Ugrácsok és a matroid parity

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Szabó Jácint

Témavezető: Frank András egyetemi tanár

2002.

1 Bevezetés

A gráfok párosításai és a matroid metszet probléma a kombinatorikus optimalizálás két központi jelentőségű problémája. Sok közös tulajdonságuk van: megoldhatóak polinomiális időben, és számos alternáló utas algoritmusuk ismert. Metszetük szintén egy fontos és a kombinatorikus optimalizálást megalapozó probléma, a páros gráfok párosításainak témaköre. A párosítás és a matroid metszet probléma közös általánosítására több fogalom is született, kiemelkednek jelentőségükkel az *ugrácsok*, a *matroid parity* és a *path-matching*.

Az ugrácsokat Bouchet és Cunningham [3] vezették be 1995-ben a már meglévő delta-matroidok természetes továbbgondolásaként és a gráfok fokszámsorozatainak általánosításaként. Megmutatták, hogy az ugrácsok szoros kapcsolatban vannak a legbővebb poliéder osztállyal, amire működik a mohó algoritmus: a biszubmoduláris poliéderekkel. Úgy tűnik, hogy az ugrácsok túl általánosak ahhoz, hogy igazán mélyenszántó eredmények születhessenek róluk. A dolgozat első részében velük foglalkozunk, lényegében minden eddig született eredményt bemutatunk. Néhány megfigyelés és a biszubmoduláris függvények vizsgálata után rátérünk Lovász [22] szép elméletére, a tartalmazási problémára, ezután Tutte f-faktor tételének Geelen által való levezetését tárgyaljuk, majd az 5. fejezetben Frank András és Cunningham sejtéseit igazoljuk.

A Lawler által 1976-ban bevezetett matroid parity probléma teljes általánosságában NP-nehéz, de egy fontos speciális eset, a lineáris matroidok esete megoldható polinomiális időben, Lovász [18]. Bár a lineáris eset sok problémát tartalmaz, sajnos a matroid metszetet nem. Lovász formulát is adott a lineáris esetre [19], és elméletét alkalmazta a Mader-tétel bizonyítására, egy gráf maximális háromszög-kaktusza méretének meghatározására és csuklós szerkezetek merevségének vizsgálatára [20]. A dolgozatban tárgyaljuk az eddig született eredmények fontosabb részét. Alapvető definíciók és tételek után Lovász lineáris 2-polimatroidokról szóló elméletéről lesz szó, majd egy fejezet ezen elmélet kiterjesztésével, a teljes matroidokkal foglalkozik, végül leírjuk a Mader-tétel levezetését.

A harmadik közös általánosítással, a Cunningham és Geelen [7] által 1997-ben kitalált path-matchinggel csak érintőlegesen foglalkozunk a 2.2. alfejezetben. E területen már nagyon sok kérdéses részlet tisztázva van (poliéderes leírás, struktúratételek), eddig a leglényegesebb nyitott kérdés egy tisztán kombinatorikus algoritmus volt, amit nemrég sikerült Pap Gyulának [24] megoldania.

A nem hivatkozott vagy más módon nem jelölt állítások saját eredmények.

Hálásan köszönöm témavezetőmnek, Frank Andrásnak a munkám során nyújtott önzetlen és felbecsülhetetlen segítségét.

Tartalomjegyzék

2 Ugrácsok

2.1 Alapfogalmak

Az ugrácsokat, eredeti nevükön *jump system*eket Bouchet és Cunningham [3] vezették be.

Def.: Egy S véges halmazra $\mathsf{X}_{i\in S} I_i$-t *doboz*nak hívjuk, ha $I_i \subseteq \mathbb{Z}$ véges vagy végtelen intervallum. e^k legyen $k \in S$ egységvektora, azaz $e^k_k = 1,\ e^k_i = 0$ egyébként. $x, y \in \mathbb{Z}^S$ esetén

$$[x, y] := \{z \in \mathbb{Z}^S\colon\ \min(x_i, y_i) \le z_i \le \max(x_i, y_i)\ \forall i \in S\},$$

az x, y pontok határolta doboz. Továbbá

$$d(x, y) := \sum_{i\in S} |x_i - y_i|,$$

vagyis az l_1 normában mért távolság. Egy v pont x-től y-ig való *lépés*, ha $v \in [x, y]$ és $d(x, v) = 1$.

Def.: $J \subseteq \mathbb{Z}^S$ *ugrács*, ha

$$\forall x, y \in J\text{-re és } x\text{-től } y\text{-ig való } v \text{ lépésre vagy } v \in J,\ \text{ vagy } \exists\, z \in J\ \ v\text{-től } y\text{-ig való lépés.}$$

Def.: A J ugrács *fix összegű*, ha $x(S) = y(S)$ minden $x, y \in J$-re.

Az ugrácsokon értelmezett alábbi műveletekről az összeg kivételével nyilvánvaló, hogy újra ugrácsot adnak. Az összegről az 9. oldalon igazoljuk, hogy ugrácsot ad.

- **Eltolás**: minden ponthoz adjunk hozzá egy $a \in \mathbb{Z}^S$ vektort.
- **Tükrözés**: $i \in S$ mellett J-nek i-re való tükörképét úgy kapjuk, hogy J minden elemének i komponensét negáljuk.
- **Vetítés**: ha $R \subseteq S$, akkor J vetülete R-re az a halmaz, amit úgy kapunk, hogy J minden elemét megszorítjuk R-re.
- **Szorzat**: az S_1, S_2 diszjunkt halmazokon adott J_1, J_2 ugrácsok szorzata $J_1 \times J_2 := \{(x_1, x_2)\colon x_1 \in J_1,\ x_2 \in J_2\}$.
- **Összeg**: a közös S alaphalmazú J_1, J_2 ugrácsok összege $J_1 + J_2 := \{x_1 + x_2\colon\ x_1 \in J_1,\ x_2 \in J_2\}$.
- **Dobozzal való metszet**: Ha T egy doboz, akkor $J \cap T$ ugrács.
- **Minor**: Ha $R \subseteq S$ és $z \in \mathbb{Z}^R$, akkor J-t metszve $\{z\} \times \mathbb{Z}^{S-R}$-rel majd vetítve $S - R$-re kapjuk a z szerinti minort.

2.2 Példák

Lássunk néhány példát ugrácsokra:

Gráfok foksorozatai: Egy G irányítatlan gráf részgráfjainak fokszámsorozatai egy J_G ugrácsot alkotnak $V(G)$-n. A 9. oldalon erre több bizonyítást is fogunk látni. A foksorozatok azt mutatják, hogy az ugrácsok tartalmazási problémájának eldöntése nemtriviális is tud lenni, ebben az esetben egy $f \in \mathbb{Z}^{V(G)}$ vektorról annak eldöntése, hogy $f \in J_G$ teljesül-e, az *f-faktor probléma*.

Delta-matroidok A *delta-matroid* olyan ugrács, amely része az egységkockának, azaz minden eleme egy 0,1 vektor. A delta-matroidokat Bouchet [2] vezette be, és azóta számos eredmény született róluk. A delta-matroid felfogható az S alaphalmaz olyan $\mathcal{F}$ részhalmazrendszerének, amely kielégíti a következő *szimmetrikus kicserélési axiómát*:

$$\forall\ F, G \in \mathcal{F},\ x \in F \triangle G\text{-hez } \exists\ y \in F \triangle G,\ \text{hogy } F \triangle \{x, y\} \in \mathcal{F}.$$

A dolgozatban a delta-matroidokat az ugrácsokhoz hasonlóan vektorhalmaznak tekintjük.

Triviálisan a következő *twist* művelet delta-matroidot ad: az $\mathcal{F}$ delta-matroidra és $R \subseteq S$-re $\mathcal{F} \triangle R := \{F \triangle R \colon F \in \mathcal{F}\}$. A 2.1. alfejezet terminológiájával a twist megkapható egy tükrözéssel majd egy eltolással.

Könnyen látható, hogy a fix összegű delta-matroidok pontosan a matroidok bázishalmazai, ezért ezeket egyszerűen matroidoknak fogjuk hívni. A matroidok független halmazainak rendszere is delta-matroidot alkot, egy általános tételből pedig következni fog a 3.27 állítás, azaz hogy nemüres delta-matroid maximális részhalmazai egy matroid bázisait adják. Ez a megfigyelés jelenti a kapcsolatot a matroidelmélet és az ugrácsok között.

Egy G gráfra $J_G \cap [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ a gráf *matching delta-matroid*ja, azaz a párosításokkal fedhető csúcshalmazok karakterisztikus vektorainak halmaza. Fenti megjegyzésünk szerint a maximális párosítások fedte csúcshalmazok egy matroid bázisát adják, méghozzá a párosításmatroidét.

Maximális path-matching fokszámsorozatai A path-matching helyett egy általánosabb konstrukcióval kezdjük, a Pap Gyula által bevezetett alig szimmetrikus gráfokkal.

Def.: A G hurokél-mentes irányított gráf *alig szimmetrikus*, ha minden olyan élének a megfordítottja is szerepel a gráfban, amely él szerepel G egy irányított páratlan hosszú körében.

Def.: A G alig szimmetrikus gráf egy $E' \subseteq E(G)$ élhalmaza *páros faktor*, ha minden összefüggő komponense vagy egy irányított út, vagy egy páros hosszú irányított kör, vagy egy él és a megfordítottja alkotta kétpontú gráf. Egy páros faktor *érték*e a benne szereplő élek száma, azaz $val = |E'|$.

Cunningham [6] bebizonyítja, hogy a path-matchingek bizonyos módon értelmezett fokszámsorozatai ugrácsot alkotnak. Most Cunningham módszerével belátunk egy általánosabb tételt, miszerint a páros faktorok foksorozatai is ugrácsot alkotnak, ha egy irányított él mindkét végpontjába 1 fokszámot számít.

Ismert a következő állítás.

2.1 Állítás *Legyen V' és V'' diszjunkt, T pedig egy $V' \times V''$-s mátrix. Ekkor delta-matroidot alkotnak $V' \cup V''$-n azon $U \cup W$ alakú halmazok, amikre T-nek az (U, W) részmátrixa reguláris.*

Biz.: T mellé egy $V' \times V'$-s egységmátrixot téve $T(U,W)$ pontosan akkor reguláris, ha az új $\tilde{T}$ mátrix W-hez és $V' - U$-hoz tartozó oszlopai függetlenek, azaz ha $W \cup (V' - U)$ a $\tilde{T}$ lineáris matroidjának egy bázisa. Most egy V'-n való twisteléssel kapjuk az állítást. ∎

A kapott delta-matroid legyen $\Delta(T)$.

2.2 Tétel *Egy G alig szimmetrikus gráfban a páros faktorok olyan foksorozatai, ahol egy irányított él mindkét végpontjába 1 fokszámot számít, ugrácsot alkotnak.*

Biz.: Bevezetjük a G irányított gráf ún. *Tutte-mátrix*át: legyen a $V(G) \times V(G)$-n definiált T mátrixra $T_{u,v} = x_{uv}$, ha $\overrightarrow{uv}$ él G-ben, és $T_{u,v} := 0$ egyébként. Ha $\overrightarrow{uv}$ és $\overrightarrow{vu}$ is él G-ben, akkor legyen $x_{uv} + x_{vu} = 0$, de ezen összefüggéstől eltekintve az x-ek algebrailag legyenek függetlenek.

Nem nehéz meggondolni, hogy ha egy $T(U,W)$ reguláris részmátrix determinánsának kifejtésében összevonás után van egy nemnulla együtthatójú tag, akkor az a tag az alig szimmetrikusság miatt megfelel egy olyan páros faktornak, amely éleinek tövei pontosan az U pontjai, fejei pedig W pontjai. Vissza, G minden páros faktorára az élek és a tövek U illetve W halmazaira $T(U,W)$ reguláris.

Egy páros faktor szóban forgó foksorozata éppen $\chi_U + \chi_W$ az élek és a tövek U illetve W halmazaira. A páros faktorok foksorozatainak halmazát tehát megkaphatjuk $\Delta(T)$-ből úgy, hogy vesszük a $\chi_U + \chi_W$ vektorokat minden $U \cup W \in \Delta(T)$-re, ha $U \subseteq V(G) = V'$, $W \subseteq V(G) = V''$. A következő alfejezetben látni fogjuk, hogy ez épp a *homomorf kép* művelete, ami ugrácsból ugrácsot ad. (Itt a π partíció $\{(v', v'') \colon v \in V(G)\}$.) ∎

A bizonyításból az is következik, hogy a páros faktorok befoksorozatainak és kifoksorozatainak halmaza is delta-matroid.

2.3 Köv. *A maximális értékű páros faktorok foksorozatai ugrácsot alkotnak.*

Biz.: Egy E' páros faktor értéke $|E'| = \deg_{E'}(V)/2$, vagyis a maximális értékű páros faktorok értéke $\max(x(V)/2 \colon x \in J)$, ahol J a páros faktorok foksorozatainak ugrácsa. 4.2 szerint pedig egy V alaphalmazú ugrács olyan x vektorai, amelyekre $x(V)$ maximális, ugrácsot alkotnak. ∎

Megjegyezzük, hogy 2.2 nem alig szimmetrikus gráfokra nem igaz, ha a páros faktor definícióját kiterjesztjük tetszőleges irányított gráfra. Nem túl nehéz ugyanis belátni, hogy az irányított 5-hosszú kör páros faktorainak foksorozatai nem adnak ugrácsot. Ez egyébként következik a 40. oldal azon megjegyzéséből is, miszerint az 5-hosszú körre az 5-kizárt ≤ 2-faktorok foksorozata nem ugrács. (A fogalmak értelmezését lásd a 37. oldalon.)

Térjünk rá a path-matchingek foksorozataira.

Def.: [7] $G(V,E)$ irányítatlan gráf, T_1, T_2 a G csúcsainak diszjunkt, stabil részhalmazai, $R = V \setminus (T_1 \cup T_2)$. Egy $F \subseteq E$ élhalmaz *path-matching*, ha minden összefüggő komponense egy olyan út $T_1 \cup R$-ből $T_2 \cup R$-be, aminek minden belső csúcsa R-ben van. A path-matching egy éle *matching él*, ha önmagában egy összefüggő komponenst alkot, és mindkét vége R-beli. A path-matching *érték*e, $val(F)$ egyenlő az F éleinek számával plusz a matching élek számával.

Az érték esetleg mesterkéltnek tűnő definícióját a következő összefüggés világítja meg. Ha a G gráfot megirányítjuk úgy, hogy R minden feszített élét megirányítjuk mindkét irányban, egy

$T_1 - (R \cup T_2)$ élt T_1-ből kifelé irányítunk meg, a $(T_1 \cup R) - T_2$ éleket pedig T_2 felé irányítjuk meg, akkor látni fogjuk, hogy a kapott alig szimmetrikus $\overrightarrow{G}$ gráf páros faktorai megfelelnek az eredeti gráf path-matchingjeinek.

2.2 bizonyításának módszerével Cunningham [6] javítható hibával bebizonyítja, hogy ha a path-matchingek fokszámsorozatát úgy értjük, hogy minden nemmatching él, mint rendesen, 1-et számít mindkét végpontjának fokába, a matching élek pedig számíthatnak szimplán is és duplán is, azaz minden matching élről eldönthetjük, hogy az mindkét végpontjának fokába 1-et számít, avagy mindkét végpontjának fokába 2-t számít, és az összes így előálló foksorozatot tekintjük, akkor a path-matchingek foksorozatai ugrácsot alkotnak.

Cunninghamnek ezt az eredményét 2.2-ből és az imént leírt visszavezetésből bizonyítjuk be.

2.4 Tétel [6] *Ha a G gráf path-matchingjeinek minden matching éléről eldönthetjük, hogy az mindkét végpontjának fokába 1-et számít, avagy mindkét végpontjának fokába 2-t számít, akkor tekintve az összes path-matching összes így előálló foksorozatát, egy ugrácsot kapunk.*

Biz.: A fent leírt visszavezetés alig szimmetrikus $\overrightarrow{G}$ gráfjának páros faktoraiban felejtsük el az irányítást. A páros körök minden második élét eltörölve és az esetleges párhuzamos élekből egyet eltörölve egy path-matchinget kapunk. Ha a path-matching 1-hosszú utakból kapott matching éleit számítjuk szimplán, a páros körök maradék élei és a párhuzamos élpárok megmaradó élei alkotta többi matching élet pedig duplán számítjuk, akkor a kapott foksorozat megegyezik a páros faktor foksorozatával.

Vissza, egy path-matching egy foksorozatából úgy kaphatunk egy vele azonos foksorozatú páros faktort, hogy a $T_1 \cup R$-ből $T_2 \cup R$-be vezető legalább 2-hosszú utakat ilyen irányban megirányítjuk, a $T_1 - T_2$ éleket is megirányítjuk T_1-ből T_2-be, a duplán számító matching éleket megirányítjuk oda-vissza, végül a szimplán számítókat csak egy irányba irányítjuk meg.

Ezért $\overrightarrow{G}$ páros faktorainak foksorozatainak halmaza és G path-matchingjeinek szóban forgó foksorozatainak halmaza megegyezik. ∎

Ha a path-matchingek fokszámsorozatait a *val* értékfüggvénynek megfelelő módon, azaz úgy értelmezzük, hogy minden matching él 2-t számít mindkét végpontjába, akkor nem kapunk ugrácsot, amit az az egy élből álló gráf mutat, amire $T_1,\ T_2 = \emptyset$. Viszont a maximális értékű path-matchingek olyan foksorozatai, amelyekben minden matching él duplán számít, egy ugrácsot alkotnak 2.3 közvetlen következményeként.

2.3 A kompozíció művelete

Egy igen általános konstrukció következik, a kompozíció, amit Bouchet és Cunnigham vezetett be. 2.1 műveletei a kompozíciónak mind speciális esetei.

Def.: [3] Az S^1, S^2 alaphalmazokon adott J^1, J^2 ugrácsok *kompozíció*ja az $S^1 \triangle S^2$-n értelmezett következő $J^1 \wedge J^2$ vektorhalmaz: $J^1 \wedge J^2 = \{x^1 \wedge x^2 \colon x^1 \in J^1,\ x^2 \in J^2\}$, ahol $x^1 \wedge x^2 \in \mathbb{Z}^{S^1 \triangle S^2}$ az a vektor, amire $x^1_i = x^2_i$, ha $i \in S^1 \cap S^2$, $(x^1 \wedge x^2)_i = x^j_i$, ha $i \in S^j$.

Bouchet és Cunnigham [3] bebizonyítják, hogy a kompozíció nem vezet ki az ugrácsok köréből. A dolgozatban egy új bizonyítást adunk a tételre.

2.5 Tétel [3] *$J^1 \wedge J^2$ ugrács.*

Biz.: Legyen $x, y \in J^1 \wedge J^2$, valamint v lépés x-ből y-ba. x-et x^1, x^2-ből, y-t y^1, y^2-ből kapjuk. Tegyük fel, hogy $v \notin J^1 \wedge J^2$. Bebizonyítjuk, hogy ha adott egy olyan $v = v^1 \wedge v^2 \notin J^1 \wedge J^2$ vektor, amire $j = 1$ vagy 2-re $v^j \in J^j$, v^{3-j} pedig egy lépés egy J^{3-j}-beli vektorból y^{3-j}-be, akkor létezik egy $z \in J^1 \wedge J^2$ lépés v-ből y-ba. Ezt $d(\overline{v}^1, \overline{y}^1) = d(\overline{v}^2, \overline{y}^2)$-re vonatkozó indukcióval igazoljuk, ahol $\overline{w}$-sal egy w vektor $S^1 \cap S^2$-re való megszorítását értjük. Azért elég ezt igazolni, mivel v felírható a fentieknek megfelelő $v^1 \wedge v^2$ alakba. Feltehető, hogy $v^1 \in J^1$, és v^2 egy lépés egy J^2-beli vektorból y^2-be. $v \notin J^1 \wedge J^2$, így $v^2 \notin J^2$, vagyis létezik egy $v^2 \pm e^k \in J^2$ lépés v^2-ből y^2-be, feltehetjük, hogy ez a lépés $v^2 + e^k$. Ha $k \in S_2 \setminus S_1$, akkor készen vagyunk, így tegyük fel, hogy $k \in S_1 \cap S_2$. Most a $\tilde{v}^1 := v^1 + e^k$, $\tilde{v}^2 := v^2 + e^k \in J^2$ választással az indukciós mennyiség csökkent, és a feltevés szerint létező $v = \tilde{v}^1 \wedge \tilde{v}^2$-ből y-ba való z lépés jó lesz. ■

A kompozícióból minden fenti konstrukciót elegánsan le tudunk vezetni, és újakat is definiálhatunk. A kompozíció következményeként egy J ugrácsból kaphatunk úgy egy másikat, hogy az alaphalmaz minden i koordinátájára hat egy olyan f_i függvény, aminek a grafikonja ugrács. Például ilyenek a következő függvények: $f_a(x) := f(x) + a$, $f^-(x) := -f(x)$, $g(x) := x \bmod 2$. Ha f egy ilyen tulajdonságú függény, akkor legyen $J(f)$ az $\{(x, f(x)) \colon x \in \mathbb{Z}\}$ ugrács. Most az alaphalmaz minden koordinátájára úgy hattathatunk egy függvényt, hogy S-et megduplázzuk: S, S', majd $J^1 = J$, $S^1 = S$ mellett $S^2 := S \dot\cup S'$, továbbá $J^2 := \mathsf{X} J(f_i)$ úgy, hogy $J(f_i)$ alaphalmaza a rendezett (i, i') pár. $J^1 \wedge J^2$-vel a kívánt ugrácsot kapjuk. Ha $f_i = f_{a_i}$, akkor az a-val való eltolást kapjuk, ha $f_i = f^-$, $i = j$ esetén, és $f(x) = x$ egyébként, akkor a j koordinátára való tükrözést. Ha $f_i = g$ minden i-re, akkor Payan [25] tételét, miszerint ha egy ugrács minden vektorát mod2 vesszük, egy delta-matroidot kapunk.

Az előbbi, függvényből kapott ugrácsokat általánosabbakkal is helyettesíthetjük. Például a $J(f_i) := \{(x, x) \colon x \in I_i \text{ intervallum}\}$ definícióval az $I = \mathsf{X}_{i \in S} I_i$ dobozzal való metszetet kapjuk. J^1 és J^2 direkt szorzata egyszerűen $J^1 \wedge J^2$, ha S^1 és S^2 diszjunktak, J-nek $z \in \mathbb{Z}^R$ szerinti minorját pedig az $S^2 = R$, $J^2 = \{z\}$ választással kapjuk.

Érdekes következmény a Cunningham által bevezetett homomorf kép:

Def.: [6] Ha a J ugrács alaphalmaza S, és S-en adott egy $\pi = \{S_1, \ldots, S_k\}$ partíció, akkor J-nek e partíció szerinti homomorf képét, J_π-t úgy kapjuk, hogy J minden elemének egy partícióosztályba eső koordinátáinak komponenseit összeadjuk, azaz

$$J_\pi = \left\{ x \in \mathbb{Z}^k \colon \exists\, y \in J \colon x_i = \sum \{y_s \colon s \in S_i\},\ 1 \leq i \leq k\text{-ra} \right\}.$$

2.6 Tétel [6] *J_π ugrács.*

Biz.: Az $S^2 = S \dot\cup \{1, \ldots, k\}$ alaphalmazon értelmezett J^2 ugrács legyen $\mathsf{X} J_i$, ahol J_i az $S_i + i$ halmazon van értelmezve, és

$$J_i = \left\{ \left(x^1, x^2, \ldots, x^{|S_i|}, x^1 + x^2 + \ldots + x^{|S_i|} \right) \colon x^1, x^2, \ldots, x^{|S_i|} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Nyilván $J \wedge J^2 = J_\pi$. ■

Partíció helyett hipergráfot már nem vehetünk, azaz ha a hiperélekre eső komponenseket összeadjuk, akkor a hiperéleken értelmezett vektorhalmaz nem lesz feltétlenül ugrács. Ezt az mutatja, hogy $\{0,2\}$ ugrács, de $\{(0,0),(2,2)\}$ nem az. Azonban a matroidelméleti elempárhuzamozás nyíltszíni általánosítása működik, méghozzá úgy, hogy egy komponenst szétszedünk k-felé. Ez 2.5 bizonyításához hasonlóan látható, csak most a J_i-ket fordítva kell nézni, vagyis ha az i komponenst a T_i új komponens-halmazzá akarjuk szétszedni, és $S=\{1,\dots,n\}$, akkor az $S^2 = S\dot\cup T_1\dot\cup\dots\dot\cup T_n$ alaphalmazon kell definiálni a J^2 ugrácsot, ami legyen $\mathsf{X}J_i$, ahol J_i az $i+T_i$ halmazon van értelmezve, és $J_i = \{(x^1+x^2+\dots+x^{|T_i|}, x^1, x^2, \dots, x^{|T_i|}) \colon x^1, x^2, \dots, x^{|T_i|} \in \mathbb{Z}\}$. Ha a kapott $J \wedge J^2$-t elmetsszük $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$-gyel, akkor a matroidelméleti párhuzamos-képzést kapjuk.

Tehát ugrács homomorf képe ugrács, és delta-matroid homomorf képe is ugrács. Ez vissza is igaz, nevezetesen:

2.7 Tétel *Minden nemnegatív korlátos ugrács előáll delta-matroid homomorf képeként.*

Biz.: J korlátos, ezért feltehetjük, hogy $J \subseteq [\mathbf{0},\mathbf{M}]$. A fent leírt párhuzamosképzést $|T_i| = \mathbf{M}$-mel elvégezve, majd a kapott ugrácsot a $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ dobozzal metszve egy megfelelő delta-matroidot kapunk. ∎

A homomorf képből következik, hogy az összeg is ugrácsot ad: $J_1 + J_2$-t úgy kapjuk, hogy az egy pillanatra diszjunktnak tekintett $S_1 = S$ illetve $S_2 = S$ alaphalmazok unióján értelmezett $J_1 \times J_2$ ugrácsnak vesszük a homomorf képét az $\{\{s_1, s_2\} \colon s \in S\}$ partícióval. Az összegről először Sebő András igazolta, hogy ugrácsot ad, most leírunk egy a Sebő bizonyításához hasonló, közvetlen bizonyítást.

2.8 Tétel (Sebő András) *A J^1, J^2 ugrácsok $J^1 + J^2$ összege ugrács.*

Biz.: Adott $x, y \in J^1 + J^2$ és egy v x-ből y-ba való lépés, $x = x^1 + x^2$, $y = y^1 + y^2$. $d(x^1, y^1) + d(x^2, y^2)$-re vonatkozó indukcióval dolgozunk.

Feltehetjük, hogy $v = x + e^1$ és $x_1^1 < y_1^1$. $x^1 + e^1$ tehát egy lépés x^1-ből y^1-be, vagyis vagy $x^1 + e^1 \in J^1$, amikor $v \in J^1 + J^2$, vagy létezik egy $v' = x^1 + e^1 \pm e^i \in J^1$ megengedett lépés $x^1 + e^1$-ból y^1-be. Ha $v' + x^2$ lépés v-ből y-ba, akkor készen vagyunk, egyébként alkalmazhatjuk az indukciós feltevésünket $d(v', y^1) + d(x^2, y^2) = d(x^1, y^1) + d(x^2, y^2) - 2$ miatt $v' + x^2$, $y^1 + y^2$-re, és az $x + e^1$ $v' + x^2$-ből y-ba való lépésre. ∎

A kompozíció, és így a homomorf kép is következik az összegből, méghozzá úgy, hogy $J^1 \wedge J^2$ éppen $J^1 - J^2$-nek $S^1 \triangle S^2$-n való minorja a $\mathbf{0} \in \mathbb{Z}^{S^1 \cap S^2}$ vektor szerint.

Innen csak egy lépés, hogy gráfok J_G foksorozatai is ugrácsot alkotnak.

2.9 Tétel [3] *A G irányítatlan gráf részgráfjainak foksorozatai ugrácsot alkotnak.*

Biz.: $J_G = \sum(\{\mathbf{0}, e^u + e^v\} \colon uv \in E(G))$, és $\{\mathbf{0}, e^u + e^v\}$ ugrács. ∎

Nézzük, hogyan igazolható közvetlenül, hogy J_G ugrács.

Biz.: Legyen $x, y \in J_G$, $X, Y \subseteq E$, $\deg_X = x$, $\deg_Y = y$, v pedig egy lépés x-ből y-ba. (v nem foksorozat, hiszen páratlan összegű.) $|X \cap Y|$ szerinti indukcióval dolgozunk. Tegyük fel először, hogy $v = x + e^a$ és $x_a < y_a$. a-ból egy tetszőleges $Y \setminus X$-beli ab élt behúzva b-nél vagy éppen a megfelelő irányba javítottunk, amikoris készen vagyunk, vagy $x_b \geq y_b$ volt, amikor $ab \in Y \setminus X$ miatt létezik b-nek egy $X \setminus Y$-beli bc éle. Ha a $z = \deg_{X+ab-bc}$ foksorozatra z egy lépés v-ből y-ba, akkor készen vagyunk, egyébként az $X + ab - bc$, Y részgráfokra az indukciós mennyiség 1-gyel javult, így a z és y foksorozatokra, valamint a $z + e^c = v$ z-ből y-ba való lépésre tudjuk, hogy létezik egy $z' \in J$ v-ből y-ba való lépés, ahonnan készen vagyunk. Az $x_a > y_a$ esetben vegyünk G-hez egy extra s csúcsot és az sa élt, és legyen $X' = X$, $Y' = Y + sa$, $v' = x' + e^s = \deg X' + e^s$. ■

2.5 és 2.8 bizonyítása, valamint a legutolsó bizonyításunk mind a billentős technikával történt. A művelet legjobban a legutolsó bizonyításon látszik: itt egy, a b csúcsra illeszkedő élt billentünk át minden lépésben, ezzel X-et egyre inkább közelítve Y-hoz. Valójában az történik, hogy egy javítóúton megyünk végig, de mindig csak két lépést teszünk meg, amivel visszavezetjük a feladatot egy szerkezetében ugyanolyanra, amiben az indukciós mennyiség csökkent. A módszer hasznát látni fogjuk majd az 5. fejezetben.

A kompozíció közvetlen következményeként a matroidelméleti Rado-tételhez hasonlóan egy gráf segítségével is konstruálhatunk új ugrácsokat. Ha adott egy (V, W, E) páros gráf és V-n egy J ugrács, akkor a kompozíció következtében egy J' ugrácsot kaphatunk W-n úgy, hogy $x \in J' \Leftrightarrow$ létezik egy $F \subseteq E$ részgráf és egy $y \in J$, hogy $\deg_F = y$ a V-n, és $\deg_F = x$ a W-n. Ha a gráf komponensei megsokszorozott élű csillagok, akkor a homomorf képet kapjuk korlátos, nemnegatív ugrácsokra. Figyeljük meg, hogy ha J egy matroid függetlenjeinek karakterisztikus vektoraiból áll, akkor J'-t metszve a $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ kockával a Rado-tételbeli matroidot kapjuk. Páros gráf helyett tetszőleges gráfot is tekinthetünk, és az éleken értelmezett $\{\mathbf{0}, e^u + e^v\}$ ugrácsok helyett más kétdimenziós ugrácsot is vehetünk.

A kompozíció műveletével be tudjuk bizonyítani, hogy a Mader-féle teljesen pontdiszjunkt A-utak végpontjai egy delta-matroidot alkotnak. Legyen ugyanis J^1 az az ugrács $V - A$-n, aminek elemei az összes 0,2 vektor, J^2 pedig legyen J_G elmetszve azzal a dobozzal, aminek oldalai A pontjain $[0, 1]$, $V - A$ pontjain pedig $[0, 2]$. Könnyen ellenőrizhetően $J^1 \wedge J^2$ a kívánt delta-matroid A-n.

Az éldiszjunkt eset egy variációja is kezelhető, ha olyan éldiszjunkt A-utakat nézünk, melyeknek végpontjai különböznek, akkor a végpontok A-n most is egy delta-matroidot alkotnak, mindössze J^1-et kell megváltoztatni, hogy az az ugrács legyen $V - A$-n, aminek elemei az összes páros komponensű vektor.

Ha a kompozíciót két foksorozatra alkalmazzuk, akkor egy érdekes állítást kapunk *piros-kék gráf*okra: egy piros-kék gráf egy olyan irányítatlan gráf, amelynek minden éle piros vagy kék. Ekkor az egyszínű csúcsokon ugrácsot adnak azok a foksorozatok, amelyeket G olyan részgráfjai adnak, amik minden tarka csúcsban ugyanannyi kék mint piros élt tartalmaznak. Ugyanezt J_G helyett a matching delta-matroidokra elmondva kapjuk [3], hogy az egyszínű csúcsok azon részhalmazai, amelyek összeköthetőek egymással pontdiszjunkt alternáló úttal, egy delta-matroidot alkotnak. Ha csak piros élek vannak, a matching delta-matroidot kapjuk vissza.

3 Biszubmoduláris függvények

3.1 Bevezetés

A biszubmoduláris függvények több matematikus munkája nyomán születtek meg a szubmoduláris függvények általánosításaként, nevezetesen Chandrasekaran, Kabadi, Nakamura és Qi révén. A belőlük származtatott biszubmoduláris poliédereket Dunstan és Welsh vezették be [9]. A biszubmoduláris poliéderek a szubmoduláris poliédereket, a bázispoliédereket, a polimatroidokat és a g-polimatroidokat is általánosítják, és nagyon szoros kapcsolatuk van az ugrácsokkal: minden ugrács konvex burka biszubmoduláris poliéder.

Def.: Az S alaphalmaz diszjunkt rendezett részhalmazpárjait jelöljük $\mathcal{F}(S)$-sel, azaz $\mathcal{F}(S) := \{(X,Y)\colon X,Y \subseteq S,\ X \cap Y = \emptyset\}$. $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2) \in \mathcal{F}(S)$-re legyen

$$(X_1,Y_1) \sqcap (X_2,Y_2) = (X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2) \text{ és}$$

$$(X_1,Y_1) \sqcup (X_2,Y_2) = ((X_1 \cup X_2) \setminus (Y_1 \cup Y_2), (Y_1 \cup Y_2) \setminus (X_1 \cup X_2)).$$

$(X_1,Y_1) \sqsubseteq (X_2,Y_2)$, ha $X_1 \subseteq X_2$ és $Y_1 \subseteq Y_2$.

Def.: Az $f\colon \mathcal{F}(S) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ függvény *biszubmoduláris függvény*, ha $f(\emptyset,\emptyset) = 0$, és minden (X_1,Y_1), $(X_2,Y_2) \in \mathcal{F}(S)$-re

$$f(X_1,Y_1) + f(X_2,Y_2) \geq f((X_1,Y_1) \sqcap (X_2,Y_2)) + f((X_1,Y_1) \sqcup (X_2,Y_2)).$$

Def.: [9] Az $\mathcal{F}(S)$-en értelmezett f biszubmoduláris függvény *biszubmoduláris poliéder*e:

$$P(f) = \{v \in \mathbb{R}^S : v(X) - v(Y) \leq f(X,Y)\ \ \forall (X,Y) \in \mathcal{F}(S)\}.$$

Sok ismert poliéder biszubmoduláris, így a szubmoduláris poliéder, a bázispoliéder, a polimatroid és a Frank András által bevezetett g-polimatroid is. Most megadjuk az őket definiáló biszubmoduláris függvényt [3].

Def.: A $b\colon \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ függvény *szubmoduláris*, ha minden $X,Y \subseteq S$ halmazra $b(X) + b(Y) \geq b(X \cap Y) + b(X \cup Y)$, és $b(\emptyset) = 0$. A p szubmoduláris függvény *polimatroid függvény*, ha véges, monoton nő és egészértékű. A b, h szubmoduláris függvények *erős pár*t alkotnak, ha minden $X,Y \subseteq S$ halmazra $b(X) + h(Y) \geq b(X - Y) + h(Y - X)$.

Ha b szubmoduláris függvény, p polimatroid függvény, h pedig b-vel erős párt alkotó szubmoduláris függvény, akkor könnyen ellenőrizhetően

$$S(b) = \{v \in \mathbb{R}^S : v(X) \leq b(X)\ \forall X \subseteq S\} = P(f),$$

ahol $f(X,\emptyset) = b(X)$ és $f(X,Y) = \infty$ egyébként.

$$B(b) = \{v \in \mathbb{R}^S : v(X) \leq b(X)\ \forall X \subseteq S,\ \ v(S) = b(S)\} = P(f),$$

ahol $f(X,Y) = b(X) + b(S - Y) - b(S)$.

$$P(p) = \{v \in \mathbb{R}^S : v \geq 0,\ \ v(X) \leq p(X)\ \forall X \subseteq S\} = P(f),$$

ahol $f(X,Y) = p(X)$. Végül

$$Q(b,h) = \{v \in \mathbb{R}^S :\ -h(X) \leq v(X) \leq b(X)\ \forall X \subseteq S\} = P(f),$$

ahol $f(X,Y) = b(X) + h(Y)$.

Nem meglepő, hogy a biszubmoduláris poliédereknek sok szép tulajdonságuk van, ezek nagyrészt a szubmoduláris függvényeknél látott eredmények analógiái. Például:

Def.: Ha egy $x \in P(f)$ pontra $x(X) - x(Y) = f(X,Y)$, akkor (X,Y)-t az x-re nézve *szoros*nak mondjuk.

3.1 Állítás *Szoros halmazpárok metszete és uniója is szoros.*

Biz.: Ha (X_1,Y_1), (X_1,Y_2) szoros halmazpárok, akkor

$$x(X_1) - x(Y_1) + x(X_2) - x(Y_2) = f(X_1,Y_1) + f(X_2,Y_2) \geq$$

$$\geq f((X_1,Y_1) \sqcap (X_2,Y_2)) + f((X_1,Y_1) \sqcup (X_2,Y_2)) \geq$$

$$\geq x(X_1 \cap X_2) - x(Y_1 \cap Y_2) + x((X_1 \cup X_2) \setminus (Y_1 \cup Y_2)) - x((Y_1 \cup Y_2) \setminus (X_1 \cup X_2)) =$$

$$= x(X_1) - x(Y_1) + x(X_2) - x(Y_2).$$

■

Frank Andrásnak a szubmoduláris függvényekre kidolgozott technikájával egy füst alatt bebizonyíthatjuk, hogy az f véges, egész biszubmoduláris függvényre a $P(f)$-et definiáló rendszer TDI, $P(f) \neq \emptyset$, és hogy működik rá tetszőleges súlyfüggvénnyel a mohó algoritmus.

Def.: [2],[3] *Mohó algoritmus* alatt azt az eljárást értjük, amely a következőképpen maximalizál egy korlátos $P \subset \mathbb{R}^n$ ponthalmazon egy c célfüggvényt. Tegyük fel, hogy $|c_1| \geq |c_2| \geq \ldots \geq |c_k| > |c_{k+1}| = \ldots = |c_n| = 0$. Legyen $P_0 = P$. Ha $i < k$, akkor P_{i+1}-et úgy kapjuk P_i-ből, hogy vesszük P_i-nek a maximális $i+1$ koordinátájú pontjait, ha c_{i+1} pozitív, és a minimálisakat, ha negatív. Az algoritmus kimenete legyen P_k, vagy P_k egy pontja. A P korlátos ponthalmazon a mohó algoritmus *helyes*en működik, ha $\max(cx\colon x \in P) = \max(cx\colon x \in P_k)$.

Először szükségünk van a következő nem túl nehéz megfigyelésre:

3.2 Állítás *Ha f egy biszubmoduláris függvény S-en, és $R \subseteq S$, akkor $P(f)$-et tükrözve R-re a kapott poliéder ismét biszubmoduláris, éspedig megegyezik $P(f')$-vel, ahol*

$$f'(X,Y) = f((X \setminus R) \cup (Y \cap R),\ (Y \setminus R) \cup (X \cap R).$$

■

3.3 Tétel *Ha az f biszubmoduláris függvény véges, akkor $P(f) \neq \emptyset$, működik tetszőleges súlyfüggvénnyel a mohó algoritmus, és ha f egész is, akkor a $P(f)$-et definiáló rendszer TDI.*

Biz.: Legyen $c \in \mathbb{R}^S$ tetszőleges célfüggvény. Tükrözéssel és a koordináták cseréjével feltehető, hogy $c_1 \geq \ldots \geq c_n \geq 0$, ha $S = \{1, \ldots, n\}$. Legyen $S_i = \{1, \ldots, i\}$. Definiáljuk az $x \in \mathbb{R}^S$ vektort a következőképpen: $x_1 := f(S_1, \emptyset)$, $x_i := f(S_i, \emptyset) - f(S_{i-1}, \emptyset)$, $i \geq 2$-re. Először belátjuk, hogy $x(X) \leq f(X, \emptyset)$ minden $X \subseteq S$-re. Legyen $m(X) = i$ a legnagyobb szám, amire $i \in X$. m-re vonatkozó indukcióval dolgozunk, az $m(X) = 1$ eset világos. Nagyobb m-re:

$$f(X, \emptyset) \geq f(X \cap S_{i-1}, \emptyset) + f(X \cup S_{i-1}, \emptyset) - f(S_{i-1}, \emptyset) \geq$$

$$\geq x(X \cap S_{i-1}) + f(S_i, \emptyset) - f(S_{i-1}, \emptyset) = x(X).$$

Legyenek most $X, Y \subseteq S$, $X \cap Y \neq \emptyset$ tetszőleges halmazok:

$$x(X) - x(Y) - f(X, Y) = x(X) - x(Y) - f(X, Y) + x(S) - f(S, \emptyset) \leq$$

$$\leq x(S - Y) - f(S - Y, \emptyset) + x(X) - f(X, \emptyset) \leq 0,$$

vagyis $x \in P(f)$. Következik az is, hogy a biszubmoduláris poliéder nemüres.

Hogy x optimális vektor $P(f)$-ben, azt úgy látjuk be, hogy konstruálunk egy duális optimális vektort: $y(S, \emptyset) := c_n$, $y(S_i, \emptyset) := c_i - c_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$-re és $y := 0$ egyébként. Most

$$cx = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(f(S_i, \emptyset) - f(S_{i-1}, \emptyset) \right) = \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_{i+1}) f(S_i, \emptyset) + c_n f(S, \emptyset) = \sum_{(X,Y) \in \mathcal{F}(\mathcal{S})} y(X, Y) f(X, Y),$$

ahonnan x primál, y duál optimum, és ha f egész, akkor a rendszer TDI. ∎

3.4 Tétel *Ha az f biszubmoduláris függvény véges, és a c célfüggvényre $|c|$ minden komponense különböző pozitív szám, akkor a cx-et maximalizáló $P(f)$-beli pont egyértelmű.*

Biz.: Tükrözéssel és a koordináták cseréjével feltehető, hogy $c_1 > \ldots > c_n > 0$. Tegyük fel, hogy a $P(f)$-en cx-et maximalizáló mohó algoritmus $v \in P(f)$-et adja kimenetként. A mohó algoritmus helyessége miatt v szimultán maximalizálja $P(f)$-en $w_i x$-et, ahol $w_i = e^1 + \ldots + e^i$. Vagyis ha egy $y \in P(f)$ pontra $cy = cv = \max(cx \colon x \in P(f))$, akkor y is szimultán maximalizálja $w_i x$-et, vagyis $w_i y = w_i v$, $1 \leq i \leq n$-re és így $y = v$. ∎

Biszubmoduláris függvényeken is lehet kikeresztezni, a technikát azzal illusztráljuk, hogy a Farkas-lemmával is bebizonyítjuk, hogy $P(f) \neq \emptyset$ tetszőleges f-re.

3.5 Tétel *Az f biszubmoduláris függvényre $P(f) \neq \emptyset$.*

Biz.: Legyen $|S| = n$. Tegyük fel, hogy $P(f) = \emptyset$, ekkor a Farkas-lemma szerint, $y(X,Y)$-t 0-nak választva amennyiben $f(X,Y) = \infty$: minden $(X,Y) \in \mathcal{F}(S)$-hez létezik $0 \le y(X,Y) \in \mathbb{R}$, hogy $y(X,Y) = 0$, ha $f(X,Y) = \infty$,

$$\sum_{(X,Y)\in\mathcal{F}(S)} y(X,Y)f(X,Y) < 0 \text{ és minden } i \in S\text{-re: } \sum_{i\in X} y(X,Y) = \sum_{i\in Y} y(X,Y).$$

Fixáljuk le $\beta = \sum\{y(X,Y)f(X,Y)\colon (X,Y) \in \mathcal{F}(S)\} < 0$ értékét, és jelöljük $\sum_{i\in S}\sum_{i\in X} y(X,Y)$ értékét az aktuális y duális változóra γ-val. Ha $\gamma > 0$, akkor létezik egy olyan $(X_1,Y_1) \in \mathcal{F}(S)$ halmazpár, hogy $X_1 \ne \emptyset$ és $y(X_1,Y_1) \ge \gamma/(n3^{n-1})$. Legyen $i \in X_1$. $\sum_{i\in X} y(X,Y) = \sum_{i\in Y} y(X,Y)$ miatt létezik $(X_2,Y_2) \in \mathcal{F}(S)$, hogy $i \in X_1 \cap Y_2$ és $y(X_2,Y_2) \ge y(X_1,Y_1)/3^{n-1}$. Legyen $\alpha = \min(y(X_1,Y_1), y(X_2,Y_2)) \ge \gamma/(n3^{2n-2})$. $y(X_1,Y_1)$, $y(X_2,Y_2)$ értékét csökkentsük α-val, $y((X_1,Y_1) \sqcap (X_2,Y_2))$, $y((X_1,Y_1) \sqcup (X_2,Y_2))$ értékét pedig növeljük α-val. $f(X_1,Y_1)$ és $f(X_2,Y_2)$ végesek, így $f((X_1,Y_1)\sqcap(X_2,Y_2))$, $f((X_1,Y_1)\sqcup(X_2,Y_2))$ is végesek, vagyis a kapott y továbbra is duális megoldás, mivel

$$\sum_{(X,Y)\in\mathcal{F}(S)} y(X,Y)f(X,Y) \le \beta < 0.$$

γ legalább $\alpha \ge \gamma/(n3^{2n-2})$-nel csökkent. Az eljárást folytassuk addig, míg $\gamma < |\beta|/(M3^n)$ nem lesz, ahol $M = \max\{|f(X,Y)|\colon f(X,Y) \text{ véges}\}$. Most $f(\emptyset,\emptyset) = 0$ miatt

$$\left|\sum\{y(X,Y)f(X,Y)\colon (X,Y) \in \mathcal{F}(S)\}\right| <$$

$$< M\left|\sum\{y(X,Y)\colon (X,Y) \in \mathcal{F}(S), (X,Y) \ne (\emptyset,\emptyset)\}\right| \le M3^n\gamma < |\beta|,$$

ami ellentmondás $\sum\{y(X,Y)f(X,Y)\colon (X,Y) \in \mathcal{F}(S)\} \le \beta < 0$ miatt. ∎

3.2 A mohó tulajdonság

A biszubmoduláris poliéderek további vizsgálatához szükségünk van a következő definícióra:

Def.: [3] Egy $P \subseteq \mathbb{R}^S$ ponthalmazra és $(X,Y) \in \mathcal{F}(S)$-re $v \in P$ (X,Y)-*maximális*, ha minden olyan $w \in P$ pontra, amire $w \ge v$ az X-en és $w \le v$ az Y-on, teljesül, hogy $v|_{X\cup Y} = w|_{X\cup Y}$.

3.6 Állítás *Ha $P(f)$ biszubmoduláris poliéder és $v \in P(f)$* (X,Y)-maximális, *akkor $v(X) - v(Y) = f(X,Y) = \max(x(X) - x(Y)\colon x \in P(f))$.*

Biz.: Tükrözéssel feltehetjük, hogy $Y = \emptyset$. Fixáljuk le $i \in X$-et. Azért nem tudjuk v_i-t növelni, mert létezik egy olyan v-szoros (A,B) halmazpár, hogy $i \in A$. Minden $j \notin X$-re létezik egy olyan v-szoros (A_j^-, B_j^-) halmazpár, amire $i \in A_j^-$, $j \notin A_j^-$, ugyanis minden pozitív ε-ra $v + \varepsilon e^i - \varepsilon e^j \notin P(f)$, így létezik egy olyan v-szoros (A'_j, B'_j) halmazpár, hogy vagy $i \in A'_j$, $j \notin A'_j$, vagy $i \notin B'_j$, $j \in B'_j$. Az első esetben legyen $(A_j^-, B_j^-) = (A'_j, B'_j)$, a másodikban pedig $(A_j^-, B_j^-) := (A'_j, B'_j) \sqcup (A,B)$. Továbbá minden $j \ne i$-re létezik egy olyan v-szoros (A_j^+, B_j^+) halmazpár, amire $i \in A_j^+$, $j \notin B_j^+$, ugyanis minden pozitív ε-ra $v + \varepsilon e^i + \varepsilon e^j \notin P(f)$, így létezik egy olyan v-szoros (A'_j, B'_j) halmazpár, hogy vagy $i \in A'_j$, $j \notin B'_j$, vagy $j \in A'_j$, $i \notin B'_j$. Az első esetben legyen $(A_j^+, B_j^+) = (A'_j, B'_j)$, a másodikban pedig $(A_j^+, B_j^+) := (A'_j, B'_j) \sqcup (A, B)$. Mint láttuk, szoros halmazpárok metszete is szoros, vagyis az öszes fenti halmazpár metszete, $(X_i, \emptyset)$ is v-szoros, és X_i-re $i \in X_i \subseteq X$ áll. Minden $i \in X$-re az $(X_i, \emptyset)$ halmazpárok uniója éppen $(X, \emptyset)$, vagyis $v(X) = f(X, \emptyset)$. Innen az is következik, hogy $f(X, \emptyset) = \max(x(X) : x \in P(f))$. ■

A következő tételre egy, az eredetitől eltérő bizonyítást adunk 3.6 segítségével:

3.7 Tétel [3] *Ha f biszubmoduláris, akkor minden (X, Y) halmazpárra $f(X, Y) = \sup(x(X) - x(Y) : x \in P(f))$.*

Biz.: Ha $\sup(x(X) - x(Y) : x \in P(f)) = \infty$, akkor persze $f(X, Y) = \infty$, így feltehetjük, hogy a szuprémum véges. $P(f)$ zárt, így $\sup(x(X) - x(Y) : x \in P(f)) = \max(x(X) - x(Y) : x \in P(f))$. Ha x-en vétetik fel a maximum, akkor x nyilván (X, Y)-maximális, így az előző tételből $x(X) - x(Y) = f(X, Y)$. ■

3.8 Köv. [3] *A biszubmoduláris poliéder egyértelműen meghatározza az őt adó f biszubmoduláris függvényt.* ■

3.9 Köv. *$P(f)$ pontosan akkor korlátos, ha f véges.* ■

A 3.7 tétel véges f-re következik 3.3 bizonyításából is. Most belátjuk, hogy ha $f(X, Y)$ véges, akkor a biszubmoduláris poliéder azon pontjai, amelyekre (X, Y) szoros, szintén egy biszubmoduláris poliédert alkotnak. Következésképpen van ilyen pont, vagyis egy harmadik bizonyítást is látunk 3.7-re.

Def.: Ha $f(X, Y)$ véges, akkor a $P(f)$ biszubmoduláris poliéder (X, Y)-hoz tartozó *lap*ját azon v pontjai alkotják, amelyekre $v(X) - v(Y) = f(X, Y)$.

Def.: Egy $P \subseteq \mathbb{R}^S$ ponthalmaznak $F \subseteq P$ *oldal*a, ha létezik egy olyan $c \in \mathbb{R}^S$ vektor, hogy F pontosan a cx célfüggvényt P-n maximalizáló pontokból áll.

3.10 Tétel *Biszubmoduláris poliéder lapja is biszubmoduláris poliéder, és ha a poliéder definiáló függvénye egész, akkor a lapot definiáló függvény is egész.*

Biz.: Legyen $f(X, Y)$ véges, belátjuk, hogy $P(f)$-nek (X, Y)-hoz tartozó lapja is egy biszubmoduláris poliéder. Tükrözéssel feltehető, hogy $Y = \emptyset$. Legyen

$$g(A, B) = f(A \cap X, \emptyset) + f(X \setminus B, \emptyset) + f(A \cup X, B \setminus X) - 2f(X, \emptyset).$$

A képlet a (már ismert) $\max(x(X) - x(Y) : x \in P(f)) = f(X, Y)$ összefüggésből és a mohó algoritmus vizsgálatából sejthető meg. g biszubmoduláris, mivel $g(\emptyset, \emptyset) = 0$, definíció szerint

$$f(A_1 \cup X, B_1 \setminus X) + f(A_2 \cup X, B_2 \setminus X) \geq$$

$$\geq f((A_1 \cap A_2) \cup X, (B_1 \cap B_2) \setminus X) + f(((A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2)) \cup X, ((B_1 \cup B_2) \setminus (A_1 \cup A_2)) \setminus X),$$

és a fennmaradó egyenlőtlenség a definícióból következő alábbi három egyenlőtlenség összege:

$$f(A_1 \cap X, \emptyset) + f(A_2 \cap X, \emptyset) \geq f((A_1 \cap A_2) \cap X, \emptyset) + f((A_1 \cup A_2) \cap X, \emptyset),$$

$$f(X \setminus B_1, \emptyset) + f(X \setminus B_2, \emptyset) \geq f(X \setminus (B_1 \cap B_2), \emptyset) + f(X \setminus (B_1 \cup B_2), \emptyset),$$

$$f((A_1 \cup A_2) \cap X, \emptyset) + f(X \setminus (B_1 \cup B_2), \emptyset) \geq$$

$$\geq f(((A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2)) \cap X, \emptyset) + f(X \setminus ((B_1 \cup B_2) \setminus (A_1 \cup A_2)), \emptyset).$$

Most már csak az kell, hogy $P(g)$ épp a megfelelő pontokat adja: kétszer alkalmazva f definiáló egyenlőtlenségét, egyszerűen kapjuk, hogy $g \leq f$ és $g(\emptyset, X) = -f(X, \emptyset)$, így minden $P(g)$-beli pontra $(X, \emptyset)$ szoros, másrészt ha $x \in P(f)$-re $x(X) = f(X, \emptyset)$, akkor

$$x(A) - x(B) = x(A \cap X) + x(X \setminus B) + x(A \cup X) - x(B \setminus X) - 2x(X) \leq$$

$$\leq f(A \cap X, \emptyset) + f(X \setminus B, \emptyset) + f(A \cup X, B \setminus X) - 2f(X, \emptyset) = g(A, B).$$

Végül ha f egész, akkor g is az. ■

3.11 Köv. *Biszubmoduláris poliéder oldala is biszubmoduláris poliéder, és ha a biszubmoduláris poliéder definiáló függvénye egész, akkor az oldalt definiáló függvény is egész.*

Biz.: Világos, hogy $P(f)$ minden oldala megkapható egymás utáni lap-képzéssel. ■

Felmerül a kérdés, hogy mit mondhatunk két biszubmoduláris poliéder metszetéről. Általában a metszet nem biszubmoduláris, amit a következő példa mutat: $S = \{1, 2, 3\}$-ra $f_1(X, Y) := 0$, ha $(X, Y) := (\emptyset, \emptyset), (\{1, 3\}, \emptyset), (\emptyset, \{1, 3\})$, f_1 legyen ∞ egyébként; és $f_2(X, Y) := 0$, ha $(X, Y) := (\emptyset, \emptyset), (\{1, 2\}, \emptyset)$, és f_2 legyen ∞ egyébként. Ekkor $P(f_1) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}$, $P(f_2) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 \leq 0\}$, de $P(f_1) \cap P(f_2)$ nem biszubmoduláris, mint az könnyen ellenőrizhető 3.7 felhasználásával. ($P(f_1) \cap P(f_2)$ arra is példa hogy nem minden olyan poliéder biszubmoduláris, amit $0, \pm 1$ normálisú félterek metszeteként kapunk.)

Biszubmoduláris poliéder dobozzal való nemüres metszete viszont újra biszubmoduláris poliéder, mint azt be is bizonyítjuk.

3.12 Tétel *Ha a $P(f)$ biszubmoduláris poliéder és a $T = \{x \in \mathbb{R}^S : x_1 \leq u\}$ doboz metszete nemüres, akkor a metszet megegyezik a $P(g)$ biszubmoduláris poliéderrel, ahol*

$$g(X, Y) = \min(f(X, Y), f(X, Y + 1) + u), \text{ ha } 1 \notin X \cup Y,$$

$$g(X, Y) = \min(f(X, Y), f(X - 1, Y) + u, f(X - 1, Y + 1) + 2u), \text{ ha } 1 \in X \text{ és}$$

$$g(X, Y) = f(X, Y), \text{ ha } 1 \in Y.$$

Biz.: Egyszerű esetszétválasztással könnyű látni, hogy g biszubmoduláris: $g(X_1, Y_1) + g(X_2, Y_2) \geq g((X_1, Y_1) \sqcap (X_2, Y_2)) + g((X_1, Y_1) \sqcup (X_2, Y_2))$ igazolásánál a bal oldali minimumok minden lehetséges értékéhez van a jobboldalon egy-egy olyan tag, hogy azok összege kisebb-egyenlő, mint a bal oldal, továbbá $g(\emptyset, \emptyset) = 0$ a metszet nemüressége miatt.

$g \leq f$ és $x \in P(g)$-re $x_1 \leq u$, vagyis $P(g) \subseteq P(f) \cap T$. Másrészt ha egy $y \in P(f)$ pontra $y_1 \leq u$, akkor

- $1 \notin X \cup Y$ esetén $y(X) - y(Y) \leq f(X, Y)$, $\quad y(X) - y(Y) = y(X) - y(Y+1) + y_1 \leq f(X, Y+1) + u$,
- $1 \in X$ esetén $y(X) - y(Y) \leq f(X, Y)$, $\quad y(X) - y(Y) = y(X-1) - y(Y) + y_1 \leq f(X-1, Y) + u$ és $y(X) - y(Y) = y(X-1) - y(Y+1) + 2y_1 \leq f(X-1, Y+1) + 2u$,
- $1 \in Y$ esetén $y(X) - y(Y) \leq f(X, Y)$,

vagyis minden $(X, Y) \in \mathcal{F}(S)$-re $y(X) - y(Y) \leq g(X, Y)$. ■

Tetszőleges dobozra a következő tételt kapjuk:

3.13 Tétel *A $P(f)$ biszubmoduláris poliéder és a $\times_{i \in S}[l_i, u_i]$, $(l_i \leq u_i)$, doboz metszete a $P(g)$ biszubmoduláris poliéder, ahol*

$$g(X, Y) = \min_{(A,B) \in \mathcal{F}(S)} \left(f(A, B) + u(X \setminus A) + u(B \setminus Y) - l(A \setminus X) - l(Y \setminus B) \right),$$

ha a metszet nemüres. ■

3.14 Tétel *$P(f)$ pontosan akkor egész poliéder, ha f egész.*

Biz.: Legyen f egész biszubmoduláris függvény és F a $P(f)$ egy oldala. Tegyük fel, hogy a $T = [l, u]$ dobozra l, u véges és egész, valamint hogy T elég nagy ahhoz, hogy $T \cap F \neq \emptyset$ legyen. Ekkor 3.13 szerint $T \cap P(f)$ megegyezik egy $P(g)$ biszubmoduláris poliéderrel, ahol g egész és véges, így 3.3 miatt $T \cap P(f)$ egész poliéder, vagyis a $T \cap F$ oldalának van egész pontja, és így F-nek is van egész pontja.

Ha $P(f)$ egész, akkor 3.7 következtében f is az. ■

Most bebizonyítunk egy meglepő kapcsolatot korlátos biszubmoduláris poliéderek és a mohó algoritmus között. Látni fogjuk, hogy pontosan a biszubmoduláris poliéderekre működik helyesen a mohó algoritmus minden c célfüggvény mellett, ha a poliéder korlátos. Ezen állítást a következő tétel segítségével igazoljuk, ami szerint nemkorlátos poliéderekre a mohó algoritmus helyessége a következő tulajdonságba megy át:

Def.: Egy P poliéder *mohó tulajdonságú*, ha minden (X, Y)-maximális v pontjára $v(X) - v(Y) = \max(x(X) - x(Y) \colon v \in P)$.

3.15 Tétel *Nemüres poliéder pontosan akkor mohó tulajdonságú, ha biszubmoduláris.*

Biz.: Legyen P mohó tulajdonságú. Definiáljuk az f függvényt a következőképpen: $f(X,Y) := \sup(x(X) - x(Y) : x \in P)$. Belátjuk, hogy f biszubmoduláris. Legyen (A_1, B_1), $(A_2, B_2) \in \mathcal{F}(S)$. Legyen $x_1, \dots, x_n, \dots \in P$ egy olyan sorozat, amire $x_n(A_1 \cap A_2) - x_n(B_1 \cap B_2) \to f(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2)$, $n \to \infty$. Minden n-re készítsük el x_n-ből y_n-et úgy, hogy x_n-et $(A_1 \triangle A_2) \setminus (B_1 \cup B_2)$-n növeljük, $(B_1 \triangle B_2) \setminus (A_1 \cup A_2)$-n pedig csökkentjük annyira, hogy $y_n((A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2)) - y_n((B_1 \cup B_2) \setminus (A_1 \cup A_2)) \to f((A_1, B_1) \sqcup (A_2, B_2))$, $n \to \infty$. Ezt a poliéder mohó tulajdonsága miatt tehetjük meg. Ekkor $x_n = y_n$ az $(A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)$ halmazon. Azt kapjuk, hogy

$$f(A_1, B_1) + f(A_2, B_2) \geq x_n(A_1) - x_n(B_1) + x_n(A_2) - x_n(B_2) =$$

$$= y_n(A_1 \cap A_2) - y_n(B_1 \cap B_2) + y_n((A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2)) - y_n((B_1 \cup B_2) \setminus (A_1 \cup A_2)) \to$$

$$\to f((A_1, B_1) \sqcap (A_2, B_2)) + f((A_1, B_1) \sqcup (A_2, B_2)), \ \ n \to \infty,$$

amivel beláttuk, hogy f biszubmoduláris.

Nyilván $P \subseteq P(f)$, tegyük fel, hogy létezik $c \in \mathbb{R}^S$ és $y \in P(f)$, hogy $cy > cx$ minden $x \in P$-re. Tükrözéssel és c komponenseinek perturbációjával feltehetjük hogy $c_1 > c_2 > \ldots > c_n > 0$, ha $S = \{1, \dots, n\}$. Legyen $F = \{v \in P(f) : v(S) = f(S, \emptyset)\}$. Ha $v \in P$ maximalizálja P-n cx-et, akkor v $(S, \emptyset)$-maximális, így $v \in P \cap F$, vagyis $P \cap F \neq \emptyset$. Most futtassuk le $P \cap F$-re a mohó algoritmust, azaz legyen $P_0 = P \cap F$, P_{i+1} pedig P_i-nek az $i+1$-edik komponenst maximalizáló pontjai. Vegyük észre, hogy P_{i+1} definíciója értelmes, mivel ha az $i+1$-edik komponensek halmaza nem volna korlátos felülről P_i-n, akkor cx sem volna korlátos P-n, figyelembe véve, hogy P_i minden x elemére $x(S)$ megegyezik. A végül kapott $x \in P$ pontra P mohó tulajdonságából $x(S_i) = f(S_i, \emptyset)$, ahol $S_i = \{1, \dots, i\}$. Továbbá y-ra $y(S_i) \leq f(S_i, \emptyset) = x(S_i)$, így

$$cy = \sum_{i=1}^{n} c_i(y(S_i) - y(S_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_{i+1}) y(S_i) + c_n y(S_n) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_{i+1}) x(S_i) + c_n x(S_n) = cx,$$

ami ellentmondás, vagyis $P = P(f)$, és az egyik iránnyal készen vagyunk.

Vissza, ha f biszubmoduláris, és $v \in P(f)$ (X,Y)-maximális, akkor 3.6 szerint $v(X) - v(Y) = \max(x(X) - x(Y) : x \in P(f))$. ■

3.16 Tétel *Egy korlátos P poliéderre pontosan akkor működik helyesen a mohó algoritmus minden c célfüggvény mellett, ha P biszubmoduláris poliéder.*

Biz.: Belátjuk, hogy ha P-re működik a mohó algoritmus, akkor P mohó tulajdonságú. Előző tételünk szerint ekkor P biszubmoduláris.

Legyen $w = \chi_X - \chi_Y$ és legyen $v \in P$ (X,Y)-maximális. Tegyük fel, hogy $wv = v(X) - v(Y) < \max(x(X) - x(Y) : x \in P) = \max(wx : x \in P)$. Ha $\pi : \{1, \dots, |X \cup Y|\} \leftrightarrow X \cup Y$ egy sorrendje

$X \cup Y$-nak, akkor legyen y_π az a vektor, amit a mohó algoritmus ad, ha a $\pi(1), \dots, \pi(|X \cup Y|)$ sorrendben optimalizáljuk a w célfüggvényt. Legyen $C = conv\{y_\pi : \pi \text{ egy sorrendje } X \cup Y\text{-nak}\}$ és legyen $T = v + ((\mathbb{R}_0^+)^X \times (\mathbb{R}_0^-)^Y \times \mathbb{R}^{S-X-Y})$. $C \cap (v + (\{\mathbf{0}\}^{X\cup Y} \times \mathbb{R}^{S-X-Y})) = \emptyset$, mivel a mohó algoritmus helyessége miatt $y \in C$-re $wy = \max(wx : x \in P)$, de $z \in v + (\{\mathbf{0}\}^{X\cup Y} \times \mathbb{R}^{S-X-Y})$-ra $wz = wv < \max(wx : x \in P)$. Ha $C \cap T \neq \emptyset$, akkor tehát létezik $y \in C \subseteq P$, hogy $y|_X \geq v|_X$, $y|_Y \leq v|_Y$, $y|_{X\cup Y} \neq v|_{X\cup Y}$, ami ellentmondás v (X,Y)-maximalitása miatt. Vagyis létezik egy $c \in \mathbb{R}^S$ vektor, hogy $cz > cy$ minden $y \in C$, $z \in T$-re. Nyilván $c|_X \geq 0$, $c|_Y \leq 0$, $c|_{S-X-Y} = 0$. Ekkor azonban a c-t optimalizáló mohó algoritmus futhat úgy, hogy egy y_π-t adjon optimumként, azaz $cy_\pi \geq cv$, ellentmondás.

A másik irány 3.3 és 3.9 következménye. ∎

Egy érdekes következmény:

3.17 Tétel *Az f_1, f_2 biszubmoduláris függvényekre $P(f_1) + P(f_2) = P(f_1 + f_2)$.*

Biz.: $P(f_1) + P(f_2) \neq \emptyset$, belátjuk, hogy mohó tulajdonságú. Legyen $v \in P(f_1) + P(f_2)$ (X,Y)-maximális. $v = v_1 + v_2$, $v_i \in P(f_i)$. Nyilván v_i is (X,Y)-maximális $P(f_i)$-ben, így $v(X) - v(Y) = v_1(X) - v_1(Y) + v_2(X) - v_2(Y) = \max(x_1(X) - x_1(Y) : x_1 \in P(f_1)) + \max(x_2(X) - x_2(Y) : x_2 \in P(f_2)) = \max(x(X) - x(Y) : x \in P(f_1) + P(f_2))$. Vagyis $P(f_1) + P(f_2)$ biszubmoduláris poliéder 3.15 miatt. Tegyük fel, hogy a g biszubmoduláris függvény definiálja. 3.7 szerint $g(X,Y) = \sup(x(X) - x(Y) : x \in P(f_1) + P(f_2)) = \sup(x_1(X) - x_1(Y) : x_1 \in P(f_1)) + \sup(x_2(X) - x_2(Y) : x_2 \in P(f_2)) = f_1(X,Y) + f_2(X,Y)$. ∎

3.3 A differenciál

Fujishige vezette be [11] egy b szubmoduláris függvény differenciálját: $v \in \partial(X)$, ha X minimalizálja $b(X) - v(X)$-et. A fogalom általánosítható biszubmoduláris függvényekre is, és érdekes eredmények igazolhatóak a segítségével.

Def.: Az f biszubmoduláris függvényre és $(X,Y) \in \mathcal{F}(S)$-re $\partial(X,Y) := \{v \in \mathbb{R}^S : f(X,Y) - v(X) + v(Y) \leq f(A,B) - v(A) + v(B) \quad \forall (A,B) \in \mathcal{F}(S)\}$ az f biszubmoduláris függvény (X,Y)-hoz tartozó *differenciál*ja.

3.18 Tétel *Ha $f(X,Y) = \infty$, akkor $\partial(X,Y) = \emptyset$, egyébként*

$$\partial(X,Y) = (P(f)\textit{-nek } (X,Y)\textit{-hoz tartozó lapja}) + ((\mathbb{R}_0^+)^X \times (\mathbb{R}_0^-)^Y \times \{\mathbf{0}\}^{S-X-Y}).$$

Biz.: Az első állítás triviális. Ha $f(X,Y)$ véges, akkor legyen $\alpha \in (\mathbb{R}_0^+)^X \times (\mathbb{R}_0^-)^Y \times \{\mathbf{0}\}^{S-X-Y}$, $v \in P(f)$, $v(X) - v(Y) = f(X,Y)$. $x = v + \alpha$-ra:

$$f(X,Y) - x(X) + x(Y) = -\alpha(X) + \alpha(Y) = -\sum |\alpha_i| \leq$$

$$\leq -\alpha(A) + \alpha(B) \leq -\alpha(A) + \alpha(B) + f(A,B) - v(A) + v(B) = f(A,B) - x(A) + x(B).$$

Vissza, tegyük fel, hogy $x \in \partial(X,Y)$. Tükrözéssel feltehető, hogy $Y = \emptyset$, azaz hogy $f(X,\emptyset) - x(X) = \min(f(A,B) - x(A) + x(B) : (A,B) \in \mathcal{F}(S))$. X elemeit valamilyen sorrend szerint véve csökkentsük x megfelelő komponensét addig, míg ezt megtehetjük az egyenlőség sértése nélkül. Amikor ezt X minden elemére elvégeztük, nyilván a kapott $v = x - \alpha$ semely komponense nem csökkenthető az egyenlőség megsértése nélkül. Következésképp minden $i \in X$-re létezik egy $(A_i, B_i) \in \mathcal{F}(S)$ halmazpár, hogy $i \notin A_i$ és $f(X, \emptyset) - v(X) = f(A_i, B_i) - v(A_i) + v(B_i)$. Az ilyen (A_i, B_i) párt *feszes*nek hívjuk. Könnyen ellenőrizhetően feszes párok metszete és uniója is feszes, továbbá $(X, \emptyset)$ is feszes. Ezeket mind összemetszve kapjuk, hogy $(\emptyset, \emptyset)$ is feszes, vagyis $f(X, \emptyset) - v(X) = 0$. Ezért minden $(A, B) \in \mathcal{F}(S)$ halmazpárra $f(A, B) - v(A) + v(B) \geq f(X, \emptyset) - v(X) = 0$, így v eleme $P(f)$ $(X, \emptyset)$-hez tartozó lapjának. Azaz az eredeti x vektorunkat felírtuk egy $(\mathbb{R}_0^+)^X \times (\mathbb{R}_0^-)^Y \times \{\mathbf{0}\}^{S-X-Y}$-beli és egy az (X, Y)-hoz tartozó lap vektorának összegeként. ■

Vegyük észre, hogy ha f egész és $x \in \partial(X, Y)$ is egész, akkor a tételbeli $x = v + \alpha$ felbontásban v és α is választható egésznek, hiszen a bizonyítás által megadott α épp ilyen lesz.

A differenciálok szép szerkezetét mutatja a következő tétel.

Def.: Az f biszubmoduláris függvényre és $(X, Y) \in \mathcal{F}(S)$-re $\partial'(X, Y) := \{x \in \partial(X, Y) \colon \forall\ (A, B) \sqsubseteq (X, Y),\ (A, B) \neq (X, Y)\text{-ra } x \notin \partial(A, B)\}$.

3.19 Tétel $\mathbb{R}^S = \dot{\bigcup}\{\partial'(X, Y) \colon (X, Y) \in \mathcal{F}(S)\}$ *és*

$$\partial'(X, Y) = (P(f)\text{-nek } (X, Y)\text{-hoz tartozó lapja}) + ((\mathbb{R}^+)^X \times (\mathbb{R}^-)^Y \times \{\mathbf{0}\}^{S-X-Y}).$$

Biz.: Ha $x \in \partial(X_1, Y_1) \cap \partial(X_2, Y_2)$, akkor f biszubmodularitása miatt könnyen ellenőrizhetően $x \in \partial((X_1, Y_1) \sqcap (X_2, Y_2)) \cap \partial((X_1, Y_1) \sqcup (X_2, Y_2))$, így létezik egy $\sqsubseteq$-legkisebb (X, Y) halmazpár, amire $x \in \partial'(X, Y)$.

Legyen $f(X, Y)$ véges, $\alpha \in (\mathbb{R}^+)^X \times (\mathbb{R}^-)^Y \times \{\mathbf{0}\}^{S-X-Y}$, $v \in P(f)$, $v(X) - v(Y) = f(X, Y)$, $x = v + \alpha$. Már láttuk, hogy $x \in \partial(X, Y)$. Legyen $(A, B) \sqsubseteq (X, Y)$, azaz $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, de $(A, B) \neq (X, Y)$. Ekkor az előző bizonyításhoz hasonlóan

$$f(X, Y) - x(X) + x(Y) = -\alpha(X) + \alpha(Y) < -\alpha(A) + \alpha(B) \leq f(A, B) - x(A) + x(B).$$

Vissza, tegyük fel, hogy $x \in \partial'(X, Y)$. Tükrözéssel feltehetjük, hogy $Y = \emptyset$. Ha $i \in X$-re x_i-t nem lehet szigorúan csökkenteni, akkor létezik egy $(A, B) \in \mathcal{F}(S)$ halmazpár, hogy $i \notin A$ és $f(X, \emptyset) - v(X) = f(A, B) - v(A) + v(B)$. Mint láttuk az előző bizonyításban, feszes párok metszete és uniója is feszes, vagyis $f(A \cap X, B \cap Y) - x(A \cap X) + x(B \cap Y) = \min(f(U, V) - x(U) + x(V) \colon (U, V) \in \mathcal{F}(S))$, $i \notin A \cap X$ miatt ellentmondva $x \in \partial'(X, Y)$-nek. Vagyis minden $i \in X$-re x_i-t csökkenthetjük szigorúan az $f(X, \emptyset) - x(X) = \min(f(U, V) - x(U) + x(V) \colon (U, V) \in \mathcal{F}(S))$ egyenlőség megsértése nélkül, és így létezik egy $\varepsilon > 0$ szám, hogy $x - \varepsilon\chi_X$-re is igaz az egyenlőség, azaz $x - \varepsilon\chi_X \in \partial(X, Y)$. Innen az előző bizonyítás gondolatmenetével kapunk egy $\alpha \in (\mathbb{R}^+)^X \times (\mathbb{R}^-)^Y \times \{\mathbf{0}\}^{S-X-Y}$ vektort, hogy $x = v + \alpha$ egy olyan $v \in P(f)$ pontra, ami az (X, Y)-hoz tartozó lap pontja. ■

Fujishige bebizonyít egy érdekes minimax tételt biszubmoduláris poliéderekre. 3.18-ból a Fujishige-tétel egyszerűen következik, d az l_1-norma szerinti távolságot jelenti.

3.20 Tétel [12] *Az f biszubmoduláris függvényre*

$$\min(f(A, B) \colon (A, B) \in \mathcal{F}(S)) + d(P(f), \mathbf{0}) = 0,$$

sőt ha f egészértékű, akkor létezik egy olyan egész x_0 pont, amire $\|x_0\|_1 = \min(\|x\|_1 \colon x \in P(f)) = d(P(f), \mathbf{0})$.

Biz.: $\bigcup \partial(X,Y) = \mathbb{R}^S$, így feltehetjük, hogy $\mathbf{0} \in \partial(X,Y)$. Ekkor 3.18 szerint $\mathbf{0} = v + \alpha$, ahol $v \in P(f)$, $v(X) - v(Y) = f(X,Y)$ és $\alpha \in (\mathbb{R}_0^+)^X \times (\mathbb{R}_0^-)^Y \times \{\mathbf{0}\}^{S-X-Y}$, továbbá (X,Y) adja f minimumát. Ezért

$$d(v,\mathbf{0}) = \alpha(X) - \alpha(Y) = -v(X) + v(Y) = -f(X,Y) \leq d(x,\mathbf{0}) \text{ minden } x \in P(f)\text{-re.}$$

Innen $d(P(f),\mathbf{0}) = d(v,\mathbf{0}) = -f(X,Y) = -\min(f(A,B)\colon (A,B) \in \mathcal{F}(S))$.

Ha f egész, akkor a 3.18 tétel utáni észrevétel szerint v is választható egésznek. ■

Fujishige tételét általánosítani is tudjuk 3.17 felhasználásával:

3.21 Tétel *Az f_1, f_2 biszubmoduláris függvényekre*

$$\min(f_1(A,B) + f_2(B,A)\colon (A,B) \in \mathcal{F}(S)) + d(P(f_1), P(f_2)) = 0.$$

Biz.: A Fujishige-tétel szerint

$$d(P(f_1), P(f_2)) = d(\mathbf{0}, P(f_1) - P(f_2)) = d(\mathbf{0}, P(f_1) + (-P(f_2))) =$$

$$-\min(f_1(A,B) + f_2(B,A)\colon (A,B) \in \mathcal{F}(S)),$$

hiszen $-P(f_2)$-t az $(A,B) \mapsto f_2(B,A)$ biszubmoduláris függvény definiálja. ■

Itt már nem igaz, hogy egész f_1, f_2 esetén a $P(f_1)$ és a $P(f_2)$ távolságát adó két pont választható egésznek, ugyanis legyen $P(f_1) = conv\{(0,0),(1,1)\}$, $P(f_2) = conv\{(1,0),(0,1)\}$, ezek egész biszubmoduláris poliéderek, és $P(f_1) \cap P(f_2) = \{(1/2, 1/2)\}$.

3.22 Köv. *Az f biszubmoduláris függvényre és a $T = \mathsf{X}_{i \in S}[l_i, u_i]$, $(l_i \leq u_i)$, dobozra*

$$\min(f(A,B) - l(A) + u(B)\colon (A,B) \in \mathcal{F}(S)) + d(P(f), T) = 0.$$

■

Szükségünk lesz az alábbi megfigyelésre:

3.23 Tétel *Ha $x \in \partial'(A,B)$, $\alpha \in (\mathbb{R}_0^+)^A \times (\mathbb{R}_0^-)^B \times \mathbb{R}^{S-A-B}$ és $(A,B) \not\sqsubseteq (X,Y)$, akkor $x + \alpha \notin \partial(X,Y)$.*

Biz.: Legyen $g(U,V) = f(U,V) - x(U) + x(V)$. g biszubmoduláris, így minden $(U,V) \in \mathcal{F}(S)$-re

$$g((A,B) \sqcup (U,V)) + g((A,B) \sqcap (U,V)) \leq g(A,B) + g(U,V).$$

Ha egy (U,V) halmazpárra $(A,B) \not\sqsubseteq (U,V)$, akkor $(A,B) \sqcap (U,V) \sqsubseteq (A,B)$, de $(A,B) \sqcap (U,V) \neq (A,B)$, ezért $x \in \partial'(A,B)$-ből $g((A,B) \sqcap (U,V)) > g(A,B)$, ahonnan $g((A,B) \sqcup (U,V)) < g(U,V)$. $(A,B) \not\sqsubseteq (X,Y)$, vagyis $g((A,B) \sqcup (X,Y)) < g(X,Y)$. Ha $(A,B) \sqsubseteq (A,B) \sqcup (X,Y)$, akkor $(X',Y') := (A,B) \sqcup (X,Y) = (A,B) \sqcup ((A,B) \sqcup (X,Y))$, egyébként $g((A,B) \sqcup ((A,B) \sqcup (X,Y))) < g((A,B) \sqcup (X,Y))$, ekkor legyen $(X',Y') = (A,B) \sqcup ((A,B) \sqcup (X,Y))$. $(A,B) \sqsubseteq (X',Y')$, vagyis $f(X',Y') - x(X') + x(Y') < f(X,Y) - x(X) + x(Y)$ és így

$$f(X',Y') - x(X') - \alpha(X') + x(Y') + \alpha(Y') < f(X,Y) - x(X) - \alpha(X) + x(Y) + \alpha(Y),$$

mivel $\alpha|_A \geq 0$, $\alpha|_B \leq 0$ és $(X',Y') = (A,B) \sqcup ((A,B) \sqcup (X,Y))$. Vagyis $x + \alpha \notin \partial(X,Y)$. ■

3.4 Az ugrácsok és a biszubmoduláris poliéderek kapcsolata

Bouchet és Cunningham [3] írták le az ugrácsok és a biszubmoduláris függvények ezen alfejezetben tárgyalt kapcsolatát.

3.24 Tétel *Ugrács konvex burka mohó tulajdonságú.*

Biz.: A J ugrácsra legyen $v \in conv(J)$ (X, Y)-maximális. Tükrözéssel feltehető, hogy $Y = \emptyset$. Tegyük fel, hogy $v(X) < \max(x(X)\colon x \in conv(J)) = \max(x(X)\colon x \in J)$.

Először legyen $v \in J$ és legyen $y \in J$ egy olyan pont, amire $y(X) > v(X)$ és amire $d(v, y)$ minimális. v $(X, \emptyset)$-maximalitása miatt létezik $i \in X$, hogy $v_i > y_i$. Az $y + e^i$ y-ból v-be való lépésre viszont sem $y + e^i$, sem egy $y + e^i \pm e^j$ lépés nem lehet J-ben, mivel mindkettő ellentmondana y választásának.

Ha $v \in conv(J)$, akkor $v = \sum \alpha^i v^i$, ahol $\alpha^i > 0$, $\sum \alpha^i = 1$ és $v^i \in J$. Nyilván v^i is $(X, \emptyset)$-maximális minden i-re, vagyis $v(X) = \sum \alpha^i v^i(X) = \sum \alpha^i \max(x(X)\colon x \in J) = \max(x(X)\colon x \in J)$, azaz $conv(J)$ mohó tulajdonságú. ■

Következik Bouchet és Cunningham két tétele. Az eltérő felépítés miatt bizonyításaink is eltérnek az eredetiektől.

3.25 Tétel [3] *Nemüres J ugrács konvex burka egy $P(f)$ biszubmoduláris poliéder, ahol*

$$f(X, Y) = \sup(x(X) - x(Y)\colon x \in J).$$

Biz.: A tétel 3.7, 3.15 és az előző tétel következménye. ■

3.26 Tétel [3] *Ha a nemüres J ugrácsra $conv(J)$ korlátos, akkor J-n helyesen működik a mohó algoritmus, és ha $|c|$ minden komponense különböző pozitív szám, akkor az optimális pont egyértelmű.*

Biz.: A tétel 3.3, 3.4 és 3.9 következménye. ■

Ezek szerint delta-matroid konvex burka is biszubmoduláris poliéder, vagyis delta-matroid $(S, \emptyset)$-maximális elemei fix összegűek a biszubmoduláris poliéderek mohó tulajdonsága miatt. Könnyen ellenőrizhető továbbá, hogy egy delta-matroid $(S, \emptyset)$-maximális elemei szintén delta-matroidot alkotnak, ahonnan kapjuk a közvetlenül is könnyen bizonyítható állítást:

3.27 Állítás *Nemüres delta-matroid olyan x elemei, amelyek maximalizálják $x(S)$-et, egy matroid bázisait alkotják.* ■

3.28 Köv. *Az alaphalmaz részhalmazrendszereként adott nemüres delta-matroid pontosan akkor egy leszálló halmazrendszer, ha egy matroid független halmazainak rendszere.* ■

3.24 fordítva is igaz, az eredeti bizonyítás következik:

3.29 Tétel [3] *Minden f egész biszubmoduláris függvényre $J = P(f) \cap \mathbb{Z}^S$ ugrács.*

Biz.: Legyenek $x, y \in J$ tetszőleges pontok, $v = x \pm e^1$ pedig egy lépés x-ből y-ba. Feltehető, hogy $x \le y$, $v = x + e^1$. Legyen $R \subseteq S \setminus \{1\}$ azon i koordináták halmaza, amelyekre $x_i < y_i$. Ha $v \notin J$, akkor létezik egy (A, B) x-szoros halmazpár, amire $1 \in A$. Válasszuk (A, B)-t az összes ilyen x-szoros halmazpár metszetének.

Tegyük fel, hogy $B \cap R \ne \emptyset$, és legyen $j \in B \cap R$. (A, B) választása miatt minden olyan x-szoros (X, Y) halmazpárra, amire $1 \in X$, teljesül, hogy $j \in B \subseteq Y$. Tegyük fel, hogy $x + e^1 + e^j = v + e^j \notin J$. Ekkor vagy létezik egy olyan (X, Y) x-szoros halmazpár, amire $1 \in X$, $j \notin Y$, ami nem lehet (A, B) választása miatt, vagy létezik egy olyan (X, Y) x-szoros halmazpár, amire $j \in X$, $1 \notin Y$, viszont ekkor $(X, Y) \sqcup (A, B)$ mond ellent (A, B) választásának. Még az is lehet, hogy létezik egy olyan (X, Y) halmazpár, amire $x(X) - x(Y) = f(X, Y) - 1$ és $1, j \in X$. Ekkor könnyen láthatóan vagy $(X, Y) \sqcup (A, B)$, vagy $(X, Y) \sqcap (A, B)$ x-szoros, és amelyik x-szoros, az ellentmond (A, B) választásának.

Ha $B \cap R = \emptyset$, akkor $y(A) - y(B) > x(A) - x(B) = f(A, B)$, ami ellentmondás. ■

A tételben az f egészértékűségére vonatkozó kikötés nem hagyható el, amit a következő példa mutat: a $[\mathbf{0}, \mathbf{1}] \subseteq \mathbb{R}^3$ kockának mint biszubmoduláris poliédernek változtassuk meg úgy a definiáló biszubmoduláris függvényét, hogy az $(\emptyset, \{1, 2, 3\})$ és az $(\{1, 2, 3\}, \emptyset)$ halmazpárok kivételével minden olyan (X, Y) halmazpár értékét csökkentsük le egy picit, amelyekre $X \cup Y = \{1, 2, 3\}$. A kapott poliéder biszubmoduláris - például 3.15 miatt -, de a benne levő egész pontok a $\mathbf{0}$ és az $\mathbf{1}$, amelyek nem alkotnak ugrácsot.

Def.: [3] A J ugrács *konvex*, ha $conv(J) \cap \mathbb{Z}^S = J$. $x \in conv(J) \cap \mathbb{Z}^S$ *lyuk*, ha $x \notin J$.

3.30 Állítás *Konvex ugrács oldala is egy konvex ugrács.*

Biz.: 3.11 és 3.14 szerint egész biszubmoduláris poliéder oldala is egész biszubmoduláris poliéder, így 3.29 figyelembevételével kapjuk az állítást. ■

Az előzőek szerint konvex ugrácsok lyukait betömve újra ugrácsot kapunk:

3.31 Állítás [3] *Ha J ugrács, akkor $conv(J) \cap \mathbb{Z}^S$ is az.* ■

A fix összegű ugrácsok konvex burkáról többet is mondhatunk.

3.32 Tétel *Korlátos fix összegű ugrács konvex burka g-polimatroid.*

Biz.: Tegyük fel, hogy az $S = \{1, \dots, n\}$ alaphalmazon adott J fix összegű ugrácson a mohó algoritmussal maximalizáljuk a w $0, \pm 1$ vektorral adott wx célfüggvényt az $1, \dots, n$ sorrendben, ahol $w_i = \pm 1$, $i \le m$-re és $w_i = 0$, $i > m$-re. Tegyük fel, hogy kimenetként az F ponthalmazt kapjuk. $i \le m$-re legyen $\alpha_i = v_i$ minden $v \in F$-re. Azt állítjuk, hogy ha $w_j = 1$, $w_{j+1} = -1$, akkor ha az $1, \dots, j-1, j+1, j, j+2, \dots, n$ sorrendben maximalizáljuk wx-et, egy olyan F' ponthalmazt kapunk kimenetként, amire $F' = F$. $i \le m$-re legyen $\alpha'_i = v'_i$ minden $v' \in F'$-re. Világos, hogy $i < j$-re $\alpha_i = \alpha'_i$. Mivel az $(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1})$ vektor szerinti minor is fix összegű, feltehetjük, hogy $j = 1$. $F' = F$-hez pedig elég látni, hogy $\alpha'_1 = \alpha_1$, $\alpha'_2 = \alpha_2$, más szóval, hogy $\max(x_1 \colon x \in J) = \max(x_1 \colon x \in J,\ x_2 = \min(y_2 \colon y \in J))$, valamint hogy $\min(y_2 \colon y \in J) = \min(y_2 \colon y \in J,\ y_1 = \max(x_1 \colon x \in J))$. A szimmetria miatt elég belátni az első állítást.

Legyen tehát $v \in J$ olyan pont, amire $v_2 = \min(y_2 \colon y \in J)$, és ezen belül v_1 maximális. Ha $v_1 = \max(x_1 \colon x \in J)$, akkor készen vagyunk, egyébként legyen $z \in J$ egy olyan pont, amire $z_1 = \max(x_1 \colon x \in J)$. A $v' = v + e^1$ v-ből z-be való lépésre létezik egy $v'' := x + e^1 - e^i$ v'-ből z-be való J-beli lépés. $i \neq 2$, mivel $v_2 = \min(y_2 \colon y \in J)$, így a v'' pontra $v''_1 > v_1$ ellentmondva v választásának. Vagyis valóban, $F' = F$.

A tétel bizonyításához azt kell belátnunk, hogy minden $(X, Y) \in \mathcal{F}(S)$ halmazpárra $\max(x(X) - x(Y) \colon x \in J) = \max(x(X) \colon x \in J) + \max(-x(Y) \colon x \in J)$. Legyen $w = \chi_X - \chi_Y$, és tegyük fel, hogy $X = \{1, \dots, k\}$, $Y = \{k+1, \dots, k+l\}$. A wx-et az $1, \dots, n$ sorrendben maximalizáló mohó algoritmus kimenete legyen az F ponthalmaz, a $k+1, \dots, k+l, 1, \dots, k, k+l+1, \dots, n$ sorrendben maximalizálóé pedig F'. $i \leq k+l$-re legyen $\alpha_i = v_i$ minden $v \in F$-re, $\alpha'_i = v'_i$ minden $v' \in F'$-re. Az előbb igazoltuk, hogy $\alpha_i = \alpha'_i$ minden $i \leq k+l$-re, vagyis a mohó algoritmus helyessége miatt

$$\max_{x \in J}(x(X) - x(Y)) = \sum_{i=1}^{k+l} \alpha_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i + \sum_{i=k+1}^{k+l} \alpha'_i = \max_{x \in J} x(X) + \max_{x \in J}(-x(Y)).$$

■

Vizsgáljuk meg, hogy az ugrácsok műveleteire nézve hogyan változik a konvex burkot definiáló f biszubmoduláris függvény.

- **Eltolás**: Nyilván $f'(X, Y) = f(X, Y) + a(X) - a(Y)$.
- **Tükrözés**: Mint már láttuk 3.2-ben, J-nek $R \subseteq S$-re való tükörképének konvex burkát az $f'(X, Y) = f((X \setminus R) \cup (Y \cap R), (Y \setminus R) \cup (X \cap R))$ függvény adja meg.
- **Vetítés**: Ha J-t $R \subseteq S$-re vetítjük, akkor az új f' biszubmoduláris függvényre $f' = f|_{\mathcal{F}(R)}$. Elég bebizonyítani, hogy az állítás igaz minden biszubmoduláris poliéderre és $R = S \setminus \{1\}$-re, azaz ha φ-vel jelöljük a vetítést és f'-vel $f|_{\mathcal{F}(R)}$-et, akkor $\varphi(P(f)) = P(f')$. $\varphi(P(f)) \subseteq P(f')$ nyilvánvaló. Legyen $x' \in P(f')$. Ahhoz, hogy egy $x_1 \in \mathbb{R}$ számra $(x_1, x') \in P(f)$ álljon, az kell, hogy minden $(X, Y) \in \mathcal{F}(R)$-re

  $$x'(X) - x'(Y) + x_1 \leq f(X+1, Y) \text{ és}$$

  $$x'(X) - x'(Y) - x_1 \leq f(X, Y+1)$$

  álljon. Ilyen x_1 pedig létezik, mivel minden (X_1, Y_1), $(X_2, Y_2) \in \mathcal{F}(R)$-re

  $$x'(X_1) - x'(Y_1) + x'(X_2) - x'(Y_2) =$$

  $$= x'(X_1 \cap X_2) - x'(Y_1 \cap Y_2) + x'((X_1 \cup X_2) \setminus (Y_1 \cup Y_2)) - x'((Y_1 \cup Y_2) \setminus (X_1 \cup X_2)) \leq$$

  $$\leq f(X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2) + f((X_1 \cup X_2) \setminus (Y_1 \cup Y_2), (Y_1 \cup Y_2) \setminus (X_1 \cup X_2)) \leq$$

$$\leq f(X_1+1,Y_1)+f(X_2,Y_2+1).$$

Megjegyezzük, hogy a vetületre nyert fenti összefüggésből egy újabb bizonyítást kaptunk arra, hogy a biszubmoduláris poliéderek nemüresek, ugyanis $|S|=1$-re ez triviálisan igaz, majd alkalmazhatunk indukciót.

Nyilván egész f és x' esetén egész x_1-et is találunk, ahonnan következik, hogy konvex ugrács vetülete is konvex. Ugyanez konvex ugrácsok homomorf képére nem igaz, mivel minden korlátos nemnegatív ugrács előáll a konvex delta-matroidok homomorf képeként. Egy gráf foksorozata is példa arra, hogy konvex ugrácsok összege nem feltétlenül konvex.

- **Szorzat**: Az S_1, S_2 diszjunkt halmazokon adott J_1, J_2 ugrácsok szorzatának konvex burkát nyilván $f(X,Y)=f_1(X\cap S_1, Y\cap S_1)+f_2(X\cap S_2, Y\cap S_2)$ adja.

- **Összeg**: A közös S alaphalmazon definiált J_1, J_2 ugrácsokra $conv(J_1+J_2)=conv(J_1)+conv(J_2)=P(f_1)+P(f_2)=P(f_1+f_2)$ 3.17-ből.

- **Dobozzal való metszet**: Az egész $T=\times_{i\in S}[l_i,u_i]$ dobozzal való metszetet nyilván csak konvex ugrácsokra írhatjuk fel f és T segítségével, amikor is 3.13-ból

$$f'(X,Y)=\min_{(A,B)\in\mathcal{F}(S)}(f(A,B)+u(X\setminus A)+u(B\setminus Y)-l(A\setminus X)-l(Y\setminus B)).$$

- **Minor**: A minor a dobozzal való metszet speciális esete, nem részletezzük.

- **Homomorf kép**: A J ugrács $\pi=\{S_1,\dots,S_k\}$ partíció szerinti J_π homomorf képének konvex burkát az $f'(X,Y)=f(\bigcup X,\bigcup Y)$, $(X,Y)\in\mathcal{F}(\pi)$ biszubmoduláris függvény adja meg 3.7 következtében.

  Egy M matroid függetlenjeinek delta-matroidját F-fel jelölve, M homomorf képében pontosan akkor lesz $I\subseteq\pi$ független, ha $\chi_I\in F_\pi$, azaz ha minden $(X,Y)\in\mathcal{F}(\pi)$-re $|I\cap X|-|I\cap Y|\leq f'(X,Y)=f(\bigcup X,\bigcup Y)=r(\bigcup X)$ az M rangfüggvényével. Vagyis I pontosan akkor független, ha minden $X\subseteq\pi$-re $|I\cap X|\leq r(\bigcup X)$, mint ismert.

Nyilván két ugrács metszete nem feltétlenül lesz ugrács, sőt a 16. oldali megjegyzésünk szerint ez két konvex ugrácsra is így van.

Def.: Az S alaphalmazú D delta-matroidot *g-matroid*nak hívjuk, ha létezik az $S\dot\cup Z$ halmazon egy olyan $\mathcal{B}$ bázishalmazú M matroid, amire $D=\{B\cap S\colon B\in\mathcal{B}\}$.

A kompozíció miatt g-matroid k-elemű halmazai egy matroidot alkotnak, sőt ha Z-n adott egy N matroid, akkor ha nemüres, $D_N=\{B\cap S\colon B\in\mathcal{B},\ B\cap Z \text{ bázis } N\text{-ben}\}$ is egy matroid, hiszen D_N egy fix összegű delta-matroid.

Def.: Az S alaphalmazú M_1, M_2 matroidokra M_1 projekciója M_2-nek, ha r_2-r_1 monoton nő.

Bizonyítás nélkül megemlítjük a következő tételt, amit g-matroidokról írtak le.

3.33 Tétel *Legyenek M_1, M_2 S alaphalmazú matroidok. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1. $D := \{X \subseteq S\colon$ *létezik* M_i*-nek* B_i *bázisa, hogy* $B_1 \subseteq X \subseteq B_2\}$ *g-matroid,*
2. M_1 *az* M_2 *projekciója,*
3. M_1 *minden zárt halmaza* M_2*-ben is zárt,*
4. $r_1(X) + r_2(Y) \geq r_1(X \cup Y) + r_2(X \cap Y)$,
5. $r_2(X) - t_1(Y) \geq r_2(X \setminus Y) - t_1(Y \setminus X)$,
6. *minden* $X, Y \subseteq D$, $x \in X - Y$*-ra vagy* $X - x \in D$*, vagy létezik* $y \in Y - X$*, hogy* $X - x + y \in D$ *és minden* $X, Y \subseteq D$, $x \in X - Y$*-ra vagy* $Y + x \in D$*, vagy létezik* $y \in Y - X$*, hogy* $Y + x - y \in D$.

■

Innen a következő karakterizációt kapjuk:

3.34 Tétel *A g-matroidok pontosan azon delta-matroidok, amelyeknek konvex burka egy g-polimatroid.*

Biz.: Minden matroidra igaz, hogy az alaphalmazának diszjunkt X, Y halmazaira létezik egy olyan B bázisa, hogy $|B \cap X| = r(X)$, $|B \cap Y| = t(Y)$. Ez tehát speciálisan a D-t adó matroidra is igaz, ahonnan $\max(x(X) - x(Y)\colon x \in D) = r(X) - t(Y) = \max(x(X)\colon x \in D) + \max(-x(Y)\colon x \in D)$, ami azt jelenti, hogy a $b(X) = r(X) = \max(x(X)\colon x \in D)$, $h(Y) = -t(Y) = \max(-x(Y)\colon x \in D)$ jelöléssel $conv(D) = P(f)$, ahol $f(X, Y) = b(X) + h(Y)$, b, h nyilván erős pár. Vagyis minden g-matroid konvex burka egy g-polimatroid.

Ha egy D delta-matroid konvex burka g-polimatroid, azaz $conv(D) = P(f)$, ahol $f(X, Y) = g(X) + h(Y)$ a b, h erős párra, akkor legyen M_b a b rangú matroid S-en, M_h pedig a $-h$ korangú matroid S-en. b, h erős pár, így előző tételünk 5. pontja szerint M_b-nek projekciója M_h és nyilván $D = \{X \subseteq S\colon$ létezik M_h-nak B_h és M_b-nek B_b bázisa, hogy $B_h \subseteq X \subseteq B_b\}$. ■

4 A tartalmazási probléma

4.1 Zárt dobozok

A tartalmazási probléma kidolgozása Lovásztól [22] származik: Adott egy J ugrács és egy $p \in \mathbb{R}^S$ pont, határozzuk meg $d(J, p)$-t. Az első természetesen felmerülő kérdés az, hogy hogyan *adott* egy ugrács. Az alkalmazásokban általában J kisméretű ugrácsok összegeként adott, ezért a felépítést erre a feltételezésre szabjuk. Az az általánosabbnak tűnő feladat, hogy egy T dobozra kell meghatároznunk $d(J, T)$ értékét, valójában ekvivalens a tartalmazási problémával, hiszen $d(J - T, \mathbf{0}) = d(J, T)$. Az alkalmazások szempontjából hasznosabb ezt a problémát, a dobozoktól való távolságot vizsgálni.

Lássunk néhány példát. Az f-faktor probléma adott G gráf és $f \in \mathbb{R}^{V(G)}$ vektor esetén annak eldöntése, hogy $f \in J_G$ teljesül-e. Geelen [15] nyomán az f-faktor probléma megoldását levezetjük a 4.4. alfejezetben.

Az S alaphalmazú J_1, J_2 ugrácsokra pontosan akkor lesz $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$, ha $\mathbf{0} \in J_1 - J_2$. Speciálisan, ha M_1, M_2 matroidok S-en, akkor pontosan akkor van közös bázisuk, ha $\mathbf{0} \in M_1 - M_2$. Ez utóbbi megfigyelésből be fogjuk bizonyítani Edmonds matroid metszet tételét [22].

A matroid parity is speciális esete a tartalmazási problémának [22]. Ha adott egy párbaállított elemekből álló M matroid egy páros elemszámú S alaphalmazon, akkor G-vel jelölve ezen párosítást mint gráfot, pontosan akkor létezik M-nek teljesen párokból álló bázisa, ha $J_G \cap M \neq \emptyset$. Ez a példa azt mutatja, hogy a tartalmazási problémának vannak polinomiálisan nem megoldható esetei is.

A fejezetben ha egy T dobozról azt állítjuk, hogy $T = [l, u]$, akkor hallgatólagosan feltesszük, hogy $l \leq u$. Adott tehát egy $T = [l, u]$ doboz és egy J ugrács az S alaphalmazon.

Def.: $J_T := \{x \in J : d(x, T) = d(J, T)\}$.

4.1 Tétel [22] *J_T ugrács.*

Biz.: Legyen $x, y \in J_T$ és $v = x \pm e^1$ egy lépés x-ből y-ba. Feltehetjük, hogy $v = x + e^1$. $d(x, y)$-ra vonatkozó indukcióval dolgozunk. Vagy $v \in J$, vagy létezik egy $z \in J$ lépés v-ből y-ba, az első esetben legyen $z = v$. Ha $z \notin J_T$, akkor persze $d(v, T) \geq d(x, T)$, és így $d(y_1, [l_1, u_1]) \geq d(x_1, [l_1, u_1])$. Mivel $d(z, T) > d(x, T)$, létezik egy $i \in S$, amire $d(z_i, [l_i, u_i]) > d(x_i, [l_i, u_i])$, továbbá mivel z_i az x_i és az y_i között van: $d(y_i, [l_i, u_i]) > d(x_i, [l_i, u_i])$.

Tegyük fel, hogy egy $i > 1$-re $d(y_i, [l_i, u_i]) > d(x_i, [l_i, u_i])$. Feltehető, hogy $y_i > x_i$. Most $d(y - e^i, T) < d(y, T)$, így $y - e^i \notin J$, de létezik egy $y' \in J$ lépés $y - e^i$-ből x-be. Persze $y' \in J_T$ és $y'_1 = y_1 > x_1$. Vagyis v egy lépés x-ből y'-be, továbbá $y' \in [x, y]$ és $d(x, y) > d(x, y')$, ahonnan az állítás indukciós feltevésünkből következik.

Most tegyük fel, hogy minden $i > 1$-re $d(y_i, [l_i, u_i]) \leq d(x_i, [l_i, u_i])$. Ekkor tehát $d(x_1, [l_1, u_1]) < d(y_1, [l_1, u_1])$, és mivel $d(x, T) = d(y, T)$, létezik egy $i > 1$ index, amire $d(x_i, [l_i, u_i]) > d(y_i, [l_i, u_i])$. Feltehetjük, hogy $y_i > x_i$, ekkor $x + e^i$ egy lépés x-ből y-ba. $x + e^i \notin J$, de létezik egy $x' \in J$ lépés $x + e^i$-ből y-ba. $x' \in J_T$ és mivel minden $i > 1$-re $d(y_i, [l_i, u_i]) \leq d(x_i, [l_i, u_i])$, ezért $x'_1 = x_1 + 1 = v_1$. Vagyis $x' \in J_T$ egy lépés v-ből y-ba. ∎

4.2 Köv. *Ugrács (X, Y)-maximális elemei ugrácsot alkotnak.*

Biz.: Legyenek $x, y \in J$ (X, Y)-maximálisak, vagyis pl. x olyan, hogy minden olyan $w \in J$ vektorra, amire $w \geq x$ az X-en és $w \leq x$ az Y-on, teljesül, hogy $x|_{X \cup Y} = w|_{X \cup Y}$. Legyen $M = \max(|x_i|, |y_i| : i \in X \cup Y) + 1$, és legyen $l_i = M$, $u_i = \infty$, ha $i \in X$, $l_i = -\infty$, $u_i = -M$, ha $i \in Y$ és $[l_i, u_i] = \mathbb{Z}$, ha $i \in S - (X \cup Y)$. Legyen J' a $J_T \cap [x, y] \subseteq J$ ugrács. Belátjuk, hogy J' minden eleme (X, Y)-maximális, és hogy $x, y \in J'$. Ebből következik, hogy minden v x-ből y-ba való lépésre vagy $v \in J$ (X, Y)-maximális, vagy egy v' v-ből y-ba való lépésre lesz $v' \in J$ (X, Y)-maximális, ami igazolja az állítást. Az világos, hogy J' minden eleme (X, Y)-maximális. Tegyük fel, hogy $x \notin J'$, és legyen $z \in J_T$ egy olyan pont, amire $d(x, z)$ minimális. Feltehetjük, hogy $Y = \emptyset$. x $(X, \emptyset)$-maximális, így egy $i \in X$-re $z_i < x_i < l_i$. A $z + e^i$ lépés nincs J-ben $z \in J_T$, $z_i < l_i$ miatt, így egy $z' = z + e^i - e^j$ lépés lesz J-ben. $z' \in J_T$ és $d(x, z') < d(x, z)$, ami ellentmondás. ∎

4.3 Köv. [15] *Ugrács oldala (azaz egy lineáris célfüggvényt maximalizáló pontjai) ugrács.*

Biz.: Az előző következmény szerint ugrács lapja ugrács, és minden oldal megkapható egymás utáni lap-képzéssel. ∎

4.4 Lemma [22] *A $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots \subseteq T_k$ dobozokra $J_1 \cap J_2 \cap \ldots \cap J_k \neq \emptyset$, ahol $J_i = J_{T_i}$.*

Biz.: Indukcióval dolgozunk, $k \geq 2$. Legyen $x \in J_1 \cap J_2 \cap \ldots \cap J_{k-1}$, $y \in J_k$, $T_k = [l, u]$. Ha $x \notin J_k$, akkor egy $j \in S$-re $d(y_j, [l_j, u_j]) < d(x_j, [l_j, u_j])$. Feltehetjük, hogy $x_j < y_j$, ekkor $x_j < l_j$. A $v = x + e^k$ lépésre vagy $v \in J$, vagy egy z v-től y-ig való lépés lesz J-ben. Az első esetben legyen $z = v$. Minden $1 \leq i \leq k$-ra $d(x, T_i) > d(v, T_i)$, ezért $d(x, T_i) \geq d(z, T_i)$. Tehát $1 \leq i \leq k-1$-re $z \in J_i$ és persze $d(z, y) < d(x, y)$. Ha $z \notin J_k$, akkor ismételjük meg a fenti lépést, végül egy $J_1 \cap J_2 \cap \ldots \cap J_k$-beli pontot kapunk. ∎

4.4 következménye a mohó algoritmus helyessége korlátos ugrácsokra [22]. Feltehető ugyanis, hogy $c \in \mathbb{R}^S$ olyan, hogy $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_k > c_{k+1} = \ldots = c_n = 0$ és hogy $J \subseteq [-\mathbf{M}, \mathbf{M}]$. Legyen $T_i = [\mathbf{M}, \infty]^{\{1,\ldots,i\}} \times \mathbb{Z}^{\{i+1,\ldots,n\}}$, ha $i \leq k$. $T_1 \supset T_2 \supset \ldots \supset T_k$, így $J_{T_1} \cap J_{T_2} \cap \ldots \cap J_{T_k} \neq \emptyset$. $x \in J_{T_i}$ pontosan akkor, ha x maximalizálja J-n $w^i x$-et, ahol $w^i = e^1 + \ldots + e^i$. Vagyis minden $J_{T_1} \cap J_{T_2} \cap \ldots \cap J_{T_k}$-beli pont szimultán maximalizálja $w^i x$-et J-n $i = 1, \ldots, k$-ra, következésképpen $J_{T_1} \cap J_{T_2} \cap \ldots \cap J_{T_k}$ maximalizálja J-n cx-et.

Def.: [22] A T dobozra és a J ugrácsra legyen

$$\begin{aligned}
A = A_T(J) &= \{i \in S \colon \exists\, x \in J_T \colon x_i > u_i \text{ és } \forall\, x \in J_T \colon x_i \geq l_i\},\\
B = B_T(J) &= \{i \in S \colon \exists\, x \in J_T \colon x_i < l_i \text{ és } \forall\, x \in J_T \colon x_i \leq u_i\},\\
C = C_T(J) &= \{i \in S \colon \forall\, x \in J_T \colon l_i \leq x_i \leq u_i\},\\
D = D_T(J) &= \{i \in S \colon \exists\, x \in J_T \colon x_i > u_i \text{ és } \exists\, x \in J_T \colon x_i < l_i\}.
\end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy ha egy G gráf Gallai-Edmonds felbontását A_G, C_G, D_G-vel jelöljük, akkor J_G-re $A_{\{\mathbf{1}\}}(J_G) = A_G$, $B_{\{\mathbf{1}\}}(J_G) = D_G$ egyelemű komponensei, $C_{\{\mathbf{1}\}}(J_G) = C_G$, $D_{\{\mathbf{1}\}}(J_G) = D_G$ nem egyelemű komponensei.

Def.: [22] A T doboz *lezártja* legyen $\overline{T} := [\bar{l}, \overline{u}]$, ahol

$$\bar{l}_i = \begin{cases} l_i, & \text{ha } i \in B_T(J) \cup D_T(J),\\ -\infty, & \text{különben, és} \end{cases}$$

$$\overline{u}_i = \begin{cases} u_i, & \text{ha } i \in A_T(J) \cup D_T(J),\\ \infty, & \text{különben.} \end{cases}$$

4.5 Lemma [22] *$\overline{T}$ a tartalmazásra nézve maximális olyan T-t tartalmazó doboz, aminek a távolsága J-től $d(J, T)$.*

Biz.: $i \in A \cup D$-re $d(J, [l, u + e^i]) < d(J, [l, u])$ és $i \in B \cup D$-re $d(J, [l - e^i, u]) < d(J, [l, u])$, így ha T' egy olyan T-t tartalmazó doboz, amire $d(J, T') = d(J, T)$, akkor $T' \subseteq \overline{T}$. $T \subseteq \overline{T}$, ezért létezik egy $x \in J_T \cap J_{\overline{T}}$ pont. x-re nyilván $d(x, T) = d(x, \overline{T})$, ahonnan $d(J, \overline{T}) = d(J, T)$. ∎

Def.: Egy T doboz (J-re nézve) *zárt*, ha $\overline{T} = T$.

Belátjuk, hogy valóban egy lezárásoperátort definiáltunk.

4.6 Állítás *Zárt dobozok nemüres metszete zárt.*

Biz.: Legyenek Z^1, Z^2 zárt dobozok, $Z = [l,u] = Z^1 \cap Z^2 \neq \emptyset$. $Z^1 := [l', u']$. Tegyük fel, hogy u_i véges, és $u_i = u'_i$. Ekkor $Z \subseteq Z^1 \subset [l', u'+e^i]$, vagyis létezik egy $y \in J_Z \cap J_{Z^1} \cap J_{[l',u'+e^i]}$ pont. $y_i > u_i$, különben $d(J, [l', u'+e^i]) = d(J, Z^1)$ állna, ami nem lehet Z^1 zártsága miatt. Vagyis $y \in J_Z$ miatt $d(J, [l, u+e^i]) < d(J, Z)$. Ha tehát u_i véges, akkor $d(J, [l, u+e^i]) < d(J, Z)$, hasonlóan, ha l_i véges, akkor $d(J, [l-e^i, u]) < d(J, Z)$, ahonnan Z zárt. ■

4.7 Lemma *Ha a T dobozra és $i \in A \cup D$-re $l_i < u_i$, akkor minden $x \in J_T$-re $x_i \geq u_i$.*

Biz.: Tegyük fel, hogy egy $x \in J_T$-re $x_i < u_i$. Legyen $T' = [l, u - e^i]$. $d(x,T) = d(x,T')$, vagyis $d(J,T) = d(J,T')$. Nyilván $J_{T'} = \{y \in J_T : y_i < u_i\}$. Ezek szerint $i \notin A_{T'} \cup D_{T'}$, ahonnan $\overline{T'} \not\subseteq \overline{T}$, ellentmondás. ■

Lemmánkból következik ez a rövid, de igen fontos tétel:

4.8 Tétel [22] *Ha a $T = [l,u]$ dobozra $i \in A$, akkor minden $x \in J_T$-re $x_i \geq u_i$. Ha a $T = [l,u]$ dobozra $i \in D$, akkor $l_i = u_i$.*

Biz.: Az első esetben $J_T \subseteq J_{\overline{T}}$, így feltehetjük, hogy T zárt, azaz $l_i = -\infty$. A második állítás világos 4.7-ből. ■

Def.: [22] A T dobozra és a J ugrácsra legyen $X^i_T = \{x_i : x \in J_T\}$.

4.9 Tétel [22] *$i \in A \cup B$-re X^i egy intervallum, $i \in D$-re pedig $X^i = \{u_i - 1, u_i + 1\}$, vagy $X^i = \{u_i - 1, u_i, u_i + 1\}$.*

Biz.: Legyen $i \in A$, $a, b \in X^i$, $u_i \leq a < b$. Belátjuk, hogy $b - 1 \in X^i$. Legyenek $v, w \in J_T$ olyan pontok, amelyekre $v_i = a$, $w_i = b$. $w' = w - e^i \notin J$ egy lépés v-be, így létezik egy $w'' \in J$ lépés w'-ből v-be, $w'' \in J_T$. Ha $w'_i = b - 2$, akkor $d(w'', T) < d(w, T)$, így $w''_i = b - 1$. Az $i \in B$ eset bizonyítása analóg.

Legyen most $i \in D$, és tegyük fel, hogy egy $v \in J_T$-re $v_i \geq u_i + 2$. Legyen $T' = [l - e^i, u]$, $T'' = [l - e^i, u + 2e^i]$. Egy $w \in J_T \cap J_{T'} \cap J_{T''}$ pontra $w_i < l_i = u_i$, $i \in D$ miatt, így $d(J, T'') = d(w, T'') = d(w, T) - 1 = d(J, T) - 1$. Azonban v miatt $d(J, T'') \leq d(v, T'') = d(v, T) - 2 = d(J, T) - 2$, ellentmondás. ■

Def.: A T dobozra legyen $T_J = \{z \in T : d(J, z) = d(J, T)\}$.

4.10 Tétel *$T_J \subseteq (\overline{T})_J$. Minden $x \in T_J$-re $\overline{T} = \overline{\{x\}} = \{x\} + ((\mathbb{Z}_0^-)^{A_T} \times (\mathbb{Z}_0^+)^{B_T} \times \mathbb{Z}^{C_T} \times \{\mathbf{0}\}^{D_T})$, $A_{\overline{T}} = A_T = A_{\{x\}}, \ldots, D_{\overline{T}} = D_T = D_{\{x\}}$. $i \in S \setminus C_T$-re $X^i_{\overline{T}} = X^i_T = X^i_{\{x\}}$. T_J ugrács és $\dot\bigcup\{Z_J : Z \text{ zárt}\} = \mathbb{Z}^S$, $(\mathbb{Z}^S)_J = J$.*

Biz.: $T_J \subseteq (\overline{T})_J$ triviális.

Világos, hogy minden $x \in T_J$ pont olyan, hogy $x_i = l_i = u_i$, $i \in D_T$-re, $x_i = u_i$, $i \in A_T$-re, $x_i = l_i$, $i \in B_T$-re és $x = z$ a C_T-n egy $z \in J_T$ pontra, továbbá hogy $\bigcup\{X^i_{\{x\}} : x \in T_J\} = X^i_T$ minden $i \in S$-re. Belátjuk, hogy minden $x, y \in T_J$-re $X^i_{\{x\}} = X^i_{\{y\}}$ minden $i \in S \setminus C_T$-re.

Először legyen $1 \in A_T$, és tegyük fel, hogy $X^1_{\{x\}} = [a,b] < c \in X^1_{\{y\}}$. Válasszuk $v \in J_{\{x\}}$, $w \in J_{\{y\}}$-t olyannak, hogy $v_1 = b$, $w_1 = c$ álljon, és $d(v,w)$ minimális legyen. Teljesül, hogy $v|_{C_T} =$

$x|_{C_T}$, $w|_{C_T} = y|_{C_T}$. $d(v_1, x_1) < d(w_1, y_1)$, így egy $i \in S \setminus C_T$-re $d(v_i, x_i) > d(w_i, y_i)$. $i \in S \setminus C_T$-re $x_i = y_i$. Feltehető, hogy $v_i > w_i$. A $v' = v - e^i$ pontra $d(v', x) = d(v, x) - 1$, vagyis $v' \notin J$, de létezik egy $v'' \in J$ lépés v'-ből w-be. $v''|_C = v'|_C$, mivel különben $d(v'', T) = d(v', T) = d(v, T) - 1$ állna, így vagy $v''_1 > b$ vagy $d(v'', w) < d(v, w)$, ami ellentmondás.

Ha $1 \in D_T$, akkor tegyük fel, hogy $X^1_{\{x\}} = \{u_1 - 1, u_1 + 1\}$, $X^1_{\{y\}} = \{u_1 - 1, u_1, u_1 + 1\}$, és legyen $v \in J_{\{x\}}$, $w \in J_{\{y\}}$ olyan, hogy $v_1 = u_1 - 1$, $w_1 = u_1$. A $v' = v + e^1$ lépésre $v' \notin J$, de egy v'' v'-ből w-be való lépésre $v'' \in J_{\{x\}}$ és $v''_1 = u_1$, ellentmondás.

Vagyis minden $i \in S \setminus C_T$-re és $x, y \in T_J$-re $x_i = y_i$ és $X^i_{\{x\}} = X^i_{\{y\}}$, továbbá nyilván $C_{\{x\}} \supseteq C_T$ és $\bigcup\{X^i_{\{x\}} : x \in T_J\} = X^i_T$, ahonnan minden $x \in T_J$-re $A_{\{x\}} = A_T = A_{\overline{T}}, \ldots, D_{\{x\}} = D_T = D_{\overline{T}}$ és $X^i_{\{x\}} = X^i_T$ minden $i \in S \setminus C_T$-re. Innen $\overline{T} = \overline{\{x\}} = \{x\} + ((\mathbb{Z}_0^-)^{A_T} \times (\mathbb{Z}_0^+)^{B_T} \times \mathbb{Z}^{C_T} \times \{\mathbf{0}\}^{D_T})$.

T_J ugrács, mivel $T_J = u|_{A_T} \times l|_{B_T} \times (J_T$ vetülete C_T-re$) \times u|_{D_T}$. $(\mathbb{Z}^S)_J = J$, $\mathbb{Z}^S = \dot{\bigcup}\{Z_J : Z$ zárt$\}$ triviális. ∎

Vagyis a Z zárt dobozokra a Z_J-k $\mathbb{Z}^S$ ugrácsokra való partícióját adják.

4.2 Reguláris dobozok

Def.: A T doboz *reguláris*, ha $D = D_T(J) = \emptyset$, és *szinguláris* egyébként. $z \in \mathbb{Z}^S$ *reguláris/szinguláris*, ha $\overline{\{z\}}$ reguláris/szinguláris. Halmazuk $\mathcal{R}/\mathcal{S}$.

4.10 miatt T pontosan akkor reguláris, amikor $\overline{T}$ és amikor T_J tetszőleges pontja, továbbá $\mathcal{S} = \dot{\cup}\{Z_J : Z$ szinguláris zárt doboz$\}$, $\mathcal{R} = \dot{\cup}\{Z_J : Z$ reguláris zárt doboz$\}$.

4.11 Tétel *Ha T reguláris, akkor $T_J \subseteq \partial'(B_T, A_T)$, $T \cap \bigcup\{\partial(X, Y) : (B, A) \not\sqsubseteq (X, Y)\} = \emptyset$, ahol a differenciál $conv(J)$-re vonatkozik. $J_T \subseteq (conv(J)$ (B_T, A_T)-hez tartozó lapja).*

Biz.: Legyen $A = A_T, B = B_T, C = C_T$. 4.10 és $J_T \subseteq J_{\overline{T}}$ alapján feltehetjük, hogy $T = [l, u]$ zárt. Feltehetjük azt is, hogy $A = \emptyset$, ekkor $S = B \cup C$. Tehát minden $i \in B$-re $u_i = \infty$, és minden $i \in C$-re $l_i = -\infty$, $u_i = \infty$. 4.8 miatt J_T pontosan azon pontokból áll, amelyek maximalizálják J-n $\chi_B y$-t, így $J_T \subseteq (conv(J)$ $(B, \emptyset)$-hez tartozó lapja), a biszubmoduláris poliéderek mohó tulajdonsága következtében. Minden $x \in T_J$-hez létezik egy olyan $y \in J_T$, hogy $x = y + \alpha$, ahol $\alpha \in (\mathbb{Z}_0^+)^B \times \{\mathbf{0}\}^C$, ezért $x \in \partial(B, \emptyset)$. Ha $B' \subset B$, akkor legyen $T' = [l', u']$ a következő doboz: $l'_i = l_i$, $u'_i = u_i$, $i \in B'$-re és $[l'_i, u'_i] = \mathbb{Z}$ egyébként. Egy $y \in J_T \cap J_{T'}$ vektorra $l(B') - y(B') = d(J, T') < d(J, T) = l(B) - y(B)$ a T zártsága miatt. Az $f(X, Y) = \max(x(X) - x(Y) : x \in J)$ jelöléssel $f(B', \emptyset) = y(B')$ és $f(B, \emptyset) = y(B)$, vagyis minden $B' \subset B$, $x \in J_T$-re $f(B, \emptyset) - x(B) = y(B) - l(B) < y(B') - l(B') = f(B', \emptyset) - x(B')$, ahonnan $x \in \partial'(B, \emptyset)$.

$T \cap \bigcup\{\partial(X, Y) : (B, A) \not\sqsubseteq (X, Y)\} = \emptyset$ a $T_J \subseteq \partial'(B, A)$ összefüggésnek, 3.23-nak és 4.10-nek a következménye. ∎

4.11 segítségével finomíthatjuk 4.6-ot:

4.12 Tétel *Az egymást metsző Z_1, Z_2 zárt dobozok metszete pontosan akkor reguláris, ha Z_1, Z_2 mindegyike reguláris.*

Biz.: Ha Z_i szinguláris, akkor $Z_1 \cap Z_2$ is az. Tegyük fel, hogy Z_1, Z_2 regulárisak, és $Z_1 \cap Z_2$ nem az. Ez csak úgy lehetséges, ha $A_{Z_1} \cap B_{Z_2} \neq \emptyset$, vagy $B_{Z_1} \cap A_{Z_2} \neq \emptyset$. Tegyük fel, hogy $i \in A_{Z_1} \cap B_{Z_2}$. 4.11 szerint $Z_i \subseteq \bigcup\{\partial(X,Y) \colon (B_{Z_i}, A_{Z_i}) \sqsubseteq (X,Y)\}$, ahol a differenciál $conv(J)$-re vonatkozik. Ezért $x \in Z_1 \cap Z_2$-re $x \in \partial(X_1,Y_1) \cap \partial(X_2,Y_2)$, ahol $(B_{Z_i}, A_{Z_i}) \sqsubseteq (X_i,Y_i)$. Következik, hogy $x \in \partial(X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2)$. $i \in A_{Z_1} \subseteq Y_1$, ezért $i \notin X_1$, vagyis $i \notin X_1 \cap X_2$, azaz $B_{Z_2} \not\subseteq X_1 \cap X_2$, ami ellentmondás $T \cap \bigcup\{\partial(X,Y) \colon (B,A) \not\sqsubseteq (X,Y)\} = \emptyset$ miatt. ■

Az alábbi tétellel reguláris dobozokra megoldjuk a tartalmazási problémát. A tételre egy, az eredetitől kissé eltérő bizonyítást adunk.

4.13 Tétel [22] *Ha T reguláris, akkor $T_J \cap (conv(J) \setminus J) = \emptyset$, továbbá*

$$d(J,T) = d(conv(J),T) \geq -\max_{x \in J} wx + \min_{x \in T} wx,$$

minden $w \in \mathbb{R}^S$ vektorra. $\overline{w} = \chi_B - \chi_A$-ra pedig egyenlőség áll.

Biz.: Feltehetjük, hogy $A = \emptyset$. 4.8 miatt $y \in J_T$-re $\overline{w}y = \max(\overline{w}x \colon x \in J)$. Minden $v \in T_J$ pontra $v_i = l_i$, ha $i \in B$, vagyis $\overline{w}v = \min(\overline{w}x \colon x \in T)$. v-t válasszuk olyannak, hogy $d(y,T) = d(y,v)$ álljon. Ezért $d(conv(J),T) \leq d(J,T) = d(y,T) = d(y,v) = \overline{w}(v-y) = \min(\overline{w}x \colon x \in T) - \max(\overline{w}x \colon x \in J) \leq d(conv(J),T)$. Tehát $d(J,T) = d(conv(J),T) = -\max(\overline{w}x \colon x \in J) + \min(\overline{w}x \colon x \in T)$ Tetszőleges w-re az egyenlőtlenség triviális. Innen az is következik, hogy $T_J \cap (conv(J) \setminus J) = \emptyset$. ■

4.14 Köv. $\mathcal{S} \supseteq (conv(J) \cap \mathbb{Z}^S) \setminus J$. ■

4.11 szerint tehát reguláris dobozokra, speciálisan olyan $T = [l,u]$ dobozokra, amelyekre $l < u$, pontosan akkor lesz $J \cap T = \emptyset$, amikor $conv(J) \cap T = \emptyset$.

4.15 Tétel [22] *Minden fix összegű J ugrács konvex, és ha $v \notin J$, akkor vagy $x(S) \neq v(S)$ minden $x \in J$-re, vagy létezik egy $R \subseteq S$ halmaz, hogy minden $x \in J$-re $x(R) < v(R)$.*

Biz.: Legyen $v \in conv(J) \cap \mathbb{Z}^S$, T pedig legyen $\{v\} + (\mathbb{Z}_0^+)^S$, T reguláris. 4.13 szerint ha T metszi $conv(J)$-t, akkor metszi J-t is. J fix összegű, így T csak v-ben metszheti, vagyis $v \in J$.

Ha $v \notin J$, és $x(S) = v(S)$ minden $x \in J$-re, akkor az imént definiált T reguláris dobozra $T \cap J = \emptyset$. 4.13 szerint tehát $(A_T, D_T = \emptyset)$ $\chi_{B_T} x < \chi_{B_T} y$ minden $x \in J$, $y \in T$-re. Vagyis $R = B_T$-vel $x(R) < v(R)$ minden $x \in J$-re. ■

Innen a matroid metszet tétel is következik [22]: ha M_1, M_2 k-rangú matroidok, akkor pontosan akkor van közös bázisuk, ha $\mathbf{0} \in M_1 - M_2$. $M_1 - M_2$ fix összegű, tehát ha nincs közös bázisuk, akkor létezik egy $R \subseteq S$ halmaz, hogy M_i minden B_i bázisára $|R \cap B_1| > |R \cap B_2|$. Ez ekvivalens azzal, hogy $r_2(R) + r_1(S \setminus R) < k$.

Fix összegű ugrácsok összege is fix összegű, és így konvex. Ezen megfigyelésen alapul a következő tétel [15], Edmonds bázispoliéderek metszetéről szóló tételének általánosítása.

4.16 Tétel [15] *Ha J_1, J_2 fix összegű ugrácsok, akkor $conv(J_1 \cap J_2) = conv(J_1) \cap conv(J_2)$.*

Biz.: Mivel J_1, J_2 konvexek, elég belátni, hogy $conv(J_1) \cap conv(J_2)$ minden oldalán van egész pont. Legyen L egy nemüres oldala $conv(J_1) \cap conv(J_2)$-nek. $L = L_1 \cap L_2$, ahol L_i oldala $conv(J_i)$-nek. 4.3. szerint ugrács oldala is ugrács, és esetünkben fix összegű is, így feltehető, hogy $conv(J_i) = L_i$. Elég tehát belátni, hogy ha $conv(J_1) \cap conv(J_2)$ nemüres, akkor tartalmaz egész pontot. Ha $conv(J_1) \cap conv(J_2) \neq \emptyset$, akkor $\mathbf{0} \in conv(J_1) - conv(J_2) = conv(J_1 - J_2)$, vagyis $\mathbf{0} \in J_1 - J_2$, vagyis létezik egy egész v pont, hogy $v \in J_1 \cap J_2 \subseteq conv(J_1) \cap conv(J_2)$. ■

4.3 Szinguláris dobozok

Most áttérünk a szinguláris pontok tartalmazási problémájának vizsgálatára. $A_{\{\mathbf{0}\}}, \ldots, D_{\{\mathbf{0}\}}$, $J_{\{\mathbf{0}\}}$-t röviden $A_0, \ldots, D_0, J_0$-lal fogjuk jelölni.

4.17 Tétel [22] *Ha $i \in D_0$ és $v \in J_0$, akkor $v' \in J_0$, ahol*

$$v'_j = \begin{cases} -v_j, & \textit{ha } j = i, \textit{ és} \\ v_j & \textit{különben.} \end{cases}$$

Biz.: Feltehetjük, hogy $v \geq 0$. Ha $v_i = 0$, akkor $v' = v$, így legyen $v_i > 0$. Legyen $T = [-e^i, \mathbf{0}]$, $T' = [-e^i, v]$. Létezik egy $y \in J_0 \cap J_T \cap J_{T'}$ pont. $i \in D_0$, így $y_i < 0$. $v \in T'$, így $y \in T'$, ahonnan $y_i = -1$ és $j \neq i$-re $0 \leq y_j \leq v_j$. $v \in J_0$ miatt itt egyenlőség áll, azaz $v' = y \in J_0$. ■

A tételből a szinguláris pontok egy karakterizációját kapjuk:

4.18 Állítás *$J \subseteq \mathcal{R}$, $(conv(J) \cap \mathbb{Z}^S) \setminus J \subseteq \mathcal{S}$, $\mathcal{S} = \bigcup \left\{ \overline{\{v\}} : v \in (conv(J) \cap \mathbb{Z}^S) \setminus J \right\}$. J pontosan akkor konvex, ha $\mathcal{S} = \emptyset$.*

Biz.: $J \subseteq \mathcal{R}$ triviális, $(conv(J) \cap \mathbb{Z}^S) \setminus J \subseteq \mathcal{S}$-et már láttuk 4.14-ben. Legyen $y \in \overline{\{v\}} = [l, u]$, $v \in (conv(J) \cap \mathbb{Z}^S) \setminus J$, $\ i \in D_{\{v\}} \neq \emptyset$. $\{y\} \subseteq \overline{\{v\}} \subseteq [l, u + e^i]$ és $\overline{\{v\}}$ zárt, ezért létezik egy $z \in J_{\{y\}}$, hogy $z_i > v_i = y_i$. Ugyanígy olyan $z \in J_{\{y\}}$ is létezik, amire $z_i < y_i$. Vagyis $i \in D_{\{y\}}$, és így $y \in \mathcal{S}$.

Vissza, legyen $y \in \mathcal{S}$, ekkor $d(J, y) \geq 1$. Ha $d(J, y) > 1$ és $A_{\{y\}} \cup B_{\{y\}} \neq \emptyset$, akkor tegyük fel, hogy $i \in A_{\{y\}}$, és legyen $y' = y + e^i$. Könnyen ellenőrizhetően y'-re az A, B, C, D halmazok legfeljebb annyit változtak, hogy i az $A_{\{y\}}$-ból $C_{\{y'\}}$-be került. Végül egy olyan y' pontot kapunk, amire vagy $S = C_{\{y'\}} \dot\cup D_{\{y'\}}$, vagy $d(J, y') = 1$.

Az első esetben a 4.17 tétel miatt egy tetszőleges $x \in J_{\{y'\}}$ pontra $x' \in J_{\{y'\}}$ szintén, ahol $x'_i = -x_i$, $\ i \in D_{\{y'\}}$-re. Mivel $x_i = x'_i = y'_i$, $\ i \in C_{\{y'\}}$-re, ezért $y' = 1/2(x + x')$.

A második esetben $d(J, y') = 1$. Létezik egy olyan $x \in J_{\{y'\}}$ pont, amire $x = y' + e^i$ egy $i \in D_{\{y'\}}$-re. Most a 4.17 tételből $x' = y' - e^i$ is $J_{\{y'\}}$-ban van, vagyis $y' = 1/2(x + x')$.

Mindkét esetben tehát $y' \in (conv(J) \cap \mathbb{Z}^S) \setminus J$, az eredeti y-ra pedig $y \in \overline{\{y'\}}$ amiatt, hogy $A_{\{y\}} \subseteq A_{\{y'\}} \cup C_{\{y'\}}, B_{\{y\}} \subseteq B_{\{y'\}} \cup C_{\{y'\}}$.

Innen következik, hogy J pontosan akkor konvex, ha $\mathcal{S} = \emptyset$. ■

Ha $x \notin conv(J)$, akkor a tartalmazás eldöntése könnyebb, csak egy elválasztó hipersíkot kell megadnunk. Érdekesebb az az eset, amikor $x \in conv(J)$. Láttuk, hogy most x pontosan akkor szinguláris, ha $x \notin J$. Ezt az esetet vizsgáljuk a továbbiakban. Végig az $x = \mathbf{0}$ feltevéssel fogunk élni.

4.19 Tétel [28] *Ha $\mathbf{0} \in conv(J)$, akkor létezik egy $y \in J_0$, hogy $y_i = 0$ az $S \setminus D_0$-on.*

Biz.: Legyen $T = (\mathbb{Z}_0^-)^{A_0} \times (\mathbb{Z}_0^+)^{B_0} \times \mathbb{Z}^{C_0 \cup D_0}$. $\mathbf{0} \in T$, így létezik egy $y \in J_0 \cap J_T$ pont. T reguláris és metszi $conv(J)$-t, így J-t is, azaz $y \in T$. Definíció szerint minden J_0-beli pont ≥ 0 az A_0-on, ≤ 0 a B_0-on és 0 a C_0-on, így $y_i = 0$, ha $i \in S \setminus D_0$. ■

A következő tétel szerint minden $conv(J)$-beli pont legfeljebb két J-beli pont konvex kombinációjaként is felírható.

4.20 Tétel [28] *Ha $\mathbf{0} \in conv(J)$, akkor létezik $y^1, y^2 \in J_0$, hogy $y_1 + y_2 = \mathbf{0}$.*

Biz.: Az előző tétel szerint létezik egy $y^1 \in J_0$, hogy $y_i^1 = 0$ az $S \setminus D_0$-on, 4.17 szerint pedig $y^2 = -y^1 \in J_0$ szintén. ■

Sebő [28] bebizonyítja, hogy $conv(J)$-nek (X, Y) szerinti lapját (azaz J azon x pontjait, amelyek $x(X) - x(Y)$-t maximalizálják) $X \cup Y$-ra vetítve konvex ugrácsot kapunk, hogy $conv(J_1) \cap conv(J_2)$ mindig fél-egész, és hogy ha $1 \in conv(J) + conv(J)$, akkor létezik $x_1, \ldots, x_4 \in J$, hogy $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$. Ezen tételek közül az utolsó kettő bizonyítását átvesszük.

4.21 Tétel [28] *Két egész biszubmoduláris poliéder metszete fél-egész.*

Biz.: Elég belátni, hogy ha két egész biszubmoduláris poliéder metszete nemüres, akkor tartalmaz fél-egész pontot, ugyanis a metszet minden oldala az eredeti két poliéder egy-egy oldalának metszete, és 3.11, 3.14 szerint egész biszubmoduláris poliéder oldala is egész biszubmoduláris poliéder. $J_i := P(f_i) \cap \mathbb{Z}^S$ ugrács, $i = 1, 2$. Most $P(f_1) \cap P(f_2) \neq \emptyset \iff conv(J_1) \cap conv(J_2) \neq \emptyset \iff \mathbf{0} \in conv(J_1) - conv(J_2) = conv(J_1 - J_2)$. A 4.20 tétel miatt létezik $x, y \in J_1 - J_2$, hogy $x + y = \mathbf{0}$. $x = x_1 - x_2,\ y = y_1 - y_2,\ x_i, y_i \in J_i$, így $(x_1 + y_1)/2 = (x_2 + y_2)/2 \in P(f_1) \cap P(f_2)$. ■

4.22 Tétel [28] *Ha a J ugrácsra $1 \in conv(J) + conv(J)$, akkor létezik $x_1, \ldots, x_4 \in J$, hogy $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$.*

Biz.: $1 \in conv(J) + conv(J) = conv(J + J)$, így 4.20 miatt létezik $x, y \in J + J$, hogy $(x + y)/2 = 1$. Az $x = x_1 + x_2,\ y = y_1 + y_2,\ x_i, y_i \in J$ jelöléssel $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$. ■

Visszatérve a szinguláris dobozok vizsgálatára, először azt az esetet nézzük, amikor $D_0 = S$. Azon szinguláris dobozok esetét, amelyekre $D_0 \neq S$, erre fogjuk majd visszavezetni.

Def.: [22] J *kritikus*, ha $D_0 = S$, azaz ha $\{\mathbf{0}\}$ zárt doboz.

A 4.9 és a 4.17 tételek miatt J_0 minden eleme $0, \pm 1$ vektor, és ha az y $0, \pm 1$ vektorra y pontosan ott nemnulla, ahol x, akkor $y \in J_0$. Vagyis J_0 szép szimmetriával rendelkezik.

Def.: [22] $M := J_0 \cap [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$. M fix összegű delta-matroid, így M egy matroid, a J *lokális matroid*ja.

Világos, hogy minden hurokmentes matroid előáll lokális matroidként. A lokális matroid az egész ugrácsról sokat elárul. Legyen ugyanis $R \subseteq S$-re $T_R = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]^R \times \{\mathbf{0}\}^{S \setminus R},\ \ T'_R = \mathbb{Z}^R \times \{\mathbf{0}\}^{S \setminus R}$.

4.23 Tétel [15] $d(M, T_R) = d(J, T'_R)$.

Biz.: $\mathbf{0} \in T_R \subseteq T'_R$, így létezik egy $x \in J_0 \cap J_{T_R} \cap J_{T'_R}$ pont. A konstrukció miatt $y = (|x_1|, \ldots, |x_n|) \in J_0 \cap J_{T_R} \cap J_{T'_R}$ szintén. $\mathbf{0} \leq y \in J_0$, így $y \in M$, vagyis $d(M, T_R) = d(J, T_R) = d(y, T_R) = d(y, T'_R) = d(J, T'_R)$. ∎

4.24 Tétel [22] *Ha R az M matroid egy zárt halmaza, és J' a J vetülete $S \setminus R$-re, akkor J' kritikus, és lokális matroidja M/R.*

Biz.: $T := \mathbb{Z}^R \times \{\mathbf{0}\}^{S\setminus R}$. $J_T \cap J_0$ azon J_0-beli pontokból áll, melyek tartója a lehető legtöbbet, azaz $r_M(R)$-et metszenek R-be. R zártsága miatt $J_T \cap J_0$ pontjainak tartói fedik $S \setminus R$-et, továbbá nyilván $(J')_0 = (J_T)'$, vagyis $S \setminus R = D_0(J')$, azaz J' kritikus. Ha $v' \in (J')_0$ és v'-t $v \in J$ vetületeként kaptuk, akkor $J_0 \cap J_{[\mathbf{0},v]} \neq \emptyset$, vagyis egy $x \in J_0 \cap J_{[\mathbf{0},v]}$ pontra $v \in [\mathbf{0}, v]$ miatt $x \in [\mathbf{0}, v]$. Így $d(J', \mathbf{0}) = r_M(S) - r_M(R)$ miatt $x|_{S\setminus R} = v|_{S\setminus R}$, ahonnan $(J')_0$ minden elemét megkaphatjuk egy $J_T \cap J_0$-beli pont vetületeként, és így J' lokális matroidja M/R. ∎

Elérkeztünk oda, hogy visszavezessük a szinguláris dobozok esetét kritikus ugrácsokra.

4.25 Tétel [22] *Egy, a w $0, \pm 1$ vektor szerinti wx célfüggvényt a J ugrácson maximalizáló mohó algoritmus kimenete legyen az F ponthalmaz. Tegyük fel, hogy $w_i = 0$, $i \in R \subseteq S$-re. Legyen α az optimumérték, és F projekciója R-re F_R. Ekkor*

$$d(J, \mathbf{0}) \geq d(F_R, \mathbf{0}) - \alpha.$$

Ha $w = \chi_{B_0} - \chi_{A_0}$, akkor itt $R = D_0$-ra egyenlőség áll, és F_{D_0} kritikus.

Biz.: Feltehetjük, hogy $w = e^1 + \ldots + e^p$, és hogy a mohó algoritmus az $1, \ldots, p$ sorrendben maximalizál, azaz $J^0 = J$, és $\alpha_i = \max(x_i : x \in J^{i-1})$-gyel $J^i = \{x \in J^{i-1} : x_i = \alpha_i\}$. Most $F = J^p$ és $\alpha = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i$. Legyen $\alpha_i^+ = \max(\alpha_i, 0)$, $\alpha^+ = \sum\{\alpha_i^+ : i \leq p\}$. $U := S \setminus (R \cup \{1, \ldots, p\})$.

$$T_1 := [\alpha_1^+, \infty) \times \ldots \times [\alpha_p^+, \infty) \times \{\mathbf{0}\}^{R\cup U},$$

$$T_2 := [\alpha_1, \infty) \times \ldots \times [\alpha_p, \infty) \times \{\mathbf{0}\}^R \times \mathbb{Z}^U,$$

$$T_3 := [\alpha_1, \infty) \times \ldots \times [\alpha_p, \infty) \times \mathbb{Z}^{R\cup U}.$$

Minden $y \in J$-re $d(y, T_1) \leq \sum\{|y_i - \alpha_i^+| : i \leq p\} + \sum\{|y_i| : i > p\} \leq \sum\{\alpha_i^+ : i \leq p\} + \sum\{|y_i| : i \in S\} = \alpha^+ + d(y, \mathbf{0})$. $y \in J_0$-ra tehát $d(J, \mathbf{0}) = d(y, \mathbf{0}) \geq d(y, T_1) - \alpha^+ \geq d(J, T_1) - \alpha^+$. $T_1 \subseteq T_2 \subseteq T_3$, így legyen $x \in J_{T_1} \cap J_{T_2} \cap J_{T_3}$. A mohó algoritmus miatt $J_{T_3} = F = T_3 \cap J$, vagyis $x_i = \alpha_i$, $i \leq p$-re. Ezért

$$d(J, \mathbf{0}) \geq d(J, T_1) - \alpha^+ = d(x, T_1) - \alpha^+ = d(x, T_2) - \alpha = d(F, T_2) - \alpha = d(F_R, \mathbf{0}) - \alpha.$$

Az egyenlőség bizonyításához feltehetjük, hogy $A_0 = \emptyset$. Ekkor $B_0 = \{1, \ldots, p\}$. Az előző jelölésekkel $T_1 \subseteq \overline{\{\mathbf{0}\}}$, így egy $y \in J_0 \cap J_{T_1}$ pontra $y_i \leq 0$, $i \in B_0 = \{1, \ldots, p\}$-re. $d(J, T_1) = d(y, T_1) = \sum\{|y_i| : i \in S\} + \sum\{\alpha_i^+ : i \in B_0\} = d(y, \mathbf{0}) + \alpha^+ = d(J, \mathbf{0}) + \alpha^+$. Vagyis $x \in J_{T_1} \cap J_{T_2} \cap J_{T_3}$-ra $d(J, \mathbf{0}) = d(J, T_1) - \alpha^+ = d(F_{D_0}, \mathbf{0}) - \alpha$.

Végül belátjuk, hogy F_{D_0} kritikus. Legyen $i \in D_0$, és alkalmazzuk az előző egyenlőtlenséget a $J - [\mathbf{0}, e^i]$ ugrácsra és $R = D_0$-ra:

$$d(F_{D_0}, [\mathbf{0}, e^i]) = d(F_{D_0} - [\mathbf{0}, e^i], \mathbf{0}) = d((F - [\mathbf{0}, e^i])_{D_0}, \mathbf{0}) \leq$$

$$\leq d(J - [\mathbf{0}, e^i], \mathbf{0}) + \alpha = d(J, [\mathbf{0}, e^i]) + \alpha < d(J, \mathbf{0}) + \alpha = d(F_{D_0}, \mathbf{0}).$$

Ugyanígy $J + [\mathbf{0}, e^i]$-re, ahonnan kapjuk, hogy $D_F \supseteq D_0$, vagyis F_{D_0} kritikus. ■

$d(J, T) = d(J - T, \mathbf{0})$, $A_T(J) = A_0(J - T), \dots, D_T(J) = D_0(J - T)$, ezért az előző tételt általánosabban is kimondhatjuk:

4.26 Tétel [15] *Egy, a w $0, \pm 1$ vektor szerinti wx célfüggvényt a J ugrácson maximalizáló mohó algoritmus kimenete legyen az F ponthalmaz, ahol $w_i = 0$, $i \in R \subseteq S$-re. Legyen α az optimumérték, F projekciója R-re F_R, a T dobozé pedig T_R. Ekkor*

$$d(J, T) \geq d(F_R, T_R) + \min_{x \in T} wx - \max_{x \in J} wx.$$

Ha $w = \chi_{B_T} - \chi_{A_T}$, akkor itt $R = D_T$-re egyenlőség áll, és $F_{D_T} - T_{D_T}$ kritikus. ■

4.4 A Tutte-tétel

Lovász [21] akkor nevezi egy G gráf egy H részgráfját az $f \leq g \in \mathbb{Z}^{V(G)}$ függvényekre (f, g)-*faktor*nak, ha minden $v \in V(G)$ csúcsra $f(v) \leq \deg_H(v) \leq g(v)$. Az (f, g)-faktorokra kidolgozott elméletéből levezeti Tutte f-faktor tételét [21]. Később ezen elmélet mintájára építette fel az ugrácsokra vonatkozó fent tárgyalt tartalmazási problémát. Lovász [22]-ban megjegyzi, hogy nyilvánvalóan a tartalmazási probléma elméletéből levezethető Tutte f-faktor tétele. Ezt Geelen [15] teszi meg, a fejezet levezetése tehát Geelen munkája.

Def.: Ha G gráf és $X, Y \subseteq V(G)$, akkor $e(X, Y) := |\{xy \in E(G) \colon x \in X, y \in Y\}|$.

Def.: Ha G gráf és $f \in \mathbb{Z}^{V(G)}$, akkor $odd(G, f)$ a G olyan összefüggő komponenseinek száma, amelyekre $f(V(G))$ páratlan.

4.27 Tétel (Tutte) *Legyen $G = (V, E)$ gráf és $f \in \mathbb{Z}^V$. V-nek X, Y diszjunkt részhalmazaira legyen $f^{X,Y} = f - \sum\{e^u \colon uv \in E, u \in V \setminus (X \cup Y), v \in Y\}$. Ekkor*

$$d(J_G, f) \geq f(Y) - f(X) - e(Y, V \setminus (X \cup Y)) - 2e(Y, Y) + odd(G[V \setminus (X \cup Y)], f^{X,Y}|_{V \setminus (X \cup Y)}),$$

és $X = A_{\{f\}}(J_G)$, $Y = B_{\{f\}}(J_G)$-re egyenlőség áll.

Biz.: [15] Legyenek $X, Y \subseteq V$ diszjunkt csúcshalmazok. Legyen H egy olyan részgráfja G-nek, amire $d(\deg_H, f) = d(J_G, f)$, és tegyük fel, hogy X és Y közt H-ban e_1 él fut, valamint hogy $V \setminus (X \cup Y)$ és Y közt e_2 él fut. Ekkor $\deg_H$ és f l_1-távolsága X-en legalább $e_1 - f(X)$ és Y-on legalább $f(Y) - e_1 - e_2 - 2e(Y, Y)$. $V \setminus (X \cup Y)$ egy K összefüggő komponensére $f^{X,Y}(K) = f(K) - e(K, Y)$, ezért $\deg_H$ és f l_1-távolsága $V \setminus (X \cup Y)$-on legalább $e_2 - e(Y, V \setminus (X \cup Y)) + odd(G[V \setminus (X \cup Y)], f^{X,Y}|_{V \setminus (X \cup Y)})$, ugyanis $V \setminus (X \cup Y)$-nak legalább ennyi olyan K komponense van, amire $f^{X,Y}(K)$ páratlan és amire H minden K és Y közti élt használ, és így K-ban az l_1-távolság legalább 1.

Legyen $A = A_{\{f\}}(J_G), \dots, D = D_{\{f\}}(J_G)$. Belátjuk, hogy $X = A$, $Y = B$-re egyenlőség áll.

4.28 Lemma *A J ugrácsra $J+\{\mathbf{0},e^i\}$ nem kritikus.*

Biz.: $i\notin D_{[-e^i,\mathbf{0}]}(J)$ 4.8 miatt. Könnyen ellenőrizhető továbbá, hogy $F=A/B/C$-re $i\in F_{[-e^i,\mathbf{0}]}(J)$ esetén $i\in F_0(J+\{\mathbf{0},e^i\})$. Vagyis $J+\{\mathbf{0},e^i\}$ nem lehet kritikus. ■

4.29 Lemma *Ha a $G(V,E)$ gráfra és $f\in\mathbb{Z}^V$-re J_G-f kritikus, akkor $d(J_G,f)=odd(G,f)$.*

Biz.: Legyenek $X_1,\dots,X_k$ a J_G-f lokális matroidjának 1-rangú zárt halmazai. A matroidelmélet szerint $X_1,\dots,X_k$ egy partícióját adja V-nek. Legyen J' a J_G-f projekciója $V\setminus X_1$-re, f megszorítása $V\setminus X_1$-re pedig legyen f'. Világos, hogy

$$J'=\sum\left(\{\mathbf{0},e^i+e^j\}: ij\in E, i,j\notin X_1\right)+\sum\left(\{\mathbf{0},e^i\}: ij\in E, i\notin X_1, j\in X_1\right)-f'.$$

4.24 szerint J' kritikus, vagyis 4.28 szerint $e(X_1,V-X_1)=0$, azaz X_1 a gráf összefüggő komponenseiből áll. G minden összefüggő K komponensére és $x\in J_G$ pontra $x(K)$ páros, továbbá X_1 1-rangú zárt halmaz, ezért minden $v\in X_1$ csúcsra létezik egy olyan $x_v\in J_G$ pont, hogy $d(x_v(v),f(v))=1$ és $x_v(w)=f(w),\ \ w\in X_1-v$-re. Vagyis X_1 egy olyan összefüggő komponens, amire $f(X_1)$ páratlan, így $odd(G,f)=k$. Továbbá nyilván $d(J_G,f)=\sum_{i=1}^k d(J_{G[X_i]},f|_{X_i})=\sum_{i=1}^k 1=k$. ■

Legyen $w=\chi_B-\chi_A$. Tegyük fel, hogy a wx-et J_G-n maximalizáló olyan mohó algoritmus, ami először A, majd B pontjain optimalizál, kimenetként az F halmazt adja. Világos, hogy

$$F=\sum\left(\{\mathbf{0},e^i+e^j\}: ij\in E, i,j\in C\cup D\right)+\sum\left(e^i+e^j: ij\in E, i\in B, j\in V\setminus A\right).$$

F-nek D-re való vetülete:

$$F_D=\sum\left(\{\mathbf{0},e^i+e^j\}: ij\in E, i,j\in D\right)+$$

$$+\sum\left(\{\mathbf{0},e^i\}: ij\in E, i\in D, j\in C\right)+\sum\left(e^j: ij\in E, i\in B, j\in D\right).$$

4.25 szerint $F_D-f|_D$ kritikus, vagyis 4.28 szerint C és D közt nem fut él G-ben. Tehát $F_D-f|_D=J_{G[D]}-f^{A,B}|_D$ kritikus, így 4.29 szerint

$$d(F_D,f|_D)=d(J_{G[D]},f^{A,B}|_D)=odd(G[D],f^{A,B}|_D)\le odd(G[C\cup D],f^{A,B}|_{C\cup D}).$$

4.26 szerint

$$d(J_G,f)=d(F_D,f|_D)+wf-\max(wx: x\in J_G)\le$$

$$\le odd(G[C\cup D],f^{A,B}|_{C\cup D})+(f(B)-f(A))-(e(B,C\cup D)+2e(B,B)),$$

ami igazolja a tételbeli egyenlőséget. ■

5 Kizárt faktorok foksorozatai

Def.: ≤ 2-*faktor*nak olyan részgráfot hívunk, aminek minden foka legfeljebb 2. Egy ≤ 2-faktor k-*kizárt*, ha nem tartalmaz $\leq k$-hosszú kört.

Def.: A k-kizárt ≤ 2-faktor-probléma meghatározni, hogy hány éle van egy maximális méretű k-kizárt ≤ 2-faktornak.

Cunningham [6] veti fel a kapcsolatot az ugrácsok és a k-kizárt ≤ 2-faktorok között. Papadimitriou mutatta meg, hogy a k-kizárt ≤ 2-faktor-probléma $k \geq 5$-re NP-teljes. Hartvigsen eredménye [16], hogy a probléma P-beli $k = 3$-ra, a $k = 4$ esetet pedig Cunningham P-belinek sejti Russell javító utas tétele és Király Zoltán eredménye alapján [17], aki minimax formulát adott egy páros gráfban lévő maximális méretű 4-kizárt ≤ 2-faktor élszámára. Frank András [10] később ezt a minimax formulát általánosította páros gráfok olyan részgráfjaira, amelyek nem tartalmaznak $K_{t,t}$ részgráfot, és amelyeknek minden foka legfeljebb t.

Cunningham felteszi a kérdést, hogy mely k-kra adnak a k-kizárt ≤ 2-faktorok foksorozatai ugrácsot. Azt sejti, hogy pontosan azon k-kra, amelyekre a k-kizárt ≤ 2-faktor-probléma polinomiális. Belátja, hogy $k = 3$-ra a foksorozatok ugrácsot alkotnak, $k \geq 5$-re pedig nem. A $k \geq 5$ esetre adott ellenpéldáját a későbbiekben egyszerűsíteni fogjuk. A $k = 4$ esetről azt sejti, hogy a foksorozatok ugrácsot alkotnak. Következő eredményünkből ez a sejtés következni fog.

Def.: Egy $\mathcal{H}$ gráfosztályra a G gráf egy részgráfja $\mathcal{H}$-*kizárt*, ha nem tartalmaz $\mathcal{H}$-beli gráfot részgráfként. Ha $\mathcal{H} = \{H\}$, akkor egyszerűen H-kizárt részgráfról beszélünk. A részgráf $\leq t$-*faktor*, ha minden foka legfeljebb t.

Belátjuk, hogy tetszőleges G gráfban a $K_{t,t}$-kizárt $\leq t$-faktorok, a K_{t+1}-kizárt $\leq t$-faktorok és a $\{K_{t,t}, K_{t+1}\}$-kizárt $\leq t$-faktorok foksorozatai is ugrácsot alkotnak. Az ezirányú kutatást Frank András javasolta, azt sejtve, hogy páros gráfban a $K_{t,t}$-kizárt $\leq t$-faktorok foksorozatai ugrácsot alkotnak. Az eredmény magában foglalja mind Cunningham sejtését, miszerint a $\{C_3, C_4\} = \{K_3, K_{2,2}\}$-kizárt ≤ 2-faktorok foksorozatai ugrácsot alkotnak, mind Cunningham $C_3 = K_3$-mentes ≤ 2-faktorok foksorozatairól szóló tételét. Ez utóbbit Cunningham úgy igazolja, hogy egy egész javítóutat figyelemmel kísér. Bizonyításunkban egy javítóútnak egyszerre csak két élét tekintjük, ezért nyílik lehetőség arra, hogy a tételt általánosabban belássuk.

5.1 Tétel *Tetszőleges G egyszerű gráfban $t \geq 2$-re a $K_{t,t}$-kizárt $\leq t$-faktorok, a K_{t+1}-kizárt $\leq t$-faktorok és a $\{K_{t,t}, K_{t+1}\}$-kizárt $\leq t$-faktorok foksorozatai ugrácsot alkotnak.*

Biz.: Legyen $\mathcal{H} = \{K_{t,t}, K_{t+1}\}$. A három állítást párhuzamosan bizonyítjuk, a *kizárt faktor* elnevezés egyszerre vonatkozik $K_{t,t}/K_{t+1}/\mathcal{H}$-kizárt $\leq t$-faktorokra.

Legyen E_d, $E_c \subseteq E = E(G)$ két kizárt faktor, a d illetve c foksorozatokkal. Tegyük fel, hogy $d' = d \pm e^u$ egy lépés d-ből c-be.

Először tegyük fel, hogy $d_u < c_u$, ekkor $d' = d + e^u$. Fixáljuk le E_c-t. Indukcióval belátjuk, hogy ha egy $\tilde{E}$ kizárt faktorra és egy w csúcsra, a *kezdőpont*ra a $\tilde{d} = \deg_{\tilde{E}}$ jelöléssel $\tilde{d}_w < c_w$, akkor a $d' = \tilde{d} + e^w$ $\tilde{d}$-ból c-be való lépésre létezik egy olyan kizárt faktor, aminek a foksorozata egy lépés d'-ből c-be. Az indukció $|\tilde{E} \cap E_c|$-re, ezen belül a kezdőpontra illeszkedő $\tilde{E} \cap E_c$-beli élek számának -1-szeresére vonatkozik. Ha az indukciós állítást $\tilde{E} = E_d$-re alkalmazzuk, kapjuk a tételt.

5.2 Lemma *Legfeljebb egy olyan u-ra illeszkedő $E_c \setminus E_d$-beli él van, amit E_d-hez véve $K_{t,t}/K_{t+1}$ részgráf keletkezik.*

Biz.: Tegyük fel, hogy $uv, uw \in E_c \setminus E_d$ és $E_d + uv$, $E_d + uw$ mindegyikében van

1. $K_{t,t}$ részgráf: $E_d + uv$ $K_{t,t}$ részgráfjának színosztályai legyenek A_v, B_v, $E_d + uw$ részgráfjáé pedig A_w, B_w. $u \in A_v \cap A_w$, $v \in B_v, w \in B_w$. Most $t-1 \geq d_u \geq t-1+t-1-|B_v \cap B_w|$, vagyis $|B_v \cap B_w| \geq t-1 \geq 1$. Nyilván $v, w \notin B_v \cap B_w$, így $B_v \cap B_w$ egy x csúcsára $t \geq d_x \geq t+t-|A_v \cap A_w|$, ahonnan $A_v = A_w$. Vagyis A_v egy u-tól különböző y csúcsára $t \geq d_y \geq t+t-|B_v \cap B_w|$, azaz $B_v = B_w$, ami nem lehet $v \in B_v, v \notin B_w$ miatt.

2. K_{t+1} részgráf: $E_d + uv$ K_{t+1} részgráfjának csúcshalmaza legyen C_v, $E_d + uw$ részgráfjáé pedig C_w, $u \in C_v \cap C_w$. Most $t-1 \geq d_u \geq t-1+t-1-(|C_v \cap C_w|-1)$, vagyis $|C_v \cap C_w| \geq t \geq 2$. $v, w \notin C_v \cap C_w$, vagyis $C_v \cap C_w$ egy $x \neq u$ csúcsára $d_x \geq t+t-(|C_v \cap C_w|-1) \geq t+1$, ami nem lehet. ■

5.3 Lemma *$t \geq 3$-ra legfeljebb egy olyan u-ra illeszkedő $E_c \setminus E_d$-beli él van, amit E_d-hez véve $\mathcal{H}$-beli részgráf keletkezik. Ha a $t = 2$ esetben léteznek olyan $uv, uw \in E_c \setminus E_d$ élek, hogy $E_d + uv$-ben egy $K_{2,2}$ részgráf szerepel, $E_d + uw$-ben pedig egy K_3 részgráf szerepel, akkor létezik egy $z \in V(G) - \{u, v, w\}$ csúcs, hogy $uz, zw, wv \in E_d \setminus E_c$, $uv, uw \in E_c \setminus E_d$.*

Biz.: Tegyük fel, hogy $uv, uw \in E_c \setminus E_d$, és $E_d + uv$, $E_d + uw$ mindegyikében van egy $\mathcal{H}$-beli részgráf. Azt már megvizsgáltuk, amikor $E_d + uv$ és $E_d + uw$ mindegyike ugyanazt a részgráfot tartalmazza, így feltehetjük, hogy $E_d + uv$-ben egy $K_{t,t}$ részgráf szerepel A_v, B_v színosztályokkal, $E_d + uw$-ben pedig egy K_{t+1} részgráf szerepel a C_w csúcshalmazzal, $u \in A_v \cap C_w$. Nyilván $v, w \notin B_v \cap C_w$. Most $t-1 \geq d_u \geq t-1+t-1-|B_v \cap C_w|$, vagyis $|B_v \cap C_w| \geq t-1 \geq 1$. $B_v \cap C_w$ egy x csúcsára $t \geq d_x \geq t+t-|A_v \cap C_w|$, vagyis $|C_w| \geq |A_v \cap C_w| + |B_v \cap C_w| \geq t+t-1 > t+1$, $t \geq 3$ esetén, ami nem lehet.

A $t = 2$ esetben csak úgy nem jutunk ellentmondásra, ha $|B_v \cap C_w| = 1$ és $|A_v \cap C_w| = 2$. Legyen $B_v \cap C_w = \{z\}$, ekkor $A_v = \{u, w\}$, $C_w = \{u, w, z\}$, és szükségképpen $B_v = \{v, z\}$, azaz a lemmában leírt eset áll fenn. ■

Ha egy $E_c \setminus E_d$-beli uv élt E_d-be véve nem keletkezik $K_{t,t}/K_{t+1}/\mathcal{H}$-beli részgráf, akkor $d_v < c_v$ esetén $E_d + uv$ egy olyan kizárt faktor, aminek foksorozata egy lépés d'-ből c-be, vagyis készen vagyunk. Ha $d_v \geq c_v$, akkor létezik egy $vz \in E_d \setminus E_c$ él. Most az $\tilde{E} := E_d - uv + vz$ kizárt faktor foksorozata vagy egy lépés d'-ből c-be, vagy az $\tilde{E}$ kizárt faktorra és a z kezdőpontra alkalmazhatjuk indukciós feltevésünket, ugyanis $\deg_{\tilde{E}}(z) < c_z$ és az indukciós mennyiség nőtt, mivel $\tilde{E} \cap E_c$ nőtt. Így létezik egy olyan kizárt faktor, aminek a foksorozata egy lépés $\deg_{\tilde{E}} + e^z$-ből c-be, de $\deg_{\tilde{E}} + e^z = d'$, így készen vagyunk.

Tegyük fel, hogy nincs ilyen él, azaz minden $E_c \setminus E_d$-beli uv élre $E_d + uv$-ben szerepel $K_{t,t}/K_{t+1}/\mathcal{H}$-beli részgráf.

5.4 Lemma *Az $uv \in E_c \setminus E_d$ élre legfeljebb egy $K_{t,t}/K_{t+1}/\mathcal{H}$-beli részgráfja van $E_d + uv$-nek.*

Biz.: Külön tárgyaljuk a három esetet:

1. Tegyük fel, hogy $E_d + uv$-ben két $K_{t,t}$ részgráf is van, színosztályaik legyenek A_1, B_1 és A_2, B_2, $u \in A_1 \cap A_2$, $v \in B_1 \cap B_2$. Most $t-1 \geq d_u \geq t-1+t-1-(|B_1 \cap B_2|-1)$, vagyis $B_1 = B_2$. $B_1 \cap B_2$ egy $x \neq v$ csúcsára $t \geq d_x \geq t+t-|A_1 \cap A_2|$, ahonnan $A_1 = A_2$, ellentmondás.
2. Tegyük fel, hogy $E_d + uv$-ben két K_{t+1} részgráf is van, csúcshalmazaik C_1 és C_2, $u, v \in C_1 \cap C_2$. Most $t-1 \geq d_u \geq t-1+t-1-(|C_v \cap C_w|-2)$, vagyis $C_v = C_w$, ellentmondás.
3. Tegyük fel, hogy $E_d + uv$-ben két $\mathcal{H}$-beli részgráf is van, az előzőek alapján feltehető, hogy ezek egy A, B színosztályú $K_{t,t}$ részgráf és egy C csúcshalmazú K_{t+1} részgráf, $u \in A \cap C$, $v \in B \cap C$. Most $t-1 \geq d_u \geq t-1+t-1-(|B \cap C|-1)$, vagyis $|B \cap C| \geq t$. $B \cap C$ egy $x \neq v$ csúcsára $t \geq d_x \geq t+t-|A \cap C|$, vagyis $|C| \geq |A \cap C| + |B \cap C| \geq t+t > t+1$, ellentmondás. ■

Tegyük fel, hogy a $\mathcal{H}$-kizárt ≤ 2-faktor esetében léteznek olyan v, w, z csúcsok, hogy $uz, zw, wv \in E_d \setminus E_c$, $uv, uw \in E_c \setminus E_d$, és emiatt $E_d + uv$-ben egy $K_{2,2}$ részgráf szerepel, $E_d + uw$-ben pedig egy K_3 részgráf szerepel. Ekkor $vw \notin E_c$, mivel E_c-ben nem szerepel K_3 részgráf, így az $\tilde{E} = E_d + uv - vw$ jelöléssel $\tilde{E}$ $\mathcal{H}$-kizárt ≤ 2-faktor, mivel előző lemmánk szerint $E_d + uv$-ben legfeljebb egy $\mathcal{H}$-beli részgráf szerepel. Most az $\tilde{E}$ kizárt faktor foksorozata vagy egy lépés d'-ből c-be, vagy $\tilde{E}$-ra és a w kezdőpontra alkalmazhatjuk indukciós feltevésünket, ugyanis $\deg_{\tilde{E}}(w) < c_w$ és az indukciós mennyiség nőtt, mivel $\tilde{E} \cap E_c$ nőtt. Így létezik egy olyan kizárt faktor, aminek a foksorozata egy lépés $\deg_{\tilde{E}} + e^w$-ből c-be, de $\deg_{\tilde{E}} + e^w = d'$, így készen vagyunk.

Lemmáink alapján feltehető, hogy u-nak egy kivételével minden E_c-beli éle E_d-ben is szerepel, és ezen $uv \in E_c \setminus E_d$ élre $E_d + uv$-ben szerepel egy $K_{t,t}/K_{t+1}/\mathcal{H}$-beli részgráf. Következik, hogy $x_u + 1 = y_u = t$.

1. $E_d + uv$-ben egyetlen $K_{t,t}$ részgráf szerepel, színosztályai legyenek A, B, $u \in A$, $v \in B$. Ha létezik $z \in A$, hogy $zv \in E_d \setminus E_c$, akkor legyen $\tilde{E} = E_d + uv - vz$. Az $\tilde{E}$ kizárt faktor foksorozata vagy egy lépés d'-ből c-be, vagy $\tilde{E}$-ra és a z kezdőpontra alkalmazhatjuk indukciós feltevésünket, ugyanis $\deg_{\tilde{E}}(z) < c_z$ és az indukciós mennyiség nőtt, mivel $\tilde{E} \cap E_c$ nőtt. Mint már láttuk, $\deg_{\tilde{E}} + e^z = d'$, így készen vagyunk.

   Egyébként feltehetjük, hogy $zv \in E_c$ minden $z \in A$ csúcsra. Mivel E_c kizárt faktor, létezik egy $z \in A - u$ és egy $w \in B - v$ csúcs, hogy $zw \in E_d \setminus E_c$. Legyen $\tilde{E} = E_d + uv - vz$. Az $\tilde{E}$ kizárt faktor foksorozata vagy egy lépés d'-ből c-be, vagy $\tilde{E}$-ra és a z kezdőpontra alkalmazhatjuk indukciós feltevésünket, ugyanis $\deg_{\tilde{E}}(z) < c_z$ és az indukciós mennyiség nőtt, mivel $\tilde{E} \cap E_c$ ugyan változatlan, de a z kezdőpontra illeszkedő $\tilde{E} \cap E_c$-beli élek száma legfeljebb $t-2$, míg ugyanez az érték u-nál $E_d \cap E_c$-re $t-1$ volt, így készen vagyunk.

2. $E_d + uv$-ben egyetlen K_{t+1} részgráf szerepel, ponthalmaza legyen C, $u, v \in C$. Ha létezik $z \in C$, hogy $zv \in E_d \setminus E_c$, akkor legyen $\tilde{E} = E_d + uv - vz$. Az $\tilde{E}$ kizárt faktorra ugyanúgy alkalmazzuk indukciós feltevésünket, mint fent, most $\tilde{E} \cap E_c$ nőtt.

   Egyébként feltehetjük, hogy $zv \in E_c$ minden $z \in C$ csúcsra. Mivel E_c kizárt faktor, léteznek $z, w \in C - \{u, v\}$ csúcsok, hogy $zw \in E_d \setminus E_c$. Legyen $\tilde{E} = E_d + uv - vz$. Az $\tilde{E}$ kizárt faktorra ugyanúgy alkalmazzuk indukciós feltevésünket, mint fent, most $\tilde{E} \cap E_c$ ugyan változatlan, de a z kezdőpontra illeszkedő $\tilde{E} \cap E_c$-beli élek száma legfeljebb $t-2$, míg ugyanez az érték u-nál $E_d \cap E_c$-re $t-1$ volt.

3. A $\mathcal{H}$-kizárt esetben az előző két meggondolás egyike alkalmazható.

Hátramaradt az az eset, amikor $d_u > c_u$. Ekkor egy extra s csúcsot vegyünk hozzá a gráfhoz, és $E(G') := E(G) + su$, $V(G') := V(G) + s$, $\tilde{E}_c := E_c + su$. $E_d, \tilde{E}_c$ kizárt faktorok, és a $d = \deg_{E_d}$, $\tilde{c} = \deg_{\tilde{E}_c}$ jelöléssel $d_s = 0 < 1 = \tilde{c}_s$, így már tudjuk, hogy a $d' := d + e^s$ lépésre létezik egy olyan E' kizárt faktor G'-ben, aminek foksorozata egy lépés d'-ből $\tilde{c}$-ba. $\deg_{E'}(s) = 1$, így $su \in E'$ és könnyen ellenőrizhető, hogy az $E' - su \subseteq E$ kizárt faktor foksorozata egy lépés $d - e^u$-ból c-be.

A tételt bebizonyítottuk. ■

Felmerül a kérdés, hogy mely H gráfokra alkotnak a H-kizárt $\leq \Delta(H)$-faktorok foksorozatai ugrácsot, illetve hogy mely H gráfokra alkotnak a H-kizárt részgráfok foksorozatai ugrácsot. A második kérdésre teljes választ tudunk adni, míg az elsőre csak részlegeset.

Def.: A G gráf *teljes k-részes gráf*, ha $V(G) = V_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} V_k$, $V_i \neq \emptyset$ és $E(G) = \{uv\colon u \in V_i, v \in V_j, i \neq j\}$.

5.5 Állítás *Ha a H összefüggő egyszerű gráf nem egy teljes k-részes gráf, akkor a H-kizárt $\leq \Delta(H)$-faktorok foksorozatai nem alkotnak ugrácsot.*

Biz.: Belátjuk, hogy már H-nak H-kizárt $\leq \Delta(H)$-faktorainak foksorozatai sem alkotnak ugrácsot. A teljes k-részes gráfok pontosan azon gráfok, amelyekben a nemszomszédság reláció tranzitív, a feltétel tehát azt jelenti, hogy létezik három olyan $\{u, v, w\}$ csúcs H-ban, hogy $uv, uw \notin E = E(H)$, $vw \in E$. H összefüggő, így létezik egy u-val szomszédos z csúcs, $e := zu$. Legyen $E_d = E - e$, $E_c =$ (u szomszédainak csillagai), foksorozataik rendre d és c. Feltevésünk szerint $vw \notin E_c$, így E_d, E_c H-kizárt $\leq \Delta(H)$-faktorok. A $d' = d + e^z$ d-ből c-be való lépés nem foksorozat, tegyük fel, hogy létezik egy olyan $\tilde{E}$ H-kizárt $\leq \Delta(H)$-faktor, aminek $\tilde{d}$ foksorozata egy lépés d'-ből c-be. Ekkor vagy $\tilde{d} = d + e^z + e^u = \deg_H$, ami nem lehet, mivel $\tilde{E} = H$ állna, vagy $\tilde{d} = d + e^u - e^x$, ahol x nemszomszédos u-val, de ilyen foksorozatú részgráfja nincsen H-nak. ■

Állításunk következménye, hogy a C_k-kizárt $\leq$ 2-faktorok foksorozatai sem alkotnak ugrácsot $k \geq 5$-re, sőt a fejezet elején bevezetett terminológiával ez a k-kizárt $\leq$ 2-faktorokra is igaz, hiszen a k-hosszú kör nem tartalmaz részgráfként rövidebb kört. Vagyis Cunningham ellenpéldájánál egy jóval egyszerűbb ellenpéldát adhatunk, a lehető legegyszerűbbet: C_k bizonyítja, hogy a k-kizárt $\leq$ 2-faktorok foksorozatai nem alkotnak ugrácsot $k \geq 5$-re.

Most teljes választ adunk arra a kérdésre, hogy mely H gráfokra alkotnak a H-kizárt részgráfok foksorozatai ugrácsot.

5.6 Tétel *A H-kizárt részgráfok foksorozatai pontosan akkor alkotnak ugrácsot tetszőleges gráfban, ha H egy csillag.*

Biz.: Az előző állításban bebizonyítottuk, hogy ha H nem egy teljes k-részes gráf, akkor H-nak H-kizárt $\leq \Delta(H)$-faktorainak foksorozatai nem alkotnak ugrácsot. H minden részgráfja $\leq \Delta(H)$-faktor, ezért H-ban a H-kizárt részgráfok foksorozatai sem alkotnak ugrácsot, amennyiben H nem egy teljes k-részes gráf.

Ha H egy teljes k-részes gráf és $k \geq 3$, akkor tegyük fel, hogy $|V_1| \leq \ldots \leq |V_k|$. A G gráfra legyen $V(G) = V(H) + s$, $E(G) = E(H) + \{xs\colon x \in V_i,\ i < k\}$. Legyen $u \in V_1$, $v \in V_2$, $z_1, z_2 \in$

$V_k + s$. $E_d := E(G) - uv$, $E_c := E(G) - \{uz_1, uz_2\}$, foksorozataik d illetve c. E_d és E_c könnyen ellenőrizhetően H-kizárt részgráfok. A $d' = d + e^v$ d-ből c-be való lépésre egy d'' d'-ből c-be való lépés a következők valamelyike lehet: $d'' = d + e^v - e^u = \deg_G - 2e^u$, $d'' = d + e^v - e^{z_i}$, $i = 1, 2$. Az első esethez nem tartozik részgráf, a második pedig az $E(G) - uz_i$ részgráfhoz tartozik, amely viszont tartalmaz egy H részgráfot, $G[V(G) - z_i]$-t.

Ha $H = K_{a,b}$ egy nemcsillag teljes páros gráf, akkor $a, b > 1$. A $G = (V, E)$ gráfra legyen $V = A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup B_1 \dot\cup B_2 \dot\cup \{u, v\}$, $E := \{xy \colon x \in A_1 + u, y \in B_1 + v\} \dot\cup \{xy \colon x \in A_2 + u, y \in B_2 + v\}$, ahol $|A_1| = |A_2| = a - 1$, $|B_1| = |B_2| = b - 1$. $E_d := E - uv$, $E_c := \{uy \colon y \in B_1 \cup B_2\} \cup \{xv \colon x \in A_1 \cup A_2\} + uv$, foksorozataik d illetve c. E_d és E_c könnyen ellenőrizhetően H-kizárt részgráfok. A $d' = d + e^u$ d-ből c-be való lépésre egy d'' d'-ből c-be való lépés a következők valamelyike lehet: $d'' = d + e^u + e^v = \deg_G$, $d'' = d + e^u - e^z = \deg_G - e^v - e^z$, $z \in A_1 \cup A_2$-re, tegyük fel, hogy $z \in A_1$. Az első foksorozat csak G-é lehet, ami viszont tartalmaz egy $K_{a,b}$ részgráfot. A második foksorozat pedig a $G - vz$ részgráfhoz tartozik, amelyben az $(A_2 + u) \cup (B_2 + v)$ csúcshalmaz egy $K_{a,b}$ részgráfot feszít.

Ha H egy k-élű csillag, akkor a H-kizárt részgráfok éppen a legfeljebb $k-1$-fokú részgráfok, amelyeknek foksorozatai tetszőleges G gráfban ugrácsot alkotnak, hiszen az ilyen foksorozatok halmaza $J_G \cap [\mathbf{0}, \mathbf{k-1}]$. ■

6 A matroid parity probléma

6.1 A három alak

A dolgozatban a matroid parity problémát párhuzamosan három ekvivalens megfogalmazásra építjük fel. Az ugrácsoktól eltérően sok egymáshoz nagyon közeli probléma van, amelyek mind triviálisan ekvivalensek a matroid parity problémával, ennek ellenére az egyikről szóló tételt vagy struktúrát néha nem egyszerű a másikra átvinni. Az is előfordul, hogy az egyikről szóló tételnek a másikra való puszta átfogalmazásánál több is mondható. Mivel bizonyos alkalmazásokat más és más egymással ekvivalens alakra kényelmes visszavezetni, ezért a fő tételeket és definíciókat három kiválasztott probléma mindegyikére kimondjuk, kivéve akkor, ha az átfogalmazás semmi gondot nem okoz, vagy ha definíció esetén az átfogalmazás értelemszerű. Ez a három ekvivalens alak a matroid parity, a polimatroid parity és az általános matroid parity.

Def.: A $b \colon \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ függvény *szubmoduláris*, ha minden $X, Y \subseteq S$-re $b(X) + b(Y) \geq b(X \cap Y) + b(X \cup Y)$ és $b(\emptyset) = 0$. Egy szubmoduláris függvény *polimatroid függvény*, ha véges, monoton nő és egészértékű. A b polimatroid függvény *k-polimatroid függvény*, ha $b(X) \leq k|X|$.

Az 1-polimatroid függvények éppen a matroid rangfüggvények. A matroid parity probléma 2-polimatroid függvényekről szól:

Def.: Az (A, p) párt *2-polimatroid*nak hívjuk, ha p egy 2-polimatroid függvény a véges A halmazon. $M \subseteq A$ *matching*, ha $p(M) = 2|M|$. $\nu(A, p) := \max\{|M| \colon M \text{ matching}\}$.

Def.: A *matroid parity probléma* adott (A, p) 2-polimatroid esetén a maximális matching méretének, azaz $\nu(A, p)$-nek a meghatározása.

A polimatroid parity probléma ezzel analóg tetszőleges polimatroid függvényekre.

Def.: A véges T halmaz részhalmazain adott ϱ polimatroid függvény *polimatroid*ja $P(T,\varrho) = \{v \in \mathbb{R}^T : v \geq 0,\ \ v(X) \leq \varrho(X)\ \forall X \subseteq T\}$. Az $x \in \mathbb{Z}^T$ vektor *páros*, ha minden komponense egy páros egész szám. Az $m \in \mathbb{Z}^T$ páros vektor *matching*, ha $m \in P(T,\varrho)$. $\nu(T,\varrho) := \max\{m(T)/2\colon m$ matching$\}$.

Def.: A *polimatroid parity probléma* adott $P(T,\varrho)$ polimatroid esetén $\nu(T,\varrho)$-nak a meghatározása.

$P(T,\varrho)$ egész vektorai a 12. oldali megjegyzés és 3.29 szerint ugrácsot alkotnak, de erre nem lesz szükségünk.
Az általánosított matroid parity problémában egy matroid elemeiből alkotott párokból akarunk maximálisan sok diszjunktat kiválasztani, hogy a párok uniója független legyen.

Def.: Az $\mathcal{M} = (S,r)$ matroid alaphalmazán adott egy olyan E élhalmaz, amire (S,E) egy egyszerű, irányítatlan gráf. Egy $F \subseteq E$ élhalmaz *matching*, ha $r(\bigcup F) = 2|F|$. $\nu(\mathcal{M},E) := \nu(S,r,E) := \max\{|F|\colon F$ matching$\}$.

Def.: Az *általános matroid parity probléma* adott $\mathcal{M} = (S,r)$ matroid és E élhalmaz esetén $\nu(\mathcal{M},E) = \nu(S,r,E)$-nek a meghatározása.

Bevezetünk egy jelölést a polimatroid parityre.

Def.: Az $y \in \mathbb{R}^T,\ \ y \geq 0$ vektorra $\varrho(y) := \min(\varrho(R) + y(T \setminus R)\colon R \subseteq T)$.

6.1 Állítás $\max(x(T)\colon x \in P(T,\varrho),\ x \leq y) = \min(\varrho(R) + y(T \setminus R)\colon R \subseteq T) = \varrho(y)$, *és ha* y *egész, akkor létezik olyan egész* x*, amin a bal oldali maximum felvétetik.*

Biz.: A 12. oldalon láttuk, hogy $P(T,\varrho) = P(f)$, ahol $f(X,Y) = \varrho(X)$ biszubmoduláris függvény. 3.13 szerint $\{x \in P(T,\varrho)\colon x \leq y\} = P(g)$, ahol $g(X,Y) = \min(f(A,B) + y(X \setminus A) + y(B \setminus Y) + \infty \cdot |A \setminus X| + \infty \cdot |Y \setminus B|\colon (A,B) \in \mathcal{F}(S)) = \min(\varrho(A) + y(X \setminus A) + y(B \setminus Y)\colon A \subseteq X,\ Y \subseteq B) = \min(\varrho(A) + y(X \setminus A)\colon A \subseteq X)$. (Ez csak X-től függ, vagyis $\{x \in P(T,\varrho)\colon x \leq y\}$ is egy polimatroid.) Vagyis 3.6 szerint $\max(x(T)\colon x \in P(T,\varrho),\ x \leq y) = g(T,\emptyset) = \min(\varrho(R) + y(T \setminus R)\colon R \subseteq T) = \varrho(y)$.
Ha y egész, akkor g is az, vagyis 3.14 szerint $P(g)$ is egész, így létezik egy olyan egész x, amin a maximum felvétetik. ■

6.2 Köv. $\varrho(y) = y(T)$ *ekvivalens* $y \in P(T,\varrho)$*-val.* ■

Nézzük, hogyan alakítható át egymásba ez a három alak. A matroid parity egyszerűen a polimatroid parity speciális esete. Világos, hogy $M \subseteq A$ pontosan akkor matching, ha $2\chi_M \in P(A,p)$, azaz ha a $2\chi_M$ páros vektor matching polimatroid parity értelemben. Továbbá $P(A,p)$ minden matchingje $2\chi_M$ alakú, hiszen p egy 2-polimatroid függvény.

A polimatroid parity a következő ismert konstrukcióval vezethető vissza az általános matroid parityre. Legyen az $S_i,\ i \in T$ diszjunkt halmazokra $S = \dot{\bigcup}_i S_i,\ \ |S_i| = \varrho(\{i\})$, ϱ_S pedig legyen a következő polimatroid függvény S-en: $X \subseteq S$-re $\varrho_S(X) := \varrho(\{i \in T\colon X \cap S_i \neq \emptyset\})$. $P(\varrho_S) \cap \{0,1\}^S$ egy olyan nemüres delta-matroid, amely egy leszálló részhalmazrendszer karakterisztikus vektoraiból áll, így 3.28 szerint $P(\varrho_S) \cap \{0,1\}^S$ egy matroid. Legyen a rangfüggvénye r.

Def.: Az $I \subseteq S$ halmazra $w_i^I := |I \cap S_i|,\ \ i \in T$-re.

6.3 Állítás $I \subseteq S$-re $\varrho(w^I) = r(I) = \min(\varrho_S(X) + |I \setminus X|\colon X \subseteq I)$.

Biz.: $r(I) = \max(x(S)\colon x \in P(\varrho_S) \cap \{0,1\}^S, x \leq \chi_I) = \max(x(S)\colon x \in P(\varrho_S), x \leq \chi_I) = \min(\varrho_S(X) + \chi_I(S \setminus X)\colon X \subseteq S) = \min(\varrho_S(X) + |I \setminus X|\colon X \subseteq I)$ 6.1 szerint és amiatt, hogy $\{x \in P(\varrho_S)\colon x \leq \chi_I\}$ egész 3.13 és 3.14 szerint. Ha X-en vétetik fel a minimum, akkor X nyilván $\dot{\bigcup}\{S_i\colon i \in R\}$ alakú, vagyis $r(I) = \min(\varrho(R) + w^I(T \setminus R)\colon R \subseteq T) = \varrho(w^I)$. ∎

Def.: A kapott $\mathcal{M} = (S, r)$ matroidot hívjuk ϱ *ősmatroid*jának.

6.4 Állítás *A ϱ polimatroid függvény $\mathcal{M} = (S, r)$ ősmatroidja a legnagyobb rangú olyan matroid S-en, amire $r(\bigcup\{S_i\colon i \in R\}) = \varrho(R)$ minden $R \subseteq T$-re.*

Biz.: Ha az $\tilde{\mathcal{M}} = (S, \tilde{r})$ matroidra és $X' \subseteq S$-re $\tilde{r}(X') > r(X')$, akkor létezik egy olyan $X \subseteq S$ halmaz is, hogy X független $\tilde{\mathcal{M}}$-ban és függő $\mathcal{M}$-ben. Vagyis $\chi_X \notin P(\varrho_S)$, azaz egy $Z \subseteq S$ halmazra $|X \cap Z| > \varrho_S(Z)$. Legyen $R = \{i \in T\colon S_i \cap Z \neq \emptyset\}$ és $\tilde{Z} = \bigcup\{S_i\colon i \in R\}$. Most $|X \cap \tilde{Z}| \geq |X \cap Z| > \varrho_S(Z) = \varrho_S(\tilde{Z})$, vagyis $\tilde{r}(\bigcup\{S_i\colon i \in R\}) = \tilde{r}(\tilde{Z}) > \varrho_S(\tilde{Z}) = \varrho(R)$, vagyis a feltétel nem teljesül $\tilde{\mathcal{M}}$-ra. ∎

Gyakran hasznos, ha megvizsgáljuk egy polimatroid ősmatroidját.

Végül az $E = \{st\colon s \neq t$ és létezik $i \in T$, hogy $s, t \in S_i\}$ jelöléssel nyilvánvaló, hogy $\nu(\mathcal{M}, E) = \nu(T, \varrho)$.

Már csak egy visszavezetés maradt hátra: az általános matroid parity egy $\mathcal{M} = (S, r)$ példányára legyen $A = E$, $p(X) = r(\bigcup X)$, $X \subseteq A$-ra. Világos, hogy $\nu(A, p) = \nu(\mathcal{M}, E)$.

Alapvető alak az általános matroid parity azon speciális esete is, amikor az (S, E) gráf egy teljes párosítás. A „matroid parity” elnevezést is innen kapta Lawlertől. Az általános matroid parityt úgy vezethetjük vissza erre az alakra, hogy minden $s \in S$ elem $\deg_E(s)$ párhuzamos példányát vesszük. Ennek az alaknak megvan az a szép tulajdonsága, hogy az (S, r) matroid (S, r^*) duálisára $\nu(S, r, E) - \nu(S, r^*, E) = \frac{r(S) - r^*(S)}{2} = r(S) - |S|$.

6.2 A matroid parity probléma exponenciális rendű

Felvetődik a kérdés, hogy mit értünk a fenti problémák polinomiális megoldásán. Az ekvivalencia miatt elég a matroid parityről szólnunk. Lényeges kérdés, hogy hogyan adott egy 2-polimatroid. Már magának p-nek a tárolásához is $|A|$-ban exponenciális tár szükséges, és az adatok végigolvasásával egyben ν-t is meghatározhatjuk. Ezért azzal a feltételezéssel élünk, hogy adott egy rangorákulum, aminek a működéséről semmit nem tudunk, az algoritmus pusztán arra használhatja az orákulumot, hogy A tetszőleges X részhalmazaira megkérdezze $p(X)$-et, amit az orákulum egységnyi idő alatt kiszámít. A másik két megfogalmazásunkban ennek megfelelően azt tesszük fel, hogy ϱ-ra illetve r-re adott egy orákulum, és hogy E-t explicite ismerjük.

Lovász bebizonyította, hogy ezen feltételezés mellett a matroid parity probléma nem oldható meg polinomiálisan:

6.5 Állítás [18] *Tetszőleges 2-polimatroidra a matroid parity probléma exponenciális rendű, ezért nem létezik olyan polinomiális algoritmus, amely minden 2-polimatroidra meghatározza $\nu(A, p)$-t.*

Biz.: Legyen A egy n-elemű alaphalmaz. Az alább definiált p függvények $k \approx n/2$-re könnyen ellenőrizhetően mind 2-polimatroid függvények:

$$p(X) = \begin{cases} 2|X|, & \text{ha } |X| < k, \\ 2k-1 \text{ vagy } 2k, & \text{ha } |X| = k, \\ 2k, & \text{ha } |X| > k. \end{cases}$$

Az orákulum szerepét játszva az algoritmus kérdéseire válaszoljunk p iménti definíciója szerint, és ha az algoritmus egy k méretű halmaz rangját kérdezi, válaszoljunk $2k-1$-et! Ha nem kérdezi végig az összes k-méretű halmaz rangját, akkor nem tudhatja, hogy létezik-e olyan k-elemű halmaz, aminek a rangja $2k$, márpedig éppen ettől függ, hogy $\nu = k$ teljesül-e. ■

Az ötletet, hogy ilyen típusú 2-polimatroidokat vizsgáljon, a legkisebb semmilyen test felett nem reprezentálható matroid, a $\mathcal{V}_8$ Vamos-Higgs matroid adta Lovásznak. $\mathcal{V}_8$ alaphalmaza $\{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2\}$, legyen $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c_1, c_2\}$, $D = \{d_1, d_2\}$. Minden háromelemű részhalmaz független, minden ötelemű függő, és a négyeleműek közül a következők függőek: $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup D$, $B \cup C$, $B \cup D$. $\mathcal{V}_8$ nem reprezentálható semmilyen test felett, és önduális. Ha $E_V = \{a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, d_1d_2\}$, akkor $F \subseteq E_V$-re:

$$p(\cup F) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |F| = 0, \\ 2, & \text{ha } |F| = 1, \\ 3, & \text{ha } |F| = 2, \text{ és } F \neq \{c_1c_2, d_1d_2\} \\ 4, & \text{ha } |F| \geq 3, \text{ vagy ha } F = \{c_1c_2, d_1d_2\}. \end{cases}$$

$(\mathcal{V}_8, E_V)$-ről még lesz szó az 53. és az 58. oldalakon. Lovász ezt a példát csak azután találta meg, hogy megalkotta a formulát és az algoritmust a lineáris esetre. Szerencsére hogy így volt, mivel – mint állítja – különben nem is foglalkozott volna tovább a lineáris esettel.

Def.: A $b\colon \mathcal{P}(B) \to \mathbb{N}$ polimatroid függvényre nézve a B halmaz a $B_1, \dots, B_k$ halmazok *direkt összege*, ha $B = \dot{\bigcup}_i B_i$ és $b(B) = \sum_i b(B_i)$. Ha B nem áll elő direkt összegként, akkor b-re nézve *összefüggő*.

6.6 Állítás *Ha a B halmaz b-re nézve a $B_1, \dots, B_k$ halmazok direkt összege, akkor $b(\bigcup_i X_i) = \sum_i b(X_i)$ minden $X_i \subseteq B_i$-re.*

Biz.: Az állítást nyilván elég $k = 2$-re belátni. Ekkor $b(X_1 \cup X_2) + b(B_2) \geq b(X_2) + b(X_1 \cup B_2)$ és $b(X_1 \cup B_2) + b(B_1) \geq b(X_1) + b(B)$, ahonnan $b(X_1 \cup X_2) \geq b(X_1) + b(X_2) \geq b(X_1 \cup X_2)$. ■

Def.: Az (A, p) 2-polimatroidra $X \subseteq A$ *lezártja*: $sp(X) = \{x \in A\colon p(X + x) = p(X)\}$. X *feszíti* Y-t, ha $Y \subseteq sp(X)$.

p szubmodularitása és monotonitása miatt $p(sp(X)) = p(X)$. $sp(X)$ a legbővebb X-et tartalmazó $p(X)$-rangú halmaz.

Def.: A $b\colon \mathcal{P}(B) \to \mathbb{N}$ polimatroid függvényre és $B = B_1 \dot{\cup} B_2$-re a $b \backslash B_1\colon \mathcal{P}(B_2) \to \mathbb{N}$, $X \mapsto b(X)$ függvényt $B_1 \subseteq B$ *törlés*ével, a $b/B_1\colon \mathcal{P}(B_2) \to \mathbb{N}$, $X \mapsto b(X \cup B_1) - b(B_1)$ függvényt pedig $B_1 \subseteq B$ *összehúzás*ával kapjuk.

Def.: A $b, b' \colon \mathcal{P}(B) \to \mathbb{N}$ polimatroid függvényekre b' projekciója b-nek, ha $b - b'$ monoton növő. A b' projekció 1-projekció, ha $b - b' \leq 1$.

Projekciókra tehát $b'(X) \leq b(X)$ minden $X \subseteq B$-re. Ha $x \in B$ és $b(\{x\}) > 0$, akkor például a következő függvény projekció:

$$b'(X) := \begin{cases} b(X) - 1, & \text{ha } b(X + x) = b(X), \text{ és} \\ b(X) & \text{különben.} \end{cases}$$

Könnyű látni, hogy ha b ősmatroidja $\mathcal{M} = (S, r)$, és $t \in S_x$, akkor $b'(X) = r_{\mathcal{M}/\{t\}}(\bigcup\{S_i \colon i \in X\})$.

Ha adott a $B \dot\cup Z$ alaphalmazon egy olyan $\tilde{b}$ polimatroid függvény, amire $\tilde{b}|_{\mathcal{P}(B)} = b$, akkor $\tilde{b}/Z$ is b egy projekciója. Belátjuk, hogy minden projekció előáll összehúzásként.

6.7 Állítás *A $b \colon \mathcal{P}(B) \to \mathbb{N}$ polimatroid függvény b' projekciójához létezik egy $B \dot\cup Z$ alaphalmazon egy $\tilde{b}$ polimatroid függvény, amire $\tilde{b}|_{\mathcal{P}(B)} = b$ és $b'(X) = \tilde{b}(X \cup Z) - \tilde{b}(Z)$, $X \subseteq B$-re.*

Biz.: Könnyen ellenőrizhető, hogy a $b_i(X) := \min(b'(X) + i, b(X))$, $0 \leq i \leq k = b(B) - b'(B)$ polimatroid függvényekre b_i 1-projekciója b_{i+1}-nek, továbbá $b_0 = b'$, $b_k = b$. Elég tehát a tételt 1-projekciókra belátni, hiszen $(b/Y)/Z = b/(Y \cup Z)$. Ha b' 1-projekció, akkor legyen $Z = \{z\}$, $X \subseteq B + z$-re pedig

$$\tilde{b}(X) := \begin{cases} b(X), & \text{ha } z \notin X, \\ 1 + b'(X - z), & \text{ha } z \in X. \end{cases}$$

Ez nyilván jó lesz. ■

Lássunk még néhány a matroid parityvel ekvivalens problémát [21]:

Edmonds vezette be a **matchoid problémát**: adott egy esetleg hurokéleket is tartalmazó G gráf, és minden v pontjának csillagán egy $\mathcal{M}_v$ matroid. Egy $M \subseteq E$ élhalmaz *matchoid*, ha minden v pontra a v-re illeszkedő M-beli élek független halmazt alkotnak $\mathcal{M}_v$-ben. Hány éle van egy maximális méretű matchoidnak? Ha G egypontú és csak hurkokat tartalmaz, akkor visszakapjuk a matroid parity problémát. 8.5-ben egy minimax formulát adunk a problémára abban az esetben, ha minden v-re $\mathcal{M}_v$ lineáris, valamint 8.3 második állításából is következik egy minimax formula bizonyos speciális $\mathcal{M}_v$ matroidok esetén.

A speciális k-matroid metszet probléma könnyen ellenőrizhetően ekvivalens a hurokél nélküli gráfok matchoid problémájával: adott egy E alaphalmaz és az $\mathcal{M}_i$ matroidok az $E_i \subseteq E$ részhalmazokon úgy, hogy E minden eleme legfeljebb két matroid alaphalmazában szerepel. Mekkora a legnagyobb méretű olyan $M \subseteq E$ halmaz, hogy $M \cap E_i$ független $\mathcal{M}_i$-ben?

Minimális feszítőhalmaz keresése: Adott 2-polimatroidban keressünk egy minimális méretű az alaphalmazt feszítő halmazt! A probléma a következő tétel miatt ekvivalens a matroid parityvel [18].

Def.: Az (A, p) 2-polimatroidban $\rho(A, p) := \min\{|N| \colon sp(N) = A\}$, a minimális feszítő részhalmaz mérete.

6.8 Tétel [18] $\rho(A, p) + \nu(A, p) = p(A)$.

Biz.: $\leq$: (A,p)-nek legyen M egy maximális matchingje, N pedig legyen egy maximális olyan halmaz, amire $M \subseteq N$ és $p(N) \geq p(M) + |N-M|$. Ilyen halmaz létezik, például M ilyen. N feszítő, különben egy $a \in A$ elemre $p(N+a) \geq p(N)+1$, ami ellentmond N maximalitásának. Vagyis $\rho(A,p) \leq |N| \leq p(N) - p(M) + |M| = p(A) - \nu(A,p)$.

$\geq$: Ha N egy minimális feszítő halmaz, akkor hagyjunk el elemeket N-ből, ha ezzel legfeljebb 1-gyel csökkentjük a rangot. Ha k lépés után bármely elem kihagyásával már 2-vel csökken a rang, akkor a kapott M halmaz egy matching, hiszen minden x elemére M az $M-x$ és az $\{x\}$ halmazok direkt összege p-re nézve. Vagyis $|M| = |N| - k \leq |N| - (p(N) - p(M)) = |N| - p(A) + 2|M|$, ahonnan $\nu(A,p) \geq p(A) - \rho(A,p)$. ■

A is feszítő halmaz, vagyis:

6.9 Köv. [18] *Az (A,p) 2-polimatroidban $\nu(A,p) \geq p(A) - |A|$.* ■

Def.: A $G(V,E)$ gráf *grafikus 2-polimatroid*ja az az (E,p) 2-polimatroid, amire $p(F) = |\bigcup F|$, $F \subseteq E$-re.

Nyilván $\nu(G) = \nu(E,p)$. 6.8 grafikus polimatroidban pontosan a Gallai-tétel. Az állítás bizonyítása is analóg a gráfelméleti változat bizonyításával.

6.3 Körök és virágok

A 2-polimatroidok szerkezetének mélyebb tanulmányozásához Lovász bevezeti a következő fogalmakat [18]:

Def.: Az (A,p) 2-polimatroidban $C \subseteq A$ *kör*, ha $p(C) = 2|C| - 1$ és $p(C-x) = 2|C| - 2$ minden $x \in C$-re.

A kör 1 híján nem matching, de minden valódi részhalmaza matching. Grafikus polimatroidban a kör két illeszkedő nem párhuzamos él. Kör ősmatroidja egy páros elemszámú kör matroid értelemben.

Def.: A $P(T,\varrho)$ polimatroidra $c \in \mathbb{N}^T$ *kör*, ha vagy $c = 3e^i \in P(T,\varrho)$ egy $i \in T$-re, vagy c egy páros vektor, $\varrho(c) = c(T) - 1$ és $\varrho(c - 2e^i) = c(T) - 2$ minden olyan $i \in T$-re, amire $c_i \geq 2$.

Def.: Az (A,p) 2-polimatroidban $V \subseteq A$ *virág*, ha p-re nézve egy C kör és egy M matching direkt összege. V *k-virág*, ha $|V| = k+1$.

6.10 Állítás [18] *$V \subseteq A$ pontosan akkor virág, ha $p(V) = 2|V| - 1$. Minden V virág egyetlen C kört tartalmaz, és $c \in C$-re $V - c$ matching.*

Biz.: Nyilván minden V virág rangja $2|V| - 1$. Ha $V \subseteq A$-ra $p(V) = 2|V| - 1$, akkor tekintsük V-nek egy minimális olyan C részhalmazát, ami $2|C| - 1$ rangú. C kör, hiszen minden részhalmaza matching a minimalitás miatt. $V - C$ matching, különben p szubmodularitása miatt $p(V) < 2|V| - 1$ állna, vagyis $p(V) = p(C) + p(V-C)$, azaz (V,p) egy virág, mivel egy kör és egy matching direkt összege. A körök p-re nézve összefüggőek, ezért V minden D köre a direkt felbontás miatt vagy C-nek része, amikor $C = D$, vagy $V - C$-nek, ami nem lehet. $p(V-c) = p(C-c) + p(V-C) = 2|V| - 2$ minden $c \in C$-re, vagyis $V - c$ egy matching. ■

A polimatroid parity problémában az állítás páros vektorokra vonatkozó speciális esete így szól:

6.11 Állítás *A $v \in \mathbb{N}^T$ páros vektor pontosan akkor virág, ha $\varrho(v) = v(T) - 1$. Minden páros v virágra létezik egy olyan $i \in T$ koordináta, amire $m = v - 2e^i$ matching $P(T, \varrho)$-ban.* ■

Grafikus polimatroidban a virág egy párosítás és három fedetlen ponton két illeszkedő nem párhuzamos él.

Def.: Az (A, p) 2-polimatroidban $W \subseteq A$ *dupla kör*, ha $p(W) = 2|W| - 2$ és $p(W - x) = 2|W| - 3$ minden $x \in W$-re.

Egy dupla kör se nem matching, se nem virág, és minden valódi része matching vagy virág, de ez nem karakterizálja a dupla köröket.

6.12 Állítás [18] *W pontosan akkor dupla kör, ha létezik egy $W = W_1 \dot\cup \ldots \dot\cup W_k$ partíció, hogy $k \geq 2$, $W - W_i$ kör, ez az összes kör W-ben, és*

$$p(Y) = \begin{cases} 2|Y| - 2, & \text{ha } Y \text{ pontosan } k\text{-t tartalmaz a } W_i\text{-kből, azaz } Y = W, \\ 2|Y| - 1, & \text{ha } Y \text{ pontosan } k-1\text{-et tartalmaz a } W_i\text{-kből és} \\ 2|Y|, & \text{ha } Y \text{ legfeljebb } k-2\text{-t tartalmaz a } W_i\text{-kből.} \end{cases}$$

A fenti partíció egyértelmű.

Biz.: Világos, hogy a tételben leírt W egy dupla kör. Ha W dupla kör, akkor minden x elemére $W - x$ egy virág, így $W - x$-ben egyetlen kör van. Vagyis ha W összes köre $C_1, \ldots C_k$, akkor $W - C_i$ partícionálja W-t, így $k \geq 2$. W minden valódi Y részének rangja $2|Y|$ vagy $2|Y| - 1$. Ha $2|Y|$, akkor Y nem tartalmaz kört, ha pedig $2|Y| - 1$, akkor Y egy virág, és így pontosan egy kört tartalmaz, ahonnan kapjuk a rangokra vonatkozó állítást. ■

Def.: Ha $k = 2$, akkor a dupla kör *triviális*, egyébként *nemtriviális*. A $W = W_1 \dot\cup \ldots \dot\cup W_k$ partíció a W *felbontás*a.

Grafikus polimatroidban a dupla kör három egy pontra illeszkedő él, amik közül semely kettő nem párhuzamos. A dupla kör könnyebb elképzeléséhez megadjuk az ősmatroidjának duálisát: a duális $2|W|$ elemű és 2-rangú, egy 2-elemű halmaz bázis, ha e két elem két különböző W_i ősében van.

Def.: Az (A, p) 2-polimatroidban $D \subseteq A$ *dupla virág*, ha egy W dupla kör és egy M matching direkt összege. D *k-dupla virág*, ha $p(D) = 2k + 2$ és $|D| = k + 2$. A D dupla virág *triviális*, ha dupla köre az.

6.13 Állítás [18] *Ha $D \subseteq A$-ra $p(D) = 2|D| - 2$, akkor D vagy dupla virág, vagy egy $d \in D$-re $D - d$ matching.*

Biz.: Ha létezik olyan $d \in D$ elem, amire $p(D - d) = 2|D| - 2$, akkor $D - d$ matching, egyébként vegyünk el D-ből addig elemeket, amíg 2-vel csökken a rang. Világos, hogy a kapott W halmazra $D - W$ egy matching, W-re pedig $p(W) = 2|W| - 2$ és $p(W - x) = 2|W| - 3$ minden $x \in W$-re. Vagyis W egy dupla kör. ■

6.4 A 2-polimatroidok szerkezete

Ennyi előkészület után már adhatunk felső becslést ν-re.

6.14 Állítás *Ha ϱ' 1-projekciója ϱ-nak, akkor $\nu(T,\varrho') \geq \nu(T,\varrho) - 1$.*

Biz.: Legyen m egy maximális matchingje $P(T,\varrho)$-nak. Nyilván $\varrho'(m) \geq m(T) - 1$. Ha $\varrho'(m) = m(T)$, akkor m $P(T,\varrho')$-nek is matchingje 6.2 miatt, vagyis $\nu(T,\varrho') = \nu(T,\varrho)$. Ha $\varrho'(m) = m(T)-1$, akkor m egy virág $P(T,\varrho')$-ben 6.11 szerint, így létezik $P(T,\varrho')$-ben egy olyan m' matching, amire $m'(T) = m(T) - 2$, vagyis $\nu(T,\varrho') \geq \nu(T,\varrho) - 1$. ■

6.15 Köv. [20] *Ha p' (r') 1-projekciója p-nek (r-nek), akkor $\nu(A,p') \geq \nu(A,p) - 1$ ($\nu(S,r',E) \geq \nu(S,r,E)-1$).* ■

6.16 Tétel [21] *ϱ-nak minden ϱ' projekciójára és T-nek π partíciójára:*

$$\nu(T,\varrho) \leq \varrho(T) - \varrho'(T) + \sum_{T_i \in \pi} \left\lfloor \frac{\varrho'(T_i)}{2} \right\rfloor.$$

Biz.: 6.7 bizonyításában láttuk, hogy minden projekció megkapható $\varrho(T) - \varrho'(T)$ darab 1-projekció kompozíciójaként, vagyis 6.14 szerint $\nu(T,\varrho) \leq \varrho(T) - \varrho'(T) + \nu(T,\varrho')$. Továbbá $\nu(T,\varrho') \leq \sum_{T_i \in \pi} \nu(T_i,\varrho') \leq \sum_{T_i \in \pi} \left\lfloor \frac{\varrho'(T_i)}{2} \right\rfloor$. ■

A maximális matchingre vonatkozó minimax formula bizonyításának lényeges lépése a következő tétel.

Def.: Az (A,p) 2-polimatroidra p-nek p' projekciója *összenyomja* a $W \subseteq A$ dupla kört, ha W minden C körére $p'(C) < p(C)$.

6.17 Tétel [20] *Ha az (A,p) 2-polimatroidra $\nu = \nu(A,p)$, D egy ν-dupla virág W dupla körrel és a p' 1-projekció összenyomja W-t, akkor $\nu(A,p') = \nu(A,p) - 1$.*

Biz.: Ha nem volna igaz az állítás, akkor létezne egy ν-méretű M matching (A,p')-ben. Válasszuk M-et olyannak, hogy $M \cap D$ maximális legyen. $p'(D) \geq p(D) - 1 = 2\nu + 1 > 2\nu = p'(M)$, így legyen $d \in D \setminus sp'(M)$. Ekkor $2\nu + 1 \geq p(M+d) \geq p'(M+d) \geq 2\nu + 1$, ahonnan $M+d$ (A,p)-ben is, (A,p')-ben is egy virág. $p - p'$ monotonitása miatt $p'(Y) = p(Y)$ minden $Y \subseteq M + d$-re, vagyis $M + d$-nek (A,p')-beli C köre kör (A,p)-ben is. $C \subseteq D$, különben $C \setminus D$ egy elemét kihagyhatnánk $M + d$-ből, hogy egy olyan ν-méretű $\tilde{M}$ matchinget kapjunk, amire $|\tilde{M} \cap D| > |M \cap D|$. Azonban a feltétel szerint $p'(C) < p(C)$, ellentmondás.

6.15 szerint pedig $\nu(A,p') \geq \nu(A,p)-1$. ■

A következő tétel központi jelentőségű, a dolgozatban tárgyalt két alkalmazás ezen alapszik, és Lovász minimax formuláját is 6.18-ból fogjuk levezetni.

6.18 Tétel [21] *Legyen (A,p) egy 2-polimatroid, $\nu = \nu(A,p)$. Ekkor a következők közül legalább egy teljesül:*

1. $p(A) = 2\nu + 1$,

2. $A = A_1 \dot\cup A_2$, *ahol* $A_i \neq \emptyset$ *és* $\nu = \nu(A_1, p) + \nu(A_2, p)$,

3. *létezik egy* $e \in A$ *elem, hogy* $e \in sp(M)$ *minden* M *maximális matchingre,*

4. *létezik egy* $D \subseteq A$ *nemtriviális* ν*-dupla virág.*

Biz.: Feltehetjük, hogy minden $a \in A$-ra $p(a) = 2$, különben az $A_1 = \{a\}$, $A_2 = A - a$ partícióval 2. teljesül. Legyen $H = (A, \mathcal{E})$ az a hipergráf, amiben a ν-virágok körei alkotják a hiperéleket.

6.19 Lemma *Ha* 3. *nem teljesül, akkor* H *fedi* A *minden elemét.*

Biz.: Ha 3. nem teljesül, akkor minden $a \in A$ elemhez létezik egy olyan M maximális matching, hogy $a \notin sp(M)$, vagyis $p(M + a) \geq p(M) + 1$, de $p(M + a) = p(M) + 2$ nem lehet, különben $M + a$ matching volna. Vagyis $M + a$ egy ν-virág, legyen C az egyetlen köre. $C \not\subseteq M$, ezért $a \in C \in \mathcal{E}$. ■

6.20 Lemma *Ha* 3. *nem teljesül és* $A = A_1 \dot\cup A_2$ *egy olyan partíció, hogy* $A_i \neq \emptyset$ *és* H *minden éle vagy* A_1*-nek, vagy* A_2*-nek része, akkor* $\nu = \nu(A_1, p) + \nu(A_2, p)$.

Biz.: Legyen M_i egy maximális matching (A_i, p)-ben $i = 1, 2$-re, M pedig egy maximális matching (A, p)-ben. Válasszuk M, M_1, M_2-t olyannak, hogy maximalizálják $|M \cap M_1| + |M \cap M_2|$-t. Belátjuk, hogy $M_1 \subseteq M$ és $M_2 \subseteq M$, amiből következik, hogy $\nu = \nu(A_1, p) + \nu(A_2, p)$.

Tegyük fel, hogy például $M_1 \not\subseteq M$. Először tegyük fel, hogy $M_1 \not\subseteq sp(M)$, legyen $a \in M_1 \setminus sp(M)$. Mint ahogy 6.19 bizonyításában láttuk, $M + a$ egy ν-virág, legyen a köre C. Feltevésünk szerint $a \in C \subseteq A_1$. $C \not\subseteq M_1$, ezért legyen $a' \in C \setminus M_1$. Ekkor $M' = M - a' + a$ egy maximális matching (A, p)-ben, ellentmondva M választásának, hiszen $|M' \cap M_1| > |M \cap M_1|$ és $M' \cap M_2 = M \cap M_2$.

Feltehetjük tehát, hogy $M_1, M_2 \subseteq sp(M)$, de $M_1 \not\subseteq M$. Legyen $c \in M_1 \setminus M$. 6.19 szerint létezik (A, p)-ben egy olyan Z ν-virág, aminek a köre tartalmaza c-t. Ekkor $N = Z - c$ egy olyan maximális matching (A, p)-ben, amire $M_1 \setminus M \not\subseteq sp(N)$, mivel $c \notin sp(N)$. Az eddigi feltételeket kielégítő M, M_1, M_2 és N matchingeket válasszuk olyannak, hogy maximalizálják $|M \cap N|$-et. $N \not\subseteq sp(M)$, különben $sp(N) = sp(M)$, de $M_1 \subseteq sp(M)$ és $M_1 \not\subseteq sp(N)$. Legyen ezért $b \in N \setminus sp(M)$ és C az $M + b$ ν-virág köre.

Tegyük fel, hogy $C \subseteq A_i$, $i = 1$-re vagy $i = 2$-re. Ha $C - b \not\subseteq M_i$, akkor legyen $b' \in C \setminus M_i - b$. Ekkor $M' = M + b - b'$ egy maximális matchingje (A, p)-nek, és $M' \cap M_1 = M \cap M_1$, $M' \cap M_2 = M \cap M_2$, de $|M' \cap N| > |M \cap N|$, ami ellentmond M, M_1, M_2 és N választásának. Ha $C - b \subseteq M_i$, akkor mivel minden kör legalább 2-elemű, legyen $b' \in C - b$. Ekkor $M' = M + b - b'$ egy maximális matchingje (A, p)-nek, $M'_i = M_i + b - b'$ pedig egy maximális matchingje (A_i, p)-nek. Legyen $M'_{3-i} = M_{3-i}$. $|M' \cap M'_1| = |M \cap M_1|$, $|M' \cap M'_2| = |M \cap M_2|$, $M'_1 \setminus M' = M_1 \setminus M \not\subseteq sp(N)$, de $|M' \cap N| > |M \cap N|$, ami ellentmond M, M_1, M_2 és N választásának. ■

6.21 Lemma *Ha* H *összefüggő és* 3. *nem teljesül, akkor vagy* 1. *vagy* 4. *teljesül.*

Biz.: Legyen F az (A, p) egy ν-virága. Ha $sp(F) = A$, akkor 1. teljesül, tegyük fel, hogy $sp(F) \subsetneq A$. $\mathcal{E}_1$ álljon a H azon hiperéleiből, amelyeket tartalmaz egy olyan F_1 ν-virág, amelyre $sp(F_1) = sp(F)$, és legyen $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_1$. $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ egyike sem üres, mivel $\mathcal{E}_1$ tartalmazza F körét, $\mathcal{E}_2$ pedig a H tetszőleges olyan hiperélét, amely belemetsz $A \setminus sp(F)$-be, 6.19 szerint ilyen létezik. H

összefüggősége miatt léteznek olyan $C_i \in \mathcal{E}_i$ körök, amelyekre $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Legyen F_i olyan ν-virág, hogy $C_i \subseteq F_i$, $sp(F_1) = sp(F)$ és $|F_1 \cap F_2|$ maximális. $sp(F_1) \neq sp(F_2)$, ezért legyen $b \in F_1 \setminus sp(F_2)$.

Azt állítjuk, hogy $F_2 + b$ egy nemtriviális ν-dupla virág. $b \notin sp(F_2)$, ezért $p(F_2 + b) > p(F_2) = 2\nu + 1$. Ha $p(F_2 + b) = 2\nu + 3$, akkor $F_2 + b$ egy $\nu + 1$-virág, amiben létezik egy $\nu + 1$-méretű matching 6.10 szerint, ami nem lehet. Ha $p(F_2 + b) = 2\nu + 2$, akkor 6.13 szerint $F_2 + b$ vagy egy ν-dupla-virág, vagy létezik benne egy $\nu + 1$-méretű matching, ami viszont nem lehet.

Tegyük fel, hogy az $F_2 + b$ ν-dupla-virág triviális. 6.12 szerint ekkor pontosan két kört tartalmaz, ezek közül az egyik persze C_2. A másik legyen D. $D \cap C_2 = \emptyset$, ezért $D \neq C_1$, és mivel C_1 az egyetlen kör F_1-ben, $D \not\subseteq F_1$. Legyen $c \in D \setminus F_1$. Ekkor $F_2 + b - c = F'$ egy olyan ν-virág, ami tartalmazza C_2-t, de $|F_1 \cap F'| > |F_1 \cap F_2|$, ami ellentmond F_1 és F_2 választásának. ■■

A tétel a polimatroid parity problémára a következő formában megy át.

6.22 Tétel *Legyen $P(T, \varrho)$ egy polimatroid, $\nu = \nu(T, \varrho)$, ϱ-nak a 43. oldalon leírt ősmatroidja $\mathcal{M} = (S, r)$, $E = \{st\colon s \neq t$ és létezik $i \in T$, hogy $s, t \in S_i\}$. Ekkor a következők közül legalább egy teljesül:*

1.' $\varrho(T) = 2\nu + 1$,

2.' $T = T_1 \dot\cup T_2$, *ahol* $T_i \neq \emptyset$ *és* $\nu = \nu(T_1, \varrho) + \nu(T_2, \varrho)$,

3.' *létezik egy $i \in T$ koordináta, hogy $P(T, \varrho)$ minden m maximális matchingjére $sp_i(m) = \varrho(\{i\}) \geq 2$,*

4.' *létezik $(\mathcal{M}, E)$-ben egy nemtriviális ν-dupla virág.*

Biz.: 6.18 lemmáit alkalmazzuk a 43. oldalon leírt visszavezetés (A, p) 2-polimatroidjára. *i.'* ekvivalens *i.*-vel $i = 1, 3, 4$-re. Világos, hogy $p(a) = 2$ minden $a \in A$-ra, ezért a lemmák érvényesek. Mint fent, legyen $H = (A, \mathcal{E})$ az a hipergráf, amiben (A, p) ν-virágainak körei alkotják $\mathcal{E}$ hiperéleit. Tegyük fel, hogy 3.' nem teljesül, ekkor H minden elemet fed 6.19 szerint.

6.3 szerint ha minden $i \in T$ esetén $|X \cap S_i| = |Y \cap S_i|$, akkor $r(X) = r(Y)$, $X, Y \subseteq S$-re. Ezért ha $A = A_1 \dot\cup A_2$ egy olyan partíció, hogy $A_i \neq \emptyset$ és H minden éle vagy A_1-nek, vagy A_2-nek része, akkor minden $i \in T$-re $\{st\colon s, t \in S_i\} \subseteq A_j$, $j = 1$ vagy $j = 2$-re, felhasználva azt is, hogy H minden elemet fed. Legyen T_j azon $i \in T$-k halmaza, amelyekre $\{st\colon s, t \in S_i\} \subseteq A_j$. Vagyis ha 3.' nem teljesül és H nem összefüggő, akkor 6.20 szerint $\nu = \nu(A_1, p) + \nu(A_2, p) = \nu(T_1, \varrho) + \nu(T_2, \varrho)$.

Végül 6.21 szerint ha H összefüggő és 3. nem teljesül, akkor vagy 1. vagy 4. teljesül. ■

7 Lineáris 2-polimatroidok

7.1 Bevezetés

Def.: A $b\colon \mathcal{P}(B) \to \mathbb{N}$ polimatroid függvény *lineáris*, ha létezik egy $\mathcal{V}$ vektortér és egy l függvény B-ből $\mathcal{V}$ altereibe úgy, hogy az $l(X) = \sum_{y \in X} l(y)$ jelöléssel $b(X) = \dim l(X)$ minden $X \subseteq B$-re. l a lineáris polimatroid függvény egy *reprezentáció*ja.

Def.: A matroid parity, a polimatroid parity és az általános matroid parity alakok lineárisak, ha p, ϱ, illetve r lineáris polimatroid függvények.

A $G=(V,E)$ gráfra a grafikus (E,p) 2-polimatroid lineáris, mivel $l(xy) := \{v \in \mathbb{R}^V : v_i = 0,\ \text{ha } i \neq x,y\} \leq \mathbb{R}^V$. Ha a $\mathcal{V}$ vektorteret egy általános helyzetű hipersíkkal metsszük, akkor lineáris alterek helyett affin alterekkel való reprezentációt kapunk. Ebben a reprezentációban $x \in B$ képe egy $b(\{x\})-1$-dimenziós affin altér. Ha $b(\{x\})=0$, akkor x-nek nincs képe. Az affin reprezentációval a matroid parity alakban az a feladat, hogy válasszunk ki maximálisan sok olyan egyenest, amelyek együtt is affin függetlenek, azaz dimenziójuk épp a számuk kétszerese -1.

Megjegyezzük, hogy a 43. oldali visszavezetések a matroid parity probléma három vizsgált alakjára lineáris problémát lineárisba visznek. Lineáris matroid parity problémából triviálisan lineáris polimatroid parity problémát kapunk. A polimatroid parity visszavezetésénél azt kell látni, hogy ϱ-nak $\mathcal{M}=(S,r)$ ősmatroidja lineáris. ϱ-nak l lineáris reprezentációjában minden $i \in T$-re $l(\{i\})$-ben vegyünk fel $\varrho(\{i\})$ darab S_i-nek megfelelő pontot úgy, hogy $S = \dot{\bigcup}_i S_i$ pontjai a lehető legáltalánosabban helyezkedjenek el. Világos, hogy a kapott vektorok által reprezentált $\mathcal{N}$ matroidra $r_{\mathcal{N}}(\{\dot{\bigcup} S_i \colon i \in R\}) = \dim l(R) = \varrho(R),\quad R \subseteq T$-re. 6.4 szerint ezért elég belátni, hogy ha $I \subseteq S$ független az $\mathcal{M}$ ősmatroidban, akkor független $\mathcal{N}$-ben is. $X \subseteq S$-re legyen $T_X = \{i \in T \colon S_i \cap X \neq \emptyset\}$. S pontjait úgy választottuk, hogy minden olyan lineáris összefüggést elkerüljenek, amit csak el tudnak kerülni, továbbá 6.3 szerint minden $X \subseteq I$-re $|X| \leq \varrho(T_X) = \dim l(T_X)$, ezért I vektorai függetlenek $\mathcal{V}$-ben, és így $\mathcal{N}$-ben.

Végül az általános matroid parity visszavezetésénél csak azt kell észrevennünk, hogy lineáris matroid párhuzamos bővítése is lineáris.

Lineáris polimatroidokban a 45. oldalon definiáltakon kívül is létezik egy természetesen adódó projekció: legyen $K \leq \mathcal{V}$ altér, és $b_K(X) := \dim l(X) - \dim(l(X) \cap K) = \dim(l(X)/(l(X) \cap K))$. b_K a $K^\perp$ altérre való vetítésnek felel meg.

Def.: Ha a $b\colon \mathcal{P}(B) \to \mathbb{N}$ polimatroid függvény lineáris, akkor b-nek b' projekciója *lineáris*, ha létezik b-nek egy olyan l reprezentációja és egy olyan $K \leq \mathcal{V}$ altér, hogy $b'(X) = b_K(X) := \dim(l(X)/(l(X) \cap K)),\quad X \subseteq B$-re.

A következő tétel a kulcs ahhoz, hogy a lineáris matroid parity problémára létezzen minimax formula. A fejezetben egyedül itt van kikerülhetetlenül kihasználva a linearitás.

7.1 Tétel [19] *Ha az (A,p) lineáris 2-polimatroidban W egy dupla kör, akkor a $W = W_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} W_k$ felbontásra* $\dim \bigcap\{l(W - W_i) \colon 1 \leq i \leq k\} \geq k-2$.

Biz.: Legyen $l_i = l(W - W_i)$. i-re vonatkozó indukcióval belátjuk, hogy

$$\text{minden } i\text{-re } \dim(l_1 \cap \ldots \cap l_i) \geq \sum_{j=1}^{i} \dim l_j - (i-1)\dim(l_1 \cup \ldots \cup l_i).$$

$i=1$-re az állítás világos. Ha $i \geq 1$, akkor $\dim(l_1 \cap \ldots \cap l_i) = \dim(l_1 \cap \ldots l_{i-1}) + \dim l_i - \dim((l_1 \cap \ldots \cap l_{i-1}) \cup l_i)$, így

$$\dim(l_1 \cap \ldots \cap l_i) \geq \sum_{j=1}^{i} \dim l_j - (i-2)\dim(l_1 \cup \ldots \cup l_{i-1}) - \dim((l_1 \cap \ldots \cap l_{i-1}) \cup l_i) \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{i} \dim l_j - (i-1)\dim(l_1 \cup \ldots \cup l_i).$$

Végül $\dim(l_1 \cap \ldots \cap l_k) \geq \sum_{j=1}^{k}(2|W - W_i| - 1) - (k-1)(2|W| - 2) = 2|W| - 2\sum_{j=1}^{k}|W_i| + k - 2 = k - 2.$

■

7.2 Állítás *Ha az S halmaznak adott egy $\dot{\bigcup} S_i,\ i \in T$ partíciója, és μ-vel jelöljük az $\mathcal{M} = (S, r)$ matroid legnagyobb méretű olyan független I halmazának méretét, amire $|I \cap S_i|$ páros minden $i \in T$-re, akkor $\mu = 2\nu(T, \varrho)$, ahol $\varrho(R) = r(\dot{\bigcup}\{S_i : i \in R\}),\ R \subseteq T$-re.*

Biz.: $R \subseteq T$-re legyen $S_R = \dot{\bigcup}\{S_i : i \in R\}$. Ha I olyan független halmaz, amire $|I \cap S_i|$ páros minden $i \in T$-re, akkor a $w_i^I := |I \cap S_i|,\ i \in T$ vektorra w^I matching $P(T, \varrho)$-ban, mivel $R \subseteq T$-re $w^I(R) = |I \cap S_R| \leq r(S_R) = \varrho(R)$, vagyis $\mu \leq 2\nu(T, \varrho)$.

A másik irányhoz belátjuk, hogy ha m egy matching $P(T, \varrho)$-ban, akkor létezik $\mathcal{M}$-nek egy olyan I független halmaza, amire $|I \cap S_i| = m_i$ minden $i \in T$-re. Legyen ugyanis $\mathcal{N}$ az a partíciós matroid S-en, amire $X \subseteq S$ pontosan akkor független, ha $|X \cap S_i| \leq m_i,\ i \in T$-re. A matroid metszet tétel szerint $\mathcal{M}$-nek és $\mathcal{N}$-nek létezik $m(T)$-méretű közös független halmaza, ha $m(T) \leq r_{\mathcal{N}}(X) + r_{\mathcal{M}}(S \setminus X)$ áll minden $X \subseteq S$-re. Nyilván feltehető, hogy $X = S_R$ egy $R \subseteq T$-re, ahonnan $r_{\mathcal{N}}(X) + r_{\mathcal{M}}(S \setminus X) = r_{\mathcal{N}}(S_R) + r_{\mathcal{M}}(S_{T \setminus R}) = m(R) + \varrho(T \setminus R) \geq m(R) + m(T \setminus R) = m(T)$, vagyis $\mu \geq 2\nu(T, \varrho)$. ■

7.2 Lovász minimax formulája

A lineáris 2-polimatroidok maximális matchingjének méretére vonatkozó formula Lovász [19] nagyszerű eredménye. Az eredeti tétel és bizonyítás csekély változata következik, hogy 6.22 segítségével kicsit többet mondhassunk, nevezetesen azt, hogy a polimatroid parity esetben a partíció választható T szerint.

7.3 Tétel *A $P(T, \varrho)$ lineáris polimatroidra létezik ϱ-nak egy olyan lineáris $\varrho' = \varrho_K$ projekciója és T-nek egy olyan π partíciója, amire*

$$\nu(T, \varrho) = \varrho(T) - \varrho'(T) + \sum_{T_j \in \pi} \left\lfloor \frac{\varrho'(T_j)}{2} \right\rfloor = \dim K + \sum_{T_j \in \pi} \left\lfloor \frac{\dim(l(T_j)/(l(T_j) \cap K))}{2} \right\rfloor.$$

Biz.: Válasszuk $K \leq \mathcal{V}$-t egy maximális olyan altérnek, hogy a $\varrho' = \varrho_K$ projekcióra $\nu(T, \varrho) = \varrho(T) - \varrho'(T) + \nu(T, \varrho')$ álljon. Ezen belül legyen π egy olyan legfinomabb partíció, amire $\nu(T, \varrho') = \sum_{T_j \in \pi} \nu(T_j, \varrho')$. Azt állítjuk, hogy ekkor minden $T_j \in \pi$-re

$$\nu(T_j, \varrho') = \left\lfloor \frac{\varrho'(T_j)}{2} \right\rfloor,$$

amiből következik az állítás.

Legyen ϱ' ősmatroidja $\mathcal{M} = (S, r)$, ahol $S = \bigcup\{S_i : i \in T_j\}$. Legyen továbbá $E = \{st : s \neq t$ és létezik $i \in T_j$, hogy $s, t \in S_i\}$. Alkalmazzuk $P(T_j, \varrho')$-re 6.22-t! 1.' esetén készen vagyunk. 2.' nem állhat, mert akkor egy finomabb partíciót kaphatnánk π-ből. 3.' esetén legyen v az $l(i)/(l(i) \cap K)$

altér egy általános helyzetű nemnulla vektora. Ilyen létezik, mivel $\dim(l(i)/(l(i)\cap K)) = \varrho'(\{i\}) \geq 2$. Legyen $\varrho'' = \varrho_{K+v}$. v általános helyzete miatt könnyen ellenőrizhetően $R \subseteq T$-re

$$\varrho''(R) = \begin{cases} \varrho'(R) - 1, & \text{ha } \varrho'(R+i) = \varrho'(R), \\ \varrho'(R) & \text{különben.} \end{cases}$$

Innen következik, hogy egy tetszőleges $t \in S_i$ elemre $r_{\mathcal{M}/\{t\}}(\dot{\bigcup}\{S_i : i \in R\}) = \varrho''(R), \quad R \subseteq T$-re. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan m matching $P(T_j, \varrho'')$-ben, amire $m(T_j) = 2\nu(T_j, \varrho')$. Ekkor 7.2 szerint $\mathcal{M}/\{t\}$-ben is létezik egy olyan $2\nu(T_j, \varrho')$-méretű M független halmaz, hogy minden $h \in T_j$-re $|S_h \cap M|$ páros. M nyilván $\mathcal{M}$-ben is független, így 3.' miatt $r(M+t) = r(M)$, ahonnan $r_{\mathcal{M}/\{t\}}(M) = r(M+t) - r(t) = r(M) - 1 < |M| - 1$, ellentmondva feltevésünknek. Vagyis $\nu(T_j, \varrho'') \leq \nu(T_j, \varrho') - 1$, így 6.14 szerint $\nu(T_j, \varrho'') = \nu(T_j, \varrho') - 1$, ahonnan $\nu(T, \varrho_{K+v}) = \nu(T, \varrho_K) - 1$. Vagyis $K + v$ ellentmond K maximalitásának.

4.' esetén reprezentáljuk $\mathcal{M}$-nek r rangfüggvényét az 51. oldalon leírt módon ϱ'-nek $l'(i) := l(i)/(l(i)\cap K)$ reprezentációja alapján. 7.1 szerint a dupla virág nemtriviális $W = W_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} W_k$ dupla körére $\dim \bigcap\{l'(W - W_i) : 1 \leq i \leq k\} > 0$, vagyis létezik egy $0 \neq v$ vektor, hogy $r' := r_{\overline{v}}$ egy olyan 1-projekciója r-nek, ami összenyomja W-t. 6.17 és 7.2 szerint $\nu(T_j, \varrho_{K+v}) = \nu(S, r', E) = \nu(S, r, E) - -1 = \nu(T_j, \varrho') - 1$, vagyis $\nu(T, \varrho_{K+v}) = \nu(T, \varrho_K) - 1$, azaz $K + v$ ellentmond K maximalitásának. ■

Következik az eredeti alak:

7.4 Tétel [19] *Ha az (A, p) lineáris 2-polimatroidnak l egy reprezentációja, akkor létezik egy olyan $K \leq \mathcal{V}$ altér és A-nak egy olyan π partíciója, hogy* $\nu(A, p) = \dim K + \sum_{A_j \in \pi} \left\lfloor \frac{\dim(l(A_j)/(l(A_j)\cap K))}{2} \right\rfloor$. ■

Nem ismert, hogy létezik-e minden (A, p) 2-polimatroidra p-nek olyan p' projekciója és A-nak olyan π partíciója, amire 7.4 egyenlőséggel teljesül. Ha 7.4-et a 7.3 bizonyításában leírt módon tetszőleges 2-polimatroidokra akarnánk általánosítani, csak most 6.18 felhasználásával, akkor 3. esetén p'-nek

$$p''(X) := \begin{cases} p'(X) - 1, & \text{ha } p'(X+e) = p'(X), \\ p'(X) & \text{különben.} \end{cases}$$

1-projekciója megfelelő lenne, de 4. teljesülése esetén nem tudnánk garantálni 7.1 hiányában olyan 1-projekciót, ami összenyom egy nemtriviális X dupla kört. Vagyis ha igaz volna, hogy minden (A, p) 2-polimatroid minden nemtriviális ν-dupla virágához létezik p-nek egy olyan 1-projekciója, ami összenyomja a dupla körét, akkor ott is teljesülne a minimax formula. Nem tudjuk, hogy ez az állítás igaz-e, mindenesetre tetszőleges dupla körre nem az, mint azt Lovász megmutatta: a 44. oldalon leírt $\mathcal{V}_8$ Vamos-Higgs matroidra és E-re $\{a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2\}$ egy dupla kör, és könnyen ellenőrizhetően nem létezik őt összenyomó 1-projekció [20]. Sőt be lehet látni, hogy ha W egy nemtriviális ν-dupla virág dupla köre, akkor W nem része $\mathcal{V}_8$-nak. Mivel $(\mathcal{V}_8, E_V)$-ben nem létezik ν-dupla virág, így ez nem ellenpélda a fenti állításra. Ha igaz is volna, hogy minden ν-dupla virág nemtriviális X dupla köréhez létezik őt összenyomó 1-projekció, akkor sem tudnánk egy ilyen projekciót hatékonyan megtalálni.

Algoritmus is létezik lineáris 2-polimatroidokra, feltéve hogy a 2-polimatroid *reprezentált*, nem csak reprezentálható. Először Lovász [18] írt le algoritmust, a jelenlegi legjobb Gabow és Stallmann

$O(p(A)^{2,5}|A|)$ idejű javítóutas algoritmusa [14]. Fujito [13] tetszőleges 2-polimatroidra adott egy 2/3-approximációs algoritmust, Camerini és Maffioli [5] egy heurisztikus algoritmust adtak tetszőleges 2-polimatroidra, Camerini, Galbioli és Maffioli [4] pedig egy random pszeudo-polinomiális algoritmust adtak a lineáris esetre. A súlyozott esetről még nem született eredmény még a lineáris esetben sem, és a poliéderes leírás is várat magára.

Azért szükséges, hogy a 2-polimatroid függvény ne csak reprezentálható, hanem reprezentált is legyen, azaz adott legyen minden $v \in A$ elemre $l(v)$ egy bázisa, mivel algoritmikusan nem adható meg lineáris polimatroid függvény reprezentációja. Például lineáris matroid homomorf képe is lineáris, de a homomorf kép reprezentációja nem állítható elő az eredeti matroid reprezentációjából, többek között a transzverzális matroidokat sem tudjuk algoritmikusan reprezentálni. Ezen probléma kiküszöbölésére bemutatunk egy módszert, ami Iwata egy ötletének továbbfejlesztése. Legyen tehát $\mathcal{M} = (S, r)$ egy reprezentált lineáris matroid, és $\mathcal{N}$ az $\mathcal{M}$ homomorf képe az $S = \dot{\bigcup}\{S_i : i \in T\}$ partíció szerint. Felhasználva azt, hogy $\mathcal{M}$ reprezentált, megmutatjuk, hogy $\nu(\mathcal{N}, E)$ meghatározható tetszőleges E élhalmazra.

Duplázzuk meg T-t: T', és legyen $S' = T \dot{\cup} T' \dot{\cup} S$. Az S' alaphalmazon legyen $\mathcal{M}'$ az $\mathcal{M}$-nek és a $T \dot{\cup} T'$ szabad matroidjának direkt összege, végül legyen $E' = E \cup \{ii' : i \in T\} \cup \{i's : s \in S_i, i' \in T'\}$. $\mathcal{M}'$ reprezentációja $\mathcal{M}$-éből egyszerűen megkapható, és könnyű látni, hogy $\nu(\mathcal{N}, E) + |T| = \nu(\mathcal{M}', E')$.

7.3 Egy struktúratétel

Vande Vate leír egy a 7.4-gyel kapcsolatos struktúratételt. A fejezet hátralévő részeire később nem lesz szükségünk. Ha $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ egy vektortér alterei, akkor $\mathcal{V}_1/\mathcal{V}_2$-vel jelöljük $\mathcal{V}_1/(\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2)$-t.

Def.: Az (A, p) lineáris 2-polimatroidra és p-nek l reprezentációjára a (π, K) pár *fedés*, ha π partíciója A-nak, $K \le \mathcal{V}$ altér és $\nu(A, p) = \dim K + \sum_{A_j \in \pi} \left\lfloor \frac{\dim(l(A_j)/K)}{2} \right\rfloor$. $A_j \in \pi$ páros/páratlan, ha $\dim(l(A_j)/K)$ páros/páratlan.

Def.: Ha M_i matching (A_i, p)-ben, akkor M_i

$$K\text{-teljes matching, ha } \dim(l(M_i)/K) = p(M_i) = \dim(l(A_i)/K),$$

$$K\text{-hipomatching, ha } \dim(l(M_i)/K) = p(M_i) = \dim(l(A_i)/K) - 1, \text{ és}$$

$$K\text{-hipermatching, ha } \dim(l(M_i)/K) = p(M_i) - 1 = \dim(l(A_i)/K).$$

7.5 Tétel [31] *Ha az (A, p) lineáris polimatroidnak (π, K) egy fedése, $M \subseteq A$ maximális matching, és $M_i = M \cap A_i$, akkor*

1. *minden páros A_i-re M_i K-teljes matching,*
2. *minden páratlan A_i-re M_i K-hipomatching, vagy K-hipermatching, és*
3. *pontosan $\dim K$ darab páratlan A_i-re lesz M_i K-hipermatching.*

Biz.: Legyen a_i^j az M_i azon x elemeinek száma, amelyekre $\dim(l(x) \cap K) = j$, $j = 0,1,2$, továbbá $a^j := \sum_{A_i \in \pi} a_i^j$. Ekkor $|M_i| = a_i^0 + a_i^1 + a_i^2$. Nyilván

$$a^1 + 2a^2 \leq \dim K,$$

és $2a_i^0 + a_i^1 \leq \dim(l(A_i)/K)$, ahonnan

$$a_i^0 + \left\lfloor \frac{a_i^1}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{\dim(l(A_i)/K)}{2} \right\rfloor .$$

Összegezve:

$$a^0 + a^1 + \sum_{A_i \in \pi} \left\lfloor \frac{a_i^1}{2} \right\rfloor + 2a^2 \leq \dim K + \sum_{A_i \in \pi} \left\lfloor \frac{\dim(l(A_i)/K)}{2} \right\rfloor = |M| = a^0 + a^1 + a^2,$$

vagyis $a_i^1 \leq 1$, $a^2 = 0$, $a^1 = a^1 + 2a^2 = \dim K$, valamint $a_i^0 + \left\lfloor \frac{a_i^1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\dim(l(A_i)/K)}{2} \right\rfloor$.

Ha A_i páros, akkor $a_i^1 = 0$, így $a_i^0 = |M_i|$, azaz $\dim(l(A_i)/K) = 2a_i^0 = 2|M_i| = p(M_i)$, és $a_i^1 = a_i^2 = 0$ miatt $\dim(l(M_i)/K) = p(M_i)$.

Ha A_i páratlan, akkor $a_i^1 = 0$ esetén M_i K-hipomatching, mivel $\dim(l(M_i)/K) = p(M_i)$ és $\dim(l(A_i)/K) = 2a_i^0 + 1 = 2|M_i| + 1 = p(M_i) + 1$. $a_i^1 = 1$ esetén pedig M_i K-hipermatching: $\dim(l(M_i)/K) = p(M_i) - 1$ és $\dim(l(A_i)/K) = 2a_i^0 + 1 = 2|M_i| - 1 = p(M_i) - 1$.

Végül $a^1 = \dim K$ miatt pontosan $\dim K$ partícióosztályra lesz M_i K-hipermatching. ■

Grafikus polimatroidnál milyen felső becslést kapunk $\nu(G)$-re 6.16-ból a π és K következő kézenfekvő választásával? $K := \{v \in \mathbb{R}^V : v_i = 0, \text{ ha } i \notin T\}$, ahol $T \subset V$. Ha $G - T$ komponenseinek csúcshalmazai $C_1, \ldots C_k$, akkor legyen $\pi = \{E_1, \ldots E_k, i(T)\}$, ahol $E_i = e(C_i)$. 6.16 szerint

$$\nu(G) \leq |V| - |V - T| + \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{|V(E_i) \setminus T|}{2} \right\rfloor = |T| + \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{|C_i|}{2} \right\rfloor ,$$

ami nyilvánvaló. Ha T egy gát, akkor könnyen láthatóan (π, K) fedés, és 7.5 a gráf maximális párosításainak elhelyezkedését írja le.

Def.: A lineáris (A,p) 2-polimatroid *mag*ja $ker(A,p) := \bigcap\{l(M) \colon M \text{ maximális matching}\}$. (A,p) *primitív*, ha $ker(A,p) = \{0\}$.

7.6 Köv. [31] *Minden (π, K) fedésre $K \leq ker(A,p)$ és minden páros A_i-re $l(A_i) \leq ker(A,p)$. Ha (A,p) primitív, akkor minden fedésben K a triviális altér és nincs nemnulla rangú páros osztály π-ben.* ■

7.7 Állítás *Grafikus polimatroid pontosan akkor primitív, ha a gráf faktorkritikus.* ■

8 Teljesség

8.1 Teljes matroidok

7.3 bizonyítása alapján könnyű meggondolni, hogy az 53. oldal matroid parityre vonatkozó megjegyzése az általános matroid parityre is vonatkozik. Nevezetesen ahhoz, hogy (S,r,E)-re mindig létezzen r-nek egy olyan r' projekciója és E-nek egy olyan π partíciója, amire $\nu(S,r,E) = r(\bigcup E) - r'(\bigcup E) + \sum_{E_j \in \pi} \lfloor r'(\bigcup E_j)/2 \rfloor$ álljon, elegendő az, hogy r-nek minden r' projekciójára és (S,r',E)-nek minden W nemtriviális dupla köréhez létezzen r'-nek egy olyan r'' 1-projekciója, ami összenyomja W-t. Nagyjából ezen matroidokat hívjuk „teljes”-nek (angolul „full”). Lovász észrevette, hogy ez a tulajdonság igaz teljes gráfok körmatroidjára és a transzverzális matroidokra is. Dress és Lovász [8] az algebrai matroidokra mutatták meg ezt a tulajdonságot, általánosítva Ingleton és Main lemmáját (1975). A teljesség hálóelméleti megközelítéséről ír Björner és Lovász [1]. A fejezetben ennek az elméletét tárgyaljuk.

Def.: Ha az S nem feltétlenül véges halmaz részhalmazain adott egy $r: \mathcal{P}(S) \to \mathbb{N}$ 1-polimatroid függvény, akkor az $\mathcal{M} = (S,r)$ pár egy *végtelen matroid. $I \subseteq S$ független* $\mathcal{M}$-ben, ha $r(I) = |I|$.

Végtelen matroidokra lényegében ugyanazon állítások érvényesek, mint a végesekre, mivel minden független I halmaz véges, hiszen $|I| = r(I) \leq r(S) \in \mathbb{N}$. *Ezentúl matroid alatt végtelen matroidot értünk.*

Def.: Az $\mathcal{M} = (S,r)$ matroid *teljes*, ha minden $Z \subseteq S$ részhalmazra $\mathcal{M}/Z$-nek minden olyan C_1, C_2 körére, amelyekre $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ és $r_{\mathcal{M}/Z}(C_1 \cup C_2) = |C_1 \cup C_2| - 2$, létezik egy olyan $c \in S$ elem, ami nem hurok $\mathcal{M}/Z$-ben, és amire $r_{\mathcal{M}/Z}(C) = r_{\mathcal{M}/Z}(C + c)$ az $\mathcal{M}/Z$-nek minden $C \subseteq C_1 \cup C_2$ körére.

8.1 Tétel [27] *Ha $\mathcal{M} = (S,r)$ teljes és E egy véges élhalmaz S-en, akkor (S,r,E)-nek minden $W \subseteq E$ nemtriviális dupla körére létezik egy olyan nemhurok $w \in S$ elem, amire $w \in \overline{\bigcup(W - W_h)}$, $1 \leq h \leq k$-ra, ha W felbontása $W_1 \dot\cup \ldots \dot\cup W_k$.*

Biz.: Tegyük fel, hogy e, $f \in W$-re és $w \in S$-re $w \in e \cap f$. W nemtriviális, így $W \neq \{e,f\}$, vagyis $\{e,f\} = W - W_i$ egy $1 \leq i \leq k$-ra. Vagyis minden i-re $w \in \bigcup(W - W_i)$.

Egyébként W élei diszjunktak. $1 \leq i \leq k$-ra $r(\bigcup(W - W_i)) = |\bigcup(W - W_i)| - 1$, vagyis létezik egy $C_i \subseteq \bigcup(W - W_i)$ kör $\mathcal{M}$-ben. $i \neq j$-re $C_i \neq C_j$, mivel különben $C_i \subseteq \bigcup(W - W_i - W_j)$, de $W - W_i - W_j$ matching és így $\bigcup(W - W_i - W_j)$ független $\mathcal{M}$-ben. Vagyis $r(C_i \cup C_j) = |C_i \cup C_j| - 2$, mivel $r(C_i \cup C_j) \leq |C_i \cup C_j| - 3$ nem lehet $r(\bigcup W) \leq |\bigcup W| - 2$ miatt. Ugyanezért $1 \leq h \leq k$-ra $C_h \subseteq C_i \cup C_j$, különben $r(C_h \cup C_i \cup C_j) \leq |C_h \cup C_i \cup C_j| - 3$ állna. Innen az is következik, hogy $C_i \cap C_j \neq \emptyset$. Vagyis $\mathcal{M}$ teljessége szerint létezik egy olyan nemhurok $w \in S$ elem, hogy $w \in \overline{C_h} \subseteq \overline{\bigcup(W - W_h)}$, $1 \leq h \leq k$-ra. ■

Kapjuk az általánosabb Lovász-formulát:

8.2 Tétel *A teljes $\mathcal{M} = (S,r)$ matroidra létezik egy olyan $Z \subseteq S$ halmaz és E-nek egy olyan π partíciója, hogy*

$$\nu(\mathcal{M}, E) = r(\cup E) - r_{\mathcal{M}/Z}(\cup E) + \sum_{E_j \in \pi} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{M}/Z}(\bigcup E_j)}{2} \right\rfloor .$$

Biz.: 7.3 bizonyítását követjük, 6.18-at használjuk. Válasszuk Z-t a legnagyobb olyan halmaznak, amire $r' := r_{\mathcal{M}/Z}$-vel $\nu(S,r,E) = r(\bigcup E) - r'(\bigcup E) + \nu(S,r',E)$. Ezen belül legyen π egy olyan legfinomabb partíció, amire $\nu(S,r',E) = \sum_{E_j\in\pi} \nu(S,r',E_j)$. Belátjuk, hogy minden $E_j \in \pi$-re $\nu(S,r',E_j) = \lfloor r'(\bigcup E_j)/2 \rfloor$, amiből következik az állítás. Ha $st = e \in E_j$-re $r'(\{s,t\}) \leq 1$, akkor $E_j = \{e\}$, különben kihagyhatnánk e-t E_j-ből egy finomabb partíciót kapva.

Legyen $p(F) = r'(\bigcup F)$, $F \subseteq E$-re, és alkalmazzuk (E_j,p)-re 6.18-at! Ugyanúgy, mint 7.3 bizonyításánál, 1. esetén készen vagyunk, 2. nem állhat, mert egy finomabb partíciót kaphatnánk π-ből, 3. esetén létezik egy $st = e \in E$ él, hogy (S,r',E_j)-nek minden F maximális matchingjére $\{s,t\} \subseteq \overline{\bigcup F}$. Ekkor (S,r,E)-nek is minden F' maximális matchingjére $\{s,t\} \subseteq \overline{\bigcup F'}$, mivel $F' \cap E_j$ maximális matching (S,r',E_j)-ben. Ekkor azonban $Z + t$ ellentmond Z választásának, mivel $r'' := r_{\mathcal{M}/\{t\}}$-vel $r''(\bigcup E) < r'(\bigcup E)$ és így 6.14 miatt $\nu(S,r'',E) = \nu(S,r',E) - 1$.

Teljes matroid összehúzottja is teljes, ezért 4. esetén ha $W = W_1 \dot\cup \ldots \dot\cup W_k$ egy nemtriviális dupla kör (S,r',E_j)-ben, akkor 8.1 szerint létezik egy olyan $w \in S$ elem, amire $r'(w) = 1$ és $r'(\bigcup(W - W_h)) = r'(\bigcup(W-W_h)+w)$, $1 \leq h \leq k$-ra. Ekkor a $Z+w$ halmaz ellentmond Z választásának, mivel 6.14 miatt $\nu(S,r'',E) = \nu(S,r',E)-1$. ∎

8.2 Teljessé tehető matroidok

Def.: Az $\mathcal{M} = (S,r)$ matroid *teljessé tehető*, ha létezik egy olyan teljes $\tilde{\mathcal{M}} = (\tilde{S},\tilde{r})$ matroid, amire $S \subseteq \tilde{S}$ és $\tilde{r}|_{\mathcal{P}(S)} = r$.

8.3 Köv. *A teljessé tehető $\mathcal{M} = (S,r)$ matroidra létezik r-nek egy olyan r' projekciója és E-nek egy olyan π partíciója, hogy*

$$\nu(S,r,E) = r(\cup E) - r'(\cup E) + \sum_{E_j\in\pi} \left\lfloor \frac{r'(\bigcup E_j)}{2} \right\rfloor .$$

Sőt, ha r-re nézve S az $S_1,\ldots,S_k$ halmazok direkt összege, akkor az r' projekció választható olyannak, hogy S az r'-re nézve is az $S_1,\ldots,S_k$ halmazok direkt összege legyen.

Biz.: Rögtön az általánosabb második állítást igazoljuk.

Legyen $1 \leq i \leq k$-ra a teljes $\tilde{\mathcal{M}}_i = (\tilde{S}_i,\tilde{r}_i)$ matroidra $S_i \subseteq \tilde{S}_i$ és $\tilde{r}_i|_{\mathcal{P}(S_i)} = r$. Ilyen matroid létezik, például $\tilde{\mathcal{M}}$. Feltehetjük, hogy az $\tilde{S}_i$-ok diszjunktak, és legyen $S_0 = \dot\bigcup\{\tilde{S}_i \colon 1 \leq i \leq k\}$, $r_0(X_1\dot\cup\ldots\dot\cup X_k) = \sum_{i=1}^k \tilde{r}_i(X_i)$, $X_i \subseteq \tilde{S}_i$-ra. $\mathcal{M}_0 = (S_0,r_0)$ teljes, mivel S_0 az r_0-ra nézve az $\tilde{S}_1,\ldots,\tilde{S}_k$ halmazok direkt összege, vagyis $r_{\mathcal{M}_0/Z}$ szerint is az $Z \subseteq S_0$-ra. Minden kör összefüggő, ezért ha $\mathcal{M}_0/Z$-nek C_1, C_2 olyan körei, amelyekre $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ és $r_{\mathcal{M}_0/Z}(C_1 \cup C_2) = |C_1 \cup C_2| - 2$, akkor $C_1 \cup C_2 \subseteq \tilde{S}_i$ egy $1 \leq i \leq k$-ra, vagyis $\tilde{\mathcal{M}}_i$ teljessége miatt létezik egy olyan $c \in S_0$ elem, amire $r_{\mathcal{M}_0/Z}(c) = 1$ és $r_{\mathcal{M}_0/Z}(C) = r_{\mathcal{M}/Z}(C + c)$ az $\mathcal{M}_0/Z$-nek minden $C \subseteq C_1 \cup C_2$ körére.

8.2 szerint ezért létezik egy olyan $Z \subseteq S_0$ halmaz és E-nek egy olyan π partíciója, hogy

$$\nu(S,r,E) = \nu(S_0,r_0,E) = r_0(\cup E) - r_{\mathcal{M}_0/Z}(\cup E) + \sum_{E_j\in\pi} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{M}_0/Z}(\bigcup E_j)}{2} \right\rfloor ,$$

és nyilván $r_{\mathcal{M}_0/Z}|_{\mathcal{P}(S)}$ az r-nek egy olyan projekciója, amire nézve S az $S_1,\ldots,S_k$ halmazok direkt összege. ∎

Figyeljük meg, hogy a következmény második állítása egy matchoidokról szóló formulát eredményez.

Egyelőre nem ismert, hogy melyik fogalom hivatott betölteni azt a szerepet, ami behatárolja a P-beli matroid parity problémákat. Az egyik jelölt az, hogy a matroid teljessé tehető. Lovász szerint lehet, hogy ez a fogalom a $\mathcal{V}_8$-minor mentesség, a 44. oldalon leírt $\mathcal{V}_8$ Vamos-Higgs matroidra. $\mathcal{V}_8$ nem tehető teljessé. Mindenesetre hasznos lenne egy struktúratétel a $\mathcal{V}_8$-mentes matroidokra.

Könnyű meggondolni, hogy teljes matroid összehúzottja teljes, teljessé tehető matroid minorja is teljessé tehető, továbbá hogy teljes matroidok direkt összege teljes és teljessé tehető matroidok direkt összege is teljessé tehető, mint azt 8.3 bizonyításában is láttuk.

Lovász eredményei alapján mutatunk néhány teljessé tehető matroidosztályt.

8.3 Lineáris matroidok

7.1-ben valójában azt mutattuk meg, hogy a lineáris matroidok teljessé tehetőek. Ha a lineáris matroidot a $\mathcal{V}$ véges dimenziós vektortérben reprezentáltuk, akkor a matroid teljes bővítése például $(\mathcal{V}, \dim)$. A lineáris matroidokat fontosságukra való tekintettel tárgyaltuk külön.

Részben az eddigiek összefoglalásaként leírunk egy tételt a lineáris általános matroid parity problémáról.

8.4 Tétel *Ha az $\mathcal{M} = (S, r)$ matroid lineáris, E pedig egy olyan élhalmaz S-en, amire (S, E) egy egyszerű irányítatlan gráf, akkor létezik egy olyan r' lineáris projekciója r-nek és E-nek egy olyan π partíciója, hogy*

$$\nu(S, r, E) = r(\cup E) - r'(\cup E) + \sum_{E_j \in \pi} \left\lfloor \frac{r'(\bigcup E_j)}{2} \right\rfloor.$$

Ha r-re nézve S az $S_1, \ldots, S_k$ halmazok direkt összege, akkor itt az r' lineáris projekció választható olyannak, hogy S az r'-re nézve is az $S_1, \ldots, S_k$ halmazok direkt összege legyen.

Ha S-nek létezik egy olyan $S = \dot{\bigcup}\{S_i : i \in T\}$ partíciója, hogy $E = \{st : s \neq t$ és létezik $i \in T$, hogy $s, t \in S_i\}$, akkor a $\varrho(R) := r(\bigcup\{S_i : i \in R\})$, $R \subseteq T$ lineáris polimatroid függvénynek létezik egy olyan lineáris ϱ' projekciója és T-nek egy olyan π_T partíciója, hogy

$$\nu(S, r, E) = \varrho(T) - \varrho'(T) + \sum_{T_j \in \pi_T} \left\lfloor \frac{\varrho'(T_j)}{2} \right\rfloor.$$

Biz.: Az első két állítás 8.3 következménye, ugyanis világos, hogy az ottani r' projekció a jelen esetben lineáris.

Ha S-nek létezik egy olyan $S = \dot{\bigcup}\{S_i : i \in T\}$ partíciója, hogy $E = \{st : s \neq t$ és létezik $i \in T$, hogy $s, t \in S_i\}$, akkor a ϱ polimatroid függvény lineáris, így 7.3 miatt létezik egy olyan lineáris projekciója és T-nek egy olyan π_T partíciója, hogy

$$\nu(T, \varrho) = \varrho(T) - \varrho'(T) + \sum_{T_j \in \pi_T} \left\lfloor \frac{\varrho'(T_j)}{2} \right\rfloor,$$

és 7.2 szerint $\nu(S, r, E) = \nu(T, \varrho)$. ■

A lineáris matchoid problémára, és így a lineáris speciális k-matroid metszet problémára a következő tételt kapjuk. A tételt hasonló alakban Fleiner Tamás sejtette.

8.5 Köv. *Adott a $G = (V, E)$ gráf minden v pontjának csillagán egy r_v rangfüggvényű lineáris $\mathcal{M}_v$ matroid. Ekkor minden v csúcsra létezik r_v-nek egy olyan r'_v lineáris projekciója és E-nek egy olyan π partíciója, hogy a maximális matchoid mérete*

$$\sum_{v\in V} r_v(E) - \sum_{v\in V} r'_v(E) + \sum_{E_j\in\pi} \left\lfloor \frac{\sum_{v\in V} r'_v(E_j)}{2} \right\rfloor .$$

■

8.4 Algebrai matroidok

Belátjuk, hogy az algebrai matroidok teljessé tehetőek.

Def.: Legyen K test és L a K-nek egy testbővítése. $\mathcal{M} := \{I \subseteq L\colon I$ algebrailag független K felett$\}$, az L *algebrai matroidja K felett.* $S \subseteq L$-re $\mathcal{M}\backslash(L - S)$-et *algebrai matroid*nak hívjuk.

Ismert, hogy valóban egy matroidot definiáltunk:

8.6 Állítás *Ha K test és L egy bővítése, akkor $\{I \subseteq L\colon I$ algebrailag független K felett$\}$ egy matroid.* ■

A 0-karakterisztikájú testek feletti algebrai matroidok lineárisak, de más karakterisztikánál nem feltétlenül. Tényleg megadtunk új teljessé tehető matroidokat, mivel:

8.7 Tétel [8] *Az algebrai matroidok teljessé tehetőek.*

Biz.: Elég belátni, hogy L-nek K feletti $\mathcal{M}$ algebrai matroidja teljes. Legyenek C_1, C_2 az $\mathcal{M}$-nek olyan körei, amelyekre $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ és $r(C_1 \cup C_2) = |C_1 \cup C_2| - 2$ az $\mathcal{M}$ matroid r rangfüggényével. Belátjuk, hogy egy $\alpha \in \mathit{span}(K)$ elemre $\alpha \in \mathit{span}(C)$ minden $C \subseteq C_1 \cup C_2$ körre.

Legyen $D = C_1 \setminus C_2$. D egy kör $\mathcal{M}/C_2$-ben, mivel egyrészt D függő $\mathcal{M}/C_2$-ben, másrészt minden valódi részhalmaza független, amihez elég megmutatnunk, hogy minden $C \subseteq C_1 \cup C_2$, $C \neq C_2$ kör tartalmazza D-t. Tegyük fel, hogy létezik egy $s \in D \setminus C$ elem. C_1 metszi D-t, ezért létezik egy $t \in C_2 \setminus C$ elem, amire $C \subseteq (C_1 \cup C_2) - s - t$. Azonban most $(C_1 \cup C_2) - s - t$ feszíti $C_1 \cup C_2$-t és $r(C_1 \cup C_2) = |C_1 \cup C_2| - 2$, ahonnan $(C_1 \cup C_2) - s - t$ független, ami nem lehet, mert tartalmazza a C kört.

Legyen $D = \{s_1, \ldots , s_n\}$. Mivel D kör $\mathcal{M}/C_2$-ben, létezik egy $p \in \mathit{span}(C_2)[x_1, \ldots , x_n]$ irreducibilis polinom, amire $p(s_1, \ldots , s_n) = 0$. Válasszuk p-t olyannak, hogy legalább egy együtthatója p-nek 1 legyen. D független $\mathcal{M}$-ben, ezért p legalább egy együtthatója nincs $\mathit{span}(K)$-ban, legyen ez α. Ha tetszőleges $C \subseteq C_1 \cup C_2$ körre megmutatjuk, hogy $p \in \mathit{span}(C)[x_1, \ldots , x_n]$, akkor készen vagyunk, hiszen következik, hogy $\alpha \in \mathit{span}(C)$.

Legyen a $C \neq C_2$ körre $C \subseteq C_1 \cup C_2$. Könnyű látni, hogy D kör $\mathcal{M}/(C \cap C_2)$-ben is, így létezik egy $q \in \mathit{span}(C \cap C_2)[x_1, \ldots , x_n]$ irreducibilis polinom, amire $q(s_1, \ldots , s_n) = 0$. $\mathit{span}(C \cap C_2)$ algebrailag zárt $\mathit{span}(C_2)$-ben, ezért q irreducibilis $\mathit{span}(C_2)[x_1, \ldots , x_n]$-ben is egy algebrai tétel szerint. Szintén algebrai tétel, hogy ekkor p és q irreducibilis $\mathit{span}(C_2)(x_1, \ldots , x_{n-1})[x_n]$ felett is. Ezért

$p(s_1,\dots,s_n) = q(s_1,\dots,s_n) = 0$ miatt p a q-nak többszöröse $span(C_2)(x_1,\dots,x_{n-1})$-ben, vagyis léteznek $r,s \in span(C_2)[x_1,\dots,x_{n-1}]$ polinomok, hogy $rp = sq$. Az egyértelmű faktorizációs tétel miatt $p = \lambda q$, $\lambda \in span(C_2)$-re. p-nek valamelyik együtthatója 1, így $\lambda \in span(C \cap C_2)$. Vagyis $p \in span(C \cap C_2)[x_1,\dots,x_n]$. ■

A bizonyítás [27]-ből származik. 8.2 szerint tehát:

8.8 Tétel [8] *Ha K test, L egy bővítése, $\mathcal{M}$ az L algebrai matroidja K felett, $S \subseteq L$-re $(S,r) = \mathcal{M}\backslash(L-S)$ és E véges sok S-beli pár, akkor létezik K-nak egy olyan $F \subseteq L$ bővítése és E-nek egy olyan π partíciója, amire*

$$\nu(S,r,E) = \mathrm{tr}_K(F) + \sum_{E_j \in \pi} \left\lfloor \frac{\mathrm{tr}_F(\bigcup E_j)}{2} \right\rfloor ,$$

ahol $\mathrm{tr}_K(E)$ jelöli E-nek a K test feletti transzcendencia fokát. ■

8.3-ból pedig

8.9 Tétel *Ha az előző tétel feltételei mellett S az r-re nézve az $S_1,\dots,S_k$ halmazok direkt öszege, akkor F választható olyannak, hogy $\mathrm{tr}_F(S) = \mathrm{tr}_F(S_1)+\dots+\mathrm{tr}_F(S_k)$ álljon.* ■

8.5 A teljes gráf körmatroidja és a kaktuszok

8.10 Tétel *A K_n gráf körmatroidja teljes.*

Biz.: Mivel a körmatroid minden összehúzottja előáll egy párhuzamos és hurokéleket is tartalmazó teljes gráf körmatroidjaként, elég belátni, hogy ha egy ilyen gráfban adott két közös élt használó olyan C_1 és C_2 kör, hogy $C_1 \cup C_2$-ből elvehető két él úgy, hogy egy fát kapjunk, akkor létezik egy olyan él, amelynek végpontjain $C_1 \cup C_2$ minden köre átmegy. Ez pedig nyilvánvaló. ■

Nyilván azon matroidok is teljesek, amelyeket egy teljes gráf körmatroidjából kaphatunk párhuzamosképzéssel és hurokél hozzáadással. 8.2-ből ezért kapjuk Szigeti Zoltán tételét:

8.11 Tétel [30] *Legyen $G = (V,E)$ egy gráf és $\mathcal{P}$ az élpárok egy halmaza. Ekkor a legnagyobb méretű olyan $F \subseteq E$ erdő, ami $\mathcal{P}$-beli diszjunkt párokból áll*

$$\min\left(2|V| - 2|\mathcal{Q}| + 2\sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{\delta_{\mathcal{Q}}(H_i)}{2} \right\rfloor\right) \tag{1}$$

élből áll, ahol a minimum V-nek nemüres halmazokra való $\mathcal{Q}$ partícióira, és E-nek olyan $H_1,\dots,H_k$ részhalmazain fut, hogy minden $\mathcal{P}$-beli pár része egy H_i-nek. $\delta_{\mathcal{Q}}(H_i)$ jelöli az olyan H_i-beli élek maximális számát, amelyek egy erdőt alkotnak abban a gráfban, amit $\mathcal{Q}$ osztályainak egy pontra való összehúzásával kapunk.

Biz.: Világos, hogy egy ilyen erdő legfeljebb ennyi élből áll.

A V csúcshalmaz teljes gráfjának élhalmaza legyen E', a körmatroidjának rangfüggvénye r. Ekkor a legnagyobb méretű erdő nyilván $2\nu(E', r, \mathcal{P})$ élt tartalmaz. A 8.2 szerint létező $Z \subseteq E'$ halmaz és $\mathcal{P}$-nek π partíciója választható olyanak, hogy Z zárt legyen. Ekkor létezik egy $\mathcal{Q}$ partíciója V-nek, hogy Z pontosan azon élekből áll, amelyek teljes egészében $\mathcal{Q}$ egy osztályában futnak. Ha most $\mathcal{P}_i \in \pi$-re H_i a $\mathcal{P}_i$-beli párok uniója, akkor

$$2\nu(E', r, \mathcal{P}) \geq 2|V| - 2|\mathcal{Q}| + 2 \sum_{\mathcal{P}_j \in \pi} \left\lfloor \frac{\delta_{\mathcal{Q}}(H_j)}{2} \right\rfloor .$$

■

Következményként bebizonyítjuk Lovász tételét egy 3-uniform hipergráf maximális erdőjének méretéről, avagy egy gráf maximális háromszög-kaktuszának méretéről.

Def.: Egy hipergráf *3-uniform*, ha minden hiperéle 3 csúcsból áll. Egy $(V, \mathcal{E})$ hipergráf *erdő*, ha nem léteznek olyan $v_1, \ldots, v_k = v_0 \in V$ csúcsok, hogy $0 \leq i \leq k-1$-re létezik egy olyan $e \in \mathcal{E}$ él, amire v_i, $v_{i+1} \in e$.

k-uniform hipergráfokban a maximális erdő méretének meghatározása $k = 2$-re nyilván polinomiális, ezen visszavezetés szerint $k = 3$-ra is az, de $k \geq 4$-re már NP-teljes.

Def.: Egy (V, E) gráf egy $F \subseteq E$ élhalmaza *háromszög-kaktusz*, ha minden összefüggő blokkja egy háromszög.

8.12 Tétel [20] *A $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ 3-uniform hipergráf maximális erdője*

$$\min \left(|V| - |\mathcal{Q}| + \sum_{\mathcal{E}_i \in \pi} \left\lfloor \frac{\varphi_{\mathcal{Q}}(\mathcal{E}_i) - 1}{2} \right\rfloor \right) \tag{2}$$

élből áll, ahol a minimum V-nek nemüres halmazokra való $\mathcal{Q}$ partícióira, és $\mathcal{E}$-nek π partícióira fut. $\varphi_{\mathcal{Q}}(\mathcal{E}_i)$ jelöli a $\mathcal{Q}$ azon osztályainak számát, amelyeket $\mathcal{E}_i$ metsz.

Biz.: 8.11-et használjuk. Minden $e \in \mathcal{E}$ élben válasszunk ki két gráfélt, e_1-et és e_2-t, ezek fogják alkotni a $G = (V, E)$ gráf éleit, $\mathcal{P} := \{\{e_1, e_2\} \colon e \in \mathcal{E}\}$. Most a legnagyobb méretű olyan $F \subseteq E$ erdő, ami $\mathcal{P}$-beli diszjunkt párokból áll, éppen kétszer annyi élt tartalmaz, mint $\mathcal{H}$ maximális méretű erdője.

Világos, hogy (1) legfeljebb akkora, mint (2) kétszerese, hiszen $\delta_{\mathcal{Q}}(\{\{e_1, e_2\} \colon e \in \mathcal{E}_i\}) \leq \varphi_{\mathcal{Q}}(\mathcal{E}_i) - -1$. Másrészt, ha 8.11-ben a minimum a $\mathcal{Q}$ partícióin és E-nek $H_1, \ldots, H_k$ részhalmazain vétetik fel, akkor létezik $\mathcal{E}$-nek olyan $\mathcal{E}_1 \dot\cup \ldots \dot\cup \mathcal{E}_k$ partíciója, hogy $\mathcal{Q}$-ra és a $H_i' := \{\{e_1 e_2\} \colon e \in \mathcal{E}_i\}$ részhalmazokra is felvétetik a minimum. $1 \leq i \leq k$-ra legyenek az $\mathcal{E}_{i,j}$-k az $\mathcal{E}_i$ összefüggő komponenseinek élhalmazai. Ekkor $\delta_{\mathcal{Q}}(H_i') = \sum_j (\varphi_{\mathcal{Q}}(\mathcal{E}_{i,j}) - 1)$, vagyis $\mathcal{Q}$ és az $\mathcal{E}_{i,j}$ partíció bizonyítja, hogy (2) kétszerese legfeljebb annyi, mint (1), ami bizonyítja a tételt. ■

8.11-re Szigeti Zoltán [30] egy kombinatorikus bizonyítást adott, ami nem használja Lovász matroid parity elméletét, csak a matroid metszet tételt. Szigeti először a 8.12 Lovász-tételt igazolta kombinatorikusan [29], majd észrevette, hogy módszere 8.11-re is működik.

Lovász megemlíti, hogy a *transzverzális matroid*ok is teljesek [1]. Csak a definíciót írjuk le. Legyen S egy véges halmaz. Minden $R \subseteq S$-re legyen T_R egy megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz, T_R pontjait kössük össze R pontjaival. $T := \bigcup\{T_R \colon R \subseteq S\}$. Ekkor a kapott páros gráf T szerinti transzverzális matroidja teljes. $T' \subseteq T$ tehát akkor független, ha létezik egy T'-t fedő párosítás.

9 A Mader-tétel

9.1 A lineáris reprezentáció

Def.: Adott egy $G = (V, E)$ gráf és a csúcsoknak egy $\mathcal{S} = \{S_1, \dots S_k\}$, $S_i \subset V$ részpartíciója. $S := \bigcup_i S_i$. A P út *$\mathcal{S}$-út*, ha két végpontja az S_i illetve S_j halmazokban van $i \neq j$-re, és két végpontján kívül más pontja nincs S-ben. $\pi(G, \mathcal{S})$ a teljesen pontdiszjunkt $\mathcal{S}$-utak maximális száma.

9.1 Tétel [23]

$$\pi(G, \mathcal{S}) = \min\left\{|U_0| + \sum_{i=1}^{m} \left\lfloor \frac{|B_i|}{2} \right\rfloor\right\},$$

ahol a minimum V-nek olyan $U_0, U_1, \dots, U_m$ partícióin fut, ahol minden $\mathcal{S}$-út átmegy U_0-on vagy használ egy U_i által feszített élt. $B_i \subseteq U_i$ azon csúcsok halmaza, amelyek vagy S-ben vannak, vagy van $U_0 \cup U_i$-n kívüli szomszédjuk.

A tétel Mader [23] eredménye. A lineáris matroid parityre való redukciót Lovász [20] dolgozta ki, ennek a korrigált változatát tárgyaljuk a fejezetben. Lovász visszavezetésének következménye az is, hogy $\pi(G, \mathcal{S})$ polinomiális időben meghatározható. A tétel eddigi legrövidebb bizonyítása Schrijvertől származik [26].

Biz.: [20] Feltehetjük, hogy G összefüggő és S_i nem feszít élt $1 \leq i \leq k$-ra, ugyanis egy S_i feszítette élt törölve a gráfból sem a pontdiszjunkt $\mathcal{S}$-utak maximális száma, sem a minimum a jobb oldalon nem változik.

A tétel max $\leq$ min iránya világos: ha egy $\mathcal{S}$-út nem megy át egy U_0-beli ponton, akkor a B_i-kbe legalább kettőt számít.

A másik irány bizonyításához először konstruálunk egy 2-polimatroidot. Schrijver [27] megfogalmazását követjük. Az $uv = e \in E$ élre

$$L_e := \{x \in (\mathbb{R}^2)^V : x_w = 0, \text{ ha } w \neq u, v \text{ és } x_u + x_v = 0\}.$$

Nyilván $\dim L_e = 2$. Válasszunk különböző $l_1, \dots l_k$ egyeneseket $\mathbb{R}^2$-ből, és legyen

$$K = \{x \in (\mathbb{R}^2)^V : x_w \in l_i, \text{ ha } w \in S_i \text{ és } x_w = 0, \text{ ha } w \notin S\}.$$

$\dim K = |S|$. Végül $l(e) := L_e/K$, ezzel megadtuk az (E, p) 2-polimatroid lineáris reprezentációját, $\dim l(e) \leq 2$. $F \subseteq E$-re $p(F) = \dim \sum_{e \in F} l(e)$.

9.2 Lemma *Minden $F \subseteq E$ élhalmazra*

$$p(F) = \sum\{f(Z_i)\colon Z_i \text{ a } (V,F) \text{ egy komponensének csúcshalmaza}\},$$

ahol egy $Z \subseteq V$ csúcshalmazra

$$f(Z) = \begin{cases} 2|Z|-2, & \text{ha } Z \cap S = \emptyset, \\ 2|Z|-|Z\cap S|-1, & \text{ha } Z \text{ egy } S_i\text{-be metsz, és} \\ 2|Z|-|Z\cap S|, & \text{ha } Z \text{ legalább két } S_i\text{-be metsz.} \end{cases}$$

Biz.: Világos, hogy $p(F) = \sum\{p(F_i)\colon F_i$ a (V,F) egy komponensének élhalmaza$\}$. Elég tehát azt belátni, hogy $p(F) = f(Z)$, ha F élei összefüggő gráfot feszítenek a Z csúcshalmazzal. $L := \sum(L_e\colon e \in F)$, ezzel

$$p(F) = \dim l(F) = \dim(L/(L\cap K)) = \dim L - \dim(L \cap K).$$

L-ben azon $(\mathbb{R}^2)^V$-beli $V-Z$-n nulla vektorok vannak, amelyek összege Z-n 0, ezért $\dim L = 2(|Z|-1)$. Ha Z nem metszi S-et, akkor persze $\dim(L\cap K) = 0$, egyébként legyen $|Z \cap S_i| = a_i$. Ha Z csak egy S_i-be metsz, akkor $\dim(L\cap K) = a_i - 1 = |Z\cap S|-1$, ha pedig b darabba, ahol $b \geq 2$, akkor $\dim(L\cap K) = b-2+\sum_{a_i>0}(a_i-1) = \sum a_i - 2 = |Z\cap S|-2$. ■

9.3 Lemma *$F \subseteq E$ pontosan akkor matching, ha F erdő, minden komponensének S-sel legfeljebb két közös pontja van, és minden S_i-vel legfeljebb egy.*

Biz.: Az előző állítás szerint

$$p(F) = \sum\{f(Z_i)\colon (Z_i,F_i) \text{ a } (V,F) \text{ egy komponense}\} \leq$$

$$\leq \sum\{2|Z_i|-2 : \dots\} \leq \sum\{2|F_i| : \dots\} = 2|F|.$$

Egyenlőség pontosan akkor van, ha minden komponens fa, és ha $f(Z_i) = 2|Z_i|-2$ minden i-re. Ez utóbbi pontosan akkor áll, ha $Z\cap S = \emptyset$, vagy amennyiben Z egy S_i-be metsz, akkor csak egy ponttal, és amennyiben legalább két S_i-be metsz, akkor pontosan két ponttal. ■

9.4 Lemma $\pi(G,\mathcal{S}) = \nu(E,p) - |V| + |S|$.

Biz.: Legyen $\pi = \pi(G,\mathcal{S})$ és $\nu = \nu(E,p)$. Legyen F' maximálisan sok pontdiszjunkt $\mathcal{S}$-út éleinek halmaza. Egészítsük ki F'-t egy F erdővé úgy, hogy (V,F) minden komponense vagy egy $\mathcal{S}$-utat tartalmaz, és akkor nem tartalmaz más S-beli pontot, vagy egyetlen pontja van S-ből. 9.3 szerint F matching és nyilván $\pi + |V| - |S|$ éle van, ahonnan $\nu \geq \pi + |V| - |S|$. Vissza, legyen F egy ν-méretű matching. Legyen t az F erdő azon komponenseinek száma, amelyek S-et két pontban metszik. Könnyen látszik, hogy $|F| \leq t + |V| - |S|$, és persze $t \leq \pi$ 9.3 miatt. ■

Bár a konstruált polimatroid lineáris, Lovász mégsem a 7.4 minimax-formulából vezette le a Mader-tétel minimax-formuláját, ugyanis a kettő között igen bonyolult a kapcsolat. Ehelyett π meghatározását visszavezetjük kisebb 2-polimatroidok ν-jének meghatározására, és így a Mader-tételt indukcióval be tudjuk bizonyítani.

9.2 A nemtriviális dupla körök feltérképezése

A Mader-tétel levezetéséhez sajnos meg kell határoznunk (E, p) összes nemtriviális dupla körét.

9.5 Lemma *(E, p)-ben minden nemtriviális dupla kör az (W1) - (W9) típus valamelyike, jelöljük a dupla kör felbontását is. Az egyszerűség kedvéért az $S_1, \ldots, S_4$ halmazok különböző, tetszőleges S_i-ket jelölnek és mindegyik esetben a Q_i utaknak nincs közös belső pontjuk S-sel.*

(W1) *3 nyíltan pontdiszjunkt Q_i út, amelyek egy b nem S-beli pontot kötnek össze 3 különböző S_1-beli ponttal, $W_i = Q_i$.*

(W2) *3 nyíltan pontdiszjunkt Q_i út, amelyek egy $a \in S_1$ pontot kötnek össze 3 különböző S_2-beli ponttal, $W_i = Q_i$.*

(W3) *4 nyíltan pontdiszjunkt Q_i út úgy, hogy Q_1 és Q_2 egy b nem S-beli pontot kötnek össze az $a_1 \neq a_2$ S_2-beli pontokkal, Q_3 b-t köti össze egy $a_4 \in S_1$ ponttal, Q_4 pedig a_4-et köti össze egy S_2-beli a_1, a_2-től különböző a_3 ponttal, $W_1 = Q_3 \cup Q_4$, $W_2 = Q_1$, $W_3 = Q_2$.*

(W4) *4 nyíltan pontdiszjunkt Q_i út, amelyek egy b nem S-beli pontot kötnek össze a különböző a_i S-beli pontokkal, $a_1, a_2 \in S_1$, $a_3 \in S_2$, $a_4 \in S_3$, $W_1 = Q_3 \cup Q_4$, $W_2 = Q_1$, $W_3 = Q_2$.*

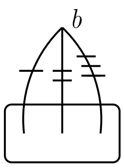
(W5) *5 nyíltan pontdiszjunkt Q_i út, Q_5 a b és c nem S-beli pont között fut, Q_1 és Q_2 b-t köti össze az $a_1 \neq a_2$ S_1-beli pontokkal, Q_3 c-t az $a_3 \in S_2$ ponttal, Q_4 pedig c-t az $a_4 \in S_3$ ponttal. $W_1 = Q_3 \cup Q_4 \cup Q_5$, $W_2 = Q_1$, $W_3 = Q_2$.*

(W6) *3 nyíltan pontdiszjunkt Q_i út, Q_1 és Q_2 egy $a \in S_2$ pontot köt össze az $a_1 \neq a_2$ S_1-beli pontokkal, Q_3 pedig a-t köti össze egy $a_3 \in S_3$ ponttal, $W_i = Q_i$.*

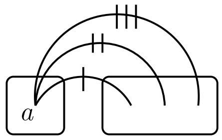
(W7) *4 nyíltan pontdiszjunkt Q_i út, Q_1 egy b nem S-beli pontot köt össze egy $a_3 \in S_2$ ponttal, Q_2 a_3-at köti össze egy $a_4 \in S_3$ ponttal, Q_3 és Q_4 pedig b-t kötik össze az $a_1 \neq a_2$ S_1-beli pontokkal, $W_1 = Q_1 \cup Q_2$, $W_2 = Q_3$, $W_3 = Q_4$.*

(W8) *4 nyíltan pontdiszjunkt Q_i út, amelyek egy b nem S-beli pontot kötnek össze az a_i különböző S_i-kbe tartozó pontokkal, $W_i = Q_i$.*

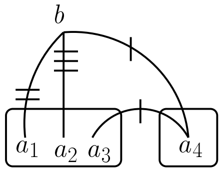
(W9) *3 nyíltan pontdiszjunkt Q_i út, amelyek egy $a \in S_4$ pontot kötnek össze az $a_i \in S_i$ pontokkal $i = 1, 2, 3$-ra, $W_i = Q_i$.*



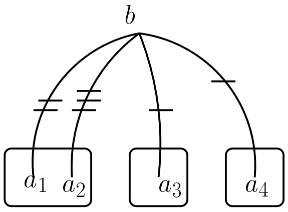
(W1)



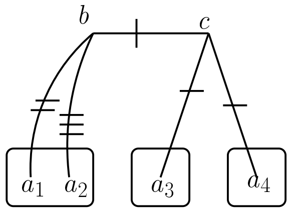
(W2)



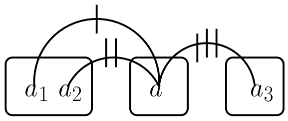
(W3)



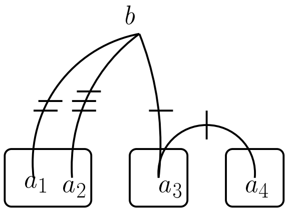
(W4)



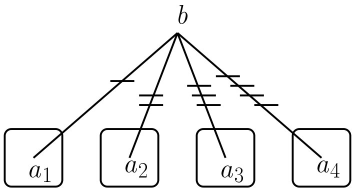
(W5)



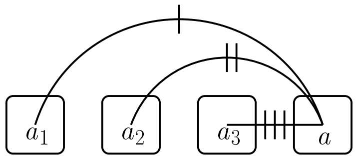
(W6)



(W7)



(W8)



(W9)

Biz.: Először bizonyos típusú virágokat kell feltérképeznünk. Figyeljük meg, hogy a polimatroidunk minden $H \subseteq E$ virágja egy erdő, hiszen a rang egyedül a komponensek csúcshalmazaitól függ, így ha H élei közt lenne egy kör, akkor a kör egy e élére nem volna igaz, hogy $p(H-e) < p(H)$. Először határozzuk meg az összes olyan $H \subseteq E$ virágot, amely grafikus értelemben egy fa és minden levele S-beli.

9.6 Lemma *Minden olyan $H \subseteq E$ virág, amely egy fa és minden levele S-beli, a következő alakú. Az S_1, S_2, S_3 halmazok különböző, tetszőleges S_i-ket jelölnek, a Q_i utaknak nincs közös belső pontjuk S-sel, és C-vel jelöljük H körét.*

(H1) Egy olyan Q út, amely két különböző S_1-beli pontot köt össze, $C = H$.

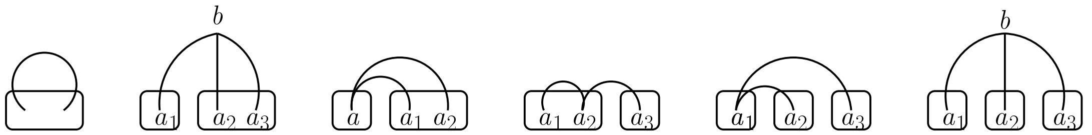
(H2) 3 nyíltan pontdiszjunkt Q_i út úgy, hogy Q_1 egy b nem S-beli pontot köt össze egy $a_1 \in S_1$ ponttal, Q_2 és Q_3 pedig b-t köti össze az $a_2 \neq a_3$ S_2-beli pontokkal, $C = Q_2 \cup Q_3$.

(H3) 2 nyíltan pontdiszjunkt Q_i út úgy, hogy Q_i egy $a \in S_1$ pontot köt össze egy $a_i \in S_2$ ponttal $i = 1, 2$-re, $a_1 \neq a_2$, $C = H$.

(H4) 2 nyíltan pontdiszjunkt Q_i út úgy, hogy Q_1 két különböző a_1 és a_2 S_1-beli pontot köt össze, Q_2 pedig a_2-t köti össze az $a_3 \in S_2$ ponttal, $C = Q_1$.

(H5) 2 nyíltan pontdiszjunkt Q_i út úgy, hogy Q_1 az $a_1 \in S_1$ és az $a_2 \in S_2$ pontokat köti össze, Q_2 pedig a_1-et köti össze az $a_3 \in S_3$ ponttal, $C = H$.

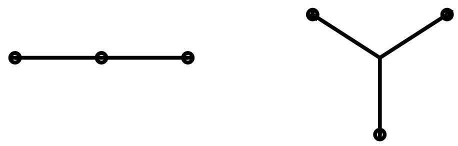
(H6) 3 nyíltan pontdiszjunkt Q_i út úgy, hogy Q_i egy b nem S-beli pontot köt össze az $a_i \in S_i$ ponttal $i = 1, 2, 3$-ra, $C = H$.



(H1) (H2) (H3) (H4) (H5) (H6)

Biz.: Legyen a H által fedett csúcsok halmaza Y, $|Y| = |H| + 1$. $|Y \cap S| \geq 2$, hiszen H minden levele S-beli, és $|Y \cap S| \leq 3$, hiszen különben $p(H) \leq 2|Y| - |Y \cap S| = 2(|H|+1) - |Y \cap S| < 2|H| - 1$.

1. eset: $|Y \cap S| = 2$. Ekkor H egy út, hiszen pontosan két levele van.
   (a) eset: H egy S_i-be metsz. Ez a (H1) virág.
   (b) eset: H két S_i-be metsz. Ekkor H egy matching volna.
2. eset: $|Y \cap S| = 3$. Ekkor a $H \subseteq E$ fának legfeljebb három levele lehet, így vagy egy út, aminek két végpontja és egy belső pontja S-beli, ez az (F1) fa, vagy egy háromlevelű (F2) fa úgy, hogy minden levele S-beli.



(F1) (F2)

   (a) eset: Y egy S_i-be metsz. Ez nem lehet, mivel $p(H) = 2|Y| - |Y \cap S| - 1 = 2(|H|+1) - 3 - 1 < 2|H| - 1$ állna.
   (b) eset: Y legalább két S_i-be metsz. Ekkor $p(H) = 2(|H| + 1) - 3 = 2|H| - 1$, vagyis mindkét fa jó lesz, hiszen H pontosan akkor virág, ha $2|H| - 1$ rangú. Ha H pontosan két S_i-be metsz, akkor (F2)-ből kapjuk (H2)-t, (F1)-ből pedig (H3)-at és (H4)-et, ha pedig H három S_i-be metsz, akkor (F1)-ből jön (H5), (F2)-ből (H6). ∎

Térjünk rá a nemtriviális dupla körök meghatározására. Minden W nemtriviális dupla kör egy erdő, hiszen a rang egyedül a komponensek csúcshalmazaitól függ, így ha W-ben grafikus értelemben volna egy kör, akkor a kör egy e élére nem volna igaz, hogy $p(W - e) < p(W)$. A nemtriviális dupla körök összefüggőek polimatroid értelemben 6.12 következtében. W tehát grafikusan is összefüggő, vagyis egy fa. E fa minden levele S-beli, ha ugyanis a gráf nem S-beli v csúcsa levél W-ben, akkor W p-re nézve a $W - e$ és az $\{e\}$ halmazok direkt összege, ha v az e élhez illeszkedik a W fában. W-nek bármely élét elvéve egy H' virágot kapunk. A kapott erdőnek két komponense van, vagyis H' előáll direkt összegként. $p(H') = 2|H'| - 1$, ezért az egyik komponens egy matching, a másik pedig egy virág, aminek nem S-beli leveleit rendre kitörölve, és ezzel minden lépésben a rangot kettővel csökkentve egy olyan virágot kapunk, amely grafikus értelemben egy fa, és minden levele S-beli. Ezeket pedig már meghatároztuk.

Legyen Y a W által fedett csúcsok halmaza, ekkor $|Y| = |W| + 1$. $|Y \cap S| \geq 3$, különben amiatt, hogy Y metszi S-et $p(W) \geq 2(|W| + 1) - |Y \cap S| - 1 > 2|W| - 2$ állna. Másrészt $|Y \cap S| \leq 4$, különben $p(W) \leq 2|Y| - |Y \cap S| \leq 2(|W| + 1) - 5 < 2|W| - 2$.

1. eset: $|Y \cap S| = 3$. Ekkor a W fának legfeljebb három levele lehet. W vagy egy út, aminek két végpontja és egy belső pontja S-beli (ez az (F1) fa), vagy egy háromlevelű fa (F2) úgy, hogy minden levele S-beli.

   (a) eset: W egy S_i-be metsz. Ekkor (F1) egy triviális dupla kört ad, (F2) pedig (W1)-et.

   (b) eset: W legalább két S_i-be metsz. Ekkor $p(W) = 2(|W| + 1) - 3 = 2|W| - 1$, ez nem lehet.

2. eset: $|Y \cap S| = 4$. W olyan fa, amelynek minden levele S-beli. Ilyen fából 5 van (a nem említett csúcsok mind másodfokúak):

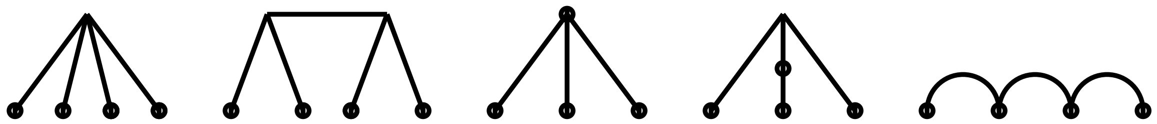
   (F3) egy negyedfokú csúcs négy levéllel,

   (F4) két harmadfokú csúcs négy levéllel,

   (F5) egy harmadfokú csúcs, amely S-ben van, a három levél is S-ben van,

   (F6) egy harmadfokú csúcs, amely nincs S-ben, a három levél S-ben van, plusz még valamelyik csúcs S-ben van,

   (F7) egy út, aminek két vége S-beli, plusz még két csúcs S-beli.



(F3) (F4) (F5) (F6) (F7)

   (a) eset: W egy S_i-be metsz. Ez nem lehet, mivel $p(W) = 2(|W| + 1) - 4 - 1 = 2|W| - 3$ állna.

   (b) eset: W két S_i-be metsz.

      i. eset: $|W \cap S_1| = 1$, $|W \cap S_2| = 3$. Legyen $W \cap S_1 = \{v\}$. v nem lehet levél, hiszen az ő élét kihagyva a másik komponens nem volna virág, mert három csúccsal metsz egy S_i-t. Vagyis (F1), (F2) nem jöhet szóba. (F3)-ból kapjuk (W2)-t, (F4)-ből (W3)-at, (F5)-ből pedig egy triviális dupla kört.

      ii. eset: $|W \cap S_1| = 2$, $|W \cap S_2| = 2$. (F1)-ből és (F3)-ból egy-egy triviális dupla kört kapunk. A többi fából nem kapunk dupla kört, hiszen ezen fáknak létezik egy olyan élük, amelyet ha a fából kihagyunk és a nem S-beli leveleket rendre kitöröljük, akkor két olyan utat kapunk, amelyek két $Y \cap S$-beli pontot kötnek össze. Könnyű látni, hogy ha ezen két út egyike matching, akkor a másik is, ami nem lehet.

(c) eset: W három S_i-be metsz. Ez csak úgy lehet, hogy $|W \cap S_1| = 2$ és $|W \cap S_i| = 1,\ i = 2, 3$-ra. (F1)-ből kapjuk (W4)-et, (F2)-ből (W5)-öt, (F3)-ból kapunk egy triviálisat és (W6)-ot, (F4)-ből egy triviálisat és (W7)-et, végül (F5)-ből egy triviálisat.

(d) eset: W négy S_i-be metsz. (F1)-ből kapjuk (W8)-at, (F3)-ból pedig (W9)-et. ■

Def.: A (W2), (W6), (W9) típusú dupla köröket *belső* dupla köröknek hívjuk, *fejük* mindhárom esetben az a pont. A többi típus a *külső* dupla kör, ott a fej mind a hat esetben a b csúcs.

9.3 A bizonyítás

A következő lemma nem szerepel [20]-ben, levezetésünkben egy ottani gondolatmenet kijavítására szolgál.

9.7 Lemma *Ha D egy nemtriviális ν-dupla virág (E, p)-ben, és W dupla köre belső $a \in S_1$ fejjel, akkor $\pi(G - a, \mathcal{S}') = \pi(G, \mathcal{S}) - 1$, ahol $\mathcal{S}' = \{S_1 - a, S_2, \dots, S_k\}$.*

Biz.: Legyen $K' \leq (\mathbb{R}^2)^V$ a következő altér:

$$K' = \left\{ x \in (\mathbb{R}^2)^V : x_a \in l_1^{\perp},\ x_v = 0,\ \text{ha } v \neq a \right\}.$$

$$K' + K = \left\{ x \in (\mathbb{R}^2)^V : x_a \in \mathbb{R}^2,\ x_v = 0,\ \text{ha } v \notin S,\ x_v \in l_i,\ \text{ha } v \in S_i \text{ és } v \neq a \right\}.$$

$F \subseteq E$-re legyen $L = \sum\{L_e : e \in F\}$. $p'(F) := \dim(l(F)/(l(F) \cap K')) = \dim(L/(L \cap (K' + K)))$ a p-nek egy 1-projekciója. 9.2 gondolatmenete szerint $L \cap (K' + K) = L \cap K$, és így $p'(F) = p(F)$, ha a-t nem fedi F, vagy ha F egyedül S_1-be metsz, továbbá $\dim(L \cap (K' + K)) = \dim(L \cap K) + 1$, és így $p'(F) = p(F) - 1$, ha a-t fedi F és F legalább két S_i-be metsz. p' összenyomja W-t, ugyanis W-nek köre legalább két S_i-be metsz és fedi a-t. 6.17 szerint ezért $\nu(E, p') = \nu(E, p) - 1$.

Belátjuk, hogy a-t minden maximális $\mathcal{S}$-útrendszer fedi. Legyen M tetszőleges maximális matchingje (E, p)-nek. M az (E, p')-ben nem matching a fentiek szerint, vagyis $p'(M) < p(M)$, és így létezik M-nek egy olyan összefüggőségi komponense, ami legalább két S_i-be metsz, és fedi a-t. Ez pedig azt jelenti, hogy a-t fedi minden maximális $\mathcal{S}$-útrendszer. Tehát $\pi(G - a, \mathcal{S}') < \pi(G, \mathcal{S})$, ahonnan $\pi(G - a, \mathcal{S}') = \pi(G, \mathcal{S}) - 1$. ■

A tételt a lineáris reprezentáció ismerete nélkül is igazolhattuk volna, méghozzá úgy, hogy p'-t úgy definiáljuk, mint amit fent kaptunk rá, majd belátjuk, hogy tényleg projekció. Azért ezt az utat választottuk, mert jobban mutatja a reprezentációnk szerkezetét.

9.8 Lemma *Tegyük fel, hogy 9.5 jelöléseit használva egy nemtriviális külső dupla kör feje b és $a_1 \in S_1$. Ha $\mathcal{S}' = \{S_1', \dots, S_k'\}$, ahol $S_1' = S_1 + b$, és $S_2' = S_2$, $i \geq 2$-re, akkor a p 2-polimatroid függvénnyel analóg módon a $(G, \mathcal{S}')$ párból definiált p' 2-polimatroid függvény olyan 1-projekciója p-nek, ami összenyomja a dupla kört.*

Biz.: Világos, hogy p' 1-projekciója p-nek. A másik állításhoz csak azt kell észrevennünk, hogy (E, p') egy köre legfeljebb 3 darab S_i'-be metsz, ha egybe metsz, akkor 2 ponttal, ha kettőbe vagy háromba, akkor pedig 3 ponttal. ■

6.18-at nekünk megfelelő formára szabjuk:

9.9 Lemma *(E,p)-ben a következők közül legalább egy teljesül, $\nu := \nu(E,p)$:*

(a) *létezik egy $E = E_1 \dot\cup \ldots \dot\cup E_t$ partíció, hogy $\nu = \sum_{i=1}^{t} \left\lfloor \frac{p(E_i)}{2} \right\rfloor$,*

(b) *létezik egy olyan $e \in E$ él, hogy $e \in sp(M)$ minden M maximális matchingre,*

(c) *létezik egy W nemtriviális dupla kör (E,p)-ben.*

Biz.: 6.18-at használjuk. Indukcióval bizonyítunk, feltesszük hogy $F \subset E$-re (F,p)-ben tudjuk az állítást.

Ha 1. teljesül, akkor az $\{E\}$ partíció jó lesz (a)-hoz.

Ha 2. teljesül, akkor indukciós feltevésünk alapján (E_1,p)-re, (E_2,p)-re már tudjuk az állítást. Ha mindegyikre teljesül (a), akkor (E,p)-re is teljesül (a). Ha például (E_1,p)-re (b) áll, akkor az ottani e él most is jó lesz. Ha ugyanis M maximális matching (E,p)-ben, akkor $M \cap E_1$ maximális matching (E_1,p)-ben, ahonnan $e \in sp_1(M \cap E_1) \subseteq sp(M \cap E_1) \subseteq sp(M)$. Ha például (E_1,p)-re (c) áll, akkor az ottani W nemtriviális dupla kör most is egy nemtriviális dupla kör.

3. azonos (b)-vel, 4.-ből pedig következik (c). ■

9.10 Lemma *Az* (a) *esetben az $E = E_1 \dot\cup \ldots \dot\cup E_t$ partíció olyannak is választható, hogy*

(i) *minden $i \neq j$-re $p(E_i \cup E_j) = p(E_i) + p(E_j)$, valamint*

(ii) *minden i-re $p(E_i) < p(E_i') + p(E_i'')$, ha $E_i = E_i' \dot\cup E_i''$, $E_i', E_i'' \neq \emptyset$.*

Biz.: $\sum p(E_i)$-re vonatkozó indukcióval dolgozunk. Tegyük fel, hogy (ii) nem teljesül, azaz egy i-re $p(E_i) = p(E_i') + p(E_i'')$, az $E_i = E_i' \dot\cup E_i''$, $E_i', E_i'' \neq \emptyset$ partícióra. Ekkor E_i-t cseréljük ki E_i'-re és E_i''-re. Tegyük ezt addig, amíg (ii) nem teljesül. Ha most (i) nem áll, azaz létezik $i \neq j$, hogy $p(E_i \cup E_j) < p(E_i) + p(E_j)$, akkor olvasszuk össze E_i-t és E_j-t. Az eddigi műveletek során a $\sum_{i=1}^{l} \left\lfloor \frac{p(E_i)}{2} \right\rfloor$ összeget nem növeltük, nyilván nem is csökkenthettük, továbbá $\sum p(E_i)$ csökkent, ezért készen vagyunk. ■

Most már csak a két tételt kell alkalmazni. Felteszük, hogy 9.9 (a) partíciója a 9.10 lemmában szereplő tulajdonságú.

$\pi(G,\mathcal{S}) + |V - S| = \nu(E,p)$-re vonatkozó indukcióval dolgozunk. Feltettük, hogy G összefüggő, valamint hogy az S_i csúcshalmazok stabilak. Azt is feltesszük, hogy a gráf minden élét használja $\mathcal{S}$-út, ez ugyanis ekvivalens azzal, hogy nem léteznek olyan V_1, $V_2 \subset V$ csúcshalmazok, hogy $|V_1 \cap V_2| = 1$, $S \subseteq V_1$ és G minden élét vagy V_1 vagy V_2 feszíti. Ez esetben $\pi(G,\mathcal{S}) = \pi(G[V_1],\mathcal{S})$, és $(G[V_1],\mathcal{S})$-re az indukciós mennyiség kevesebb. Most V_1 minimumot adó $U_0,\ldots,U_m$ partíciójából úgy csinálhatunk V-nek egy egyenlőséget adó partícióját, hogy $v \in U_0$ esetén $U_{m+1} := V_2 - v$, és $v \in U_i$, $i \geq 1$ esetén $U_i' := U_i \cup V_2$.

Egy $x \in V$ csúcsra $\mathcal{S}'$ legyen $\mathcal{S}$, ha $x \notin S$ és $\{S_1,\ldots,S_i - x,\ldots,S_k\}$, ha $x \in S_i$. Ha egy $x \in V$-re $\pi(G - x,\mathcal{S}') < \pi(G,\mathcal{S})$, akkor $(G - x,\mathcal{S}')$-re az indukciós mennyiség kevesebb. Most $V - x$ minimumot adó $U_0,\ldots,U_m$ partíciójából az $U_0' := U_0 + x$ definícióval V-nek egy egyenlőséget adó partícióját kapjuk.

Ez esetekben tehát készen vagyunk. A továbbiakban $F \subseteq E$-re az F által fedett csúcsokat $V(F)$-fel jelöljük.

Mi következik 9.9-ből a 9.10 kiegészítéssel? Az (a) esetben $p(E_i) < p(E_i') + p(E_i'')$ miatt E_i grafikusan összefüggő. Tegyük fel, hogy $x \in V(E_i) - S$. Ha x-re $\pi(G-x, \mathcal{S}') < \pi(G, \mathcal{S})$, akkor az előző megfigyelés szerint készen vagyunk, így feltehetjük, hogy létezik egy x-et elkerülő maximális $\mathcal{S}$-útrendszer. Legyen az x-re illeszkedő élek halmaza $e(x)$. Tegyük fel, hogy $e(x) \not\subseteq E_i$. Az x-et elkerülő maximális $\mathcal{S}$-útrendszert egészítsük ki $(E - e(x), p)$ egy M_0 maximális matchingjévé. G minden élét használja $\mathcal{S}$-út, így $G - x$ minden összefüggőségi komponense metszi S-et. Az M_0 erdő tehát olyan, hogy π darab fája pontosan két csúccsal metszi S-et, a többi pedig eggyel. Vagyis x-et egy nem E_i-beli élen hozzákötve M_0-hoz (E,p)-nek egy maximális matchingjét kapjuk. Azonban $\nu \leq \sum_{i=1}^{l} \nu(E_i) \leq \sum_{i=1}^{l} \left\lfloor \frac{p(E_i)}{2} \right\rfloor = \nu$ miatt (E,p) minden maximális M matcingjére $M \cap E_i$ maximális E_i-ben, és E_i maximális matchingje használ x-re illeszkedő élt.

Így $V - S$ minden K összefüggőségi komponensére K élei egy E_i-ben vannak. G összefüggősége miatt minden E_i metszi S-et. Ha E_h és E_j legalább két S_i-be metsz, akkor $V(E_h)$ diszjunkt $V(E_j)$-től, ugyanis ha $s \in S$-et E_h és E_j is fedi, akkor $p(E_h \cup E_j) = 2|(V(E_h) \cup V(E_j)) \setminus S| + |(V(E_h) \cup V(E_j)) \cap S| < 2|V(E_h) \setminus S| + |V(E_h) \cap S| + 2|V(E_j) \setminus S| + |V(E_j) \cap S| = p(E_h) + p(E_j)$, ellentmondva (i)-nek. Legyenek $E_1, \ldots, E_s$ azon halmazok, amelyek legalább két S_i-be metszenek, $E_{s+1}, \ldots, E_t$ pedig azok, amelyek egybe. Legyen $U_0 = \emptyset$, $U_i = V(E_i)$, $1 \leq i \leq s$-re, a többi U_j partícióosztály pedig legyen egyelemű. Ezzel a választással:

$$\pi(G, \mathcal{S}) = \nu(E,p) - |V - S| = \sum_{i=1}^{t} \left(\left\lfloor \frac{p(E_i)}{2} \right\rfloor - |V(E_i) - S| \right) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{s} \left(\left\lfloor \frac{|V(E_i)| + |V(E_i) - S|}{2} \right\rfloor - |V(E_i) - S| \right) = \sum_{i=1}^{s} \left(\left\lfloor \frac{|V(E_i) \cap S|}{2} \right\rfloor \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \left\lfloor \frac{|U_i \cap S|}{2} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{s} \left\lfloor \frac{|B_i|}{2} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{t} \left\lfloor \frac{|B_i|}{2} \right\rfloor .$$

A (b) esetben $e := uv$. Ha u vagy v benne van minden maximális $\mathcal{S}$-útrendszerben, akkor készen vagyunk, így feltehetjük, hogy nem ez a helyzet.

Nem lehet az, hogy az (E,p) minden M maximális matchingjére u az M erdő egy olyan F_u fájának pontja, ami egy pontban metszi S-et, míg v az M egy olyan F_v fájának pontja, ami két pontban metszi S-et. Ekkor ugyanis

$$p(F_u + F_v + e) = 2|V(F_u + F_v) \setminus S| + |V(F_u + F_v) \cap S| >$$

$$> (2|V(F_u) \setminus S| + |V(F_u) \cap S| - 1) + (2|V(F_v) \setminus S| + |V(F_v) \cap S|) = p(F_u) + p(F_v)$$

állna, ellentmondva $e \in sp(M)$-nek.

Ha $u \in S_1$, $v \in S_2$, akkor egészítsünk ki egy olyan maximális $\mathcal{S}$-útrendszert, ami nem használja u-t, maximális matchinggé. Ez az $\mathcal{S}$-útrendszer persze használja v-t. A kapott erdőben u egy olyan fa pontja, ami egyedül u-ban metszi S-et, míg v egy olyan fáé, ami két pontban is metszi S-et, ami nem lehet.

Feltehetjük tehát, hogy $u \notin S$. $S_1' := S_1 + u$ és $\pi' := \pi(G, \mathcal{S}')$. Ha $\pi' = \pi$, akkor $\pi' + |V - S'| < \pi + |V - S|$ miatt $(G, \mathcal{S}')$-re már tudjuk Mader tételét. V partíciója $(G, \mathcal{S})$-re is jó lesz, mivel

$$|U_0| + \sum \left\lfloor \frac{|B_i|}{2} \right\rfloor \leq |U_0| + \sum \left\lfloor \frac{|B_i'|}{2} \right\rfloor = \pi' = \pi.$$

Ezért feltehető, hogy létezik $\pi + 1$ teljesen pontdiszjunkt $\mathcal{S}'$-út, azaz π darab $P_1, \ldots, P_\pi$ $\mathcal{S}$-út és egy P $u - c$ út, $c \in S_i$. Iménti megjegyzésünk következtében feltehetjük, hogy v a P úton van, sőt azt is, hogy e a P út éle. $(G, \mathcal{S})$-re tett feltevésünk szerint létezik egy olyan Q $\mathcal{S}$-út, ami használja e-t. Q' legyen Q-nak az a szakasza, aminek két vége kivételével más pontja nincs S-en vagy egy P_i úton, és tartalmazza e-t. P-n elindulva e felé, amikor Q'-be botlunk, menjünk tovább Q'-n arra, ahol e van. Így Q'-t egy olyan Q''-vel helyettesítettük, ami ugyanazt tudja mint Q': két vége kivételével más pontja nincs S-en vagy egy P_i úton, tartalmazza e-t, és ráadásul egyik vége c. Q' másik vége egy P_i úton van, így a $P_1, \ldots, P_\pi$ $\mathcal{S}$-útrendszert kiegészíthetjük úgy egy maximális matchinggé, hogy u és v egyike egy P_i út fáján van, vagyis két ponttal metszi S-et, másika pedig egy olyan fán, ami csak eggyel metszi S-et. Márpedig láttuk, hogy ebben az esetben $e \notin sp(M)$.

A (c) esetben ha a W nemtriviális dupla kör külső b fejjel, azaz (W1), (W3), (W4), (W5), (W7), vagy (W8) alakú, akkor 9.8 szerint $S_1' := S_1 + b$-vel egy olyan p' 1-projekciót definiáltunk, amire $\nu(E, p') = \nu(E, p) - 1$. $(G, \mathcal{S}')$-re már tudjuk az állítást, és az ottani partíció most is jó lesz:

$$|U_0| + \sum \left\lfloor \frac{|B_i|}{2} \right\rfloor \leq |U_0| + \sum \left\lfloor \frac{|B_i'|}{2} \right\rfloor = \pi(G, \mathcal{S}') = \nu(E, p') - |V - S'| = \nu - |V - S| = \pi.$$

Ha W belső a fejjel, akkor 9.7 szerint $\pi(G - a, \mathcal{S}') = \pi(G, \mathcal{S})$, vagyis találtunk egy olyan a csúcsot, amit kihagyva π csökken, és ekkor készen vagyunk. ∎

Hivatkozások

[1] Björner, A.; Lovász, L. Pseudomodular lattices and continuous matroids. Acta Sci. Math. (Szeged) 51 (1987), no. 3-4, 295–308.

[2] Bouchet, André Greedy algorithm and symmetric matroids. Math. Programming 38 (1987), no. 2, 147–159.

[3] Bouchet, André; Cunningham, William H. Delta-matroids, jump systems, and bisubmodular polyhedra. SIAM J. Discrete Math. 8 (1995), no. 1, 17–32.

[4] Camerini, P. M.; Galbiati, G.; Maffioli, F. Random pseudo-polynomial algorithms for exact matroid problems. J. Algorithms 13 (1992), no. 2, 258–273.

[5] Camerini, P. M.; Maffioli, F. Heuristically guided algorithm for k-parity matroid problems. Discrete Math. 21 (1978), no. 2, 103–116.

[6] Cunningham, William H. Matching, matroids and extensions, elfogadva: Math. Programming B. (2001)

[7] Cunningham, William H.; Geelen, James F. The optimal path-matching problem. Combinatorica 17 (1997), no. 3, 315–337.

[8] Dress, A.; Lovász L. On some combinatorial properties of algebraic matroids. Combinatorica 7 (1987), no. 1, 39–48.

[9] Dunstan, F. D. J.; Welsh, D. J. A. A greedy algorithm for solving a certain class of linear programmes. Math. Programming 5 (1973), 338–353.

[10] Frank András Restricted t-matchings in bipartite graphs. EGRES Technical Report TR-2001-10, Budapest

[11] Fujishige, Satoru Theory of submodular programs: a Fenchel-type min-max theorem and subgradients of submodular functions. Math. Programming 29 (1984), no. 2, 142–155.

[12] Fujishige, Satoru A min-max theorem for bisubmodular polyhedra. SIAM J. Discrete Math. 10 (1997), no. 2, 294–308.

[13] Fujito, Toshihiro A 2/3-approximation of the matroid matching problem. Algorithms and computation (Hong Kong, 1993), 185–190, Lecture Notes in Comput. Sci., 762, Springer, Berlin, 1993.

[14] Gabow, H. N.; Stallmann, M. An augmenting path algorithm for linear matroid parity. Theory of computing (Singer Island, Fla., 1984). Combinatorica 6 (1986), no. 2, 123–150.

[15] Geelen James F. Lectures on jump systems, jegyzet

[16] Hartvigsen D. B. Extensions of Matching Theory. Ph. D. Tézis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA

[17] Király Zoltán C_4-free 2-factors in bipartite graaphs. EGRES Technical Report TR-2001-13, Budapest

[18] Lovász L. The matroid matching problem. Algebraic methods in graph theory, Vol. I, II (Szeged, 1978), pp. 495–517, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 25, North-Holland, Amsterdam-New York.

[19] Lovász L. Selecting independent lines from a family of lines in a space. Acta Sci. Math. (Szeged) 42 (1980), no. 1-2, 121–131.

[20] Lovász L. Matroid matching and some applications. J. Combin. Theory Ser. B 28 (1980), no. 2, 208–236.

[21] Lovász L.; Plummer, M. D. Matching theory. North-Holland Mathematics Studies, 121. Annals of Discrete Mathematics, 29. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 1986.

[22] Lovász L. The membership problem in jump systems. J. Combin. Theory Ser. B 70 (1997), no. 1, 45–66.

[23] Mader, W. Über die Maximalzahl kreuzungsfreier H-Wege. Arch. Math. (Basel) 31 (1978/79), no. 4, 387–402.

[24] Pap Gyula, beküldve

[25] Payan, C., beküldve

[26] Schrijver, Alexander A short proof of Mader's $\mathcal{S}$-paths theorem. J. Combin. Theory Ser. B 82 (2001), no. 2, 319–321.

[27] Schrijver, Alexander készülő könyv

[28] Sebő András Gaps and jumps, jegyzet

[29] Szigeti Zoltán On a min-max theorem of cacti. Integer programming and combinatorial optimization (Houston, TX, 1998), 84–95, Lecture Notes in Comput. Sci., 1412, Springer, Berlin, 1998.

[30] Szigeti Zoltán On the graphic matroid parity problem, beküldve

[31] Vande Vate, John H. Structural properties of matroid matchings. Discrete Appl. Math. 39 (1992), no. 1, 69–85.