Márton Izabella

BAER RÉSZTEREK REPREZENTÁCIÓJA

MATEMATIKUS SZAKDOLGOZAT, ELTE 2000.

Témavezető:

Dr.Kiss György

Kedvcsináló

Ebben a dolgozatban Baer részterek reprezentációjáról lesz szó. Baer résztérnek a q^2 rendű véges projektív tér q-adrendű, ugyanannyi dimenziós alterét nevezzük.

Miért érdekesek a Baer részterek?

A Baer részterek lefogó ponthalmazok konstruálásában nyújtanak segítséget. Például $PG(2, q^2)$ Baer részsíkja lefogó ponthalmaz, ami azt jelenti, hogy $PG(2, q^2)$ minden egyenesén van egy pontja a részsíknak. (Sőt mi több minimális pontszámú lefogó ponthalmaz.) Magasabb dimenziós esetben magasabb dimenziós lefogó ponthalmazok konstruálására használhatók.

A reprezentációra azért van szükség, mert nem nyilvánvaló, hogy mi lehet két Baer résztér metszete. A pontmetszetek lehetséges konfigurációiról Svéd Márta cikkében [4] találhatunk bővebb információt. A reprezentáció ötletét R.C.Bose cikke [1] adta, melyben a $PG(2, q^2)$ Baer részsíkjait reprezentálja $PG(5, q)$-ban.

A *bevezető* fejezetben a dolgozat megértéséhez szükséges azon fogalmak és alapvető állítások vannak felsorolva, melyek nem feltétlenül szerepelnek a matematikus törzsanyagban.

A *három dimenzióról* szóló fejezetben $PG(3, q^2)$ Baer résztereinek reprezentációját adjuk $PG(7, q)$-ban, úgy, hogy $PG(3, q^2)$ pontjainak egyeneseket feleltetünk meg $PG(7, q)$-ban; ezek az egyenesek a tér egy befedését adják; a Baer résztereknek pedig $(q+1)$ darab 3-dimenziós altér felel meg. q-adrendű térben viszont q-adrendű alterek metszete szintén q-adrendű altér, így a metszet megfoghatóbb dologgá vált.

Az n-dimenziós eset című fejezetben a 3-dimenziós esetet általánosítjuk, azaz $PG(n, q^2)$ Baer résztereit $PG(2n+1, q)$-ban reprezentáljuk.

A *Metszetek* című fejezetben Baer részterek metszeteit vizsgáljuk. Azt is eláruljuk, hogy mit is értünk pontosan két Baer résztér metszetén.

1. Bevezető

Jelölje $GF(q)$ a q elemű véges testet. ($q = p^r$, ahol p prímszám, r pedig pozitív egész szám)

Definíció. *PG(n,q) a GF(q) feletti, n-dimenziós véges projektív tér, amelynek pontjai a GF(q) feletti (n+1)-dimenziós vektortér origón átmenő egyenesei, k-dimenziós alterei pedig az említett vektortér origón átmenő (k+1)-dimenziós alterei.*

Legyen $x_j \in GF(q)$, $j = 1, 2, \dots n+1$. Tekintsük az $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ sorozatok összességét. (Ez a $GF(q)$ feletti (n+1)-dimenziós vektortér.) Mivel $GF(q)$ elemeinek száma q, ezért ezen sorozatok (vektorok) száma q^{n+1}. Bontsuk a sorozatok halmazát osztályokra úgy, hogy $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ és $(x_1^{'}, x_2^{'}, \dots, x_{n+1}^{'})$ akkor és csak akkor tartozzék egy osztályba, ha van olyan $\lambda \in GF(q)$, $\lambda \neq 0$, amelyre $(x_1^{'}, x_2^{'}, \dots, x_{n+1}^{'}) = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_{n+1})$. (Ez a vektortérben azt jelenti, hogy az egy egyenesen lévő pontok egy osztályba tartoznak.) A $(0, 0, \dots 0)$ elemet (a vektortérbeli origót) nevezzük üres térnek és vegyük ki a sorozathalmazból. Így $\lambda \neq 0$ $q-1$ darab lehetséges értéke a sorozathalmaz megmaradt $q^{n+1} - 1$ elemét $\frac{q^{n+1}-1}{q-1} = q^n + q^{n-1} + \cdots + 1 = \Theta(n)$ darab osztályra bontja.

Az így definiált osztályokat nevezzük el **pontoknak**, az osztály bármely $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ sorozatának elemeit pedig a pont **homogén koordinátáinak**. Tehát minden ponthoz $q-1$ számú koordinátasorozat tartozik, és ezek bármelyike meghatározza a pontot. Az így definiált ponthalmaz $PG(n,q)$, azaz az n-**dimenziós, q-adrendű véges projektív tér.**

A $P_1, P_2, \dots, P_k$ pontok **(lineárisan) függetlenek,** ha a

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k = 0$$

összefüggésből következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Tekintsük a $P_1, P_2, \dots, P_k$ $PG(n,q)$-beli független pontrendszer által generált $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k = P$ pontok halmazát. A $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ együtthatósorozat hasonló szerepet játszik, mint $PG(k-1,q)$ pontjainak homogén koordinátái, hiszen $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k$ és $\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \cdots + \mu_k P_k$ pontok akkor azonosak, ha valamely $\nu \in GF(q), \nu \neq 0$ esetén

$$\nu(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k) - (\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \cdots + \mu_k P_k) =$$

$$= (\nu\lambda_1 - \mu_1)P_1 + (\nu\lambda_2 - \mu_2)P_2 + \cdots + (\nu\lambda_k - \mu_k)P_k = 0.$$

Mivel $P_1, P_2, \dots, P_k$ független pontrendszer, ez azt jelenti, hogy

$$\mu_1 = \nu\lambda_1, \mu_2 = \nu\lambda_2, \dots, \mu_k = \nu\lambda_k.$$

Világos, hogy az alappontok mindegyike eleme a generátumnak. $\nu\lambda_j = x_j$, $j = 1, 2, \dots k$, $\nu \in GF(q)$, egy-egy értelmű megfeleltetést létesít a generátum pontjai és a $PG(k-1,q)$ pontjai között. Ez azt jelenti, hogy pontjainak száma $\frac{q^k-1}{q-1} = q^{k-1} + q^{k-2} + \cdots + 1$.

A generált ponthalmazt a $PG(n,q)$ $P_1, P_2, \dots, P_k$ **ponthalmaza által kifeszített alterének** nevezzük.

$k = 2$ esetben **egyenesnek**, $k = 3$ esetén **síknak**, $k = n-1$ esetén pedig **hipersíknak** nevezzük.

Vegyük észre, hogy:

- Terünk tetszőleges pontjaival generált halmaz altér.
- Egy S altér összes pontjával generált halmaz maga az S altér.
- k darab független pontból álló pontrenszer által kifeszített altérben nincs k-nál több független pont.
- Alterek metszete altér. (Esetleg üres.)
- Ha van egy k- és egy l-dimenziós altér $PG(n,q)$-ban, melyek diszjunktak, akkor $k + l < n$.
- Ha S_k és S_l rendre k és l dimenziós alterei $PG(n,q)$-nak, $S_k \cap S_l = S_m, (m \geq 0)$, m-dimenziós altér, és S_r a legszűkebb S_k-t és S_l-et tartalmazó altér (ennek dimenzióját jelölje r), akkor a dimenziókra a következő összefüggés áll fent: $r+m = k+l$.

- Érvényes a **dualitás elve**, ami azt jelenti, hogy pontnak hipersík, hipersíknak pont a duálisa, k-dimenziós altérnek $(n-1-k)$-dimenziós altér. Illeszkedő elemeknek a dualitás szerint illeszkedő elemek felelnek meg. Az így kapott struktúra az eredetivel izomorf.

Jelölje $\Phi(r,n,q)$ $PG(n,q)$ r-dimenziós altereinek számát, $\chi(s,r,n,q)$ pedig $PG(n,q)$-ban egy rögzített s-dimenziós alteret tartalmazó r dimenziós alterek számát, $\Theta(n)$ $PG(n,q)$ pontjainak számát.

Nem nehéz belátni a következőket (lásd például [2]):

$$\Phi(0,n,q) = \Theta(n) = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

$$\Phi(r,n,q) = \frac{\prod\limits_{i=n-r+1}^{n+1} (q^i - 1)}{\prod\limits_{i=1}^{r+1} (q^i - 1)}$$

$$\chi(s,r,n,q) = \frac{\prod\limits_{i=r-s+1}^{n-s} (q^i - 1)}{\prod\limits_{i=1}^{n-r} (q^i - 1)}$$

Definíció. *Három, páronként kitérő egyenest metsző egyenesek összességét* **regulus***nak nevezzük.*

Definíció. *$PG(n,q^2)$ egy* **Baer részterének** *a tér n-dimenziós, q-adrendű alterét nevezzük.*

2. Három dimenzió

Tekintsük a $GF(q)$ véges testet, és legyenek $GF(q^2)$, majd $GF(q^8)$ ennek bővítései. Jelöljük az elemeiket rendre így:

(i) $$GF(q) : a, b, c, d, r, s, t, u, v, w$$

(ii) $$GF(q^2) : \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varrho, \sigma, \xi$$

(iii) $$GF(q^8) : \theta, \varphi, \psi, \Theta, \Omega$$

alulindexelve vagy anélkül.

Legyen ξ primitív gyök $GF(q^2)$-ben. Ekkor van olyan $s, t \in GF(q)$ és $x^2 - sx - t$ $GF(q)$ felett irreducibilis polinom, amelynek ξ gyöke. Azaz

$$\xi^2 = s\xi + t$$

$PG(3, q^2)$ egy tetszőleges pontjának koordinátái $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, 0)$ ahol $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ és $(\varrho\alpha, \varrho\beta, \varrho\gamma, \varrho\delta)$, $\varrho \neq 0$ ugyanazt a pontot reprezentálják. Legyen

$$\alpha = a_1 + a_2\xi$$

$$\beta = b_1 + b_2\xi$$

$$\gamma = c_1 + c_2\xi$$

$$\delta = d_1 + d_2\xi$$

A $GF(q^2)$ elemeiből álló $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ négyeseket megfeleltethetjük $GF(q)$ elemeiből álló nyolcasoknak:

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \to (a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2)$$

Az $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2)$ és az $(ra_1, ra_2, rb_1, rb_2, rc_1, rc_2, rd_1, rd_2)$, $r \neq 0$ nyolcasok ugyanazt a pontot reprezentálják $PG(7, q)$-ban. Jegyezzük meg, hogy az utóbbinak megfelelő négyes $(r\alpha, r\beta, r\gamma, r\delta)$ ugyanaz a pont lesz $PG(3, q^2)$-ben, mint $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, de $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2)$ és $(\varrho a_1, \varrho a_2, \varrho b_1, \varrho b_2, \varrho c_1, \varrho c_2, \varrho d_1, \varrho d_2)$ nem feltétlenül ugyanaz a $PG(7, q)$-beli pont.

Tekintsük az összes $(\varrho\alpha, \varrho\beta, \varrho\gamma, \varrho\delta)$-nak megfelelő nyolcast, $\varrho \neq 0$. Legyen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 három nemnulla eleme $GF(q^2)$-nek. Mivel ezek összefüggők $GF(q)$ felett, van olyan $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$, $a_i \in GF(q)$, hogy $a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 = 0$. Ezért a $(\varrho_1\alpha, \varrho_1\beta, \varrho_1\gamma, \varrho_1\delta)$, $(\varrho_2\alpha, \varrho_2\beta, \varrho_2\gamma, \varrho_2\delta)$, $(\varrho_3\alpha, \varrho_3\beta, \varrho_3\gamma, \varrho_3\delta)$ három kollineáris pont koordinátája $PG(7, q)$-ban. Mivel ϱ $q^2 - 1$ nemnulla értéket vehet fel $GF(q^2)$-ben, ezért a $(\varrho\alpha, \varrho\beta, \varrho\gamma, \varrho\delta)$-nak megfelelő nyolcasok $q + 1$ kollineáris pontot reprezentálnak $PG(7, q)$-ban. Hiszen rögzített $\varrho, c \neq 0$-ra a $(c\varrho\alpha, c\varrho\beta, c\varrho\gamma, c\varrho\delta)$ négyeshez tartozó nyolcasok ugyanazt a pontot adják $PG(7, q)$-ban. Így $q^6 + q^4 + q^2 + 1$ darab $PG(3, q^2)$-beli pontnak megfeleltethető $q^6 + q^4 + q^2 + 1$ db egyenes $PG(7, q)$-ban, minden pontnak megfeleltetve egy egyenest.

Jelölje ezen egyenesek halmazát S_1.

Tétel. *S_1 befedése PG(7,q)-nak.*

Bizonyítás

Legyen θ egy primitív eleme $GF(q^8)$-nak. Ekkor

$$\xi = \theta^{q^6+q^4+q^2+1}$$

primitív elem $GF(q^2)$-ben. Van olyan $x^4 - \delta_3 x^3 - \delta_2 x^2 - \delta_1 x - \delta_0$ $GF(q)$ felett irreducibilis polinom $(\delta_i \in GF(q), i = 0 \dots 3)$, amelynek θ gyöke.

Ezt felhasználva, tetszőleges $\psi \in GF(q^8)$ ilyen alakban írható:

$$\psi = \theta^i = \alpha + \beta\theta + \gamma\theta^2 + \delta\theta^3$$

ahol $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in GF(q^2)$. Ez egy megfeleltetést ad az $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ négyesek és $GF(q^8)$ elemei között.

Minden $\varrho \in GF(q^2)$ így írható:

$$\varrho = \xi^m, \qquad 0 \leq m \leq q^2 - 2,$$

mivel $\xi^{q^2-1} = 1$. Így a $(\varrho\alpha, \varrho\beta, \varrho\gamma, \varrho\delta)$ négyes a $\xi^m\theta = \theta^{m(q^6+q^4+q^2+1)+i}$ elemnek felel meg. Tehát, ha $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ és $(\varrho\alpha, \varrho\beta, \varrho\gamma, \varrho\delta)$ rendre θ^i illetve θ^j-nek felelnek meg, akkor

$$j \equiv i \ mod \ (q^6 + q^4 + q^2 + 1)$$

Így $GF(q^8)$ nemnulla elemeit ($q^8 - 1$ ilyen van) $q^6 + q^4 + q^2 + 1$ darab osztályra bontottuk, úgy, hogy az egy osztályban lévő elemek ugyanannak a $PG(3, q)$-beli pontnak felelnek meg. Ha θ^i és θ^j egy osztályban vannak, akkor a fenti kongruencia teljesül. Tehát a

$$\theta^0, \theta, \theta^2, \cdots, \theta^{q^6+q^4+q^2}$$

elemek különböző pontoknak felelnek meg $PG(3, q^2)$-ben.

Feleljen meg θ^i-nek $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (a_1 + a_2\xi, b_1 + b_2\xi, c_1 + c_2\xi, d_1 + d_2\xi)$. Így θ^i megfelel az $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2)$ nyolcasnak. Legyen w a $GF(q)$ egy primitív eleme, amelyre

$$w = \theta^{\frac{(q^8-1)}{(q-1)}}.$$

Ekkor $GF(q)$ nemnulla elemei $w^0, w, w^2, \cdots, w^{q-2}$. Ez azt jelenti, hogy $PG(7, q)$ $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2)$ koordinátájú eleme megfelel a következő $q - 1$ elemű osztálynak:

$$\theta^{i+k(q^6+q^4+q^2+1)(q+1)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, q - 2.$$

Ez alosztálya a következő osztálynak:

$$\theta^{i+m(q^6+q^4+q^2+1)}, \qquad m = 0, 1, \ldots, q^2 - 2,$$

amely az $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ $PG(3, q^2)$-beli pontnak felel meg.

Vagyis $GF(q^8)$ egy $q^2 - 1$ elemű osztálya, amely $PG(3, q)$ egy pontjának felel meg, $q + 1$ darab alosztályra bontható úgy, hogy mindegyik egy S_1-beli egyenes különböző pontjának feleljen meg. Minden alosztálynak $q - 1$ eleme van, melyeknek indexei kongruensek mod $(q^6 + q^4 + q^2 + 1)(q + 1)$.

$PG(7, q)$ minden pontjához létezik egyetlen alosztály, és a $(q^6 + q^4 + q^2 + 1)(q + 1)$ alosztály együtt $GF(q^8)$ összes nemnulla elemét kiadja. Tehát S_1 semelyik két egyenesének nincs közös pontja, és $PG(7, q)$ minden pontját lefedik. Azaz S_1 befedése $PG(7, q)$-nak.

$\blacksquare$

Mivel S_1 minden eleme egyetlen $PG(7,q)$-beli pontnak felel meg, világos, hogy a

$$\theta^0, \theta, \theta^2, \cdots, \theta^{q^6+q^4+q^2}$$

$GF(q^8)$-beli elemeknek különböző S_1-beli egyenesek felelnek meg. Jelölje ezeket

$$l_0, l_1, \cdots, l_{q^6+q^4+q^2+1},$$

ahol l_i tartalmazza a θ^i-nek megfelelő pontot, $0 \leq i \leq q^6+q^4+q^2$.

Legyen $\psi = \theta^i$ és $\varphi = \theta^j$ két eleme $GF(q^8)$-nak, ahol $i \neq j$ és $0 \leq i, j \leq q^6+q^4+q^2$, l_i és l_j pedig azon S_1-beli egyenesek, melyek a ψ-nek, illetve φ-nek megfelelő $PG(7,q)$-beli pontokat tartalmazzák.

Ha $\Omega \in GF(q^8)$ tetszőleges nemnulla elem, akkor az $\Omega \in PG(7,q)$ ponton azt a pontot értjük, amely az Ω-t tartalmazó $GF(q^8)$-beli alosztálynak felel meg.

Lemma. *Adott l_i és l_j S_1-beli egyeneseken, minden rögzített $P = \psi$, $Q = \varphi$ párhoz, ahol $P \in l_i$ és $Q \in l_j$ az $l\psi + m\varphi$ $(l, m \in GF(q))$ alakú pontokon átmenő S_1-beli egyenesek benne vannak az l_i és l_j által generált 3-dimenziós térben. Sőt, az összes ilyen $(P,\ Q)$ pár által a fenti módon meghatározott egyenesek az l_i és l_j által kifeszített 3-dimenziós tér egy befedését alkotják.*

Bizonyítás

Rögzítsük a $P = \psi$ l_i egyenesen lévő és a $Q = \varphi$ l_j egyenesen fekvő pontokat. Ekkor egy-egy értelmű megfeleltetést létesíthetünk l_i és l_j pontjai között az alábbi módon: a $\varrho\psi \in l_i$ pontot feleltessük meg a $\varrho\varphi \in l_j$ pontnak. Legyen $\varrho_1\psi, \varrho_2\psi, \varrho_3\psi$ az l_i három különböző pontja. $\varrho_1\psi$ és $\varrho_1\varphi$ összekötő egyenesén egy tetszőleges pont $\varrho_1(l\psi+m\varphi)$. Világos, hogy a $\varrho_2(l\psi+m\varphi)$ pont a $\varrho_2\psi$ és a $\varrho_2\varphi$ összekötő egyenesén van, a $\varrho_3(l\psi+m\varphi)$ pont pedig a $\varrho_3\psi$ és a $\varrho_3\varphi$ összekötő egyenesén fekszik. Node a

$$\varrho_1(l\psi+m\varphi), \qquad \varrho_2(l\psi+m\varphi), \qquad \varrho_3(l\psi+m\varphi)$$

pontok kollineárisak — hiszen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ összefüggők, így a pontok is — és azon az S_1-beli egyenesen vannak, amelyiken $l\psi+m\varphi$ rajta van. Ez az egyenes benne van az l_i és az l_j által kifeszített 3-dimenziós térben.

Ha P-t fixen tartjuk, Q pedig végigfut l_j-n, akkor $q+1$ darab egymástól páronként diszjunkt egyenessereget kapunk. Össszesen $2+(q-1)(q+1)=q^2+1$ darab egyenest kapunk. Ezek a 3-dimenziós tér összes pontját lefedik. ∎

Tétel. *Három darab független S_1-beli egyenes által kifeszített 5-dimenziós térben a tartalmazott S_1-beli egyenesek a tér egy befedését alkotják.*

Bizonyítás

Legyen a három darab S_1-beli egyenes l_1, l_2, l_3. Rögzítsük ezeken rendre a $P_1=\psi$, $P_2=\varphi$, $P_3=\Theta$ pontokat. A Lemmában leírt módon egy-egy értelmű megfeleltetést létesíthetünk l_1, l_2 illetve l_3 pontjai között.

Legyen $\varrho_1\psi, \varrho_2\psi, \varrho_3\psi$ l_1 különböző pontjai. $\varrho_1\psi$, $\varrho_1\varphi$ és $\varrho_1\Theta$ közös síkján egy tetszőleges pont így néz ki: $\varrho_1(l\psi+m\varphi+k\Theta)$. Világos, hogy a $\varrho_2(l\psi+m\varphi+k\Theta)$ pont a $\varrho_2\psi$, a $\varrho_2\varphi$ és a $\varrho_2\Theta$ síkján van, a $\varrho_3(l\psi+m\varphi+k\Theta)$ pont pedig a $\varrho_3\psi$, a $\varrho_3\varphi$ és a $\varrho_3\Theta$ síkján fekszik. Node a

$$\varrho_1(l\psi+m\varphi+k\Theta), \qquad \varrho_2(l\psi+m\varphi+k\Theta), \qquad \varrho_3(l\psi+m\varphi+k\Theta)$$

pontok kollineárisak, és azon az S_1-beli egyenesen vannak, amelyiken $l\psi+m\varphi+k\Theta$ rajta van. Ez az egyenes benne van az l_1, az l_2 és az l_3 által kifeszített 5-dimenziós térben.

A rögzített pontokat futtatva összesen ennyi pontot fednek le a kapott S_1-beli egyenesek:

$$(q+1)^3(q-1)^2+\frac{(q+1)^3}{q+1}3(q-1)+3\frac{(q+1)^3}{(q+1)^2}=$$
$$=q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$$

Tehát valóban befedést kaptunk. ∎

Tekintsük az összes olyan 5-dimenziós teret, amelyet három darab független S_1-beli egyenes feszít ki. Össszesen

$$\frac{(q^6+q^4+q^2+1)(q^6+q^4+q^2)(q^6+q^4)}{(q^4+q^2+1)(q^4+q^2)q^4}=q^6+q^4+q^2+1$$

darab ilyen tér van.

Definíció. *Ezen 5-dimenziós terek halmazát jelölje H_5.*

Az előzőek alapján könnyen látható a következő:

Állítás.

1) $|S_1| = q^6 + q^4 + q^2 + 1$

2) $|H_5| = q^6 + q^4 + q^2 + 1$

3) Minden H_5-beli 5-dimenziós vektortér pontosan $q^4 + q^2 + 1$ darab elemét tartalmazza S_1-nek.

4) Bármely három független S_1-beli egyenes pontosan egy elemét határozza meg H_5-nek.

Tétel. *Minden S_1-beli egyenes pontosan q^4+q^2+1 darab H_5-beli 5-dimenziós térnek része, és H_5 bármely két elemének metszete egy olyan 3-dimenziós tér, amely $q^2 + 1$ darab egyenest tartalmaz S_1-ből.*

Bizonyítás

Rögzítsünk egy S_1-beli egyenest. Ehhez

$$\frac{(q^6 + q^4 + q^2)(q^6 + q^4)}{(q^4 + q^2)q^4} = q^4 + q^2 + 1$$

darab különböző egyenespárt találunk S_1-ből, úgy, hogy a három egyenes független legyen. Tehát egy S_1-beli egyenes pontosan $q^4 + q^2 + 1$ darab H_5-belinek része.

Tegyük fel, hogy két H_5-beli metszete több, mint három dimenziós. (Vegyük észre, hogy legalább ennyi, különben nem férnének el $PG(7, q)$-ban.) Ez azt jelenti, hogy tartalmaz egy Σ_3 3-dimenziós teret és egy $P \notin \Sigma_3$ pontot. Akkor ezen a P ponton át halad S_1-nek egy egyenese, l. Ez az l egyenes mindkét 5-dimenziós térben benne van, hiszen S_1 befedés H_5 elemeiben, így a metszetükben is, de nincs benne Σ_3-ban. Könnyű látni, hogy S_1 Σ_3-ban befedést alkot. (Egy tetszőleges pontján átmenő S_1-beli egyenes mindkét 5-dimenziós térnek része.) Ekkor l kitérő Σ_3-hoz, ezért együtt 5-dimenziós teret generálnak, vagyis a két tér megegyezik. Mivel Σ_3-ban S_1 befedés, ezért két 5-dimenziós tér metszete pontosan $q^2 + 1$ darab S_1-beli egyenest tartalmaz.

■

Tétel. *H_5 duális befedés $PG(7,q)$-ban.*

Bizonyítás

$PG(7,q)$ egy 6-dimenziós tere, Σ_6 legfeljebb egy H_5-beli 5-dimenziós teret tartalmaz. Hiszen, ha lenne olyan, amelyik tartalmaz kettőt, akkor ezek metszete legalább 4-dimenziós kellene legyen, hogy elférjenek a 6-dimenziós térben. Azonban az előző tétel miatt ez lehetetlen.

Minden S_1-beli egyenes vagy része Σ_6-nak, vagy egyetlen pontban metszi. Jelölje n_1 azon S_1-beli egyenesek számát, amelyek benne vannak Σ_6-ban, n_2 pedig azokét, amelyek egy pontban metszik Σ_6-ot. Ekkor

$$n_1(q+1)+n_2=\frac{q^7-1}{q-1}$$
$$n_1+n_2=q^6+q^4+q^2+1$$

Vagyis $n_1=q^4+q^2+1$ és $n_2=q^6$.

Tehát Σ_6 q^4+q^2+1 darab elemét tartalmazza S_1-nek. Ezek közül bármely három független generálja H_5 egy elemét. Mivel Σ_6 legfeljebb egy H_5-belit tartalmaz, ezért a q^4+q^2+1 darab S_1-beli egyenes ugyanabban a H_5-beli 5-dimenziós térben van benne, vagyis Σ_6 valóban tartalmaz egy H_5-beli elemet, a fentiek miatt pedig pontosan egyet.

■

Következmény. *Ha l_1 és l_2 két eleme S_1-nek, P tetszőleges, az l_1, l_2 által generált 3-dimenziós téren kívüli pont, akkor pontosan egy H_5-beli 5-dimenziós tér van, ami P-t, l_1-et és l_2-t tartalmazza.*

Legyen Σ_3 $PG(7,q)$-nek egy 3-dimenziós altere. Ez S_1-től függően kétfajta lehet.

1) Tartalmaz S_1-beli egyenest. Ekkor azt mondjuk, hogy Σ_3 **1.típusú.** Egy 1.típusú altér kétféle lehet:

- vagy egy elemét tartalmazza S_1-nek és ekkor q^3+q^2 darab további S_1-beli egyenes metszi,
- vagy q^2+1 darabot tartalmaz, és ekkor Σ_3-ban S_1 befedés.

2) Ha Σ_3 nem tartalmaz S_1 beli egyenest, **2.típusúnak** nevezzük. Ekkor q^3+q^2+q+1 darab S_1-beli egyenes metszi, és $q^6+q^4-q^3-q$ darab elkerüli.

Cél. *A 2.típusú 3-dimenziós alterek megszámolása.*

Ehhez számoljuk meg először az 1. típusúakat.

Rögzített S_1-beli egyenest tartalmazó 3-dimenziós terek száma: $\chi(1,3,7,q) = (q^4+q^3+q^2+q+1)(q^4+q^2+1)$.

Rögzített S_1-beli egyenesen átmenő, q^2+1 darab S_1-beli egyenest tartalmazó 3-dimenziós terek száma: $\frac{q^6+q^4+q^2}{q^2} = q^4+q^2+1$.

Tehát rögzített S_1-beli egyenesen átmenő olyan 3-dimenziós alterek száma, amelyek csak ezt az egyenest tartalmazzák S_1-ből: $(q^4+q^2+1)q(q+1)(q^2+1)$.

Ezzel megkaphatjuk az összes, pontosan egy S_1-beli egyenest tartalmazó 3-dimenziós alterek számát $PG(7,q)$-ban: $(q^6+q^4+q^2+1)(q^4+q^2+1)q(q+1)(q^2+1)$ $= (q^4+q^2+1)q(q+1)(q^2+1)^2(q^4+1)$.

Azok a 3-dimenziós terek pedig, amelyek q^2+1 darab egyenest tartalmaznak S_1-ből, ennyien vannak: $\frac{\binom{q^6+q^4+q^2+1}{2}}{\binom{q^2+1}{2}} = (q^4+1)(q^4+q^2+1)$.

Tehát az 1. típusú 3-dimenziós alterek száma:

$$(q^4+1)(q^4+q^2+1)\big(q(q+1)(q^2+1)+1\big).$$

Mivel összesen $\Phi(3,7,q) = \frac{(q^5-1)(q^6-1)(q^7-1)(q^8-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)}$ darab 3-dimenziós altér van $PG(7,q)$-ban, ezért a 2. típusú alterek száma:

$$q^6(q+1)(q^2+1)(q^3+1)(q^4+1).$$

Nevezzük 2. típusúnak az S_1-hez nem tartozó egyeneseket. Egy ilyen egyenest $q+1$ darab S_1-beli egyenes metsz egy pontban.

2. típusú egy 5-dimenziós tér, ha nem eleme H_5-nek.

A reprezentáció

Definíció. *$PG(3,q^2)$ egy* **Baer résztere** *olyan (B,β) pár, ahol B pontok és β síkok halmaza, amelyre teljesülnek a következők:*

(1) $|B| = q^3+q^2+q+1$

(2) $|\beta| = q^3+q^2+q+1$

(3) β minden síkjára q^2+q+1 B-beli pont illeszkedik.

(4) B minden pontjára q^2+q+1 β-beli sík illeszkedik.

(5) Két különböző B-beli pontra $q+1$ β-beli sík illeszkedik.

(6) Két különböző β-beli sík metszetén $q+1$ eleme van B-nak.

Megjegyezzük, hogy ezen tulajdonságok nem függetlenek; akár az (1), (3), (5), akár a (2), (4), (6) elég lenne, hogy következtessünk a többire.

Most $PG(3,q^2)$ Baer résztereinek egy reprezentációját adjuk meg $PG(7,q)$-ban.

Állítás. *Legyen Σ_3 2. típusú 3-dimenziós tér $PG(7,q)$-ban. Legyen B azon q^3+q^2+q+1 darab S_1-beli egyenes, amely egy pontban metszi Σ_3-mat, és legyen β az olyan H_5-beli 5-dimenziós tereknek a halmaza, amelyek Σ_3-mat síkban metszik. Ekkor a (B,β) pár teljesíti az (1) ... (6) tulajdonságokat.*

Bizonyítás

Mivel Σ_3-nak q^3+q^2+q+1 pontja van, (1) igaz.

(2)-hez azt kell belátni, hogy nincs két olyan H_5-beli 5-dimenziós tér, amely Σ_3-mat ugyanabban a síkban metszi. Ha volnának ilyen Δ_5 és Δ_5^* 5-dimenziós alterek, melyekre $\Sigma_3\cap\Delta_5=\Sigma_3\cap\Delta_5^*=\Pi$, akkor a Π pontjain átmenő q^2+q+1 S_1-beli egyenes része volna mind Δ_5-nek, mind Δ_5^*-nak. Két H_5-beli 5-dimenziós tér metszete azonban 3 dimenziós, és így csak q^2+1 darab S_1-beli egyenest tartalmaz. Vagyis Σ_3 minden síkjához egyetlen H_5-beli 5-dimenziós tér tartozik, amely Σ_3-mat ebben a síkban metszi. Mivel Σ_3-nak q^3+q^2+q+1 síkja van, ezért igaz (2).

Mivel tetszőleges $\Delta_5\in\beta$ síkban metszi Σ_3-t, ezért pontosan q^2+q+1 elemét tartalmazza B-nek. Ez a (3) tulajdonság.

Σ_3-ban egy pontra $\chi(0,2,3,q)=\frac{q^3-1}{q-1}=q^2+q+1$ darab sík illeszkedik. Azaz egy B-beli pontosan q^2+q+1 β-belinek része. Ez a (4) tulajdonság.

Σ_3 két pontján át halad egy egyenes. Az egyenesre illeszkedő síkok száma: $\chi(1,2,3,q)=\frac{q^2-1}{q-1}=q+1$ Ez azt jelenti, hogy B két elemén át $q+1$ eleme megy β-nak. Ez az (5) tulajdonság.

Σ_3-ban két különböző sík metszete egyenes ($q+1$ pont). β két elemének metszete $q+1$ elemét tartalmazza B-nek. Teljesül tehát a (6) tulajdonság.

■

Tehát a (B,β) pár Baer részteret alkot.

Ekkor Σ_3-t a (B,β) Baer résztér **reprezentáns terének** nevezzük. Most (B,β) összes reprezentáns terét vizsgáljuk.

Állítás. *Legyenek Σ_3 és Σ_3^* különböző reprezentáns terei a (B,β) Baer résztérnek. Ekkor B minden egyenese egy pontban metszi Σ_3-t is és Σ_3^*-t is. Ezzel megfeleltetés létesíthető Σ_3 és Σ_3^* pontjai között, úgy, hogy B azonos egyenesén fekvő pontok egymásnak felelnek meg. Ez a leképezés illeszkedéstartó.*

Bizonyítás

Legyenek P_1, P_2, P_3, P_4 olyan pontjai Σ_3-nak, amelyek egy síkban vannak, de semelyik három nincs egy egyenesen. Legyenek továbbá $P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*$ rendre a nekik megfelelő pontok Σ_3^*-on. Jelölje l_i $P_iP_i^*$ összekötő egyenesét $i = 1 \ldots 4$. Megjegyezzük, hogy $l_i \in S_1$. Ekkor l_1, l_2 és l_3 meghatároz egy H_5-beli 5-dimenziós teret, hiszen a három egyenes független, különben P_1, P_2, P_3 egy egyenesen lennének. Jelölje ezt az 5-dimenziós teret Σ_5. Ekkor Σ_5 Σ_3-t a P_1, P_2, P_3 síkjában metszi, Σ_3^*-t pedig a P_1^*, P_2^*, P_3^* síkjában. Mivel P_4 eleme P_1, P_2, P_3 síkjának, ezért $l_4 \subset \Sigma_5$. Ez pedig azt jelenti, hogy P_4^* illeszkedik P_1^*, P_2^*, P_3^* síkjára. Tehát síkot síkba visz a leképezés, egyenest pedig egyenesbe, ezért kollineáció, vagyis illeszkedéstartó.

■

Legyenek φ, ψ, Ω és Θ $GF(q^8)$ elemei, amelyek Σ_3 független pontjait reprezentálják, azaz Σ_3 minden pontja ilyen alakban írható fel: $a_1\varphi + a_2\psi + a_3\Omega + a_4\Theta$, ahol $a_1, a_2, a_3, a_4 \in GF(q)$ és $(a_1, a_2, a_3, a_4) \neq (0,0,0,0)$. Jelölje l_1, l_2, l_3 és l_4 rendre a φ, ψ, Ω illetve Θ-n átmenő S_1-beli egyeneseket. Legyen ϱ tetszőleges nemnulla eleme $GF(q^2)$-nek, Σ_3^* pedig a $\varrho\varphi, \varrho\psi, \varrho\Omega, \varrho\Theta$ pontok által meghatározott 3-dimenziós tér. Azonnal látható, hogy a $\varrho(a_1\varphi + a_2\psi + a_3\Omega + a_4\Theta) \in \Sigma^*$ pont megfeletethető a $a_1\varphi + a_2\psi + a_3\Omega + a_4\Theta \in \Sigma$ pontnak. A megfelelő pontok B egyenesein vannak, és a megfeleltetés síkot síkba visz. Tehát Σ_3^* (B,β)-nak reprezentáns tere. Mivel ϱ q^2-1 különböző értéket vehet fel, és bármely kettő, melyeknek hányadosa $GF(q)$-beli, ugyanazt a teret határozza meg, ezért $q+1$ reprezentáns teret kapunk. B egy egyenesének minden pontján át egyértelműen létezik egy reprezentáns tere (B,β)-nak.

Legyen $\xi = \theta^{q^6+q^4+q^2+1}$ primitív eleme $GF(q^2)$-nek, továbbá $\Sigma_5 \in \beta$ 5-dimenziós tér, amely Σ_3-t a φ, ψ, Ω síkjában metszi. Ekkor $\varphi, \psi, \Omega, \xi\varphi, \xi\psi$ és $\xi\Omega$ pontok meghatározzák Σ_5-t, amely természetesen tartalmazza Θ-t, $\varrho\varphi$-t, $\varrho\psi$-t, $\varrho\Omega$-t és $\varrho\Theta$-t is.

Beláttuk tehát, hogy minden (B, β) Baer résztérnek $q+1$ reprezentáns tere van, melyek páronként diszjunktak, és amelyeket transzverzálisoknak tekinthetünk B minden egyeneséhez, és β minden 5-dimenziós teréhez. Ugyanis B egyeneseit pontokban metszik, és β 5-dimenziós tereit pedig síkokban. (B, β) illeszkedési struktúrája fellelhető minden reprezentáns térben, amely a rögzített 2.típusú térhez tartozik. Egy (B, β) Baer résztér reprezentáns tereit úgy képzelhetjük, mint a B egyeneseire "felfűzött láncszemeket", melyeket egymás között permutál a $\varphi \to \varrho\varphi$ megfeleltetés, ahol φ az egyik reprezentáns térnek eleme, ϱ pedig nemnulla eleme $GF(q^2)$-nak.

Mivel összesen $q^6(q+1)(q^2+1)(q^3+1)(q^4+1)$ darab 2.típusú tér van, ezért ezek

$$q^6(q^2+1)(q^3+1)(q^4+1)$$

darab $q+1$ elemű csoportba sorolhatók, úgy, hogy minden csoportba egy Baer résztér reprezentáns terei tartoznak.

Tudjuk azonban, hogy $PG(3, q^2)$-ben pontosan ennyi Baer résztér van (lásd [4]), tehát a fenti reprezentációval minden Baer részteret megkapunk.

A transzformáció

Láttuk, hogy $PG(7, q)$ minden pontja $GF(q^8)$ egy nemnulla elemével jeleníthető meg. Ha két elem összefüggő $GF(q)$ felett, akkor ugyanazt a pontot reprezentálják. A $\varphi \to \varrho\varphi$ megfeleltetés, ahol $\varrho \in GF(q^2)$ olyan transzformáció, amely illeszkedéstartó a különböző dimenziós alterek között, ugyanakkor az S_1befedés egyenesein invariáns. Ebből az is következik, hogy H_5 5-dimenziós terein is invariáns, hiszen ezekben S_1 befedés.

Speciálisan, ha $\varrho = \xi$, ahol ξ primitív eleme $GF(q^2)$-nek, akkor a $\varphi \to \xi\varphi$ ciklikusan permutálja a 2.típusú egyeneseket (amelyek S_1 egy regulusának transzverzálisai).

Világos, ha B részhalmaza S_1 egyeneseinek, és β H_5-beli 5-dimenziós terekből áll, úgy, hogy (B, β) $PG(3, q^2)$ egy Baer résztérét reprezentálja, akkor az altér invariáns a $\varphi \to \varrho\varphi$ transzformációra, a reprezentáns terek (ezek 3-dimenziós terek) viszont egymás között permutálódnak.

3. Az n-dimenziós eset

Tekintsük a $GF(q^2)$ és a $GF(q^{2n+2})$ véges testeket, mint a $GF(q)$ véges test bővítéseit. Elemeiket rendre jelöljük így:

(i) $\quad GF(q) : a, b, c, d, r, s, t, u, v, w$

(ii) $\quad GF(q^2) : \alpha, \delta, \varrho, \sigma, \tau, \xi$

(iii) $\quad GF(q^{2n+2}) : \theta, \varphi, \psi, \Omega, \chi$

alulindexelve vagy anélkül.

Legyen ξ primitív gyök $GF(q^2)$-ben. Ekkor vannak olyan s és t $GF(q)$-beli elemek, amelyekre ξ gyöke az $x^2 - sx - t$ $GF(q)$ felett irreducibilis polinomnak.

$PG(n, q^2)$ minden pontja így koordinátázható: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ ahol $\alpha_i \in GF(q^2)$, $i = 1, \ldots, n+1$. $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1})$ és $(\varrho\alpha_1, \varrho\alpha_2, \ldots, \varrho\alpha_{n+1})$ ugyanazt a pontot reprezentálja $\varrho \in GF(q^2)$, $\varrho \neq 0$ esetén. Legyen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11} + a_{12}\xi \\ \alpha_2 &= a_{21} + a_{22}\xi \\ &\vdots \\ \alpha_{n+1} &= a_{n+1,1} + a_{n+1,2}\xi \end{aligned}$$

Feleltessük meg a $GF(q^2)$-beli elemekből álló $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1})$ $(n+1)$-eseket $GF(q)$ elemeiből álló $(2n+2)$-eseknek:

$$(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{n+1,1}, a_{n+1,2}).$$

Ez és — $r \neq 0$ esetén — az $(ra_{11}, ra_{12}, ra_{21}, ra_{22}, \ldots, ra_{n+1,1}, ra_{n+1,2})$ $(2n+2)$-esek ugyanazt a pontot adják $PG(2n+1, q)$-ban. Ez utóbbinak az $(r\alpha_1, r\alpha_2, \ldots, r\alpha_{n+1})$ felel meg, amely $PG(n, q^2)$-ben ugyanazt a pontot jelenti, mint $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1})$.

Vegyük észre azonban, hogy $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{n+1,1}, a_{n+1,2})$ és $(\varrho a_{11}, \varrho a_{12}, \varrho a_{21}, \varrho a_{22}, \ldots, \varrho a_{n+1,1}, \varrho a_{n+1,2})$ — ha $\varrho \in GF(q^2)$, és $\varrho \neq 0$ — nem feltétlenül adja ugyanazt a pontot $PG(2n+1, q)$-ban.

Tekintsük minden $\varrho \neq 0$, $\varrho \in GF(q^2)$ esetén a $(\varrho\alpha_1, \varrho\alpha_2, \ldots, \varrho\alpha_{n+1})$-nek megfelelő $(2n+2)$-eseket. Legyenek $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ nemnulla elemei $GF(q^2)$-nek. Ekkor ezek összefüggők $GF(q)$ felett, ami azt jelenti, hogy létezik $(a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$, $a_i \in GF(q)$, amelyre $a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 = 0$. Ezért a $(\varrho_1\alpha_1, \varrho_1\alpha_2, \ldots, \varrho_1\alpha_{n+1})$, a $(\varrho_2\alpha_1, \varrho_2\alpha_2, \ldots, \varrho_2\alpha_{n+1})$ és a $(\varrho_3\alpha_1, \varrho_3\alpha_2, \ldots, \varrho_3\alpha_{n+1})$ három olyan pontja $PG(2n + q^2)$-nek, melyek egy egyenesre esnek. Mivel ϱ q^2-1 nemnulla értéket vehet fel $GF(q^2)$-ben, ezért a $(\varrho\alpha_1, \varrho\alpha_2, \ldots, \varrho\alpha_{n+1})$-nek megfelelő $(2n+2)$-esek $q+1$ kollineáris pontját reprezentálják $PG(2n+1, q)$-nak. Hiszen rögzített $\varrho, c \neq 0$, $\varrho \in GF(q^2)$, $c \in GF(q)$ esetén a $(c\varrho\alpha_1, c\varrho\alpha_2, \ldots, c\varrho\alpha_{n+1})$-nek megfelelő $(2n+2)$-esek ugyanazt a pontot jelentik $PG(2n+1, q)$-ban. Így $PG(n, q^2)$ $q^{2n} + q^{2(n-1)} + \cdots + 1$ darab pontját megfeleltethetjük $PG(2n+1, q)$ $q^{2n} + q^{2(n-1)} + \cdots + 1$ darab egyenesének, minden pontnak egy egyenest feleltetve meg. Jelölje ezen egyenesek halmazát S_1.

Tétel. *S_1 befedése $PG(2n+1, q)$-nak.*

Bizonyítás

Legyen θ primitív eleme $GF(q^{2n+2})$-nek. Ekkor

$$\xi = \theta^{q^{2n} + q^{2(n-1)} + \cdots + 1}$$

primitív elem $GF(q^2)$-ben. Léteznek olyan $\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_n$ $GF(q^2)$-beli elemek, amelyekre θ gyöke az $x^{n+1} - \delta_n x^n - \delta_{n-1}x^{n-1} - \cdots - \delta_0$ $GF(q^2)$ felett irreducibilis polinomnak. Így $GF(q^{2n+2})$ minden nemnulla eleme ilyen alakra hozható:

$$\psi = \theta^i = \alpha_1 + \alpha_2\theta + \cdots + \alpha_{n+1}\theta^n \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in GF(q^2).$$

$GF(q)$ minden nemnulla eleme

$$\varrho = \xi^m, \qquad 0 \leq m \leq q^2 - 2$$

alakban írható, hiszen $\xi^{q^2-1} = 1$. Megfeleltetést létesíthetünk az $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1})$ $(n+1)$-esek és $GF(q^{2n+2})$ elemei között, a következő módon:

$$\xi^m \theta^i = \theta^{m(q^{2n}+q^{2(n-1)}+\cdots+1)+i} \rightarrow (\varrho\alpha_1, \varrho\alpha_2, \ldots, \varrho\alpha_{n+1})$$

Ha tehát $\theta^i \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1})$ és $\theta^j \rightarrow (\varrho\alpha_1, \varrho\alpha_2, \ldots, \varrho\alpha_{n+1})$ akkor

$$i \equiv j \quad (mod\ q^{2n} + q^{2(n-1)} + \cdots + 1).$$

Azaz $GF(q^{2n+2})$-nek $q^{2n+2}-1$ darab nemnulla eleme $q^{2n} + q^{2(n-1)} + \cdots + 1$ osztályba sorolható, és az egy osztályban lévő elemek ugyanannak a $PG(n, q^2)$-beli pontnak felelnek meg. Ha θ^i és θ^j ugyanannak az osztálynak eleme, akkor a fenti ekvivalencia teljesül. Ez azt is jelenti, hogy a

$$\theta^0, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{q^{2n}+q^{2(n-1)}+\ldots+q^2}$$

elemek különböző pontoknak felelnek meg $PG(n, q^2)$-ben. Legyen

$$\theta^i \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}) = (a_{11} + a_{12}\xi, a_{21} + a_{22}\xi, \ldots, a_{n+1,1} + a_{n+1,2}\xi).$$

Így tehát θ^i-t az $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{n+1,2})$ $(2n+2)$-esnek feleltetjük meg.

Legyen

$$w = \theta^{\frac{q^{2n+2}-1}{q-1}}$$

primitív eleme $GF(q)$-nak. Ekkor $GF(q)$ összes nemnulla eleme: $w^0, w, w^2, \ldots, w^{q-2}$. Így $PG(2n+1, q)$ egy $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{n+1,2})$-vel koordinátázott pontja egy $q-1$ elemű osztálynak felel meg:

$$\theta^{i+k(q^{2n}+q^{2(n-1)}+\cdots+1)(q+1)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, q-2.$$

Ez a

$$\theta^{i+m(q^{2n}+q^{2(n-1)}+\cdots+1)}, \qquad m = 0, 1, \ldots, q^2-2$$

osztálynak alosztálya, amely pedig az $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1})$ $PG(n, q^2)$-beli pontnak felel meg.

Tehát $GF(q^{2n+2})$ egy $PG(n, q^2)$-beli pontnak megfelelő q^2-1 eleme $q+1$ osztályra bontható, úgy, hogy mindegyik egy-egy pont lesz egy S_1-beli egyenesen. Minden alosztálynak $q-1$ eleme van, amelyek indexei kongruensek $mod\ (q+1)(q^{2n}+q^{2(n-1)}+\cdots+1)$.

$PG(2n+1,q)$ minden pontjához egyértelműen létezik egy alosztály, és a $(q+\ 1)(q^{2n}+q^{2(n-1)}+\cdots+1)$ darab alosztály együtt kiadja $GF(q^{2n+2})$ összes nemnulla elemét.

Vagyis két különböző S_1-beli egyenesnek nincs közös pontja, és minden pontját lefedik $PG(2n+1,q)$-nak. Tehát S_1 befedése $PG(2n+1,q)$-nak.

■

Mivel S_1 minden egyenese $PG(n,q^2)$ egyetlen pontjának felel meg, ezért a

$$\theta^0, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{q^{2n}+q^{2(n-1)}+\cdots+q^2}$$

elemei $GF(q^{2n+2})$-nek különböző S_1-beli egyeneseknek felelnek meg. Jelölje ezen egyeneseket rendre:

$$l_1, l_2, \ldots, l_{q^{2n}+q^{2(n-1)}+\cdots+q^2},$$

ahol l_i a θ^i-nek megfelelő pontra illeszkedik, $0 \leq i \leq q^{2n}+q^{2(n-1)}+\cdots+q^2$.

Legyenek $\psi=\theta^i$ és $\phi=\theta^j$ $GF(q^{2n+2})$ elemei, $i \neq j$ és $0 \leq i,j \leq q^{2n}+q^{2(n-1)}+\cdots+q^2$. Jelölje l_i illetve l_j a ψ-nek, illetve ϕ-nek megfelelő $PG(2n+1,q)$-beli pontokat tartalmazó S_1-beli egyeneseket.

Ha $\Omega \in GF(q^{2n+2})$ nemnulla elem, az $\Omega \in PG(2n+1,q)$ pont jelentse az Ω-t tartalmazó $GF(q^{2n+2})$-beli alosztálynak megfelelő pontot.

Az előző fejezetben már beláttuk az alábbi lemmát:

Lemma. *Adott l_i és l_j S_1-beli egyeneseken, minden rögzített $P=\psi$, $Q=\varphi$ párhoz, ahol $P \in l_i$ és $Q \in l_j$ az $l\psi+m\varphi$ $(l,m \in GF(q))$ alakú pontokon átmenő S_1-beli egyenesek benne vannak az l_i és l_j által generált 3-dimenziós térben. Sőt, az összes ilyen $(P,\ Q)$ pár által a fenti módon meghatározott egyenesek az l_i és l_j által kifeszített 3-dimenziós tér egy befedését alkotják.*

Definíció. *Legyen H_{2n-1} az n darab független S_1-beli egyenes által generált $(2n-\ 1)$-dimenziós alterek halmaza.*

Tétel. *Minden $\Sigma_{2n-1} \in H_{2n-1}$ $(2n-1)$-dimenziós tér pontosan $q^{2(n-1)}+q^{2(n-2)}+\cdots+1$ darab egyenesét tartalmazza S_1-nek, ami egy befedését alkotja Σ_{2n-1}-nek.*

Bizonyítás

A tételt a független egyenesek számára vonatkozó teljes indukcióval fogjuk bizonyítani, vagyis be fogjuk látni, hogy k darab független S_1-beli egyenes olyan $(2k-1)$-dimenziós alteret feszít ki, amely $q^{2(k-1)} + q^{2(k-2)} + \cdots + 1$ egyenesét tartalmazza S_1-nek.

Mivel a Lemma a $k = 2$ esetet bizonyítja, ezért elég belátnunk, hogy ha n-ig minden természetes számra igaz az állítás, akkor $(n+1)$-re is.

Rögzítsünk az $n+1$ darab egyenes mindegyikén egy-egy független pontot. Ezek, mint csúcsok, egy n-dimenziós szimplexet határoznak meg. E szimplex belső pontjainak (amelyek nincsenek rajta alacsonyabb dimenziós lapján) száma:

$$\frac{q^{n+1}-1}{q-1} - \binom{n+1}{n}\frac{q^n-1}{q-1} + \binom{n+1}{n-1}\frac{q^{n-1}-1}{q-1} - \cdots \pm \binom{n+1}{1}\frac{q-1}{q-1} =$$

$$= \frac{1}{q-1}\Bigg(q^{n+1} - \binom{n+1}{n}q^n + \binom{n+1}{n-1}q^{n-1} - \cdots \pm \binom{n+1}{1}q +$$

$$+\left(-1 + \binom{n+1}{n} - \binom{n+1}{n-1} + \cdots \pm \binom{n+1}{1}\right)\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{q-1}\left(q^{n+1} - \binom{n+1}{n}q^n + \binom{n+1}{n-1}q^{n-1} - \cdots \pm \binom{n+1}{1}q + (-1)^{n+1}\right) =$$

$$= \frac{(q-1)^{n+1}}{q-1} = (q-1)^n$$

Ezek mindegyikén át pontosan egy S_1-beli egyenes megy, amely benne van Σ_{2n-1}-ben, hiszen egy ilyen egyenes minden pontjának koordinátái kifejezhetők a rögzített pontok koordinátáinak lineáris kombinációiként.

Futtassuk a rögzített pontokat az egyeneseken. Így az egyenesek által lefedett pontok száma:

$$(q+1)^{n+1}(q-1)^n + \binom{n+1}{n}\frac{(q+1)^{n+1}}{q+1}(q-1)^{n-1} + \binom{n+1}{n-1}\frac{(q+1)^{n+1}}{(q+1)^2}(q-1)^{n-2} + \cdots$$

$$\cdots + \binom{n+1}{2}\frac{(q+1)^{n+1}}{(q+1)^{n-1}}(q-1) + \binom{n+1}{1}\frac{(q+1)^{n+1}}{(q+1)^n} =$$

$$= (q+1)\left((q^2-1)^n + \binom{n+1}{n}(q^2-1)^{n-1} + \cdots + \frac{n+1}{1}\right) =$$

$$= (q+1)\frac{q^{2(n+1)}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2(n+1)-1}}{q-1} = q^{2n+1} + q^{2n} + \cdots + 1$$

Mivel az altér összes pontját lefedik, ezért ezek az egyenesek Σ_{2n-1} egy befedését alkotják.

■

Az előző tétel alapján: $|H_{2n-1}| =$

$$= \frac{(q^{2n} + q^{2(n-1)} + \cdots + 1)(q^{2n} + \cdots + q^2)(q^{2n} + \cdots + q^4)\ldots(q^{2n} + q^{2n-2})}{(q^{2n-2} + q^{2n-4} + \cdots + 1)(q^{2n-2} + \cdots + q^2)\cdots(q^{2n-2} + q^{2n-4})q^{2n-2}} =$$

$$= q^{2n} + q^{2(n-1)} + \cdots + 1.$$

Összefoglalva tehát, ezt kapjuk:

Állítás.

(1) $|S_1| = q^{2n} + q^{2(n-1)} + \cdots + 1$

(2) $|H_{2n-1}| = q^{2n} + q^{2(n-1)} + \cdots + 1$

(3) *Minden $(2n-1)$-dimenziós H_{2n-1}-beli tér pontosan $q^{2(n-1)} + q^{2(n-2)} + \cdots + 1$ darab egyenest tartalmaz S_1-ből.*

(4) *Bármely n darab független S_1-beli egyenes egyetlen elemét határozza meg H_{2n-1}-nek.*

Tétel.

(i) *Minden S_1-beli egyenes pontosan $q^{2(n-1)} + q^{2(n-2)} + \cdots + 1$ darab H_{2n-1}-beli $(2n-1)$-dimenziós térnek része.*

(ii) *Bármely két H_{2n-1}-beli $(2n-1)$-dimenziós tér metszete egy olyan $(2n-3)$-dimenziós altér, amely pontosan $q^{2(n-2)} + q^{2(n-3)} + \cdots + 1$ darab egyenesét tartalmazza S_1-nek.*

Bizonyítás

(i) Ha rögzítünk egy egyenest, akkor azt kell megszámolnunk, hogy hány alteret generál $n-1$ darab független S_1-beli egyenes, amelyek e rögzített egyenessel együtt is általános helyzetűek.

$$\frac{(q^{2n} + q^{2(n-1)} + \cdots + q^2)(q^{2n} + q^{2(n-1)} + \cdots + q^4)\ldots(q^{2n} + q^{2(n-1)})}{(q^{2(n-1)} + q^{2(n-2)} + \cdots + q^2)(q^{2(n-1)} + q^{2(n-2)} + \cdots + q^4)\ldots q^{2(n-1)}} =$$

$$= q^{2(n-1)} + q^{2(n-2)} + \cdots + 1.$$

Éppen ezt szerettük volna.

(ii) A metszet legalább $(2n-3)$-dimenziós, különben nem férnének el $PG(2n+1,q)$-ban. Tegyük fel, hogy két H_{2n-1}-beli tér metszete több, mint egy Σ_{2n-3} $(2n-3)$-dimenziós altér, azaz tartalmaz egy $P \notin \Sigma_{2n-3}$ pontot is. Erre a P pontra illeszkedik S_1 egy egyenese, melyet jelöljön l. Mivel S_1 befedés H_{2n-1} elemeiben, s így a metszetükben is, ezért l mindkét $(2n-1)$-dimenziós térnek része, de kitérő Σ_{2n-3}-hoz. Ekkor l és Σ_{2n-3} együtt egy $(2n-1)$-dimenziós alteret generál, amely benne van a két tér metszetében, vagyis e $(2n-1)$-dimenziós terek megegyeznek.

Mivel S_1 Σ_{2n-3}-ban befedés, ezért a metszet pontosan $q^{2(n-2)} + q^{2(n-3)} + \cdots + 1$ darab egyenesét tartalmazza S_1-nek.

■

Tétel. *H_{2n-1} duális befedés $PG(2n+1,q)$-ban.*

Bizonyítás

Be kell látnunk, hogy $PG(2n+1,q)$ minden $(2n)$-dimenziós altere pontosan egy $(2n-1)$-dimenziós alteret tartalmaz H_{2n-1}-ből.

Tegyük fel indirekt módon, hogy van olyan Σ_{2n} $(2n)$-dimenziós altér, amely tartalmazza $\Sigma_{2n-1}, \Sigma'_{2n-1} \in H_{2n-1}$ $(2n-1)$-dimenziós altereket. Node Σ_{2n-1} és Σ'_{2n-1} metszete $(2n-3)$-dimenziós altér, Σ_{2n-3}. Ez azt jelenti, hogy van olyan $l \in S_1$ egyenes, amelyre $l \subset \Sigma_{2n-1}$ de $l \not\subset \Sigma'_{2n-1}$. Vagyis l kitérő Σ'_{2n-1}-hez, hiszen S_1 befedése Σ'_{2n-1}-nek, ezért nem metszheti, így együtt egy $(2n+1)$-dimenziós teret generálnak. Ez azonban lehetetlen, mert nem férnek el Σ_{2n}-ben.

Minden S_1-beli egyenes

- vagy része egy rögzített $(2n)$-dimenziós altérnek — jelölje ezek számát n_1 —,
- vagy egy pontban metszi a rögzített $(2n)$-dimenziós alteret, ezek száma pedig legyen n_2. Ekkor :

$$n_1(q+1) + n_2 = \frac{q^{2n+1}-1}{q-1}$$

$$n_1 + n_2 = |S_1| = q^{2n} + q^{2(n-1)} + \cdots + 1$$

Innen azt kapjuk, hogy:

$$n_1 = q^{2(n-1)} + q^{2(n-2)} + \cdots + 1, \quad n_2 = q^{2n}.$$

Tehát a Σ_{2n} altér $q^{2(n-1)} + q^{2(n-2)} + \cdots + 1$ egyenest tartalmaz S_1-ből. Ezek közül bármely n független meghatározza H_{2n-1} egy elemét. Mivel legfeljebb egy ilyen van Σ_{2n}-ben, ezért tetszőleges $(2n)$-dimenziós altér pontosan egy H_{2n-1}-beli $(2n-1)$-dimenziós teret tartalmaz.

■

Következmény. *Ha $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$ független S_1-beli egyenesek, P pedig tőlük független pont, akkor pontosan egy olyan H_{2n-1}-beli tér van, amely tartalmazza P-t és ezen egyeneseket.*

$PG(2n+1, q)$ egy Σ_n n-dimenziós altere S_1-től függően kétfajta lehet.

1. típusú, ha tartalmaz S_1-beli egyenest. Ekkor vagy 1, vagy q^2+1, vagy q^4+q^2+1, vagy ..., vagy $q^{n-1}+q^{n-3}+\cdots+1$ darab S_1-beli egyenest tartalmazhat, ha n páratlan, ha pedig páros, akkor vagy 1, vagy q^2+1, vagy q^4+q^2+1, vagy ..., vagy $q^{n-1}+q^{n-3}+\cdots+q$ egyenest tartalmazhat S_1-ből.

2. típusú, ha nem tartalmaz egyenest S_1-ből. Az ilyen n-dimenziós teret $q^n + q^{n-1} + \cdots + 1$ darab S_1-beli egyenes metszi, azaz minden pontján át különböző S_1-beli egyenes van.

Egy egyenest 2. típusúnak nevezünk, ha nem eleme S_1-nek. A 2. típusú egyeneseket $q+1$ darab S_1-beli egyenes metszi egy pontban.

2. típusúnak nevezünk egy $(2n-1)$-dimenziós teret, ha nem H_{2n-1}-beli.

A reprezentáció

Definíció. *$PG(n, q^2)$ egy* **Baer résztere***nek egy olyan (B, β) párt nevezünk — ahol B pontok, β pedig hipersíkok halmaza —, amelyre:*

(1) $|B| = q^n + q^{n-1} + \cdots + 1$

(2) $|\beta| = q^n + q^{n-1} + \cdots + 1$

(3) β egy elemére $q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + 1$ darab B-beli pont illeszkedik.

(4) Minden B-beli pontra $q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + 1$ β-beli hipersík illeszkedik.

(5) Két különböző B-beli ponton át β-nak $q^{n-2} + q^{n-3} + \cdots + 1$ hipersíkja létezik.

(6) $q^{n-2} + q^{n-3} + \cdots + 1$ B-beli pont illeszkedik két különböző β-beli hipersík metszetére.

Megjegyezzük, hogy ezen tulajdonságok nem függetlenek, az (1), (3) és (5) tulajdonságokból vagy (2),(4) és (6)-ból következtetni lehet a többire.

A következőkben $PG(n, q^2)$ Baer résztereinek reprezentációját adjuk meg.

Tétel. *Legyen Σ_n 2. típusú n-dimenziós tér $PG(2n+1, q)$-ban. Legyen B azon $q^{2n} + q^{2(n-1)} + \cdots + 1$ darab S_1-beli egyenes halmaza, amelyek egyetlen pontban metszik Σ_n-et, β pedig olyan H_{2n-1}-beli $(2n-1)$-dimenziós terek halmaza, amelyek Σ_n-et $(n-1)$-dimenziós altérben metszik. Ekkor (B, β) teljesíti az (1),...,(6) feltételeket.*

Bizonyítás

Mivel $|S_1| = q^n + q^{n-1} + \cdots + 1$, ezért (1) igaz.

A további állítások igazolásához meg kell mutatnunk, hogy Σ_n egy $(n-1)$-dimenziós altere pontosan egy H_{2n-1}-beli $(2n-1)$-dimenziós teret határoz meg. Mivel egy ilyen $(2n-1)$-dimenziós teret n darab független S_1-beli egyenes határoz meg, elég belátnunk, hogy a Σ_n-en átmenő S_1-beli egyenesek között van n darab független. Valóban, Σ_n $(n-1)$-dimenziós alterében van $(n-1)$-dimenziós szimplex, melynek n darab csúcsán átmenő S_1-beli egyenesek függetlenek lesznek.

Mivel $|H_{2n-1}| = q^n + q^{n-1} + \cdots + 1$ ezért az előzőek miatt (2) igaz.

β egy eleme $(n-1)$-dimenziós térben metszi Σ_n-et, azaz $q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + 1$ pontban, és mivel S_1 H_{2n-1} (és így β) elemeiben befedés, így tartalmazza a pontokon átmenő B-beli egyeneseket is. Azaz teljesül (3).

Σ_n-ben egy pont

$$\chi(0, n-1, n, q) = \frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + 1$$

darab $(n-1)$-dimenziós altérnek eleme, és minden ilyen pontosan egy elemét határozza meg β-nak, ezért igaz (4).

Σ_n bármely két pontját összeköti egy egyenes ($q+1$ pont), az erre illeszkedő $(n-1)$-dimenziós alterek száma:

$$\chi(1, n-1, n, q) = \frac{q^{n-1}-1}{q-1} = q^{n-2} + q^{n-3} + \cdots + 1.$$

Ezzel beláttuk (5)-t.

Két β-beli altér metszete Δ_{2n-3} $(2n-3)$-dimenziós altér, és a metszetben S_1 befedés. $\Delta_{2n-3} \cap \Sigma_n$ $(n-2)$-dimenziós, hiszen több nem lehet, mert két β-beli térnek is része, ha pedig kevesebb lenne, nem férne el Σ_n-ben. Tehát a metszet $q^{n-2} + q^{n-3} + \cdots + 1$ darab pontot tartalmaz, azaz teljesül (6).

■

Egy ilyen Σ_n 2.típusú n-dimenziós teret nevezzük a (B, β) Baer résztér **reprezentáns terének.**

A következőkben egy Baer résztér összes reprezentáns terét fogjuk vizsgálni.

Állítás. *Ha Σ_n és Σ_n^* különböző reprezentáns terei a (B, β) Baer résztérnek, akkor B minden egyenese egy pontban metszi mind Σ_n-et, mind Σ_n^*-ot. Megfeleltetés létesíthető Σ_n és Σ_n^* pontjai között, úgy, hogy B azonos egyenesén fekvő pontok egymásnak felelnek meg. Ez a leképezés illeszkedéstartó.*

Bizonyítás

Legyenek $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1} \in \Sigma_n$ általános helyzetű pontok, egy $(n-1)$-dimenziós altérben. Jelölje rendre $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_{n+1}^*$ a nekik megfelelő pontokat Σ_n^*-ban. l_i, $i = 1 \ldots n+1$ pedig legyen a P_i, P_i^* összekötő egyenese. Nyilván $l_i \in S_1$.

$l_1, l_2, \ldots, l_n$ meghatároz egy H_{2n-1}-beli $(2n-1)$-dimenziós teret, Σ_{2n-1}-et. $\Sigma_n \cap \Sigma_{2n-1}$ az az $(n-1)$-dimenziós altér, amelyet $P_1, P_2, \ldots P_n$ határoz meg, $\Sigma_n^* \cap \Sigma_{2n-1}$ pedig az az $(n-1)$-dimenziós altér, amelyet $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_n^*$ feszít ki. Mivel P_{n+1} eleme $\Sigma_n \cap \Sigma_{2n-1}$-nek, ezért $l_{n+1} \subset \Sigma_{2n-1}$, vagyis P_{n+1}^* is benne van $\Sigma_n^* \cap \Sigma_{2n-1}$-ben. A megfeleltetés tehát Σ_n egy hipersíkját Σ_n^* egy hipersíkjába képezi.

Mivel minden altér előáll hipersíkok metszeteként, ezért a leképezés valóban illeszkedéstartó.

■

Legyenek $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$ olyan elemei $GF(q^{2n+2})$-nek, amelyek Σ_n általános helyzetű pontjait reprezentálják. Ekkor Σ_n minden pontja kifejezhető ilyen alakban: $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_{n+1}\varphi_{n+1}$, ahol $a_i \in GF(q)$ és $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Jelölje rendre $l_1, l_2, \ldots, l_{n+1}$ a pontokon átmenő S_1-beli egyeneseket. Ha $\varrho \in GF(q^2)$ tetszőleges nemnulla elem, akkor $\varrho\varphi_i$ illeszkedik l_i-re. Legyen Σ_n^* a $\varrho\varphi_1, \varrho\varphi_2, \ldots, \varrho\varphi_{n+1}$ pontok által meghatározott n-dimenziós tér. Ekkor a $\varrho(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_{n+1}\varphi_{n+1}) \in \Sigma_n^*$ pont a $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_{n+1}\varphi_{n+1} \in \Sigma_n$ pontnak feleltethető meg. A megfelelő pontok B egyenesein vannak, ezért hipersík hipersíknak felel meg. Ez azt jelenti, hogy Σ_n^* is reprezentáns tere (B, β)-nak. Mivel ϱ-nak $q^2 - 1$ különböző értéke lehet, és kettő, melynek hányadosa $GF(q)$-ban van, ugyanazt a teret határozza meg, ezért $q + 1$ reprezentáns teret kapunk. Tehát B egy megfelelő egyenesének minden pontján át pontosan egy reprezentáns tere létezik (B, β)-nak.

Legyen $\xi = \theta^{q^{2n} + q^{2(n-1)} + \cdots + 1} \in GF(q^2)$ primitív elem, továbbá $\Sigma_{2n-1} \in \beta$ $(2n-\ 1)$-dimenziós tér, amely Σ_n-et a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ által meghatározott $(n-1)$-dimenziós térben metszi. Ekkor a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ és a $\xi\varphi_1, \xi\varphi_2, \ldots, \xi\varphi_n$ pontok meghatározzák Σ_{2n-1}-t, ez pedig tartalmazza φ_{n+1}-et, $\varrho\varphi_1$-et, $\varrho\varphi_2$-t, $\ldots$, $\varrho\varphi_{n+1}$ -et is.

Ezzel azt láttuk be, hogy egy (B, β) Baer résztérnek $q + 1$ reprezentáns tere van, melyek páronként diszjunktak, és transzverzálisnak tekinthetők B minden egyeneséhez, és β minden $(2n-1)$-dimenziós eleméhez, hiszen B elemeit pontokban metszik, β $(2n-1)$-dimenziós tereit pedig $(n-1)$-dimenziós alterekben. Egy rögzített 2. típusú n-dimenziós térhez tartozó (B, β) Baer résztér illszkedési struktúrája fellelhető minden reprezentáns terében.

Ismét elképzelhetjük (B, β) reprezentáns tereit, mint B egyeneseire "felfűzött láncszemeket".

Ahhoz, hogy belássuk, hogy minden Baer részteret reprezentáltunk, megmutatjuk, hogy $(q + 1)$-szer annyi második típusú tér van, mint Baer résztér. $PG(n, q^2)$ Baer résztereinek számát ismerjük (lásd [4]):

$$q^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i=2}^{n+1} (q^i + 1).$$

Állítás. *$PG(2n+1,q)$ második típusú n-dimenziós tereinek száma:*

$$q^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{i=1}^{n+1}(q^i+1).$$

Bizonyítás

Tekintsük a $GF(q)$ feletti $(2n+2)$-dimenziós vektorteret, $V(2n+2,q)$-t, amelyből $PG(2n+1,q)$-t származtatjuk. Itt az S_1 egyenesei olyan origón átmenő, 2-dimenziós alterek lesznek, melyekre igaz, hogy minden 1-dimenziós alteret pontosan egy tartalmaz közülük. (Ez jelenti ugyanis azt, hogy S_1 befedése $PG(2n+1,q)$-nak.) A második típusú n-dimenziós altereknek olyan $(n+1)$-dimenziós alterek felenek meg, melyek egyetlen S_1-beli egyenesnek megfelelő 2-dimenziós alteret sem tartalmaznak. Ezeket szeretnénk tehát megszámolni.

Mivel egy $(n+1)$-dimenziós alteret $n+1$ darab független egyenes generál, és ezek közül semelyik sem lehet a többi által meghatározott S_1-beli egyeneseknek megfelelő 2-dimenziós térben, sem pedig ezek generátumában, ezért számuk:

$$\frac{(q^{2n+2}-1)(q^{2n+2}-q^2)\cdots(q^{2n+2}-q^{2n})}{(q^{n+1}-1)(q^{n+1}-q)\cdots(q^{n+1}-q^n)}=$$

$$=\frac{q^{n(n+1)}\prod_{i=1}^{n+1}(q^{2i}-1)}{q^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{i=1}^{n+1}(q^i-1)}=q^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{i=1}^{n+1}(q^i+1) \qquad \blacksquare$$

Így tehát a 2.típusú n-dimenziós terek $q^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{i=2}^{n+1}(q^i+1)$ darab $q+1$ elemű osztályba sorolhatók (az egy osztályban lévőket ugyanazok az S_1-beli egyenesek metszik), és mindegyik osztály egy $PG(n,q^2)$-beli Baer résztérnek felel meg, és ez a megfeleltetés kölcsönös.

A transzformáció

Láttuk, hogy $PG(2n+1,q)$ minden pontja $GF(q^{2n+2})$ egy nemnulla elemével jeleníthető meg. Ha két elem összefüggő $GF(q)$ felett, akkor ugyanazt a pontot reprezentálják. A $\varphi\to\varrho\varphi$ megfeleltetés, ahol $\varrho\in GF(q^2)$ olyan transzformáció, amely illeszkedéstartó a különböző dimenziós alterek között, ugyanakkor az S_1befedés egyenesein invariáns. Ebből az is következik, hogy H_{2n-1} (2n−1)-dimenziós terein is invariáns, hiszen ezekben S_1 befedés.

Speciálisan, ha $\varrho = \xi$, ahol ξ primitív eleme $GF(q^2)$-nek, akkor a $\varphi \to \xi\varphi$ ciklikusan permutálja a 2. típusú egyeneseket (amelyek S_1 egy regulusának transzverzálisai).

Világos, ha B részhalmaza S_1 egyeneseinek, és β H_{2n-1}-beli (2n−1)-dimenziós terekből áll, úgy, hogy (B, β) $PG(n, q^2)$ egy Baer részterét reprezentálja, akkor az altér invariáns a $\varphi \to \varrho\varphi$ transzformációra, a reprezentáns terek, azaz a "felfűzött lánc" szemei egymás között permutálódnak.

4. Metszetek

Azért vizsgáljuk, hogy mi lehet két Baer résztér metszete, mert a Baer részterek nem "közönséges", azaz nem q^2-rendű alterek $PG(n, q^2)$-ben, így metszetük sem feltétlenül lesz altér. Az sem világos, hogy mit értünk Baer részerek metszetén, ezért megkülönböztetünk két fogalmat:

Definíció. *$PG(n, q^2)$ egy S k-dimenziós alterére azt mondjuk, hogy a B_1 és B_2 Baer részterek* **közös altere***, ha $S \cap B_1$ is és $S \cap B_2$ is k-dimenziós, q-adrendű alterek, de nem feltétlenül egyeznek meg pontonként.*

Definíció. *D* **pontonként közös altere** *a B_1 és B_2 Baer résztereknek, ha $D \subseteq B_1$ és $D \subseteq B_2$.*

Vegyük észre, hogy pontok esetén a két fogalom azonos, de magasabb dimenziós alterek esetén nem feltétlenül jelenti ugyanazt.

A fejezetben a pontonkénti metszeteket vizsgáljuk.

Definíció. *B_1 Baer résztér egy alterét akkor mondjuk a $B_1 \cap B_2$ metszet egy* **komponensének***, ha*

(1) minden pontja eleme B_1-nek és B_2-nek, és

(2) maximális, abban az értelemben, hogy nincs magasabb dimenziós, őt tartalmazó altér, mely pontonként része $B_1 \cap B_2$-nek.

Tétel. *$PG(n, q^2)$ két Baer részterének pontonkénti metszete legfeljebb $q+1$ komponenst tartalmaz.*

Bizonyítás

Legyen a két Baer résztér B és B'. A reprezentációban B-nek $(q+1)$ darab, páronként diszjunkt, 2.típusú n-dimenziós tér felel meg, amiket reprezentáns tereknek neveztünk. Jelölje őket rendre $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{q+1})$, a B' térnek megfelelőket pedig $(\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_{q+1})$. Nyilván $\beta_i \cap \beta'_j$ altér lesz $PG(2n+1, q)$-ban, így a megfelelőjük $PG(n, q^2)$-ben pontonként közös altere lesz a két Baer résztérnek. Ez a közös altér tartalmazásra nézve maximális lesz, hiszen ha β'_j is és β'_k is metszi β_i-t, akkor diszjunkt altereket kapunk, mivel β'_j és β'_k diszjunktak.

Láttuk, hogy a reprezentáns terek között a következő összefüggés van: ha rögzítjük a β_1 alteret, akkor a tőle különböző β_i reprezentáns altér úgy kapható, hogy a β_1 pontjainak megfelelő $GF(q^{2n+2})$-beli vektorok (rögzítünk ilyeneket) mindegyikét megszorozzuk egy bizonyos ϱ_i $GF(q^2)$-beli elemmel, amelyre $\varrho_i \notin GF(q)$. Az így kapott vektorok $PG(2n+1)$-beli képe lesz β_i. Ez azt jelenti, hogy $i \neq j$ esetén $\beta_j = \frac{\varrho_j}{\varrho_i}\beta_i$, ahol a szorzást a fent említett módon értjük, $\frac{\varrho_j}{\varrho_i} \notin GF(q)$. Láttuk azt is, hogy a leképezés illeszkedéstartó. Ha tehát C_i altér β_i-ben, akkor $\frac{\varrho_j}{\varrho_i}C_i$ altér lesz β_j-ben. Vagyis a B Baer résztérhez tartozó reprezentáns elemek azonos struktúrájúak a metszet szempontjából is.

Mivel egy β_i-t legfeljebb $q+1$ darab β'_j metszhet, és a β'_j-k "felfűzött láncának" minden eleme ugyanúgy néz ki, ezért valóban legfeljebb $q+1$ komponense lehet a metszetnek. ■

$PG(n, q^2)$-ben Baer résztерek metszetére vonatkozóan a következő állítások igazak. (lásd [4]):

Lemma. *Legyenek P és Q közös pontjai a B_1 és B_2 Baer résztereknek, l pedig P és Q összekötő egyenese. Ekkor*

- *vagy az igaz, hogy csak két l-beli pont (P és Q) közös pontja B_1-nek és B_2-nek,*
- *vagy az l egyenesnek $q+1$ olyan pontja van, mely mindkét altérnek eleme.*

Lemma. *Legyen S_d pontonként közös, d-dimenziós altere B_1 és B_2 Baer résztereknek. Legyen az l olyan egyenes, amely a P pontban metszi S_d-t, és vannak olyan P-től különböző Q és R pontjai, melyek pontjai $B_1 \cap B_2$-nek is. Ekkor az S_d és l által meghatártozott S_{d+1} $(d+1)$-dimenziós altér pontonként közös altere B_1-nek és B_2-nek.*

Lemma. *Ha S_1 és S_2 d_1 illetve d_2-dimenziós alterek pontonként részei $B_1 \cap B_2$-nek, $S_1 \cap S_2 \notin \{\emptyset, S_1, S_2\}$ akkor van egy olyan magasabb dimenziós altér, mely tartalmazza S_1-et és S_2-t, és pontonként közös altere B_1 és B_2 Baer résztereknek.*

Tétel. *Ha S_1 és S_2 d_1 illetve d_2 dimenziós komponensei $B_1 \cap B_2$-nek, akkor az S_1 és S_2 által kifeszített, $(d_1 + d_2 + 1)$-dimenziós tér $B_1 \cap B_2$-t csak S_1-ben és S_2-ben metszi.*

A fenti tételek és a reprezentáció alkalmazásával kapjuk:

Tétel. *Két Baer résztér pontonkénti metszete olyan páronként diszjunkt, q-adrendű alterekből (komponensekből) áll, melyek mindegyike diszjunkt a többi altér generátumától.*

Bizonyítás

Azt fogjuk belátni, hogy az alterek generátumának metszete a két Baer résztér metszetével csak ezen altereket tartalmazza.

Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk az alterek számára vonatkozóan.

- Két altér esetét bizonyítja az előző tétel.

- Tegyük fel, hogy minden $i < k$ esetén tudjuk, és be szeretnénk látni k darab altér esetén is. Jelölje a komponenseket $A_1, A_2, \ldots, A_k$, dimenzióikat rendre $d_1, d_2, \ldots d_k$.

Tegyük fel indirekt módon, hogy van olyan P pontja $B_1 \cap B_2$-nek, amely benne van az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ generátumában, $\langle A_1, A_2, \ldots A_k \rangle$-ban, de nincs benne $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$-ben. Tekintsük az $\langle A_1, P \rangle$, $\langle A_2, P \rangle, \ldots, \langle A_k, P \rangle$ altereket. Ezek dimenziója rendre $d_1 + 1$, $d_2 + 1, \ldots, d_k + 1$. A dimenziószámok miatt az következik, hogy $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \langle A_i, P \rangle = l$, ahol l egyenes. Tehát $l \subset \langle A_i, P \rangle$. Mivel A_i hipersík $\langle A_i, P \rangle$-ben, ezért $A_i \cap l \neq \emptyset$, ezenkívül az is igaz, hogy l-en van még két további $B_1 \cap B_2$-beli pont, így a fenti tételekből következik, hogy $\langle A_i, l \rangle$ pontonként része a két Baer résztér metszetének. Ekkor viszont A_i nem komponens, tehát ellentmondásra jutottunk.

■

Tétel. *Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_k$ olyan q-adrendű alterek, melyek mindegyike diszjunkt a többi generátumától, és $k \leq q + 1$. Ha $\langle A_1, A_2, \ldots, A_k \rangle$ dimenziója n, akkor vannak olyan B és B' Baer részterek $PG(n, q^2)$-ben, melyeknek pontonkénti metszete éppen $A_1, A_2, \ldots, A_k$-val izomorf alterekből áll.*

Bizonyítás

Legyen B egy Baer résztér $PG(n, q^2)$-ben, továbbá $PG(2n+1, q)$-beli reprezentáns tereit jelölje $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{q+1}$. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_k$ a feltételben szereplő tulajdonságú alterei β_1-nek. Konstruálni szeretnénk olyan B' Baer részteret, amelyre igaz a tétel állítása. Ehhez elég volna ennek egy reprezentáns terét megkonstruálni, ez már meghatározza B'-t.

Olyan β_i'-ket keresünk, melyekre $\beta_1 \cap \beta_i' = A_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, továbbá $\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_{q+1}'$ reprezentáns terei B'-nek. Legyen $\varrho_i \in GF(q^2)$, de $\varrho_i \notin GF(q)$ az a szám, amelyre $\varrho_i \beta_1' = \beta_i'$, $i = 1, 2, \ldots, q+1$. Ekkor az $\frac{1}{\varrho_i} A_i, i = 1, 2, \ldots, k$ altere lesz β_1'-nek. Mivel $\frac{1}{\varrho_i} A_i$ dimenziója megegyezik A_i dimenziójával és a függetlenségi feltételek sem sérülnek, ezért $\langle A_1, \frac{1}{\varrho_2} A_2, \ldots, \frac{1}{\varrho_k} A_k \rangle$ az egész β_1'.

Megkonstruáltuk β_1'-t, ami reprezentációs tere B' Baer résztérnek, azaz az állítás igaz.

■

Tétel. *Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_j$ olyan q-adrendű alterek, melyek mindegyike diszjunkt a többi generátumától, és $j \leq q+1$. Ha $\langle A_1, A_2, \ldots, A_j \rangle$ dimenziója k, és $k < n$, akkor vannak olyan B és B' Baer részterek, melyeknek pontonkénti metszete éppen $A_1, A_2, \ldots, A_j$-val izomorf alterekből áll.*

Bizonyítás

Legyen B egy Baer résztér $PG(n, q^2)$-ben, $PG(2n+1, q)$-beli reprezentáns tereit pedig jelölje $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{q+1}$. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_j$ a feltételben szereplő tulajdonságú alterei β_1-nek, C pedig az az $(n-k-1)$-dimenziós altere β_1-nek, amely független $\langle A_1, A_2, \ldots, A_j \rangle$-től. Olyan B' Baer részteret szeretnénk konstruálni, amelyre igaz a tétel állítása. Ehhez elég ennek egy reprezentáns terét megkonstruálni. (Hiszen ez meghatározza B'-t.)

Az előző tétel bizonyításakor megmutattuk, hogyan lehet $A_1, A_2, \ldots A_j$-t "összetolni" egy β' 2.típusú n-dimenziós tér k-dimenziós alterébe ($\beta' \neq \beta_i$, $i = 1 \ldots q+1$). Azt szeretnénk még megmutatni, hogy ez a k-dimenziós altér valóban kiegészíthető 2.típusú n-dimenziós altérré úgy, hogy a keletkező B' Baer résztér pontosan $A_1, A_2, \ldots, A_j$-ben messe B-t.

Tekintsük $V(2n+2,q)$-t, azaz a $GF(q)$ feletti $(2n+2)$-dimenziós vektorteret, amelyből $PG(2n+1,q)$-t származtattuk. Itt S_1 egyeneseinek origón átmenő 2-dimenziós terek felelnek meg. (Minden egyenest pontosan egy tartalmaz közülük, hiszen S_1 befedése volt $PG(2n+1,q)$-nak.) Tehát $(n-k)$ darab síkot keresünk $V(2n+2,q)$-ban, melyek független S_1-beli egyeneseknek felelnek meg, és egyikük sincs sem $\langle A_1, A_2, \dots, A_j \rangle$-t sem C-t metsző S_1-beli egyeneseknek mefelelő síkok generátumában.

Mivel $n-k$ darab független S_1-beli egyenes generátumában $q^{2(n-k-1)} + q^{2(n-k-2)} + \dots + 1$ darab S_1-beli egyenes van, ezért elegendő ennyi darab, a fenti feltételnek eleget tevő 2-dimenziós teret találni.

Összesen $q^{2n} + q^{2(n-1)} + \dots + 1$ darab S_1-beli egyenes van, tehát nekik megfelelő 2-dimenziós altér is ennyi van. Az $\langle A_1, A_2, \dots, A_j \rangle$ $q^k + q^{k-1} + \dots + 1$ darabot fogalal le belőlük, C pedig $q^{n-k-1} + q^{n-k-2} + \dots + 1$ darabot.

Be kell tehát látnunk, hogy: $q^{2n} + q^{2(n-1)} + \dots + 1 - (q^k + q^{k-1} + \dots + 1) - (q^{n-k-1} + q^{n-k-2} + \dots + 1) \geq q^{2(n-k-1)} + q^{2(n-k-2)} + \dots + 1$, azaz:

$$q^{2n} + q^{2(n-1)} + \dots + 1 \geq$$

$$\geq q^k + q^{k-1} + \dots + 1 + q^{n-k-1} + q^{n-k-2} + \dots + 1 + q^{2(n-k-1)} + q^{2(n-k-2)} + \dots + 1.$$

Ehhez elég belátni, hogy $q^{2m} - q^{2(m-j-1)} \geq q^j + q^{m-j-1}$, $j < m$ esetén. Ez pedig igaz minden $q \geq 2$ és $m \geq 2$ esetén, hiszen ekkor $q^{2m} - q^{2(m-j-1)} = (q^m - q^{m-j-1})(q^m + q^{m-j-1}) \geq 2q^m \geq q^j + q^{m-j-1}$.

$\blacksquare$

5. Irodalomjegyzék

[1] R.C. Bose: On a representation of the Baer subplanes of the Desarguesian plane $PG(2, q^2)$ in a projective five dimensional space $PG(5, q)$ Proceedings of the International Colloquium on Combinatorial Theory, held in Rome, Sept. 3–15, 1973., 381–391

[2] J.W.P. Hirschfeld: Projective Geometries over Finite Fields Calendron Press, Oxford 1979.

[3] Kárteszi Ferenc: Bevezetés a véges geometriákba Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979.

[4] Marta Sved: Baer subspaces in the n dimensional projective space Combinatorial Mathematics X, Lecture Notes in Mathematics 1036, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokio 1983.

Tartalom