,$$

*(ii)*

$$T_h(R) < b - a \Longrightarrow deg(I - \mathcal{G}_h, \Omega, 0) = 0.$$

**3.3. Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy $\deg(I-\mathcal{G}_h,\Omega,0)=i_{\mathcal{P}}(\mathcal{G}_h\big|_{\mathcal{P}},\Omega\cap\mathcal{P})$, ahol $i_{\mathcal{P}}$ a $\mathcal{P}$-hez tartozó fixpont-index.

**Bizonyítás.** (i) Vegyünk egy $\lambda\in[0,1]$ számot és tekintsük a

$$\left.\begin{aligned}&(\phi_p(u'))'+\lambda h(u)=0\\&u(a)=u(b)=0\end{aligned}\right\}\qquad (P_{\lambda h})$$

problémát. Világos, hogy $(P_{\lambda h})$ ekvivalens a következővel:

$$u=\mathcal{G}_{\lambda h}(u)=\lambda^{p^*-1}\mathcal{G}_h(u),\tag{3.11}$$

ahol $\mathcal{G}_{\lambda h}:[0,1]\times X\to X$ kompakt. Azt állítjuk, hogy $\deg(I-\mathcal{G}_{\lambda h},\Omega,0)$ jól definiált. Tegyük fel, hogy nem, ekkor létezik olyan $(\lambda^*,u^*)$ pár, amely (3.11)-et kielégíti, $\lambda^*>0$ és $\|u^*\|_\infty=R$. A maximum-elvből következik, hogy $u^*_{\max}=R$ és $u^*\big|_{(a,b)}>0$. Észrevéve, hogy

$$0<\lambda h(s)\leqslant h(s)\quad \forall\lambda\in(0,1],\ \forall s\in\mathbb{R}^+\text{ esetén,}$$

a time-map tulajdonságaiból kapjuk, hogy

$$b-a=T_{\lambda^*h}(R)\geqslant T_h(R)>b-a,$$

ami ellentmondás, tehát $\deg(I-\mathcal{G}_{\lambda h},\Omega,0)$ jól definiált. A degree homotópia-invarianciájából következik, hogy

$$\deg(I-\mathcal{G}_h,\Omega,0)=\deg(I,\Omega,0)=1.$$

(ii) Legyen $k>0$ olyan fix konstans, amelyre a $T_{k\Phi_p}$ time-map kielégíti a

$$T_{k\phi_p}(s)<b-a\quad\forall s\in\mathbb{R}^+\tag{3.12}$$

egyenlőtlenséget. Emlékezzünk arra, hogy $T_{k\phi_p}$ konstans $\mathbb{R}^+$-on. Válasszunk egy nagy $L>0$ konstansot, amelyre

$$k\phi_p(s)+L>h(s)\quad\forall s\in[0,R].$$

$$\hat h(s):=\max\{k\phi_p(s)+L,\ h(s)\}\quad s\in\mathbb{R}_+\text{-ra,}$$

és legyen $h^*:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ tetszőleges olyan folytonos függvény, amelyre

$$h^*(\lambda,s)=\lambda\hat h(s)+(1-\lambda)h(s)\quad\forall s\geqslant 0.$$

Kapjuk, hogy

$$h^*(\lambda,s)\geqslant h(s)\quad\forall\lambda\in[0,1]\quad\forall s\in[0,\infty).$$

Így

$$T_{h^*(\lambda,\cdot)}(s)\leqslant T_h(s)\quad\forall s\in\mathbb{R}^+.\tag{3.13}$$

Tekintsük a

$$\left.\begin{aligned}&(\phi_p(u'))'+h^*(\lambda,u)=0\\&u(a)=u(b)=0\end{aligned}\right\}\qquad (P_{h^*})$$

problémát. Világos, hogy $(P_{h^*})$ ekvivalens az $u = \mathcal{G}_{h^*}(\lambda, u)$ egyenlőséggel, ahol

$$\mathcal{G}_{h^*} : [0,1] \times X \to X$$

kompakt. Azt állítjuk, hogy $\deg(I - \mathcal{G}_{h^*}(\lambda, \cdot), \Omega, 0)$ jól definiált. Ugyanis, ha nem lenne az, akkor létezne olyan $(\lambda^*, u^*) \in [0,1] \times \partial\Omega$ pár, amely kielégíti $(P_{h^*})-$ot. Ekkor a maximum-elvből $\|u^*\|_\infty = u^*_{\max} = R$,

$$u^*\big|_{(a,b)} > 0 \quad \text{és} \quad T_h(u^*_{\max}) < b - a = T_{h^*(\lambda^*,\cdot)}(u^*_{\max}),$$

ami ellentmond (3.13)-nek, így $\deg(I - \mathcal{G}_{h^*}(\lambda, \cdot), \Omega, 0)$ jól definiált.
Most a degree homotópia-invarianciájából

$$\deg(I - \mathcal{G}_{h^*}(0, \cdot), \Omega, 0) = \deg(I - \mathcal{G}_{h^*}(1, \cdot), \Omega, 0),$$

amiből következik, hogy

$$\deg(I - \mathcal{G}_h, \Omega, 0) = \deg(I - \mathcal{G}_{h^*}(1, \cdot), \Omega, 0). \tag{3.14}$$

Azt kellene belátnunk, hogy (3.14) jobb oldala 0. Tegyük fel ugyanis, hogy nem 0, ekkor létezik olyan $u \in \Omega$, amelyre

$$\left.\begin{aligned} &(\phi_p(u'))' + \hat{h}(u) = 0 \\ &u(a) = u(b) = 0. \end{aligned}\right\}$$

A maximum-elvből és $u \in \Omega-$t használva kapjuk, hogy

$$0 < u(t) < R \quad \forall t \in (a,b).$$

Ekkor $\hat{h}(u(t)) = k\phi_p(u(t)) + L$ és így $u$ kielégíti a

$$\left.\begin{aligned} &(\phi_p(u'))' + \hat{h}(u) = 0 \\ &u(a) = u(b) = 0 \quad u\big|_{(a,b)} > 0 \\ &\max u < R \end{aligned}\right\}$$

rendszert. Így $b - a = T_{\hat{h}}(u_{\max})$.
De: $\hat{h}(s) > k\phi_p(s)$ minden $s \in \mathbb{R}^+-$ra. Ezért

$$T_{\hat{h}}(u_{\max}) < T_{k\phi_p}(u_{\max}),$$

amiből következik, hogy $b - a < T_{k\phi_p}(u_{\max})$, ez ellentmond (3.12)-nek. ■

**A 3.1. tétel bizonyítása**
Feltehető, hogy $g(s) > 0$ és $h(s) > 0$ minden $s \geqslant 0-$ra, mert a time-map aszimptotikus viselkedése nem függ a kompakt intervallumokon való viselkedésétől. Vegyük észre, hogy (3.9)-ból találhatunk két pozitív számot, $\varepsilon_0$-t és $\varepsilon_1$-et és két szigorúan monoton növő sorozatot, $(R_n)$-et és $(S_n)$-et, amelyekre $\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, $R_n \in (S_n, S_{n+1})$, ha $n \in \mathbb{N}$, és a következő két tulajdonság teljesül:

$$T_h(R_n) > (b-a) + \varepsilon_0 \tag{3.15}$$

$$T_g(S_n) < (b-a) - \varepsilon_1, \tag{3.16}$$

és jelölje

$$\Omega_n^{(1)} := \{u \in X \mid \|u\|_\infty < R_n\}$$

és

$$\Omega_n^{(-1)} := \{u \in X \mid \|u\|_\infty < S_n\}.$$

$\Omega_n^{(1)}$, $\Omega_n^{(-1)}$ korlátos halmazok $X$-ben és

$$0 \in \Omega_n^{(-1)} \subset \Omega_n^{(1)} \subset \Omega_{n+1}^{(-1)} \subset \Omega_{n+1}^{(1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(3.15)-ből és a 3.4. lemmából következik, hogy

$$\deg(I - \mathcal{G}_h, \Omega_n^{(1)}, 0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

(3.16)-ből és a 3.4. lemmából

$$\deg(I - \mathcal{G}_g, \Omega_n^{(-1)}, 0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.18}$$

ahol $\mathcal{G}_g$ a megfelelő kompakt operátor (3.10)-ban, és ahol az utóbbi egyenlőségben az $(A)$ problémában szereplő $h$-t kicseréltük $g$-re. Most legyenek

$$f_e(t,s) := f(t,|s|)$$

$$\hat{f}(t,s,\lambda) := (1-\lambda^2)\cdot f_e(t,s) + \frac{\lambda^2(1-\lambda)}{2}g(s) + \frac{\lambda^2(1+\lambda)}{2}h(s).$$

Megjegyezzük, hogy $\hat{f}(t,s,1) = h(s)$, $\hat{f}(t,s,-1) = g(s)$, $\hat{f}(t,s,0) = f_e(t,s)$, továbbá

$$g(s) \leqslant \hat{f}(t,s,\lambda) \leqslant h(s) \quad \forall s : |s| \geqslant d, \;\; mm.\ t \in (a,b) \text{ esetén}$$

elég nagy $d$-re. Tekintsük a következő peremértékproblémát $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$ esetén:

$$\left.\begin{aligned} &(\phi_p(u'))' + \hat{f}(t,u,\lambda) = 0 \\ &u(a) = u(b) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{$P_{\hat{f}}$}$$

A $(P_{\hat{f}})$ probléma $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$ esetén ekvivalens módon átírható az

$$u = \mathcal{G}_{\hat{f}}(\lambda, u)$$

alakba, ahol

$$\mathcal{G}_{\hat{f}} : [-1,1] \times X \to X$$

kompakt operátor. Vegyük észre, hogy

$$\mathcal{G}_{\hat{f}}(1,\cdot) = \mathcal{G}_h(\cdot); \quad \mathcal{G}_{\hat{f}}(-1,\cdot) = \mathcal{G}_g(\cdot); \quad \mathcal{G}_{\hat{f}}(0,\cdot) = \mathcal{G}_{f_e}(\cdot). \tag{3.19}$$

Így (3.18)-(3.19)-ből kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$\deg(I - \mathcal{G}_{\hat{f}}(1,\cdot), \Omega_n^{(1)}, 0) = 1, \tag{3.20}$$

$$\deg\Big(I - \mathcal{G}_{\hat{f}}(-1,\cdot), \Omega_n^{(-1)}, 0\Big) = 0. \tag{3.21}$$

A következő célunk bebizonyítani,hogy $\lambda \in [-1,1]$-re és elég nagy $n \in \mathbb{N}$-re

$$\deg\left(I - \mathcal{G}_{\hat{f}}(\lambda,\cdot), \Omega_n^{(1)}, 0\right), \quad \deg\left(I - \mathcal{G}_{\hat{f}}(\lambda,\cdot), \Omega_n^{(-1)}, 0\right) \tag{3.22}$$

mindegyike definiált. Először jegyezzük meg, hogy $f$ tulajdonságaiból

$$\exists w \in L^1([a,b],\mathbb{R}) : \ \hat{f}(t,s,\lambda) \geqslant w(t) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \ \forall \lambda \in [-1,1], \ mm. \ t \in [a,b].$$

Így $(P_{\hat{f}})$ bármely $u$ megoldására

$$-\left(\phi_p(u'(t))\right)' \geqslant w(t) \quad mm. \ t \in (a,b).$$

A 3.1. lemmának megfelelően definiáljuk $\tilde{R}$-ot a következőképpen:

$$\tilde{R} := (b-a)\phi_{p^*}(2\|W\|_\infty),$$

ahol

$$W(t) = \int_a^t w(s)ds.$$

Jegyezzük meg, hogy $\phi_{p^*} = (\phi_p)^{-1}$. Most legyen $u$ a $(P_{\hat{f}})$ olyan megoldása, amelyre $\|u\|_\infty = R > \max\{d, \tilde{R}\}$ és tegyük fel, hogy $R$ elég nagy, a későbbi gondolatmenetből majd látszani fog, hogy mekkorára érdemes választani $R$-et. Legelőször is a 3.1. lemmából arra következtethetünk, hogy

$$u(t) > 0 \quad \forall t \in (a,b) \quad \text{és} \quad u_{\max} = R.$$

Ezután a 3.2. lemmából könnyen ellenőrizhető, hogy $|u'(t)| > 0$ minden olyan $t \in (a,b)$-re, amelyre $u(t) \leqslant d$ és léteznek olyan $\alpha_r, \ \beta_R$ konstansok, amelyekre $a < \alpha_R < \beta_R < b$ és

$$\begin{gathered}(\forall t \in (a,\alpha_R) \cup (\beta_R,b)) \quad (0 < u(t) < d)\\ u(\alpha_R) = u(\beta_R) = d\\ (\forall t \in [\alpha_R,\beta_R]) \quad (u(t) \geqslant d).\end{gathered}$$

Továbbá

$$-\left(\phi_p(u'(t))\right)' \geqslant g(u(t)) \geqslant \delta_* \quad \forall t \in [\alpha_R,\beta_R],$$

ahol

$$\delta_* := \min\{g(s) \mid s \in [d, \|u\|_\infty]\} > 0.$$

Világos, hogy $u'\big|_{[\alpha_R,\beta_R]}$ szigorúan fogyó, ezért létezik pontosan egy olyan $\hat{t} \in [\alpha_R,\beta_R]$, amelyre $u'(t) = 0$. Így $u'(t) > 0$, ha $t \in [a,\hat{t})$ és $u'(t) < 0$, ha $t \in (\hat{t},b]$. Továbbá a 3.2. lemmából következik, hogy

$$\alpha_R - a \to 0, \quad b - \beta_R \to 0 \quad \text{ha} \quad R \to \infty.$$

Most aszimptotikus becslést adunk $\beta_R - \alpha_R$-re. A $(P_{\hat{f}})$ problémát a következő rendszer alakjába írjuk

$$\left.\begin{aligned} u' &= \phi_{p^*}(y)\\ y' &= -\hat{f}(t,u,\lambda)\\ u(a) &= u(b) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{$\hat{S}_\lambda$}$$

Definiáljuk az $E : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

$$E(t) := H(u(t)) + \Phi_{p^*}(y(t)), \quad t \in [a,b].$$

$(\hat{S}_\lambda)$-ból és (3.8)-ből nyerjük, hogy

$$E(t) \leqslant E(\hat{t}), \tag{3.23}$$

ha $t \in (\alpha_R, \beta_R)$. (3.23)-ból és $(\hat{S}_\lambda)$ első egyenletéből

$$|u'(t)| \leqslant \frac{1}{c_p} \cdot \left(H\left(u\left(\hat{t}\right)\right) - H\left(u\left(t\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}},$$

és így

$$\frac{c_p \cdot u'(t)}{\left(H\left(u\left(\hat{t}\right)\right) - H\left(u\left(t\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}} \leqslant 1 \quad \forall t \in (\alpha_R, \hat{t}).$$

Ezt az egyenlőtlenséget $\alpha_R$-től $\hat{t}$-ig integrálva és az $u(t) = s$ helyettesítést alkalmazva kapjuk, hogy

$$c_p \cdot \int_d^R \frac{ds}{(H(R) - H(s))^{\frac{1}{p}}} \leqslant \hat{t} - \alpha_R.$$

Teljesen hasonló módon kapjuk, hogy

$$c_p \cdot \int_d^R \frac{ds}{(H(R) - H(s))^{\frac{1}{p}}} \leqslant \beta_R - \hat{t}.$$

Ezért

$$\beta_R - \alpha_R = \beta_R - \hat{t} + \hat{t} - \alpha_R \geqslant 2c_p \cdot \int_d^R \frac{ds}{(H(R) - H(s))^{\frac{1}{p}}},$$

és így

$$\beta_R - \alpha_R \geqslant T_h(R) - I(R), \tag{3.24}$$

ahol

$$I(R) = 2c_p \cdot \int_0^d \frac{ds}{(H(R) - H(s))^{\frac{1}{p}}}.$$

Világos, hogy $\lim\limits_{R\to\infty} I(R) = 0$. Így adott $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ esetén létezik olyan $R^* > \max\{d, R\}$, hogy

$$0 < I(R) < \varepsilon \quad \forall R \geqslant R^* \tag{3.25}$$

$$\alpha_R - a \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad b - \beta_R < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.26}$$

(3.24)-ből és (3.25)-ből következik, hogy $R \geqslant R^*$ esetén

$$T_h(R) \leqslant \beta_R - \alpha_R + \varepsilon \leqslant b - a + \varepsilon. \tag{3.27}$$

Most definiáljuk az $\mathcal{E} : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

$$\mathcal{E}(t) := G(u(t)) + \Phi_{p^*}(y(t)),$$

ahol

$$G(t) := \int_0^t g(s)ds.$$

$(\hat{S}_\lambda)$-ból és (3.8)-ből kapjuk, hogy

$$\mathcal{E}(t) \geqslant \mathcal{E}(\hat{t}) \quad \forall t \in (\alpha_R, \beta_R). \tag{3.28}$$

Ezért (3.28)-ből és $(\hat{S}_\lambda)$ első egyenletéből azt kapjuk, hogy

$$\frac{c_p \cdot |u'(t)|}{(G(u(\hat{t}) - G(u(t)))^{1/p}} \geqslant 1 \quad \forall t \in (\alpha_R, \hat{t}) \cup (\hat{t}, \beta_R). \tag{3.29}$$

(3.29)-t $t$ szerint integrálva először az $(\alpha_R, \hat{t})$ majd a $(\hat{t}, \beta_R)$ intervallumon azt kapjuk, hogy

$$c_p \cdot \int_d^R \frac{ds}{(G(R) - G(s))^{\frac{1}{p}}} \geqslant \hat{t} - \alpha_R,$$

$$c_p \cdot \int_d^R \frac{ds}{(G(R) - G(s))^{\frac{1}{p}}} \geqslant \beta_R - \hat{t}.$$

Így

$$\beta_R - \alpha_R \leqslant 2c_p \cdot \int_d^R \frac{ds}{(G(R) - G(s))^{\frac{1}{p}}} \leqslant T_g(R). \tag{3.30}$$

Most – esetleg részsorozatra áttérve – feltehetjük, hogy $R_n > R^*$ és $S_n > R^*$ bármely $n$ természetes szám esetén. Azt állítjuk, hogy $(P_{\hat{f}})$ bármely olyan $u$ megoldására, amelyre $u_{\max} = R > R^*$, teljesül, hogy $R \neq R_n, R \neq S_n$ minden $n$ természetes számra. Ugyanis, ha ez nem így lenne, akkor $R = R_n$ teljesülne valamely $n$-re, ekkor (3.27)-ból kapjuk, hogy

$$T_h(R_n) \leqslant b - a + \varepsilon,$$

ami ellentmond (3.15)-nek. Ha viszont $R = S_n$ valamely $n$-re, akkor (3.30)-ből következik, hogy

$$b - a - \varepsilon \leqslant T_g(S_n),$$

ami ellentmond (3.16)-nek. Világos, hogy a fenti állításból következik, hogy a (3.22)-ben szereplő mindkét degree jól definiált. A degree homotópia-invarianciájából és (3.20)-ből kapjuk, hogy

$$\deg(I - \mathcal{G}_{\hat{f}}(0,\cdot), \Omega_n^{(1)}, 0) = \deg(I - \mathcal{G}_{\hat{f}}(1,\cdot), \Omega_n^{(1)}, 0) = 1,$$

és ezért

$$\deg(I-\mathcal{G}_{f_e},\Omega_n^{(1)},0)=1 \tag{3.31}$$

bármely olyan $n \in \mathbb{N}$-re, amelyre $S_n > R^*$.
Hasonlóan a homotópia-invarianciából és (3.21)-ból kapjuk, hogy

$$\deg(I-\mathcal{G}_{\hat{f}}(0,\cdot),\Omega_n^{(-1)},0)=\deg(I-\mathcal{G}_{\hat{f}}(-1,\cdot),\Omega_n^{(-1)},0)=0,$$

és ezért

$$\deg(I-\mathcal{G}_{f_e},\Omega_n^{(-1)},0)=0 \tag{3.32}$$

bármely olyan $n \in \mathbb{N}$-re, amelyre $S_n > R^*$. A degree additivitásából, kivágási tulajdonságából, (3.31)-ból és (3.32)-ből kapjuk, hogy

$$\deg\left(I-\mathcal{G}_{f_e},\Omega_{n+1}^{(-1)}\setminus\overline{\Omega_n^{(1)}},0\right)=-1, \quad \text{és}$$

$$deg\left(I-\mathcal{G}_{f_e},\Omega_n^{(1)}\setminus\overline{\Omega_n^{(-1)}},0\right)=1.$$

Így léteznek $u_n^{(1)} \in \Omega_n^{(1)}\setminus\overline{\Omega_n^{(-1)}}$ és $u_n^{(2)} \in \Omega_{n+1}^{(-1)}\setminus\overline{\Omega_n^{(1)}}$ megoldásai a

$$\left.\begin{aligned}&(\phi_p(u'))'+f(t,|u|)=0\\&u(a)=u(b)=0\end{aligned}\right\} \tag{$P_e$}$$

problémának. Továbbá $u_n^{(1)}(t)>0,\quad u_n^{(2)}(t)>0$ minden $t\in(a,b)$-re, így $u_n^{(1)}$ és $u_n^{(2)}$ a $(P)$ probléma megoldásai. Végül

$$S_n<\max u_n^{(1)}<R_n<\max u_n^{(2)}<S_{n+1}, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Ezzel a bizonyítás kész.

■

Megemlítjük az általunk most bizonyított tételnek egy következményét:
Legyen $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ folytonos , $\lim_{\infty} f=\infty$ és legyen $q:[a,b]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ $L^1$-Caratheodory és $L^\infty$-beli függvény. Tegyük fel, hogy

$$\liminf_{s\to\infty} T_f(s)<b-a<\limsup_{s\to\infty} T_f(s).$$

Ekkor a

$$\left.\begin{aligned}&(\phi_p(u'))'+f(u)=q(t,u)\\&u(a)=u(b)=0\end{aligned}\right\}$$

problémának végtelen sok pozitív megoldása létezik.

# 4. fejezet

# A time-map alkalmazása egy konkrét esetben

Ebben a fejezetben jellemezzük a time-map – és ezzel együtt a megoldásszám – viselkedését egy olyan $f$ szigorúan $p$-konvex függvény esetén, amelyre a második fejezetben leírt klasszifikációs tételek nem adnak választ. Most is a második fejezetben megadott ($\mathcal{R}$) probléma megoldásait keressük. Az $f$ függvény legyen a következő :

$$f(u) := u^p + b \cdot u^{p-1} + c, \quad u \in \mathbb{R},$$

ahol $p \geqslant 2, b > 0, c > 0$. Most teljesülnek a 2.2. lemma feltételei, hiszen $f$-nek nincs gyöke, ugyanakkor $f(0) > 0$, ezért egyik klasszifikációs tétel sem alkalmazható. Mivel a 2.2. lemma miatt minden megoldás szimmetrikus az origóra, azért a megoldást elég egy $[0, R]$ alakú intervallumon keresni, ahol $R > 0$. Tehát most elég a

$$\left.\begin{aligned} &(\phi_p(u'))' + f(u) = 0 \\ &u(0) = u(R) = 0, \quad u\big|_{(-R,R)} > 0. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathcal{R}')$$

peremértékprobléma megoldását vizsgálni. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$F(u) := \int\limits_0^u f(s)ds = \frac{u^{p+1}}{p+1} + b \cdot \frac{u^p}{p} + c \cdot u,$$

$$S(\alpha) := \int\limits_0^\alpha \frac{ds}{(F(\alpha) - F(s))^{1/p}} = \frac{1}{2c_p} \cdot T(\alpha).$$

Mivel most $f$ abszolút minimumhelye a 0, $f'(u) = p \cdot u^{p-1} + b(p-1)u^{p-2}$, és

$$\frac{p \cdot u^{p-1} + b(p-1)u^{p-2}}{u^{p-2}} = p \cdot u + b \cdot (p-1),$$

ami szigorúan monoton növő, azért $f$ szigorúan $p$-konvex. A 2.4. lemma (i) része miatt $\lim\limits_0 T = 0$, továbbá a 2.3. következmény (iii) része alapján $\lim\limits_\infty T = 0$. A 2.4. lemma, illetve a 2.3. következmény feltételei most triviálisan teljesülnek, hiszen most az $F$ integrálfüggvény szigorú monotonitása miatt a 2.5. lemma alapján $D(T) = (0, \infty)$. Nyilván

a time-map monotonitásának, konvexitásának vizsgálata egyenértékű a tőle csak konstans szorzóban eltérő $S(\alpha)$ függvény monotonitásának, konvexitásának vizsgálatával. Először kiszámoljuk $S'(\alpha)$-t, ebből következtetünk a monotonitásra.
$S(\alpha)$ definiáló képletében hajtsuk végre a $t = \frac{s}{\alpha}$ helyettesítést. Ekkor a következő előállítást kapjuk:

$$S(\alpha) = \int_0^1 \frac{\alpha dt}{(F(\alpha) - F(\alpha t))^{1/p}}. \tag{4.1}$$

Most $S'(\alpha)$ kiszámolásánál nyilván az integrandust elég deriválni, mivel a mostani átalakítás után már fix az intervallum és az integrandus $\alpha$-szerint $C^2$-beli. Így, ha sikerül megmutatnunk, hogy az integrandus valamely $\alpha$ értékek és $0 \leqslant s \leqslant \alpha$ esetén negatív, vagy pozitív, akkor az integrál is negatív, illetve pozitív lesz. Az integrandust deriválva $S'(\alpha)$-ra a következő előállítás adódik:

$$S'(\alpha) = \int_0^1 \frac{[F(\alpha) - F(\alpha t)]^{\frac{1}{p}} - \frac{\alpha}{p} \cdot [F(\alpha) - F(\alpha t)]^{\frac{1}{p}-1} \cdot (f(\alpha) - f(\alpha t) \cdot t)}{[F(\alpha) - F(\alpha t)]^{\frac{2}{p}}} dt. \tag{4.2}$$

A most kapott integrálban az integrandust $[F(\alpha) - F(\alpha t)]^{\frac{1}{p}-1}$-gyel egyszerűsítve adódik a következő formula:

$$S'(\alpha) = \int_0^1 \frac{F(\alpha) - F(\alpha t) - \frac{\alpha}{p} \cdot [f(\alpha) - f(\alpha t) \cdot t]}{[F(\alpha) - F(\alpha t)]^{\frac{1}{p}+1}} dt. \tag{4.3}$$

Most alkalmazzuk a $s = \alpha t$ helyettesítést, ezzel az imént kapott integrált újból átírjuk 0-tól $\alpha$-ig terjedő integrállá. Egyszerű számolással adódik, hogy

$$S'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \cdot \int_0^\alpha \frac{F(\alpha) - F(s) - \frac{\alpha}{p} \cdot [f(\alpha) - \frac{s}{\alpha} f(s)]}{[F(\alpha) - F(s)]^{\frac{1}{p}+1}} ds. \tag{4.4}$$

A most kapott képletben becsüljük meg az integrandus számlálóját. Jelöljük mostantól kezdve ezt a számlálót $\mathfrak{L}(\alpha, s)$-sel. Az $f$ és a $F$ függvény konkrét alakját felhasználva a számláló a következőképpen írható.

$$\mathfrak{L}(\alpha, s) = \frac{\alpha^{p+1} - s^{p+1}}{p+1} + b\frac{\alpha^p - s^p}{p} + c(\alpha - s) - \frac{\alpha}{p} \cdot \left[\alpha^p + b\alpha^{p-1} + c - \frac{s}{\alpha} s^p - \frac{s}{\alpha} b s^{p-1} - \frac{s}{\alpha} c\right].$$

Egyszerűbb alakra hozva:

$$\mathfrak{L}(\alpha, s) = \left(\alpha^{p+1} - s^{p+1}\right) \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p}\right) + c\,(\alpha - s) \left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{4.5}$$

A fenti formulából $(\alpha - s)$-et kiemelve, és közös nevezőre hozva:

$$\mathfrak{L}(\alpha, s) = \frac{\alpha - s}{p(p+1)} \cdot \left[c(p^2 - 1) - \frac{\alpha^{p+1} - s^{p+1}}{\alpha - s}\right]. \tag{4.6}$$

Ebből adódik, hogy

$$S'(\alpha) < 0 \iff \frac{\alpha^{p+1} - s^{p+1}}{\alpha - s} > c(p^2 - 1). \tag{4.7}$$

Most használjuk ki azt, hogy $0 \leqslant s \leqslant \alpha$ esetén nyilvánvalóan teljesül, hogy $\frac{\alpha^{p+1}-s^{p+1}}{\alpha-s} \geqslant \alpha^p$. Ezért amikor olyan $\alpha$-t keresünk, amelyre $S'(\alpha) < 0$, akkor elegendő olyan $\alpha$-t keresni, amelyre $\alpha^p > c \cdot (p^2 - 1)$. Ebből adódik a következő eredmény:

$$\alpha > [c(p^2 - 1)]^{\frac{1}{p}} \quad \text{esetén} \quad S'(\alpha) < 0. \tag{4.8}$$

Vezessük be a $\alpha_1 := [c(p^2 - 1)]^{\frac{1}{p}}$ jelölést. A további vizsgálathoz szükség van $S''(\alpha)$-ra is.

$S''(\alpha)$ kiszámításához most térjünk vissza $S'(\alpha)$ (4.3)-es előállításához. A (4.3)-as képletben az integrandust deriválva adódik a következő előállítás $S''(\alpha)$-ra:

$$S''(\alpha) = \int_0^1 \frac{A_1(\alpha, t) + B_1(\alpha, t)}{[F(\alpha) - F(\alpha t)]^{\frac{2}{p}+2}}, \tag{4.9}$$

ahol a $A_1(\alpha, t)$, illetve a $B_1(\alpha, t)$ függvények a következők:

$$A_1(\alpha, t) := \left[ f(\alpha) - t \cdot f(\alpha t) - \frac{1}{p} f(\alpha) - \frac{\alpha}{p} f'(\alpha) + \frac{t}{p} f(\alpha t) + \frac{\alpha t^2}{p} f'(\alpha t) \right] \cdot \\ \cdot [F(\alpha) - F(\alpha t)]^{\frac{1}{p}+1}.$$

$$B_1(\alpha, t) := -\left(\frac{1}{p} + 1\right) \cdot [F(\alpha) - F(\alpha t)]^{\frac{1}{p}} \cdot [f(\alpha) - t f(\alpha t)] \cdot \\ \cdot \left[ F(\alpha) - F(\alpha t) - \frac{\alpha}{p} f(\alpha) + t \frac{\alpha}{p} f(\alpha t) \right].$$

Most a (4.9)-as képletben az integrandust a $[F(\alpha) - F(\alpha t)]^{\frac{1}{p}}$ tényezővel egyszerűsítve a következő képletet kapjuk $S''(\alpha)$-ra:

$$S''(\alpha) = \int_0^1 \frac{A_2(\alpha, t) + B_2(\alpha, t)}{[F(\alpha) - F(\alpha t)]^{\frac{1}{p}+2}} dt \quad , \tag{4.10}$$

ahol az $A_2(\alpha, t)$, és $B_2(\alpha, t)$ függvények definiáló egyenlősége a következő:

$$A_2(\alpha, t) := \left[ f(\alpha) - t \cdot f(\alpha t) - \frac{1}{p} f(\alpha) - \frac{\alpha}{p} f'(\alpha) + \frac{t}{p} f(\alpha t) + \frac{\alpha t^2}{p} f'(\alpha t) \right] \cdot [F(\alpha) - F(\alpha t)],$$

$$B_2(\alpha, t) := -\left(\frac{1}{p} + 1\right) \cdot [f(\alpha) - t f(\alpha t)] \cdot \left[ F(\alpha) - F(\alpha t) - \frac{\alpha}{p} f(\alpha) + t \frac{\alpha}{p} f(\alpha t) \right].$$

Most $A_2(\alpha,t)$ és $B_2(\alpha,t)$ képletébe beírva az $f$ és $F$ függvény konkrét alakját a következőket kapjuk:

$$A_2(\alpha,t)=\Big[\alpha^p+b\alpha^{p-1}+c-t\alpha^p t^p-tb\alpha^{p-1}-tc-\frac{1}{p}\alpha^p-\frac{b}{p}\alpha^{p-1}-\frac{c}{p}-\frac{\alpha}{p}\alpha^{p-1}p-$$
$$-\frac{\alpha}{p}b(p-1)\alpha^{p-2}+\frac{t}{p}\alpha^p t^p+\frac{t}{p}b\alpha^{p-1}t^{p-1}+\frac{t}{p}c+\frac{\alpha t^2}{p}pt^{p-1}\alpha^{p-1}+\frac{\alpha t^2}{p}b(p-1)\alpha^{p-2}t^{p-2}\Big]\cdot$$
$$\cdot\left[\frac{\alpha^{p+1}}{p+1}-\frac{\alpha^{p+1}t^{p+1}}{p+1}+b\cdot\frac{\alpha^p-\alpha^p t^p}{p}+c(\alpha-\alpha t)\right],$$

$$B_2(\alpha,t)=-\left(\frac{1}{p}+1\right)\cdot\left[\alpha^p+b\alpha^{p-1}+c-t\alpha^p t^p-tb\alpha^{p-1}t^{p-1}-tc\right]\cdot\Big[\frac{\alpha^{p+1}-\alpha^{p+1}t^{p+1}}{p+1}+$$
$$b\cdot\frac{\alpha^p-\alpha^p t^p}{p}+c(\alpha-\alpha t)-\frac{\alpha}{p}\alpha^p-\frac{\alpha}{p}b\alpha^{p-1}-\frac{\alpha}{p}c+\frac{t\alpha}{p}\alpha^p t^p+\frac{t\alpha}{p}b\alpha^{p-1}t^{p-1}+\frac{t\alpha}{p}c\Big].$$

A fenti képleteket egyszerűbb alakra hozva:

$$A_2(\alpha,t)=\left[-\frac{1}{p}\alpha^p+\frac{1}{p}\alpha^p t^{p+1}+c-ct-\frac{c}{p}+\frac{ct}{p}\right]\cdot$$
$$\cdot\left[\frac{\alpha^{p+1}-\alpha^{p+1}t^{p+1}}{p+1}+b\frac{\alpha^p-\alpha^p t^p}{p}+c\alpha(1-t)\right],$$

$$B_2(\alpha,t)=-(\frac{1}{p}+1)\cdot\left[\alpha^p+b\alpha^{p-1}+c-\alpha^p t^{p+1}-bt^p\alpha^{p-1}-ct\right]\cdot$$
$$\cdot\left[\frac{-\alpha^{p+1}}{p(p+1)}+c\alpha(1-\frac{1}{p})+c\alpha t(\frac{1}{p}-1)+\frac{\alpha^{p+1}t^{p+1}}{p(p+1)}\right].$$

Most írjuk be ezeket a (4.10) formulába, majd hajtsuk végre a $s=\alpha t$ helyettesítést az integrálban. Az így kapott integrál egyszerűsítések után a következő alakban írható fel:

$$S''(\alpha)=\frac{1}{\alpha^2}\cdot\int\limits_0^\alpha\frac{(A_1(\alpha,s)+B_1(\alpha,s))ds}{(F(\alpha)-F(s))^{\frac{1}{p}+2}},\tag{4.11}$$

ahol $A_1(\alpha,s)$, illetve $B_2(\alpha,s)$ a következők:

$$A_1(\alpha,s)=\left[-\frac{\alpha^{p+1}-s^{p+1}}{p}+c\,(\alpha-s)\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]\cdot\left[\frac{\alpha^{p+1}-s^{p+1}}{p+1}+b\frac{\alpha^p-s^p}{p}+c(\alpha-s)\right],$$

$$B_1(\alpha,s)=\left[\alpha^{p+1}-s^{p+1}+b\,(\alpha^p-s^p)+c\,(\alpha-s)\right]\cdot\left[\frac{\alpha^{p+1}-s^{p+1}}{p^2}+c\left(\frac{1}{p^2}-1\right)(\alpha-s)\right].$$

Helyettesítsük be ezeket a formulákat $S''(\alpha)$ (4.11)-es képletébe, majd $(\alpha-s)^2$-t emeljünk ki. Ekkor a következőt kapjuk:

$$S''(\alpha)=\frac{(\alpha-s)^2}{\alpha^2}\cdot\int\limits_0^\alpha\frac{(A_2(\alpha,s)+B_2(\alpha,s))ds}{(F(\alpha)-F(s))^{\frac{1}{p}+2}},$$

ahol az $A_2(\alpha,s)$ és $B_2(\alpha,s)$ függvények a következők:

$$A_2(\alpha,s)=\left[-\frac{1}{p}\cdot\frac{\alpha^{p+1}-s^{p+1}}{\alpha-s}+c\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]\cdot\left[\frac{\alpha^{p+1}-s^{p+1}}{(p+1)(\alpha-s)}+\frac{b}{p}\cdot\frac{\alpha^p-s^p}{\alpha-s}+c\right],$$

$$B_2(\alpha,s)=\left[\frac{\alpha^{p+1}-s^{p+1}}{\alpha-s}+b\cdot\frac{\alpha^p-s^p}{\alpha-s}+c\right]\cdot\left[\frac{1}{p^2}\cdot\frac{\alpha^p-s^p}{\alpha-s}+c\left(\frac{1}{p^2}-1\right)\right].$$

Most vezessük be a következő jelöléseket:

$$x:=\frac{\alpha^{p+1}-s^{p+1}}{\alpha-s},\qquad y:=\frac{\alpha^p-s^p}{\alpha-s},$$

ahol $\alpha=s$ esetén $s\to\alpha$ szerinti határértékként, $(p+1)\alpha^p$-nek definiáljuk őket. Ezekkel a jelölésekkel – egyszerűsítések után – azt nyerjük, hogy:

$$A_2(\alpha,s)+B_2(\alpha,s)=\left[\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p(p+1)}\right]x^2+c\left[\frac{p-1}{p(p+1)}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}-1+\frac{1}{p^2}\right]x+$$
$$bc\left[\frac{p-1}{p^2}+\frac{1}{p^2}-1\right]y+c^2\left[\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}\right].$$

Most azt szeretnénk megvizsgálni, hogy $S''(\alpha)$ mely $\alpha$ értékek esetén lesz negatív. A fenti átalakítások után az, hogy $S''(\alpha)$ integrandusa negatív, ekvivalens azzal, hogy a most kapott másodfokú polinom negatív. Most szorozzuk meg ezt a másodfokú polinomot $p^2(p+1)$-gyel, és jelöljük az így kapott polinomot $q(x,y)$-nal. Összevonások után $q(x,y)$-ra a következőt kapjuk:

$$q(x,y)=x^2-\left[p^3+p^2-2\right]cx+bcp\left[1-p^2\right]y+c^2\left[1-p^2\right].\tag{4.12}$$

$0\leqslant s\leqslant\alpha$ miatt $x>0$ és $y>0$. Először megvizsgáljuk, hogy $q(x,y)$ mely $x$, illetve $y$ értékek esetén lesz negatív. Csak elegendő feltétel keresünk $q(x,y)<0$ fennállásához. $y>0,b>0,c>0$ és $1-p^2<0$ miatt $q(x,y)<0$-hoz elegendő, hogy

$$x^2-\left[p^3+p^2-2\right]cx+c^2\left[1-p^2\right]<0.$$

teljesüljön. A másodfokú egyenlet megoldóképlete a következő gyököket adja:

$$x_1=\left(\frac{p^3+p^2-2+\sqrt{(p^3+p^2-2)^2-4(1-p^2)}}{2}\right)c.$$

$$x_2=\left(\frac{p^3+p^2-2-\sqrt{(p^3+p^2-2)^2-4(1-p^2)}}{2}\right)c.$$

Egyszerűsítés után:

$$x_1=\left(\frac{p^3+p^2-2+\sqrt{p^6+2p^5+p^4-4p^3}}{2}\right)c.$$

$$x_2 = \left( \frac{p^3 + p^2 - 2 - \sqrt{p^6 + 2p^5 + p^4 - 4p^3}}{2} \right) c.$$

Könnyen látható, hogy $x_2 < 0$, egyébként ehhez szükséges és elegendő feltétel, hogy $p > 1$. Ezért $x > x_2$ és így $q(x, y) < 0$ ekvivalens azzal, hogy $x < x_1$. Most az $x$-re kapott becslésből szeretnénk $\alpha$-ra becslést kapni. A Lagrange-féle középértéktétel szerint bármely $0 \leqslant s \leqslant \alpha$ számokhoz létezik olyan $\xi(\alpha, s) \in (s, \alpha)$, amelyre

$$\frac{\alpha^{p+1} - s^{p+1}}{\alpha - s} = (p+1) \cdot \xi(\alpha, s)^p.$$

Ebből következik, hogy bármely $0 \leqslant s \leqslant \alpha$ esetén:

$$\frac{\alpha^{p+1} - s^{p+1}}{\alpha - s} \leqslant (p+1)\, \alpha^p.$$

Ebből adódik a következő eredmény:

$$\alpha < \left( \frac{p^3 + p^2 - 2 + \sqrt{p^6 + 2p^5 + p^4 - 4p^3}}{2(p+1)} \cdot c \right)^{\frac{1}{p}} \text{ esetén } S''(\alpha) < 0.$$

Vezessük be az

$$\alpha_2 := \left( \frac{p^3 + p^2 - 2 + \sqrt{p^6 + 2p^5 + p^4 - 4p^3}}{2(p+1)} \cdot c \right)^{\frac{1}{p}}$$

jelölést. Most megmutatjuk, hogy $\alpha_2 > \alpha_1$. A következő – egymással ekvivalens – átalakítások igazolják ezt:

$$\alpha_2 > \alpha_1 \overset{def}{\iff} \left( \frac{p^3 + p^2 - 2 + \sqrt{p^6 + 2p^5 + p^4 - 4p^3}}{2(p+1)} \cdot c \right)^{\frac{1}{p}} > [c(p^2 - 1)]^{\frac{1}{p}} \iff$$

$$\iff \frac{p^3 + p^2 - 2 + \sqrt{p^6 + 2p^5 + p^4 - 4p^3}}{2(p+1)} > p^2 - 1 \iff$$

$$\iff p^3 + p^2 - 2 + \sqrt{p^6 + 2p^5 + p^4 - 4p^3} > (2p+2)(p^2 - 1) \iff$$

$$\iff p^3 + p^2 - 2 + \sqrt{p^6 + 2p^5 + p^4 - 4p^3} > 2p^3 - 2p + 2p^2 - 2 \iff$$

$$\iff \sqrt{p^6 + 2p^5 + p^4 - 4p^3} > p^3 + p^2 - 2p \iff$$

$$\iff p^6 + 2p^5 + p^4 - 4p^3 > p^6 + p^4 + 4p^2 + 2p^5 - 4p^4 - 4p^3 \iff$$

$$\iff 4p^4 > 4p^2 \iff$$

$$\iff p > 1,$$

ami viszont teljesül. Ezzel megmutattuk, hogy $\alpha_2 > \alpha_1$, ami lényeges lesz a továbbiakban. A $T(\alpha)$ time-map a $S(\alpha)$ függvénytől csak konstansszorzóban különbözik, ezért a $T$ time-map-ről a következő tulajdonságokat bizonyítottuk: Vannak olyan $\alpha_1$ és $\alpha_2$ pozitív számok, amelyekre $\alpha_2 > \alpha_1$, $T'\big|_{(\alpha_1, \infty)} < 0$, és $T''\big|_{(0, \alpha_2)} < 0$. Azaz: $T(\alpha)$, $\alpha \in (0, \infty)$ szigorúan monoton fogyó, ha $\alpha > \alpha_1$, illetve $T(\alpha)$, $\alpha \in (0, \infty)$ konkáv, ha $\alpha < \alpha_2$. Ebből következik, hogy létezik pontosan egy olyan $\alpha_3 < \alpha_1$, amelyre $T'(\alpha_3) = 0$. Valóban:

$T > 0$ miatt $T'(0) > 0$, $T'(\alpha) < 0$, ha $\alpha > \alpha_1$, ezért a Bolzano-tétel szerint létezik olyan $\alpha_3 < \alpha_1$, amelyre $T'(\alpha_3) = 0$. Az egyértelműséget indirekte bizonyítjuk: amennyiben léteznének $\alpha_3^{(1)} \neq \alpha_3^{(2)}$ számok, amelyekre $T'\left(\alpha_3^{(1)}\right) = T'\left(\alpha_3^{(2)}\right) = 0$ lenne, akkor a Rolle-tétel miatt létezne olyan $\alpha_4 \in \left(\alpha_3^{(1)}, \alpha_3^{(2)}\right)$, amelyre $T''(\alpha_4) = 0$ teljesülne, ami ellentmond annak, hogy $\alpha_1 < \alpha_2$. Mivel $T$ a 0-ban szigorúan lokálisan növő, azért ez a $\alpha_3$ érték lokális maximumhelye $T$-nek. Továbbá, mivel $\alpha > \alpha_1$ esetén $T$ szigorúan monoton fogyó, azért $\alpha_3$ egyúttal globális maximumhely is. Elemi meggondolásokkal kijön, hogy a $(\alpha_3, \infty)$ intervallumon $T$ szigorúan monoton fogyó. Könnyen látható, hogy $T$ a $(0, \alpha_3)$ intervallumon szigorúan monoton növő. A megoldásszám szempontjából a következő eredmény jött ki: Van olyan $\alpha_0 > 0$ szám, amelyre a következők teljesülnek:

Az $(\mathcal{R}')$ problémának nem létezik megoldása, ha $R > T(\alpha_0)$, pontosan egy megoldása létezik, ha $R = T(\alpha_0)$, és pontosan két megoldása létezik, ha $R < T(\alpha_0)$, ahol $\alpha_3$-t átneveztük $\alpha_0$-nak. Egyúttal becslést kaptunk $\alpha_0$-ra, $\alpha_0 < \alpha_1$, azaz

$$\alpha_0 < \left[c(p^2 - 1)\right]^{1/p}.$$

A most leírt eredmény azt mutatja, hogy az egyértelműség nem teljesül olyan szigorúan $p$-konvex $f$ függvény esetén, amely a 0-ban pozitív, és nincs gyöke. Lehetséges, hogy az ilyen típusú függvényekre a most leírt esetnek megfelelő a time-map viselkedése, de erre még nem ismert pontos válasz.

# Irodalomjegyzék


[1] Manásevich, R., Zanolin, F., Time-mappings and multiplicity of solutions for the one dimensional $p$-Laplacian *Nonlin.Anal.* **21**, 269-291 (1993)

[2] Karátson,J.,Simon, P.L., Exact multiplicity for degenerate two-point boundary value problems with $p$-konvex nonlinearity, előterjesztett

[3] Zeidler, Eberhard: Nonlinear functional analysis, and its applications, Berlin, New York, Springer-Verlag, QA321.5.745, 1985 1. kötet

[4] Njoku F. I. & Zanolin F., Positive solutions for two-point bvp's: existence and multiplicity results, *Nonlinear Analysis* **13**, 1329-1338 (1989)

[5] Del Pino M., Sobre un problema cuasilineal de segundo orden, Applied Math. Engineering Thesis, F.C.F.M. Universidad de Chile (1987)

[6] Hirsch W.M.,Hanish H.& Gabriel J.P., Differential equation models of some parasitic infections: methods for the study of asymptotic behavior, *Communs pure appl. Math.***38**,733-753 (1985)

[7] Karátson, J., Simon, P.L., Bifurcations of semilinear elliptic equations with convex nonlinearity, *Electron. J. Diff. Eqn.* **1999**, No. 43, 1-16 (1999).

9 (1996).

[8] Schaaf, R., *Global Solution Branches of Two Point Boundary Value Problems*, Springer Lect. Notes in Math. 1458 (1990).

[9] Schaaf, R., *Global Solution Branches of Two Point Boundary Value Problems*, Habilitationsschrift, Ruprecht-Karls Universitat, Heidelberg(1987).

[10] Smoller, J.A., Wassermann, A.G., On the monotonicity of the time-map, *J. Diff. Eqn.* **77**, 287-303 (1989).