Globális szingularitáselmélet

diplomamunka

Kálmán Tamás

témavezető: Szűcs András
egyetemi docens

ELTE TTK
1998.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A globális szingularitáselmélet a topológiának viszonylag fiatal, fejlődésének elején lévő területe. Ez a tudományág sima sokaságok közötti sima leképezéseket vizsgál, pontosabban ezek közül azokat, amelyek valamilyen értelemben generikusak (ld. az 1.1.1. Definíciót). Ez a megszorítás a számunkra fontos esetekben lényegében nem csorbítja az elmélet általánosságát, ugyanis bármely sima leképezés „kis megváltoztatással" ilyen általános helyzetbe hozható lesz (ld. az 1.1.3. Tételt). Ugyanakkor nagyon sokat nyerünk vele, ugyanis a *lokális szingularitáselmélet* meglehetősen pontos leírását adja az ilyen leképezések lokális viselkedésének: szingularitásaikat (azaz az értelmezési tartomány azon pontjait, ahol a Jacobi-mátrix rangja alacsonyabb az elképzelhető maximumnál) típusuk szerint jól körülhatárolt halmazokba sorolja, amelyekről pedig bebizonyítja, hogy jól kezelhető struktúrával rendelkeznek (a szakdolgozatban tárgyalt esetekben ezek sokaságok lesznek). Ezeket az eredményeket, amelyek aztán a globális szingularitáselmélet bázisát alkotják, foglaltuk össze az 1.1. alfejezetben. Az ott szereplő állítások legtöbbje mögött Thom híres csóva-transzverzalitási tétele húzódik meg, de kidolgozásukban fontos szerepet játszottak pl. Arnold, Boardman, Levine, Mather, Morin, du Plessis és Whitney is.

A globális szingularitáselmélet alapvető problémafelvetései a következők:

- Mi mondható el a szinguláris halmaz, illetve annak bizonyos típusú szingularitásokból álló részhalmazainak nagybani topológiájáról önmagában és az értelmezési tartomány topológiájához viszonyítva?
- Egy $f\colon M \to N$, csak bizonyos előre rögzített típusú szingularitásokkal bíró generikus leképezés létezéséből milyen következtetések vonhatóak le a két sokaság, de különösen M topológiájára nézve?
- Két adott sokaság esetén melyek a közöttük ható legegyszerűbb generikus leképezések

    1. általában

2. egy adott homotópiaosztályon belül, azaz, ha adott egy generikus leképezés, akkor a szingularitásai közül melyek eliminálhatóak homotópia segítségével?

Kiderül, hogy amennyiben az értékkészlet a valós számok egydimenziós $\mathbb{R}$ sokasága, a generikus leképezések éppen a Morse-függvények. A Morse-elmélet a globális szingularitáselméletnek legrégibb és (számos nyitott kérdése ellenére) egyetlen kielégítően feltérképezett területe, egyben a későbbi általánosabb vizsgálatok elindítója és motiválója. Ezek a vizsgálatok, amelyeket olyan matematikusok folytattak és folytatnak, mint pl. Thom, Levine, Haefliger és Èliašberg, egyelőre igen kevés általános, sok szituációban alkalmazható tételt és módszert produkáltak, az eredmények számosak ugyan, de jobbára egymástól elszigeteltek (pl. gyakran csak egy bizonyos dimenzióra érvényesek). Újabban dominánssá kezd válni a „japán iskola", amelynek legfontosabb képviselői Ando, Fukuda, Sakuma és Saeki. Az ő eredményeik, amelyek a szakdolgozat második felének gerincét alkotják, zömmel a nempozitív kodimenzió, azaz olyan leképezések esetére vonatkoznak, amelyek egy sokaságot egy nála nem nagyobb dimenziós sokaságba képeznek le.

Az előbb említetteknek mintegy tükreként, a diplomamunka fejezetei is meglehetősen elkülönülnek egymástól. A témában alapvető definíciók és tételek áttekintése után mindjárt a 2. Fejezet tartalmazza a fő eredményeket: teljes választ adunk arra a kérdésre, hogy egy zárt felületnek a síkba történő hajtás-leképezésénél (ld. az 1.1.11. Definíciót) hány komponensű lehet a szinguláris halmaz, illetve új bizonyítást adunk Èliašberg és Millett egy ismert tételére (2.1.5. Lemma). A 3. Fejezet Pappas bizonyos eredményeit ülteti át a szingularitáselméletbe. A 4. Fejezetben a mai topológiában oly fontos 4-dimenziós sokaságok közötti szinguláris leképezésekkel foglalkozunk, az 5. Fejezetben pedig megpróbálunk körüljárni egy újonnan felmerült megoldatlan problémát.

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Szűcs Andrásnak a rengeteg hasznos tanácsért és észrevételért, valamint Rimányi Richárdnak az 1. Fejezet összeállításához nyújtott segítségéért.

Budapest, 1998. májusa

1. Fejezet

Alapfogalmak és -tételek

Ebben a fejezetben rögzítjük a főbb definíciókat és jelöléseket, valamint áttekintünk néhány alaptételt, bizonyítás nélkül. Minden előforduló sokaság valós, sima, parakompakt és Hausdorff lesz, és a közöttük ható leképezésekről is feltesszük, hogy C^∞-osztályúak.

Legyenek M^n és N^p n-, illetve p-dimenziós sokaságok és $f\colon M^n \to N^p$ sima leképezés.

1.1 Stabil leképezések lokális viselkedése

1.1.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy f *stabil*, ha az

$$\alpha\colon (\mathrm{Diff}(M) \times \mathrm{Diff}(N)) \times C^\infty(M,N) \to C^\infty(M,N)$$

csoporthatásnál keletkező orbitja a Whitney-féle C^∞-topológiával ellátott $C^\infty(M,N)$ térben nyílt halmaz, ahol $\mathrm{Diff}(X)$ az X sokaság diffeomorfizmuscsoportja és $\alpha((g,h),f) := h^{-1} \circ f \circ g$.

1.1.2. Megjegyzés. A Morse-lemma szerint $N = \mathbb{R}$ esetén a stabil leképezések éppen az M-en értelmezett Morse-függvények.

A *globális szingularitáselméletnek* az ad létjogosultságot, hogy a stabil leképezések „szépek” és „sokan vannak”. Az előbbi kijelentés tartalmát hamarosan látni fogjuk, az utóbbit pedig pontosítja az alábbi

1.1.3. Állítás (Mather [Ma]). *A stabil leképezések $C^\infty(M^n, N^p)$-nek egy nyílt részhalmazát alkotják, amely mindenütt sűrű is az alábbi, ún.* szép (n,p)

dimenzió-párok esetén:

$$\begin{aligned} n &< \frac{6}{7}p + \frac{8}{7} \quad &\text{és}\quad & p - n \geqq 4 \\ n &< \frac{6}{7}p + \frac{9}{7} \quad &\text{és}\quad & 0 \leqq p - n \leqq 3 \\ p &< 8 \quad &\text{és}\quad & p - n = -1 \\ p &< 6 \quad &\text{és}\quad & p - n = -2 \\ p &< 7 \quad &\text{és}\quad & p - n \leqq -3. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy ha $n \leqq 7$ vagy $p \leqq 5$, akkor (n,p) szép; a továbbiakban általában szép dimenzió-párokat fogunk vizsgálni. A következőkben osztályozni fogjuk M pontjait f lokális viselkedése szerint.

1.1.4. Definíció. Az $x \in M$ pontot f *reguláris pontjának* nevezzük, ha a $T_x f\colon T_x M \to T_{f(x)} N$ lineáris érintőleképezés rangja a lehető legnagyobb, azaz $\min\{n,p\}$. A nem reguláris pontok f *szinguláris pontjai* (Morse-függvények esetén *kritikus pontjai*), amelyek halmazát $S(f)$ jelöli. $S(f)$-nek azt a részhalmazát, amelynek pontjaiban a lineáris érintőleképezés rangja $\min\{n,p\} - i$ $(i = 0, 1, 2, \dots)$, Σ^i-vel jelöljük.

1.1.5. Megjegyzés. $\Sigma^0(f) = M \setminus S(f)$. Ha $S(f) = \emptyset$, akkor f $n \geqq p$ esetén szubmerzió, $n \leqq p$ esetén pedig immerzió ($n = p$ esetén mindkettő, azaz lokális diffeomorfizmus).

Általánosságban $S(f)$-ről (a Sard-lemma következményeként) a következő állítható:

1.1.6. Tétel. *Ha $n \geqq p$ és M zárt, akkor $f(S(f))$ sehol sem sűrű N-ben.*

Ha $n < p$, akkor természetesen már maga $f(M)$ is sehol sem sűrű. Stabil leképezésekre azonban jóval több igaz:

1.1.7. Állítás. *Ha f stabil, akkor $S(f) = \overline{\Sigma^1(f)}$*

és

1.1.8. Tétel. *Ha f stabil, akkor $\Sigma^i(f) \subset M$ egy $i(|n-p|+i)$-kodimenziós részsokaság.*

1.1.9. Megjegyzés. Az 1.1.8. Tétel speciális eseteként adódik, hogy az $M^n \to N^{2n}$ típusú stabil leképezések immerziók (hiszen $1\cdot(n+1) > n$), és így, mivel a stabil leképezések Thom transzverzalitási tétele folytán nyilván öntranszverzálisak, bármely $h\colon M^n \to N^{2n}$ folytonos leképezés approximálható öntranszverzális immerzióval, azaz a kompakt-nyílt topológiával ellátott $C(M,N)$

térben h bármely környezete tartalmaz öntranszverzális immerziót, hiszen $C^\infty(M,N)$ C^∞-topológiája nem durvább a kompakt-nyílt topológia megszorításánál. Természetesen, a sima leképezések már a C^∞-topológia szerint is approximálhatóak öntranszverzális immerzióval.

Az 1.1.8. Tétel lehetővé teszi $S(f)$ további részhalmazainak, az ún. *Thom-Boardman szinguláris részhalmazoknak* a definiálását.

1.1.10. Állítás-Definíció. Ha $i,j\in\omega$ és f stabil, akkor $\Sigma^{i,j}(f)$-fel jelöljük a $\Sigma^j(f\big|_{\Sigma^i(f)})$ halmazt. Mivel $C^\infty(M,N)$ egy nyílt, sűrű részhalmazából vett f-ekre ez ismét részsokaság ($\Sigma^i(f)$-ben, és így M-ben is), azért (és mert nyílt, sűrű halmazok véges metszetei maguk is nyíltak és sűrűek) $C^\infty(M,N)$ egy ($i_1,i_2,\ldots,i_k$-tól függő) nyílt,sűrű részhalmazához tartozó f-ekre indukcióval definiálhatóak a $\Sigma^{i_1,i_2,\ldots,i_k}(f)$ halmazok $(i_1,i_2,\ldots,i_k\in\omega)$, amelyek valamennyien M részsokaságai.

Megjegyezük, hogy az előző Állítás-Definíció Boardmantól származó „állítás" része egyáltalán nem triviális. A továbbiakban néha meg fogjuk engedni magunknak azt a pontatlanságot, hogy a „stabil" szót az iménti szűkebb értelemben használjuk (azaz olyan leképezéseket jelöljünk vele, amelyek az éppen szóban forgó szingularitás-típusoknak megfelelő nyílt, sűrű halmazhoz tartoznak). Vegyük észre, hogy f-nek a különböző szinguláris részhalmazokra történő megszorításai nem feltétlenül stabilak, így az 1.1.8. Tétel formulája nem alkalmazható a legalább két indexű Thom-Boardman szingularitások kodimenzióinak, illetve dimenzióinak kiszámítására. Továbbá ismert, hogy $\Sigma^{i_1,i_2,\ldots,i_k}(f)=\varnothing$, valahányszor az $i_1,i_2,\ldots,i_k$ indexsorozat nem monoton fogyó, ezért ennek ellenkezőjét a továbbiakban mindig fel fogjuk tenni. Az is könnyen meggondolható, hogy az indexsorozat végén található 0-k egy kivételével elhagyhatóak a megfelelő halmaz megváltozása nélkül.

1.1.11. Definíció. Legyen $n\geqq p$. Az $A_l(f):=\Sigma^{\overbrace{1,\ldots,1}^{l},0}(f)$ $(l\geqq 1)$ alakú halmazokat (melyek persze csak akkor definiáltak, ha f stabil) *Morin-féle szinguláris részhalmazoknak* vagy *Morin-szingularitásoknak* nevezzük. $A_1(f)$-re a *hajtás-szingularitás*, $A_2(f)$-re a *csúcs-szingularitás*, $A_3(f)$-re a *fecskefarok-szingularitás*, $A_4(f)$-re pedig a *pillangó-szingularitás* elnevezéseket is használjuk. Ha f-nek csak Morin-szingularitásai vannak, akkor f-et *Morin-leképezésnek* mondjuk. Speciálisan, ha $S(f)=\Sigma^{1,0}(f)$, akkor f-et *hajtás-leképezésnek* vagy $\Sigma^{1,0}$*-leképezésnek* nevezzük.

Ha n és p adottak, akkor bármely $i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},0$ alakú indexsorozathoz hozzárendelhető véges sok ún. *normálforma*, amelyek valamennyien $(\mathbb{R}^n,\mathbf{0})\to$

$(\mathbb{R}^p, \mathbf{0})$ típusú sima leképezések (ha tetszik, leképezés-csírák) azzal a tulajdonsággal, hogy ha f stabil és $x \in \Sigma^{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, 0}(f)$, akkor alkalmas $(U; \varphi)$ és $(V; \psi)$ M-, illetve N-beli x-, illetve $f(x)$ középpontú (azaz $\varphi(x) = \mathbf{0}$ és $\psi(f(x)) = \mathbf{0}$) térképek esetén a $\psi \circ (f\big|_U) \circ \varphi^{-1}$ leképezés ezen normálformák valamelyikével egyezik meg (illetve eleme a megfelelő függvénycsírának). Ilyenekre számos példát fogunk látni, köztük azokat is, amelyek a fenti elnevezéseket indokolják.

1.1.12. Tétel. *Ha $n \geqq p$, f stabil és $z \in A_l(f) \subset M$, akkor léteznek olyan $(U; x_1, \ldots, x_n)$ és $(V; y_1, \ldots, y_p)$ M-, illetve N-beli z-, illetve $f(z)$ középpontú lokális koordináta-rendszerek, melyekben felírva f a következő alakok valamelyikét veszi fel:*

$$y_i = x_i \ (i = 1, \ldots, (p-1)) \ \textit{és}$$

$$(1.1) \qquad y_p = x_p^{l+1} + \sum_{j=1}^{l-1} x_j x_p^{l-j} + (x_{p+1}^2 + \ldots + x_{n-\lambda}^2 - x_{n-\lambda+1}^2 - \ldots - x_n^2),$$

ahol $0 \leqq \lambda \leqq n - p$ egész szám. $A_l(f)$ és $\overline{A_l(f)}$ az M-nek $(p-l)$-dimenziós részsokaságai, továbbá $\overline{A_l(f)} = \bigcup_{i \geqq l} A_i(f)$.

A Morin-leképezéseket éppen az teszi érdekessé és fontossá, hogy ezekre $\overline{A_l(f)}$ is mindig részsokaság; ez ugyanis általában nem teljesül (egy stabil leképezés adott típusú szingularitásai halmazának lezártjáról általában csak annyi mondható el, hogy ez egy ún. *sztratifikált halmaz*, azaz különböző dimenziós sokaságok (nem diszjunkt!) uniója). Érdemes külön megvizsgálni a hajtásszingularitás normálformáit. Az (1.1) képlet $l = 1$ esetén a következőt adja:

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} y_i &= x_i \ (i = 1, \ldots, (p-1)) \text{ és} \\ y_p &= x_p^2 + x_{p+1}^2 + \ldots + x_{n-\lambda}^2 - x_{n-\lambda+1}^2 - \ldots - x_n^2. \end{aligned}$$

1.1.13. Definíció. Ha f stabil, $n \geqq p$ és $z \in \Sigma^{1,0}(f)$, akkor *z indexének* nevezzük az f z körüli normálalakjában szereplő λ értéket. Úgy tekintjük, hogy a λ és $(n - p + 1 - \lambda)$ számok ugyanazt az indexet reprezentálják. Ha $S(f)$ valamely komponense csupa hajtás-szingularitásból áll (*hajtás-komponens*), akkor azok indexei megegyeznek és ezt a közös értéket a komponens indexének mondjuk. Ha az index 0 vagy $n - p + 1$, akkor a hajtás-szingularitást (hajtás-komponenst) *definitnek* nevezzük, ellenkező esetben *indefinitnek*. Ha az f hajtás-leképezés összes szingularitása definit, akkor f-et *speciális generikus leképezésnek* mondjuk.

1.1.14. Megjegyzés. A Morse-függvények nyilvánvalóan hajtás-leképezések és az (1.2) képlet alapján az is világos, hogy a fent definiált index-fogalom általánosítása a Morse-függvények kritikus pontjain definiált indexnek; ott azért nem lép fel az iménti kétértelműség, mert $\mathbb{R}$-en létezik kanonikus irányítás.

A 2. Fejezetben jelentős szerepet játszik a felületek közötti stabil leképezéseknél jelentkező csúcs-szingularitás, ezért ennek normálformáját is külön kiemeljük:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \text{ és} \\ y_2 &= x_2^3 + x_1 x_2. \end{aligned}$$

Az eddig felsorolt állítások a *lokális szingularitáselmélet* körébe tartoznak és ma már mind „klasszikusnak" számítanak. A következő szakasz már $S(f)$ nagybani topológiájáról ad információt.

1.2 A Thom-polinomok

1.2.1. Tétel. *Bármely n, p nemnegatív egészekhez és $i_1, \ldots, i_k$ nemnegatív egészekből álló k-ashoz létezik egy olyan $P^{n,p}_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathbb{Z}_2[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p]$ $(n+p)$-határozatlanú polinom, hogy ha M zárt n-dimenziós sokaság, N tetszőleges p-dimenziós sokaság és $f\colon M \to N$ stabil leképezés, akkor*

$$\mathcal{D}_M \left[\overline{\Sigma^{i_1,\ldots,i_k}(f)}\right]_2 = P^{n,p}_{i_1,\ldots,i_k}(w_1(M), \ldots, w_n(M), f^*w_1(N), \ldots, f^*w_p(N)),$$

ahol $\mathcal{D}_M\colon H_*(M;\mathbb{Z}_2) \to H^*(M;\mathbb{Z}_2)$ a Poincaré-dualitás, $\left[\overline{\Sigma^{i_1,\ldots,i_k}(f)}\right]_2$ a $\overline{\Sigma^{i_1,\ldots,i_k}(f)}$ halmaz által reprezentált $\mathbb{Z}_2$-együtthatós homológiaosztály, $w_i(X)$ pedig az X sokaság i-edik Stiefel-Whitney osztályát jelöli.

A Stiefel-Whitney osztályokkal kapcsolatban ld. [MS]-t. Mint már említettük, ha az indexsorozatban szerepel 1-nél nagyobb szám, akkor $\overline{\Sigma^{i_1,\ldots,i_k}(f)}$ általában nem részsokaság; az azonban szerencsére igaz, hogy (stabil leképezések esetén) ciklust alkot.

1.2.2. Definíció. Az 1.2.1. Tételben szereplő $P^{n,p}_{i_1,\ldots,i_k}$ polinomot (az n, p dimenzió-párhoz és az $i_1, \ldots, i_k$ paraméterekhez tartozó) *Thom-polinomnak* nevezzük.

Egy adott típusú szingularitás Thom-polinomja tehát M és N topológiája, valamint f homotópia-osztálya alapján meghatározza a megfelelő halmaz ($\mathbb{Z}_2$-együtthatós) homológiaosztályát. Speciálisan, ha a Thom-polinom értéke nem $0 \in H^*(M;\mathbb{Z}_2)$ két adott (M és N) sokaság és egy (illetve minden) $M \to N$ leképezés esetén, akkor a megfelelő szingularitás nem eliminálható homotópiával (illetve bármely, ezen sokaságok közötti stabil leképezésnél fellép). A Thom-polinom azonban nem tartalmaz minden információt a szingularitásról; ezt mutatja például az a tény, hogy az iménti triviális állítás megfordítása nem igaz (ld. az 1.2.6. Megjegyzést, illetve [Sae2]-t és az 5.2.10. Tételt).

A Thom-polinomokkal kapcsolatos fő probléma azonban az, hogy bár a létezésük bizonyított, magukat a polinomokat csak bizonyos speciális esetekben ismerjük, sőt, ilyenkor is gyakori, hogy a polinom helyett csak „viszonylag sok" helyettesítési értéke ismert (az alábbiakon kívül ld. még pl. a 2.1.3. Következményt). A következő állításokban összefoglalunk néhány ismert eredményt.

1.2.3. Tétel ([T, Ron, Ga, O]). *Legyenek M és N n-dimenziós sokaságok, M zárt és $f\colon M \to N$ stabil leképezés. Ha $w(M)^{-1} \cup f^*w(N) = 1 + \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + \ldots + \tilde{w}_n$, ahol $\tilde{w}_i \in H^i(M;\mathbb{Z}_2)$ ($\tilde{w}_i$ nyilván M Stiefel-Whitney osztályainak és N Stiefel-Whitney osztályai f^*-képeinek polinomja), akkor*

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_M\left[\overline{\Sigma^1(f)}\right]_2 &= \tilde{w}_1,\\
\mathcal{D}_M\left[\overline{\Sigma^{1,1}(f)}\right]_2 &= \tilde{w}_1^2 + \tilde{w}_2,\\
\mathcal{D}_M\left[\overline{\Sigma^{1,1,1}(f)}\right]_2 &= \tilde{w}_1^3 + \tilde{w}_1 \cup \tilde{w}_2,\\
\mathcal{D}_M\left[\overline{\Sigma^{1,1,1,1}(f)}\right]_2 &= \tilde{w}_1^4 + \tilde{w}_1 \cup \tilde{w}_3, \ \textit{és}\\
\mathcal{D}_M\left[\overline{\Sigma^{1,1,1,1,1}(f)}\right]_2 &= \tilde{w}_1^5 + \tilde{w}_1^2 \cup \tilde{w}_3.
\end{aligned}$$

Ha $w(N) = 1$ (pl., ha N stabilan parallelizálható, azaz a $TN \oplus \varepsilon^1$ nyaláb triviális, ahol ε^1 triviális vonalnyaláb N felett), akkor a fenti formulákban $\tilde{w}_i$ helyett egyszerűen $\bar{w}_i(M)$, M megfelelő duális Stiefel-Whitney osztálya írható. Az alábbi két állítás (melyekben ismét szerepelnek az 1.2.3. Tételben definiált $\tilde{w}_i$ kohomológiaosztályok) megtalálható [T]-ben és [Po]-ban.

1.2.4. Állítás. *Legyen M^n zárt és $f\colon M^n \to N^p$ stabil leképezés. Ha $n \leqq p$, akkor $\mathcal{D}_M\left[\overline{\Sigma^{1,0}(f)}\right]_2 = \mathcal{D}_M\left[\overline{\Sigma^1(f)}\right]_2 = \mathcal{D}_M[S(f)]_2 = \tilde{w}_{p-n+1}$. Ha $n \geqq p$, akkor az ugyanígy definiált kohomológiaosztály $w(M) \cup f^*\bar{w}(N)$-nek a $H^{n-p+1}(M;\mathbb{Z}_2)$-beli komponensével egyezik meg.*

1.2.5. Állítás. *Ha M és N 4-sokaságok, M zárt és $f\colon M \to N$ stabil leképezés, akkor $\mathcal{D}_M\left[\Sigma^{2,0}(f)\right]_2 = \tilde{w}_2^2 + \tilde{w}_1 \cup \tilde{w}_3$ (így pl. $P^{4,4}_{2,0}(x_1,x_2,x_3,x_4,0,0,0,0) = x_2^2 + x_1x_3$). Ha M és N irányítottak, akkor $\Sigma^{2,0}(f)$ rendelkezik egy kanonikus irányítással (azaz a pontjai természetes módon előjelezhetőek). Ha N stabilan parallelizálható, akkor az ehhez az irányításhoz tartozó $[\Sigma^{2,0}(f)] \in H_0(M;\mathbb{Z})$ $\mathbb{Z}$-együtthatós fundamentális homológia-osztály Poincaré-duálisa a $p_1(M) \in H^4(M;\mathbb{Z})$ első Pontrjagin-osztály.*

1.2.6. Megjegyzés. Ha M^n zárt, N^p pedig nyílt, azaz olyan sokaság, melynek minden komponense nem-kompakt, továbbá $n \geqq p$, akkor bármely $f\colon M \to N$ sima leképezés rendelkezik szingularitással (és mivel stabil leképezésekre $S(f) = \overline{\Sigma^{1,0}(f)}$, azért ezek mindig rendelkeznek hajtás-szingularitással). Ugyanis a szubmerziók nyílt leképezések, ha tehát f az volna, akkor $f(M)$ egyszerre lenne nyílt és kompakt, azaz nyílt és zárt, tehát N néhány komponensének az uniója kéne, hogy legyen; egy ilyen alakú halmaz azonban a feltétel miatt nem lehet kompakt. Ha azt is feltesszük, hogy $n = p$ és a sokaságok irányíthatóak, akkor az 1.2.4. Állítás szerint a hajtás-szingularitás Thom-polinomja eltűnik; ennek ellenére, amint láttuk, a szingularitás mindig fellép.

2. Fejezet

Felületek hajtás-leképezései a síkba

Ebben a fejezetben egy zárt felületnek a síkba történő $\Sigma^{1,0}$-leképezéseit, illetve ilyen leképezések szinguláris halmazait vizsgáljuk. Vegyük észre, hogy a szóban forgó halmaz véges sok, a felületbe ágyazott körvonal diszjunkt uniója; arra a kérdésre keressük a választ, hogy hány komponens képzelhető el. A feleletet a Fejezet végén található 2.2.5. Tétel fogja megadni.

2.1 Akadályok

Azonnal természetesen adódik a kérdés, hogy mely zárt felületeket lehetséges a síkba leképezni csak hajtás-szingularitásokkal, hiszen ennél a dimenzió-párnál (sőt, tetszőleges $M^n \to N^2$ leképezések esetén, ahol $n \geqq 2$) a stabil leképezések a hajtáson kívül még izolált csúcs-szingularitásokkal is rendelkezhetnek (ld. az 1.1.8. és 1.1.12. Tételeket). A feleletet lényegében az alábbi két állítás adja meg, ugyanis nem nehéz a páros Euler-karakterisztikájú felületek (köztük a nem irányíthatóak, pl. a Klein-kancsó) hajtás-leképezéseit megadni a síkba[1].

2.1.1. Tétel. *Legyen M zárt n-sokaság ($n \geqq 2$) és $f\colon M \to \mathbb{R}^2$ stabil leképezés. Ekkor $|\Sigma^{1,1}(f)| \equiv \chi(M) \pmod 2$.*

2.1.2. Következmény. *Páratlan karakterisztikájú zárt felület nem képezhető le a síkba generikus módon csúcs-szingularitások nélkül.*

Ismert, hogy egy M zárt n-sokaság n-edik Stiefel-Whitney osztálya pontosan akkor 0, ha $\chi(M)$ páros, egyébként pedig $H^n(M;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ másik elemével

[1] ld. még a 2.1.4. Tételt, illetve a 2.2.1. és 2.2.4. Állításokat

egyezik meg. A 2.1.1. Tétel feltételei mellett tehát $\mathcal{D}_M\left[\Sigma^{1,1}(f)\right]_2 = w_2(M)$, ami azt jelenti, hogy $n \geqq 2$ esetén $P^{n;2}_{1,1}(w_1(M),\dots,w_n(M),0,0) = w_n(M)$. Az 1.2.1. Tétel segítségével ebből a 2.1.1. Tétel alábbi általánosítása adódik:

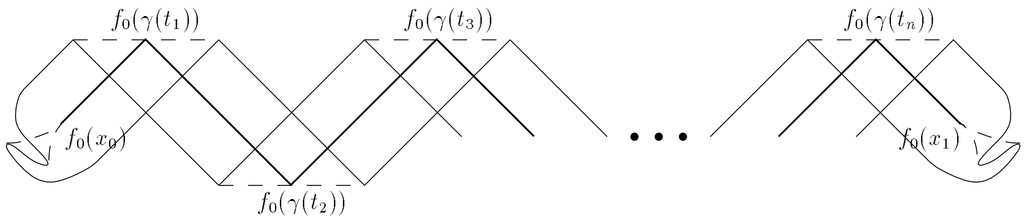
2.1.3. Következmény. *Legyen M zárt n-sokaság ($n \geqq 2$) és $f\colon M \to N^2$ stabil leképezés, ahol N olyan felület, melynek totális Stiefel-Whitney osztálya $1 \in H^*(N;\mathbb{Z}_2)$. Ekkor $|\Sigma^{1,1}(f)| \equiv \chi(M) \pmod 2$.*

Vegyük észre, hogy az N-re kirótt feltételt éppen az irányítható felületek teljesítik. A következő Tétel mutatja, hogy a 2.1.3. Következmény éles: f csúcs-szingularitásainak a számára más megkötés nem adható.

2.1.4. Tétel. *Bármely $f\colon M^n \to N^2$ folytonos leképezés, ahol M^n legalább 2-dimenziós összefüggő zárt sokaság, az N felület pedig irányítható, homotóp egy olyan stabil leképezéssel, amelynek attól függően, hogy $\chi(M)$ páros-e vagy páratlan, 0 vagy 1 csúcs-szingularitása van.*

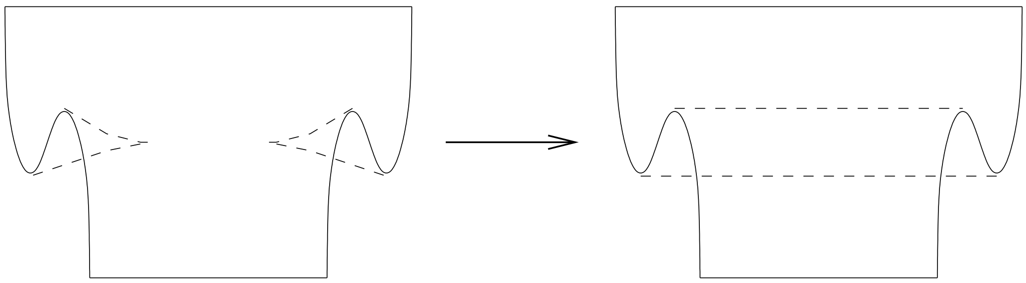
A 2.1.4. Tételt $n \geqq 3$ esetére Levine [Le1], $n = 2$ esetére Èliašberg [E] és Millett [Mill] bizonyították. Az utóbbi eset nyilvánvalóan folyik az alábbi Lemmából, amely szerint a csúcs-szingularitások páronként eliminálhatóak.

2.1.5. Lemma. *Legyenek F és S tetszőleges felületek, $f_0\colon F \to S$ stabil leképezés, $x_0, x_1 \in \Sigma^{1,1}(f_0)$ különböző pontok, továbbá $\gamma\colon [0,1] \to F$ olyan F-be ágyazott, $S(f_0)$-ra transzverzális sima görbe, melyre $\gamma(0) = x_0$ és $\gamma(1) = x_1$, de $\gamma((0,1)) \cap \Sigma^{1,1}(f_0) = \varnothing$. Tegyük fel továbbá, hogy a $T_{x_0}f_0(\gamma'(0)) \in T_{f_0(x_0)}S$ és $-T_{x_1}f_0(\gamma'(1)) \in T_{f_0(x_1)}S$ vektorok a megfelelő csúccsal megegyező irányba mutatnak, úgy, ahogy az a 2.1 ábrán látható. Legyen $N(\gamma)$ a γ képének egy F-beli csőszerű környezete. Ekkor létezik egy olyan $H\colon F \times [0,1] \to S$ homotópia, hogy $H\big|_{(F\setminus N(\gamma))\times[0,1]} = f_0 \circ \mathrm{Pr}_1$ (tehát f_0-t csak $N(\gamma)$-ban változtatjuk meg) és amelyre az $f_1 = H\big|_{F\times\{1\}}$ leképezésnek nincsen $N(\gamma)\times\{1\}$-ben csúcs-szingularitása.*



2.1 ábra: Az $N(\gamma)$ halmaz f_0-képe $n+2$ darab diszjunkt szakaszban metszi $f_0(S(f_0))$-t.

Bizonyítás. Természetesen, ha F összefüggő, továbbá x_0 és x_1 adottak, akkor a fenti tulajdonságokkal rendelkező γ út létezése mindig feltehető. Legyenek $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ a $\gamma\left((0,1)\right) \cap S(f_0)$ metszéspontjainak γ^{-1}-képei. $N(\gamma)$ képét a 2.1 ábra szemlélteti. Erre az (n-szer hajlított) szalagra alkal-

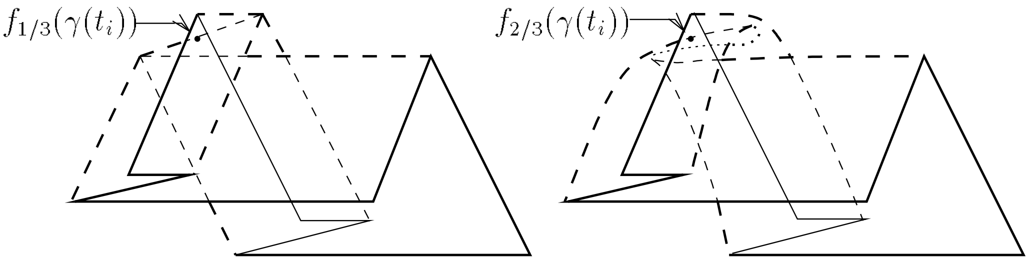


2.2 ábra: Két csúcs-szingularitás eliminációja

mazzuk a 2.2 ábrán szemléltetett operációt; ezzel egy f_0-lal homotóp $f_{1/3}$ leképezés adódik, amelynél az „eredeti" két csúcs-szingularitás már nem lép fel és amely $\gamma(t_i)$-nek egy $N(\gamma)$-beli U_i környezetét a 2.3 ábrán látható módon transzformálja (a 2.3 ábrán tulajdonképpen a 2.2 ábra jobboldalán levő felületdarabot rajzoltuk le „kettéhajtva"). Ezt az $U_i \to S$ függvényt az ugyancsak a 2.3 ábrán szemléltetett stabil leképezés approximálja oly módon, hogy ∂U_i egy környezetében a kettő megegyezik. Ennek két csúcs-szingularitása van, amelyek azonban már összeköthetőek U_i-ben reguláris pontokon keresztül, ha tehát az iménti procedúrával elimináljuk őket, akkor nem lép fel újabb csúcs. □

Emlékeztetünk Hopf alábbi tételére:

2.1.6. Lemma. *Legyen M egy $2k$-dimenziós kompakt peremes sokaság, $g\colon M \to \mathbb{R}^{2k}$ immerzió és $\nu\colon \partial M \to S^{2k-1}$ az $f\big|_{\partial M}$ immerzió normál-le-*



2.3 ábra: im(γ) és a szinguláris halmaz egy metszéspontjának a környezetében így változik meg a leképezés.

képezése (Gauss-leképezése): ha $x \in \partial M$, akkor legyen $\nu(x)$ a $T_x g(T_x\partial M)$-re merőleges, kifelé mutató egységvektor. Ekkor $\deg(\nu) = \chi(M)$.

2.1.7. Megjegyzés. ν helyett $(-\nu)$-t véve az állítás igaz marad (azaz $\deg(\nu) = \deg(-\nu)$), hiszen, páros sok hipersíkra való tükrözés szorzata lévén, az $S^{2k-1} \to S^{2k-1}$ antipodális leképezés foka 1.

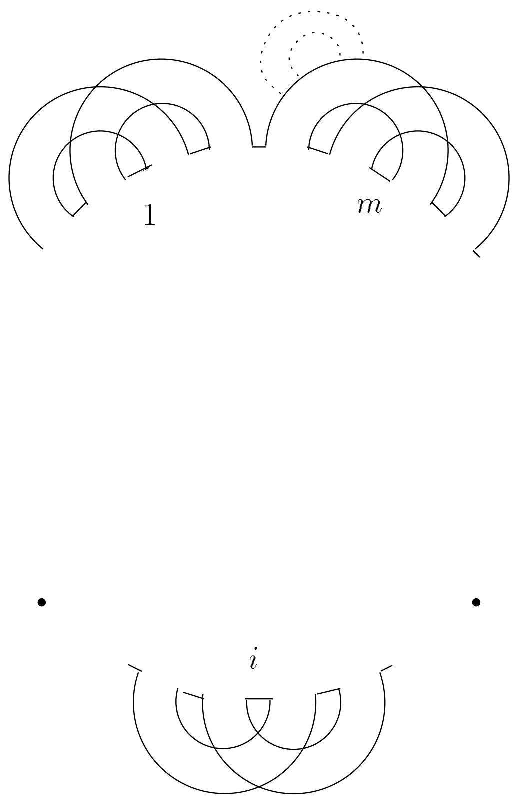
2.1.8. Állítás. *Legyen F irányítható zárt felület és $f\colon F \to \mathbb{R}^2$ stabil hajtás-leképezés. Ekkor $S(f)$ összefüggő komponenseinek száma azonos paritású $\frac{1}{2}\chi(F)$-fel.*

Bizonyítás. Rögzítsük tetszőlegesen F és $\mathbb{R}^2$ egy-egy irányítását. Jelölje $F_+(f)$, illetve $F_-(f)$ az $M \setminus S(f)$-nek azt a részhalmazát, amelynek pontjaiban Tf irányítástartó, illetve -váltó. Legyen $N(S(f))$ az $S(f)$ zárt csőszerű környezete és $F'_+ := \overline{F_+(f) \setminus N(S(f))}$, illetve $F'_- := \overline{F_-(f) \setminus N(S(f))}$. A hajtás-szingularitás lokális alakjából (normálformájából) nyilvánvaló, hogy $S(f)$ minden pontja egyaránt hozzátartozik $F_+(f)$ és $F_-(f)$ topológiai lezárásához. Ebből egyrészt az következik, hogy $\partial\overline{F_+(f)} = \partial\overline{F_-(f)} = S(f)$, másrészt az, hogy az $S(f) \subset M$ beágyazás $\nu(S(f))$ normálnyalábja triviális és így $\partial F'_+$ és $\partial F'_-$ az $S(f)$-fel diffeomorfak. Az is világos, hogy ha $\iota\colon \partial F'_+ \to \partial F'_-$ az a leképezés, amely minden ponthoz a vele azonos $\nu(S(f))$-fibrumban lévő pontot rendeli, akkor az $f\big|_{\partial F'_+}$ és $(f\big|_{\partial F'_-}) \circ \iota$ immerziók regulárisan (azaz immerziókon keresztül) homotópok, továbbá, hogy F'_+ és $\overline{F_+(f)}$, illetve F'_- és $\overline{F_-(f)}$ diffeomorfak. A 2.1.6. Lemma alapján tehát $\chi(F'_+)$ és $\chi(F'_-)$ egyenlőek, hiszen mindkettő megegyezik $f\big|_{\partial F'_+}$ normál-leképezésének a fokával. Ezek szerint $\chi(\overline{F_+(f)}) = \chi(\overline{F_-(f)})$ és ezt a közös értéket χ-vel jelölve $\chi(F) = 2\chi - \chi(S(f)) = 2\chi$. Másfelől, $\overline{F_+(f)}$ peremköreit körlapokkal beragasztva, azaz $S(f)$ komponenseinek számával megegyező számú körlap hozzáragasztásával egy irányítható, tehát páros Euler-karakterisztikájú zárt felület adódik. Mivel egy 2-cella hozzáadása 1-gyel növeli az Euler-karakterisztikát, azért ebből már világos, hogy $\chi(\overline{F_+(f)}) = \chi = \frac{1}{2}\chi(F)$ és $S(f)$ összefüggő komponenseinek a száma azonos paritásúak. $\square$

Az iménti Állítás megfelelője nem irányítható felületekre nem teljesül; ld. a 2.2.4. Állítást.

2.2 Konstrukciók

A következőkben megmutatjuk, hogy az 1.2.6. Megjegyzés és a 2.1.8. Állítás minden megszorítást tartalmaz egy irányítható zárt felületnek a síkba történő $\Sigma^{1,0}$-leképezése szinguláris halmaza komponenseinek számára.



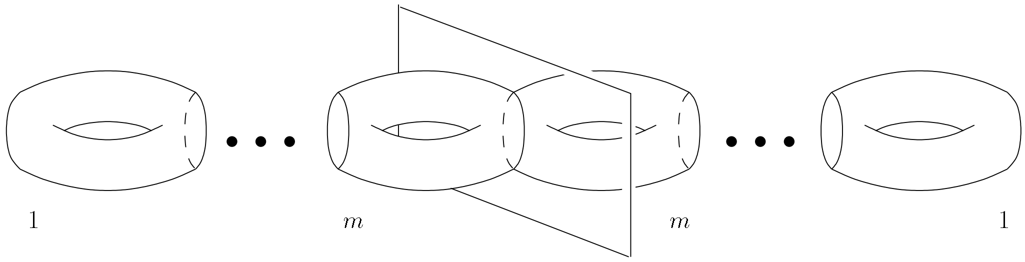
2.4 ábra: A $\varphi(A_m^0) = \vartheta_m(A_{2m})$ halmaz; a pontozott vonalakkal határolt sávot is hozzávéve adódik $\tilde{\vartheta}_m(A_{2m+1})$.

2.2.1. Állítás. *Legyen F irányítható zárt felület és k az $\frac{1}{2}\chi(F)$-fel azonos paritású pozitív egész. Ekkor létezik olyan $f\colon F \to \mathbb{R}^2$ hajtás-leképezés, melynek szinguláris halmaza k darab körvonal diszjunkt uniója.*

Bizonyítás. A_t-vel fogjuk jelölni a t génuszú irányítható zárt felületet és A_t^0-lal az ebből egy nyílt körlap elhagyásával keletkező peremes felületet. Közismert, hogy $\chi(A_t) = 2 - 2t$.

Először megmutatjuk, hogy ha $t = 2m$, akkor A_t leképezhető $\mathbb{R}^2$-be csak hajtás-szingularitásokkal és összefüggő szinguláris halmazzal. Legyen $\varphi\colon A_m^0 \to \mathbb{R}^2$ immerzió (ld. a 2.4 ábrát) és $\psi\colon A_t \to A_t$ olyan involúció, melyre $A_t/\psi \cong A_m^0$ (ha A_t-t a 2.5 ábrán látható $\mathbb{R}^3$-ba ágyazott felülettel azonosítjuk, akkor ψ a jelölt síkra vonatkozó tükrözésnek választható); ha $\pi\colon A_t \to A_t/\psi$ a faktorizáció, akkor $\vartheta_m := \varphi \circ \iota \circ \pi$ nyilván megfelelő, ahol $\iota\colon A_t/\psi \to A_m^0$ diffeomorfizmus.

Ha $t = 2m + 1$, akkor $A_t \cong A_{2m} \# A_1$, amiből könnyen látható, hogy létezik egy $\tilde{\vartheta}_m\colon A_t \to \mathbb{R}^2$ stabil hajtás-leképezés kétkomponensű szinguláris



2.5 ábra: A_{2m}

halmazzal (ϑ_m-nek a 2.4 ábrán látható képéhez még egy „fület" ragasztva adódik $\tilde{\vartheta}_m$ képe).

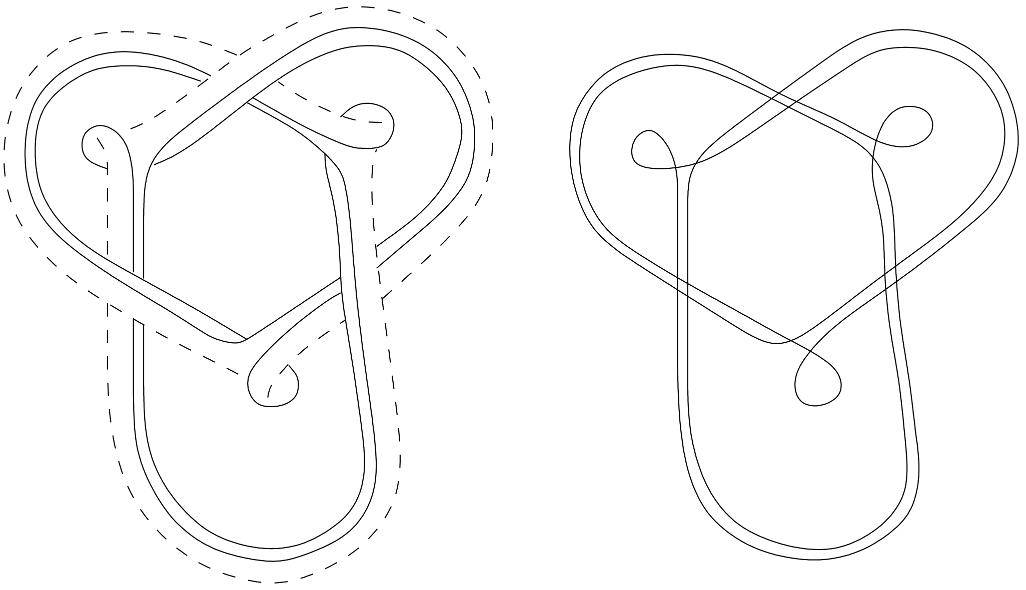
Végül, nem nehéz megadni egy homotópiát, amely egy tetszőleges $A_t \to \mathbb{R}^2$ stabil leképezés hajtás-komponenseinek a számát 2-vel megnöveli, egy tetszőleges reguláris pont körüli „koncentrikus" körpár hozzáadásával. $\square$

Nem irányítható felületekre azonban, mint már említettük, a létrejövő komponensek számának paritása nincsen meghatározva. Hogy ezt egy példán bemutathassuk, először a projektív sík két leképezését adjuk meg $\mathbb{R}^2$-be.

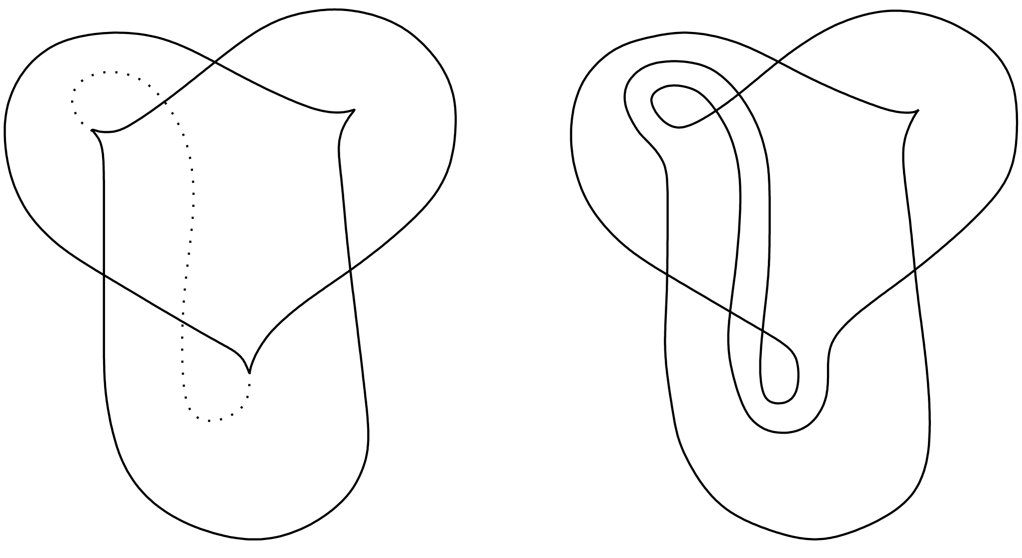
2.2.2. Állítás. *Léteznek olyan $\varphi, \psi\colon \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^2$ stabil leképezések, amelyeknek egy-egy csúcs-szingularitásuk és egy-, illetve kétkomponensű szinguláris halmazuk van.*

Bizonyítás. Először ψ-t konstruáljuk meg. Ágyazzunk be egy Möbius-szalagot $\mathbb{R}^3$-ba a 2.6 ábrán látható módon, majd komponáljuk a beágyazást az ábra síkjára való merőleges vetítéssel. Ennél a leképezésnél a Möbius-szalag pereme a 2.6 ábra jobboldali görbéjébe megy át, a szinguláris halmaz (ami a szalag középvonala) képe pedig a 2.7 ábra bal oldalán látható. A perem képe kétféleképpen is előáll, mint egy $\mathbb{R}^2$-be immertált D^2 körlap peremének a képe (ld. a 2.8 ábrát); bármelyik lehetőséget választjuk is (legyen pl. a jobboldali), együttesen egy $\psi_0\colon \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezés adódik három csúcs-szingularitással és összefüggő szinguláris halmazzal. A csúcsok közül tetszőleges kettőt D^2-ben összekötve és ezen út mentén a 2.1.5. Lemma Bizonyításában szereplő eliminációs eljárást alkalmazva (ld. a 2.2 ábrát) keletkezik a ψ leképezés; a 2.7 ábra jobboldali görbepárja $\psi(S(\psi))$-t ábrázolja (tehát valóban, $S(\psi)$ kétkomponensű). ψ_0 definícióját Levine-től [Le3, 155-156. oldal] vettük át.

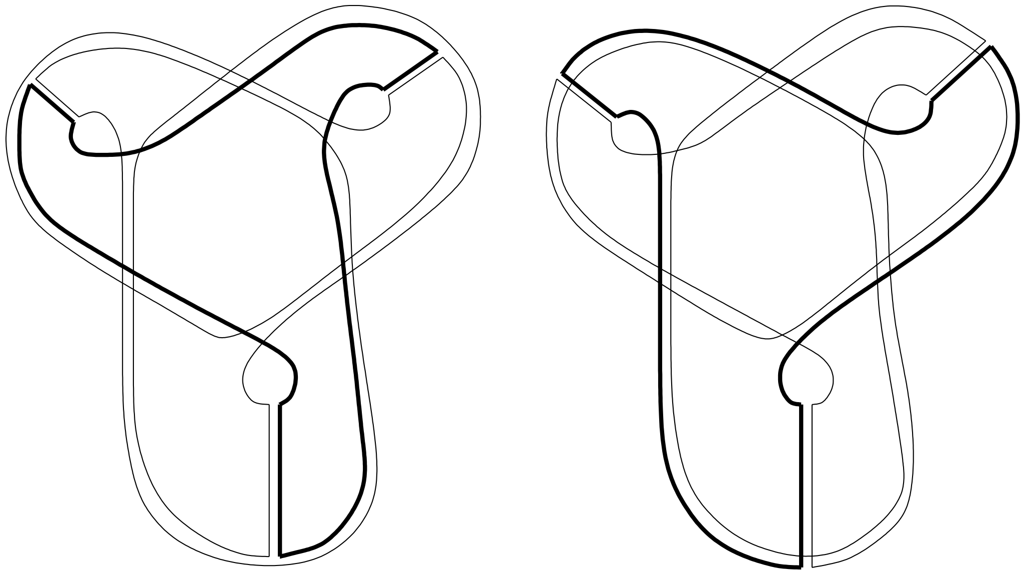
A φ konstrukciója az előzőhöz igen hasonló és teljes egészében megtalálható Millettnél [Mill], ezért itt csak vázoljuk. Amíg az előbb a háromlevelű csomó vetületét követve képeztük le a szalagot és három csavarással értük el, hogy Möbius-féle legyen, addig most Milnor híres $S^1 \to \mathbb{R}^2$ immerzióját



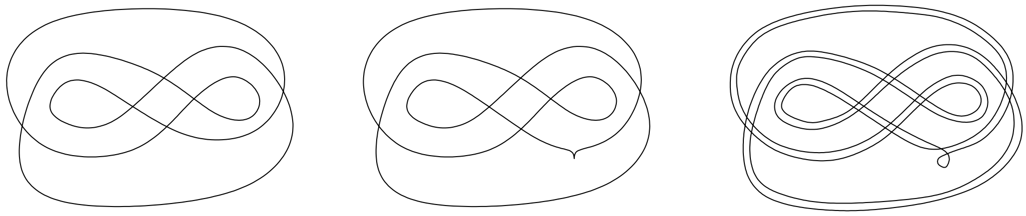
2.6 ábra: A Möbius-szalag beágyazása $\mathbb{R}^3$-ba és a perem képe a síkra való levetítés után



2.7 ábra: A $\psi_0(S(\psi_0))$ halmaz; a pontozott vonallal jelölt út mentén két csúcs-szingularitást eliminálva adódik ψ, amelynek szinguláris halmazának a képe a jobboldalon látható.



2.8 ábra: A 2.6. ábra jobb oldalának görbéje kétféleképpen is előáll, mint egy, a síkba immertált körlap pereme.



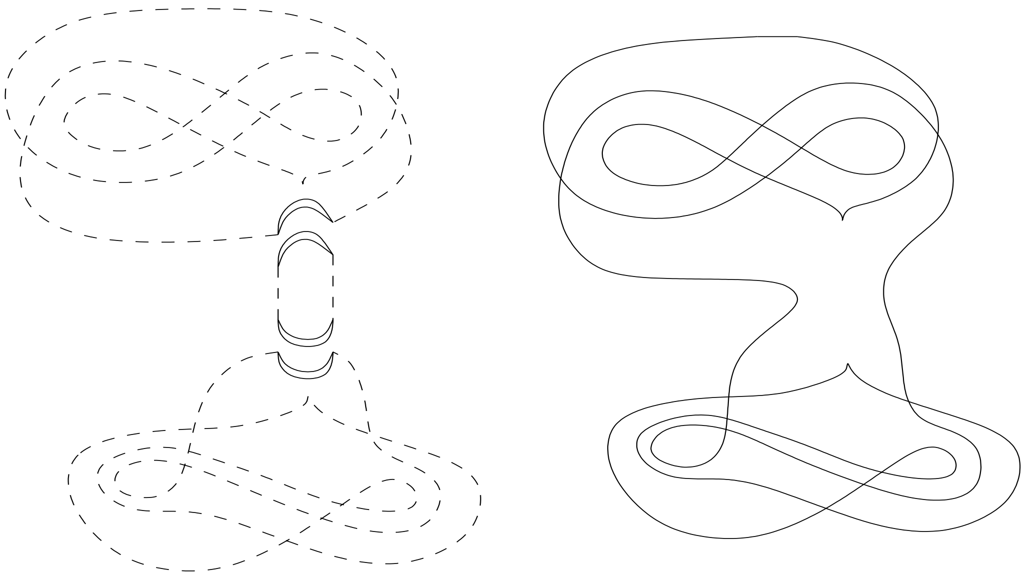
2.9 ábra: Milnor-görbe; $\varphi(S(\varphi))$; a projektív síkot alkotó Möbius-szalag és körlap közös peremének φ-képe

(2.9 ábra; ld. még a 3.1 szakaszt) vesszük alapul és csak egy csavarást alkalmazunk. Világos, hogy a szinguláris halmaz most is a szalag középvonala, melynek képe a Milnor-görbe, egy csúccsal „kiegészítve". A szalag pereme pedig a 2.9 ábra jobb oldalán látható görbébe megy át, amelyről szintén belátható, hogy egy $\mathbb{R}^2$-be immertált körlap peremének a képe. Újabb szingularitás tehát nem lép fel, így világos, hogy $S(\varphi)$ egykomponensű. $\square$

Jelölje $\hat{A}_t$ a t génuszú nemirányítható zárt felületet (így pl. $\hat{A}_1$ a projektív síkot, $\hat{A}_2$ pedig a Klein-kancsót), $\hat{A}_t^0$ pedig az ebből egy nyílt körlap elhagyásával keletkező peremes felületet.

2.2.3. Állítás. *Léteznek olyan* $f, g\colon \hat{A}_2 \to \mathbb{R}^2$ *hajtás-leképezések, hogy* $S(f)$ *egy-,* $S(g)$ *pedig kétkomponensű.*

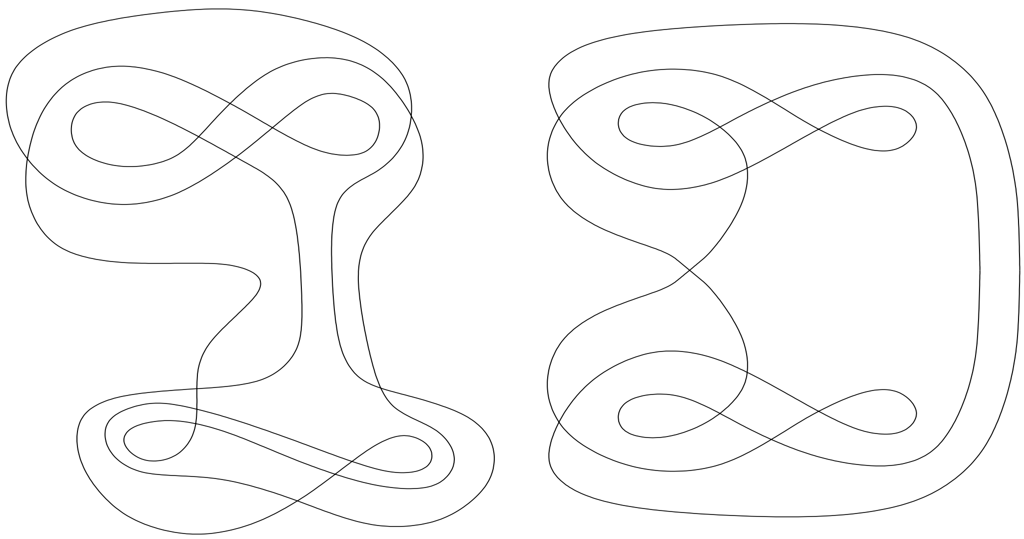
Bizonyítás. Egy, a feltételeknek eleget tevő g leképezést nagyon egyszerű megadni (ld. pl. [Le3, 153. oldal]), f konstrukciójához azonban felhasználjuk az előző Bizonyításban szereplő φ és ψ leképezéseket. Ismert, hogy $\hat{A}_2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$; ennek az összefüggő összeg-felbontásnak megfelelően állítsuk elő $\hat{A}_2$-ot $\hat{A}_1^0$ két diszjunkt példányának és egy $C \cong S^1 \times [0,1]$ szalagnak az uniójaként. Ezeket képezzük le $\mathbb{R}^2$-be a 2.10 ábrán látható módon (azaz a „kilyukasztott” projektív síkokat φ, illetve ψ megfelelelő megszorításaival, amint az az ábra baloldalának felső-, illetve alsó részén látható). A három



2.10 ábra: A Klein-kancsó stabil leképezése a síkba kétkomponensű szinguláris halmazzal, mindkét komponensen egy csúcs-szingularitással

leképezést a két peremkör-pár mentén összevarrva $\hat{A}_2$-nak nyerjük egy $\tilde{f}$ leképezését a síkba és ez nyilván megtehető úgy, hogy $\tilde{f}$ két csúcs-szingularitása $\hat{A}_2$-ban összeköthető legyen csupa reguláris pontokon keresztül (ld. a 2.10 ábra jobb oldalát). Vegyük észre, hogy φ és ψ szinguláris halmazainak összesen három komponense helyett $\tilde{f}$-nak már csak kétkomponensű a szinguláris halmaza és hogy a két csúcs-szingularitás különböző komponenseken található. Amikor tehát az előbb említett út mentén elimináljuk ezeket (ld. a 2.11 ábra bal oldalát), akkor azon kívül, hogy nem marad több csúcs-szingularitás, a szinguláris halmaz komponenseinek a száma is 1-re csökken, ami éppen azt jelenti, hogy egy hajtás-leképezést kaptunk egyetlen hajtás-komponenssel. □

Ezek után már nem nehéz megválaszolni a Fejezet bevezetőjében feltett kérdést a nem-irányítható felületekre sem.



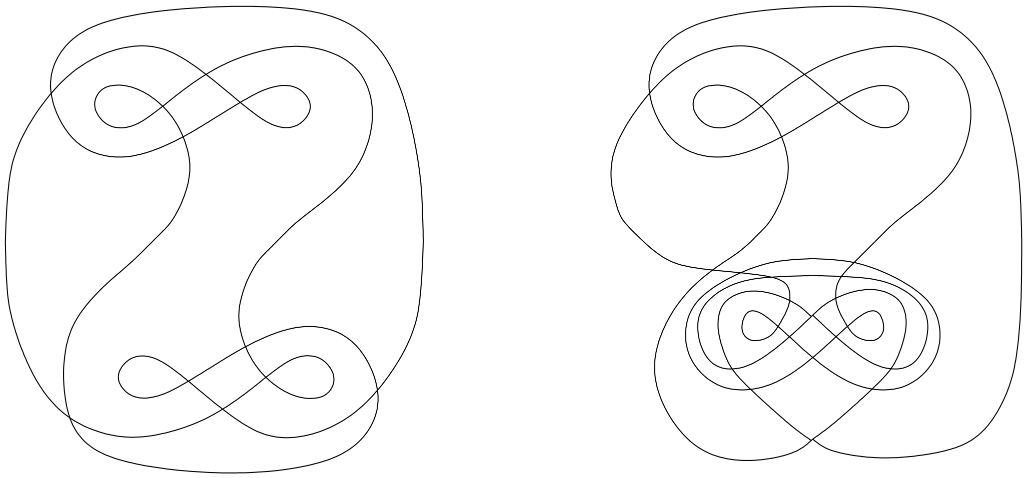
2.11 ábra: A Klein-kancsó hajtás-leképezései a síkba összefüggő szinguláris halmazzal (a szinguláris halmazok képei).

2.2.4. Állítás. *Az $\hat{A}_{2m}$ páros Euler-karakterisztikájú nem-irányítható zárt felületnek minden k pozitív egész esetén létezik olyan $\Sigma^{1,0}$-leképezése a síkba, melynél a szinguláris halmaz komponenseinek a száma k.*

Bizonyítás. Az m szerinti teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy az Állítás igaz $k = 1$ és $k = 2$ esetén; $m = 1$-re ezt éppen a 2.2.3. Állítás mondta ki. Tegyük fel, hogy m-nél nem nagyobb számokra az állítás teljesül. Ismert, hogy $\hat{A}_{2m+2} = \hat{A}_{2m}\#\hat{A}_2$; $\hat{A}_{2m}$-ot egyetlen hajtás-komponenssel, $\hat{A}_2$-ot pedig f-fel vagy g-vel leképezve és ezeket a 2.2.3. Állítás Bizonyításában látott módon összevarrva éppen $\hat{A}_{2m+2}$-nak nyerjük egy-egy hajtás-leképezését a síkba egy-, illetve kétkomponensű szinguláris halmazzal. A bizonyítást a 2.2.1. Állítás Bizonyításának végén tett megjegyzéssel fejezzük be. □

Összefoglalva tehát, a következő Tételt mondhatjuk ki:

2.2.5. Tétel. *Legyen F zárt felület. Ha $\chi(F)$ páratlan, akkor F-nek nem létezik $\Sigma^{1,0}$-leképezése a síkba. Ha $\chi(F)$ páros, akkor a következő esetek lehetségesek és ezek mind meg is valósíthatóak.*
1. Ha F irányítható, akkor egy $F \to \mathbb{R}^2$ hajtás-leképezés szinguláris halmaza összefüggő komponenseinek a száma bármely, $\frac{1}{2}\chi(F)$-fel azonos paritású pozitív egész lehet.
2. Ha F nem irányítható, akkor egy $F \to \mathbb{R}^2$ hajtás-leképezés szinguláris halmaza összefüggő komponenseinek a száma bármely pozitív egész szám lehet.



2.12 ábra: A Klein-kancsó két további hajtás-leképezése a síkba összefüggő szinguláris halmazzal.

2.2.6. Megjegyzés. A 2.2.2. és 2.2.4. Állítások felhasználásával nem nehéz bebizonyítani azt sem, hogy bármely páratlan Euler-karakterisztikájú zárt felület leképezhető a síkba egyetlen csúcs-szingularitással és akárhány (pl. 0) hajtás-komponenssel.

Könnyen meggondolható, hogy a 2.2.3. Állítás Bizonyításában konstruált és a 2.2.5. Tétel bizonyításában kulcsszerepet játszó f leképezés homotópiával úgy módosítható, hogy (két kétszeres pontot „eltüntetve") szinguláris halmazának képe a 2.11 ábra jobb oldalán látható szimmetrikus görbe legyen. A 2.12 ábrán két további $\hat{A}_2 \to \mathbb{R}^2$ hajtás-leképezés (összefüggő) szinguláris halmazának a képe látható, amelyek közül a baloldalit úgy kaptuk, hogy a 2.2.2. Állítás Bizonyításában szereplő ψ leképezést a φ-vel való „összeillesztés" előtt komponáltuk egy tengelyes tükrözéssel, a jobboldalit pedig úgy, hogy ψ_0 csúcs-szingularitásait egy másik, nem a D^2 körlapban, hanem annak komplementerében futó út segítségével elimináltuk és ezután alkalmaztuk a 2.2.3. Állítás Bizonyításában megadott eljárást.

Hogy mely $S^1 \to \mathbb{R}^2$ immerziók állhatnak elő, mint a Klein-kancsó hajtásleképezésénél a szinguláris halmaz képe, arra a 3.2 szakaszban keressük a választ. Az alábbi, Levine-től [Le2] származó tételből, illetve a Whitney-Graustein Tételből az a szükséges feltétel adódik, hogy egy ilyen görbe regulárisan homotóp kell, hogy legyen a „standard 8-assal" (és mint ilyennek, páratlan sok kétszeres pontjának kell lennie).

2.2.7. Tétel. *Legyen M páros dimenziós zárt sokaság és $f\colon M \to \mathbb{R}^2$ stabil leképezés. Legyen c az $S(f)$ egy összefüggő komponense. $\mathbb{R}^2$ és a standard*

$S^1 \subset \mathbb{R}^2$ standard irányításainak (az $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ bázis és az $\{((1,0), \mathbf{j})\}$ bázis pozitív irányításúak) rögzítése után irányítsuk c-t úgy, hogy a pozitív érintővektorának Tf-képét $\mathbb{R}^2$ pozitív ortogonális bázisává kiegészítő egységvektor mindig c környezetének f-képe felé mutasson. c minden pontjához az utóbbi egységvektort rendelve egy $c \to S^1$ leképezés adódik, amelyet a $(\cos\vartheta, \sin\vartheta) \mapsto (\cos 2\vartheta, \sin 2\vartheta)$ függvénnyel komponálva adódó $k_c \colon c \to S^1$ leképezés már a c-n található csúcs-szingularitásokra is folytonosan kiterjeszthető. Ekkor

$$\chi(M) = \sum_{c\,:\,c \text{ összefüggő komponense } S(f)\text{-nek}} \deg(k_c).$$

Végül emlékeztetünk arra, hogy az 1.2.4. Állítás szerint egy $f \colon \hat{A}_2 \to \mathbb{R}^2$ stabil leképezésnél $\mathcal{D}_{\hat{A}_2}[S(f)]_2 = w_1(\hat{A}_2) \in H^1(\hat{A}_2; \mathbb{Z}_2)$. Ennek tükrében nem meglepő, hogy (amint az a konstrukció alapján könnyen ellenőrizhető) a 2.2.3. Állítás Bizonyításában szereplő f leképezés szinguláris halmaza egy alkalmas $\hat{A}_2 \cong (S^1 \times [-1,1])/\{(x,-1) \sim (\tau(x),1)\}$ azonosításnál (ahol $\tau \colon S^1 \to S^1$ tengelyes tükrözés) az $S^1 \times \{0\}$ „meridiánkörnek” felel meg.

3. Fejezet

1-kodimenziós leképezések kiterjesztései

Ennek a fejezetnek a célja, hogy Christian Pappas [Pa] 1-kodimenziós immerziók kiterjesztéseire vonatkozó eredményeinek egyrészt direkt alkalmazását, másrészt módszereinek továbbfejlesztését tárgyalja szinguláris leképezésekre.

3.1 1-kodimenziós immerziók kiterjesztései

Pappas a következő kérdést vizsgálja: Ha adott egy M^m zárt, irányítható (nem feltétlenül összefüggő) sokaság, egy W^{m+1} összefüggő irányított sokaság és egy $f\colon M \to W$ stabil immerzió, akkor hány olyan nem-ekvivalens $F\colon N \to W$ immerzió létezik, ahol N valamilyen, előre nem rögzített $(m+1)$-dimenziós kompakt peremes sokaság, hogy $\partial N \cong M$ és egy $i\colon M \to \partial N \subset N$ diffeomorfizmusra $f = F \circ i$?

3.1.1. Definíció. A fenti F immerziót f egy *kiterjesztésének* nevezzük. Az $F\colon N \to W$ és $F'\colon N' \to W$ kiterjesztések *ekvivalensek*, ha létezik olyan $\iota\colon N' \to N$ diffeomorfizmus, melyre $F' = F \circ \iota$.

A 2.8. ábrán példát láthatunk egy olyan $S^1 \to \mathbb{R}^2$ stabil immerzióra, amelynek legalább két nem-ekvivalens kiterjesztése létezik. Az első ilyen példát Milnor konstruálta (ld. a 2.9. ábrát). Kiterjesztés létezésére az alábbi triviális szükséges feltétel adható:

3.1.2. Állítás. *Ha f-nek létezik kiterjesztése, akkor M egy alkalmas irányítása mellett $f_*[M] = 0 \in H_n(W;\mathbb{Z})$.*

Bizonyítás. Ha $F\colon N \to W$ az f-nek kiterjesztése, akkor W irányításából N-en, és így az M-mel diffeomorf ∂N-en is adódik egy irányítás, amely nyilván olyan, mint állítottuk. $\square$

A továbbiakban, amikor egy f immerzió kiterjesztéseit keressük, mindig feltesszük, hogy M-et megfelelően irányítva $f_*[M] = 0$. M egy irányításának rögzítése egyenértékű egy $v\colon M \to TW$, az f-menti, $f(M)$-re transzverzális vektormező (ez azt jelenti, hogy minden $x \in M$ esetén $v(x) \in T_{f(x)}N \setminus T_xf(T_xM)$) megadásával (rögzítve azt a konvenciót, hogy $Tf(TM)$ irányítása után téve v-t kapjuk W irányítását). Ha rögzítünk egy olyan v, $f(M)$-re transzverzális vektormezőt, melyhez tartozó irányításra $f_*[M] = 0$, és a keresett F kiterjesztésről feltesszük, hogy ha $\nu(x)$ egy tetszőleges $i(x)(\in \partial N)$-beli befelé mutató vektort jelöl, akkor $T_{i(x)}F(\nu(x))$ és $v(x)$ a $T_{f(x)}W$-nek ugyanabba a $T_xf(T_xM)$ által határolt félterébe esnek, akkor triviális módon meghatározható $W \setminus f(M)$ tetszőleges két összefüggő komponense (a továbbiakban: *cella*) F általi lefedettségének különbsége. (*Lefedettségen* a cella egy tetszőleges pontja F^{-1}-képének elemszámát értjük.) Ugyanis ha két cella szomszédos (azaz a határaik közös része n-dimenziós), akkor az van 1-gyel többször lefedve, amely felé a határon v mutat. Mivel W összefüggő, azért szomszédos cellákon át bármely cellától bármely másikig eljuthatunk. Az $f_*[M] = 0$ feltétel biztosítja, hogy a különböző utak mentén kiszámolt eltérések a lefedettségben azonosak (ha két út mentén különböző értékek adódnának, akkor ezen utak egyesítése egy olyan 1-dimenziós W-beli ciklus lenne, amely $f(M)$-et algebrailag nem 0-szor metszi).

Így, ha valamelyik cella lefedettségét előre rögzítjük, akkor a többié is egyértelműen meghatározható és ily módon kapunk egy l leképezést, amely egy c cellához annak $l(c) \in \mathbb{Z}$ lefedettségét rendeli és amelyet *v-vel kompatibilis lefedettség-függvénynek* nevezünk. Ha W nyílt, azaz nem kompakt, akkor a cellák között van egy kitüntetett, ti. az, amelyik nem kompakt; mivel mi csak a kompakt kiterjesztéseket keressük, ezért ennek csak 0 lehet a lefedettsége, és ily módon ebben az esetben rögzített v mellett minden cella lefedettsége egyértelműen meg van határozva (pontosabban, a többi v-vel kompatibilis lefedettség-függvényekhez nem fog tartozni kiterjesztés). Nyilván csak olyan lefedettség-függvényekkel van értelme próbálkozni, amelyek értékei között nem szerepel negatív szám; pl., ha W nyílt és a nemkorlátos cella határa mentén bárhol v a nemkorlátos cella felé mutat, akkor ezekhez az adatokhoz nem tartozik kiterjesztés. Szükségünk lesz az alábbi fogalomra is:

3.1.3. Definíció. Rögzítsük f-en kívül a v, $f(M)$-re transzverzális vektormezőt is. Legyen γ tetszőleges, f-re transzverzális és f többszörös pontjait elkerülő W-beli beágyazott görbe. γ-hoz tartozó *párosításon* a $\gamma^{-1}(f(M))$

halmaz diszjunkt kételemű részhalmazainak egy olyan halmazát értjük, amelyre az igaz, hogy bármely hozzá tartozó $\{x, y\}$ esetén a $v(f^{-1}(\gamma(x)))$, illetve $v(f^{-1}(\gamma(y)))$ vektorok ($T_{\gamma(x)}W = T_x\gamma(T_x\mathbb{R}) \oplus T_{f^{-1}(\gamma(x))}f(T_{f^{-1}(\gamma(x))}M)$, illetve $T_{\gamma(y)}W = T_y\gamma(T_y\mathbb{R}) \oplus T_{f^{-1}(\gamma(y))}f(T_{f^{-1}(\gamma(y))}M)$ direkt összeg felbontásokhoz tartozó) $T_x\gamma(T_x\mathbb{R})$-re, illetve $T_y\gamma(T_y\mathbb{R})$-re eső vetületeinek $(T_x\gamma)^{-1}$-, illetve $(T_y\gamma)^{-1}$-képei egymással ellentétes irányúak.

Rögzítsünk a továbbiakra W-n egy $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Riemann-metrikát. Ha γ-ról és v-ről feltesszük, hogy $f(M)$-re merőlegesek, akkor az előbbi megfogalmazás helyett azt kéne megkövetelni, hogy a $v(f^{-1}(\gamma(x)))$ és $v(f^{-1}(\gamma(y)))$ $\mathrm{im}(\gamma)$-t érintő vektorok legyenek ellentétes irányúak. Mivel γ beágyazott, azért $\gamma^{-1}(f(M))$ helyett beszélhetünk $\mathrm{im}(\gamma) \cap f(M)$ pontjainak párosításáról is. γ-hoz tartozó párosítás helyett időnként γ mentén való párosítást fogunk mondani.

3.1.4. Definíció. Ha adva van f-nek egy F kiterjesztése, akkor a γ-hoz kanonikus módon tartozik egy párosítás, amit *F által indukált párosításnak* nevezünk és a következőképpen definiálunk: $\{x, y\}$ tartozzon a párosításhoz pontosan akkor, ha az $i(f^{-1}(\gamma(x)))$ és $i(f^{-1}(\gamma(y)))$ pontok az $F^{-1}(\mathrm{im}(\gamma))$ halmaz azonos komponenséhez tartoznak (annak végpontjai).

Könnyű igazolni, hogy ezzel valóban egy párosítást definiáltunk.

[Pa]-ban egy módszer található, amelynek segítségével adott f-hez az összes nem-ekvivalens kiterjesztés megtalálható. Sajnos, azt is látni fogjuk, hogy a módszer igen fáradságos, és az algoritmus teljes végrehajtása nélkül nem kapunk semmilyen áttekintést a kiterjesztésekről. Most az algoritmus vázlata következik. A „lefuttatáshoz” rögzíteni kell v-t és egy v-vel kompatibilis l lefedettség-függvényt, továbbá egy Morse-függvényt W-n. Az utóbbi persze csak segédeszköz, az eredményt nem befolyásolja; v lényegében legfeljebb $2^{M \text{ komponenseinek száma}}$-féleképpen rögzíthető és a hozzá tartozó lefedettségek 1-, illetve megszámlálhatóan végtelen sokféleképpen választhatóak meg attól függően, hogy W nyílt-e vagy sem.

Legyen tehát adva v és l, legyen továbbá $h\colon W \to \mathbb{R}$ Morse-függvény legfeljebb 1 lokális minimummal és legfeljebb 1 lokális maximummal; $P(t) := h^{-1}(\{t\})$ jelölje a t-hez tartozó szintet, $Q(t) := h^{-1}((-\infty, t])$ pedig a $P(t)$-ig terjedő szintek egyesítését ($t \in \mathbb{R}$).

Legyen $Y^{(k)}$ az f legalább k-szoros pontjainak halmaza W-ben ($Y^{(k+1)} \subset Y^{(k)}$; $Y^{(0)} = W$, $Y' = f(M)$, Y'' az f önátmetszéseinek halmaza, stb.). Rögzítsünk $f_k\colon X^{(k)} \to W$ immerziókat, ahol $X^{(k)}$ zárt $(m+1-k)$-sokaság és $\mathrm{im}(f_k) = Y^{(k)}$ (legyen $f_0 = \mathrm{id}_W$ és $f_1 = f$). Legyen $h^{(k)} = h \circ f_k$ ($h^{(0)} = h$, $h' = h \circ f$, stb.). Feltehető, hogy $h^{(k)}$ minden k-ra Morse-függvény, amelynek $f_k^{-1}(Y^{(k+1)})$-en nincsen kritikus pontja. A h' egy z kritikus pontját *kapcsolódónak* nevezzük, ha $\langle \mathrm{grad}_h(f(z)), v(f^{-1}(f(z)))\rangle > 0$ és *nem-kapcsolódónak*, ha $\langle \mathrm{grad}_h(f(z)), v(f^{-1}(f(z)))\rangle < 0$. Mivel $k \geqq n+2$ esetén $X^{(k)} = Y^{(k)} = \varnothing$, azért a $h^{(k)}$ $(k = 0, 1, \dots)$ függvényeknek együttesen is csak véges sok kritikus pontjuk van és az is feltehető, hogy az ezekhez tartozó függvényértékek mind különböző valós számok; ezeket a kritikus pontokat, illetve hozzájuk tartozó kritikus értékeket *akadályoknak* nevezzük.

3.1.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $F_t \colon N_t \to Q(t)$ immerzió *kiterjeszti f-et a t-hez tartozó szintig*, ha az N_t $(n+1)$-dimenziós peremes sokaság peremének egy n-dimenziós peremes részsokasága $f^{-1}(Q(t))$-vel azonosítható és ezen azonosítás után ezen a halmazon F_t és f megegyeznek, továbbá ∂N_t fennmaradó részét F_t a $P(t)$ szintbe képezi.

A kiterjesztéseket előállító eljárás elindításához először egy olyan $t_0 \in h(W)$ értéket választunk, melyre $t_0 < h(f(M))$. $Q(t_0)$ nyilván egy c_0 cella része; legyen N_{t_0} a $Q(t_0)$ $l(c_0)$ darab kópiájának diszjunkt uniója, F_{t_0} pedig minden példányon identikus. F_{t_0} nyilván kiterjeszti f-et a t_0-hoz tartozó szintig.

Legyen $t < t'$ és F_t, illetve $F_{t'}$ f-nek kiterjesztései a t-hez, illetve t'-höz tartozó szintig. Azt mondjuk, hogy $F_{t'}$ *továbbterjesztése* F_t-nek, ha $N_t \subset N_{t'}$, $F_{t'}\big|_{N_t} = F_t$ és $F_{t'}(N_{t'} \setminus N_t) \subset Q(t') \setminus Q(t)$. Ha már rendelkezünk egy F_t kiterjesztéssel a t-hez tartozó szintig és $t' > t$, továbbá a $[t, t']$ intervallumba semelyik $h^{(k)}$ függvénynek sem esik szinguláris értéke, akkor könnyű megadni F_t-nek egy $F_{t'}$ továbbterjesztését a t'-höz tartozó szintig, melyre $N_{t'} \cong N_t$. Akkor ütközünk nehézségbe a továbbterjesztéssel, ha $[t, t']$-be esik (mondjuk egy) ilyen t^* szinguláris érték. Ha F_t-nek létezik $s \geqq 1$ darab nem-ekvivalens továbbterjesztése a t'-höz tartozó szintig, akkor azt mondjuk, hogy *t^*-on s-féleképpen lehet áthaladni*, ha nem létezik továbbterjesztés, akkor azt, hogy *t^*-on nem lehet áthaladni* (ezek a fogalmak természetesen nemcsak a kritikus értékre, illetve pontra vonatkoznak, hanem az „addig elkészült” F_t kiterjesztésre is).

Az F_{t_0}, t_0 szintig történő kiterjesztésből kiindulva tehát megkíséreljük F_{t_0}-t az egyre nagyobb t értékekig továbbterjeszteni, azaz áthaladni a $h^{(k)}$ függvények kritikus értékein. Ez bizonyos esetekben többféleképen is lehetséges, ilyenkor a kiterjesztési procedúra, mint egy back-track algoritmus, elágazik, bizonyos esetekben pedig nem lehetséges, ilyenkor visszalépünk az utolsó, még felderítetlen elágazásig. Az alábbi Tétel [Pa, Theorem II.] írja le, hogy pontosan mikor történik elágazás, illetve, hogy mikor lehetetlen a továbbterjesztés.

3.1.6. Tétel. *Legyen M egy m-dimenziós zárt irányítható sokaság, W egy $(m+1)$-dimenziós összefüggő irányított sokaság, $f \colon M \to W$ stabil immerzió, $v \colon M \to TW$ normális vektormező f mentén (melyhez tartozó irányításra*

$f_*[M] = 0 \in H_m(W;\mathbb{Z})$) és rögzítsünk egy l, a v-vel kompatibilis lefedettség-függvényt, továbbá egy, a fenti feltételeknek eleget tevő $h\colon W \to \mathbb{R}$ Morse-függvényt is. Tegyük fel, hogy rendelkezünk f-nek egy F_t kiterjesztésével a t-hez tartozó szintig és a $[t,t']$ intervallumba eső egyetlen akadály $t < t^* < t'$. A következő esetekben képzelhető el, hogy t^*-on nem lehet áthaladni:

(1) *h' nem-kapcsolódó 1 indexű kritikus pontjainál. Ha t^* egy ilyennek a h'-képe, akkor pontosan akkor lehet rajta áthaladni (és akkor pontosan egyféleképpen), ha a leszálló 1-diszk f-képének és $P(t)$-nek a metszéspontjai össze vannak párosítva egy alkalmas $P(t)$-beli út mentén.*

(2) *h'' 0 indexű kritikus pontjainál. Ha t^* egy ilyen z kritikus pontnak a h''-képe és $f_2(z)$ két őse f-nél x és y, akkor pontosan akkor lehet t^*-on áthaladni (és akkor pontosan egyféleképpen), ha léteznek x-nek, illetve y-nak M-ben olyan U, illetve V, az $f^{-1}(Q(t))$-t metsző diszjunkt környezetei, hogy akárhogyan is választva egy-egy pontot $f(U) \cap Q(t)$-ből és $f(V) \cap Q(t)$-ből, ezek nincsenek összepárosítva az F_t által indukált párosításnál semmilyen $Q(t)$-beli út mentén sem.*

Az alábbi esetekben képzelhető el, hogy t^*-on egynél többféleképpen lehet áthaladni:

(3) *h' nem-kapcsolódó 0 indexű kritikus pontjainál. A lehetőségek száma ekkor az ahhoz a cellához tartozó l-érték, amely felé a kritikus ponthoz tartozó v normálvektor mutat.*

(4) *h 1 indexű kritikus pontjainál. Ha ez a pont a c cellába esik, akkor a lehetőségek szám $l(c)!$ (F_t-nek a leszálló 1-diszk és $P(t)$ két metszéspontjánál levő $l(c)$-$l(c)$ darab „ágát” kell ugyanis összepárosítani).*

A Tételben szereplő Morse-elméleti fogalmakkal kapcsolatban ld. [Miln]-t.

Ha W kompakt, akkor a legnagyobb akadály $\max_W h$, és ha ezen áthaladtunk, akkor nyilván már f-nek kaptuk egy kiterjesztését. Ha W nem kompakt, akkor lehet, hogy a legnagyobb akadály $\max_{f(M)} h$; ha az ezen való áthaladást követően a megfelelő szintig történő kiterjesztés felvesz $h^{-1}\left((\max_{f(M)} h, \infty)\right)$-beli értékeket, akkor a nem korlátos cella lefedettsége l-nél pozitív, tehát kiterjesztés nem lehetséges. Ellenkező esetben minden $\varepsilon > 0$ esetén $F_{\max_{f(M)} h+\varepsilon}$ ugyanaz a függvény és ez már f-nek kiterjesztése. Az előző Tételből az is világos, hogy a nem-ekvivalens kiterjesztések száma mindig véges.

A 3.1.6. Tételt nem bizonyítjuk, aminek az oka alapvetően terjedelmi, a Tétel ugyanis nem nehéz; ráadásul alacsony dimenziós példák vizsgálatával bárki könnyen „meggyőződhet” az igazságáról.

3.2 1-kodimenziós leképezések kiterjesztései

Ebben a szakaszban egy adott f leképezésnek olyan kiterjesztéseit vizsgáljuk, amelyeknél f nem a peremre, hanem a szinguláris halmazra történő megszorítással egyezik meg. Először azt kell tisztáznunk, hogy mely f leképezések jönnek szóba.

3.2.1. Definíció. Legyen M zárt m-sokaság, W pedig összefüggő $(m+1)$-sokaság. Az $f\colon M \to W$ sima leképezést Σ-*leképezésnek* nevezzük, ha minden $x \in M$ esetén x-nek van olyan $U \subset M$ környezete és létezik egy $F_x\colon U \times (-1,1) \to W$ Morin-leképezés, hogy $S(F_x) = U \times \{0\}$ és minden $y \in U$ esetén $F_x(y,0) = f(y)$. Legyen most adva egy $f\colon M \to W$ Σ-leképezés. Egy $F^\Sigma\colon X \to W$ Morin-leképezést f Σ-*kiterjesztésének* nevezünk, ha X egy (előre nem rögzített) $(m+1)$-dimenziós zárt sokaság, továbbá egy alkalmas $i\colon M \to X$ beágyazásra $S(F^\Sigma) = i(M)$ és $f = F^\Sigma \circ i$ teljesülnek. Azt mondjuk, hogy az $F^\Sigma\colon X \to W$ és $(F^\Sigma)'\colon X' \to W$ Σ-kiterjesztések *ekvivalensek*, ha egy alkalmas $\iota\colon X' \to X$ diffeomorfizmusra (amely $S(F^\Sigma)$-t és $S((F^\Sigma)')$-t egymásnak felelteti meg) $(F^\Sigma)' = F^\Sigma \circ \iota$ teljesül.

Az immerziók nyilvánvalóan Σ-leképezések, Σ-kiterjesztéseik pedig hajtás-leképezések. Az 1.1.12. Tétel miatt, ha f Σ-leképezés, akkor $S(f) \subset M$ egy 1-kodimenziós részsokaság, annak ellenére, hogy f általában nem stabil.

3.2.2. Állítás. *Ha $f\colon M^m \to W^{m+1}$ egy olyan Σ-leképezés, melynek létezik egy $F^\Sigma\colon X \to W$ Σ-kiterjesztése, akkor $f_*[M]_2 = 0 \in H_m(W;\mathbb{Z}_2)$. Ha M és W irányíthatóak (de a kiterjesztés nem feltétlenül), akkor M egy alkalmas irányítása mellett $f_*[M] = 0 \in H_m(W;\mathbb{Z})$.*

Bizonyítás. Elegendő bebizonyítani, hogy $f_*[M]_2$-nek illetve $f_*[M]$-nek bármely c ($\mathbb{Z}$- vagy $\mathbb{Z}_2$-együtthatós) ciklussal vett algebrai metszésszáma 0 ($\in \mathbb{Z}_2$ vagy $\in \mathbb{Z}$). Reprezentáljuk c-t egy $i\colon C \to W$ beágyazott 1-dimenziós részsokasággal; erről feltehető, hogy elkerüli f szingularitásainak képeit (hiszen az utóbbiak W-ben egy 2-kodimenziós halmazt alkotnak, ld. az 1.1.12. Tételt). Az $(F^\Sigma)^{-1}(i(C)) \subset X$ halmaz ezért csak reguláris pontokból és hajtás-szingularitásokból áll, így nyilvánvalóan olyan X-be immertált körvonalak diszjunkt uniója, amelyek mindegyike F^Σ-nak pontosan két szinguláris pontját tartalmazza. Mivel ezek a pontok egy-egyértelműen felelnek meg $i(C)$ és $f(M)$ metszéspontjainak, azért az Állítás első része máris bizonyítva van. A második rész bizonyításához vegyük észre, hogy M és W irányíthatósága miatt az $f\big|_{\Sigma^0(f)}$ immerzió normálnyalábja triviális, sőt, a hajtás- és csúcsszingularitások normálformáit felhasználva azt sem nehéz belátni, hogy az abba az irányba mutató normális vektormező, amely felé eső oldalán $f(M)$-nek 2-vel nagyobb az F^Σ-lefedettség, egy olyan irányítást definiál $\Sigma^0(f)$-en, amely kiterjed M egy irányításává ($\Sigma^0(f)$ komponenseit ugyanis F^Σ csúcs-szingularitásai választják el egymástól). Ezek után már könnyen látható, hogy ha C irányított és $i_*[C] = c$, akkor az $i(C)$ és $f(M)$ metszéspontjaiból az imént alkotott párok mindegyikének elemei (ezekkel az irányításokkal számolva) különböző előjelűek. □

3.2.3. Megjegyzés. Ha $g\colon K \to W$ egy irányított, zárt $(m+1)$-sokaság hajtás-leképezése a W összefüggő, irányított $(m+1)$-sokaságba, akkor, amint azt a 2.1.8. Állítás Bizonyításában már láttuk, K előáll a K_+ és K_- peremes sokaságok uniójaként, melyekre $K_+ \cap K_- = \partial K_+ = \partial K_- = S(g)$. A $g\big|_{K_+}$ és $g\big|_{K_-}$ leképezések ugyan nem immerziók, de nyilvánvaló, hogy a peremen kötött módon homotópak egy-egy olyan g_+, illetve g_- immerzióval (sőt, $C^\infty(K, W)$-ben tetszőleges környezeteik tartalmaznak ilyeneket), amelyekre $g_+(K_+) = g(K_+)$ és $g_-(K_-) = g(K_-)$, és amelyek $g\big|_{S(g)}$-nek kiterjesztései. Ha tehát adva van az $f\colon M \to W$ immerzió a 3.1.6. Tételben szereplő feltételek mellett, akkor az előző szakaszban tárgyalt módszerrel ekvivalencia erejéig az összes olyan $F^\Sigma\colon K \to W$ hajtás-leképezést meghatározhatjuk, amelyek f-nek Σ-kiterjesztései, és ahol K irányítható. Nevezetesen, keressük meg f összes $F_i\colon N_i \to W$ kiterjesztését ($i = 1, 2, \ldots, k$), majd az összes ($\binom{k}{2}$ darab) lehetséges módon ragasszunk össze ezekből kettőt a közös perem mentén.

Pappasnak a 3.1.6. Tétel bizonyításához felhasznált segédtételei [Pa, Lemma 4.1.-Lemma 4.10.] alapján eljárást adhatunk a fenti Megjegyzésben és a 3.1.6. Tételben szereplő $f\colon M \to W$ immerzió összes Σ-kiterjesztésének (tehát a nem irányíthatóaknak is) a meghatározására. Legyen $h\colon W \to \mathbb{R}$ Morse-függvény, mint a 3.1.6. Tételben, és ugyanúgy, mint ott, rögzítsük v-t és l-et is. Ha $t \in \mathbb{R}$, akkor f *t-hez tartozó szintig történő Σ-kiterjesztésének* nevezünk egy olyan $F_t^\Sigma\colon X_t \to Q(t)$ hajtás-leképezést, ahol X_t egy $(m+1)$-dimenziós peremes sokaság, melyre X_t egy 1-kodimenziós részsokasága $f^{-1}(Q(t))$-vel azonosítható és ezen azonosítás után ezen a halmazon F_t^Σ és f megegyeznek, továbbá $F_t^\Sigma(\partial X_t) \subset Q(t)$. Az $F_{t_0}^\Sigma$, t_0 szintig történő kezdeti kiterjesztés most is álljon $Q(t_0)$ $l(c_0)$ példányának identikus leképezéséből és definiáljuk a Σ-kiterjesztések *továbbterjesztésének* fogalmát az előző szakasszal összhangban. Világos, hogy egy Σ-kiterjesztésnél a c cella tényleges lefedettsége $l'(c) := l(c_0) + 2(l(c) - l(c_0))$ lesz. Az akadályokon való áthaladási lehetőségeket most a 3.2.5. Tétel fogja leírni, de ennek kimondása előtt definiálnunk kell a kiterjesztés által indukált párosítás fogalmának megfelelőjét Σ-kiterjesztésekre.

3.2.4. Definíció. Legyen $f\colon M \to W$ Σ-leképezés és $F^\Sigma\colon X \to W$ ennek Σ-kiterjesztése, mint fent, γ pedig f-re transzverzális és f többszörös pontjait elkerülő beágyazott görbe. A *γ-hoz tartozó, F^{Σ} által indukált párosításon* az $\gamma^{-1}(f(M)) \cong \mathrm{im}(\gamma) \cap f(M)$ halmaz kételemű részhalmazainak a következő $\mathcal{P}$ multihalmazát értjük (minden elem egyszeres vagy kétszeres lesz): $\{x, y\}$ $(x, y \in \mathrm{im}(\gamma) \cap f(M))$ annyiszor legyen eleme $\mathcal{P}$-nek, ahány $(F^{\Sigma})^{-1}(\mathrm{im}(\gamma))$-beli ív összeköti $i(f^{-1}(x))$-et és $i(f^{-1}(y))$-t.

3.2.5. Tétel. *Legyen M egy m-dimenziós zárt irányítható sokaság, W egy $(m+1)$-dimenziós összefüggő irányított sokaság, $f\colon M \to W$ stabil immerzió, $v\colon M \to TW$ az f menti normális vektormező (melyhez tartozó irányításra $f_*[M] = 0 \in H_m(W;\mathbb{Z})$) és rögzítsünk egy l, a v-vel kompatibilis lefedettség-függvényt, továbbá egy (a 3.1 szakaszban szereplő feltételeknek eleget tevő) $h\colon W \to \mathbb{R}$ Morse-függvényt is. Tegyük fel, hogy rendelkezünk f-nek egy F_t^{Σ} Σ-kiterjesztésével a t-hez tartozó szintig és a $[t, t']$ intervallumba eső egyetlen akadály $t < t^* < t'$. A következő esetekben képzelhető el, hogy t^*-on nem lehet áthaladni:*

(1) *h' nem-kapcsolódó 1 indexű kritikus pontjainál. Ha t^* egy ilyennek a h'-képe, akkor pontosan akkor lehet rajta áthaladni (és akkor pontosan egyféleképpen), ha a leszálló 1-diszk f-képének és $P(t)$-nek a metszéspontjai egy alkalmas $P(t)$-beli út mentén kétszeresen is össze vannak párosítva az F_t^{Σ} által indukált párosításnál.*

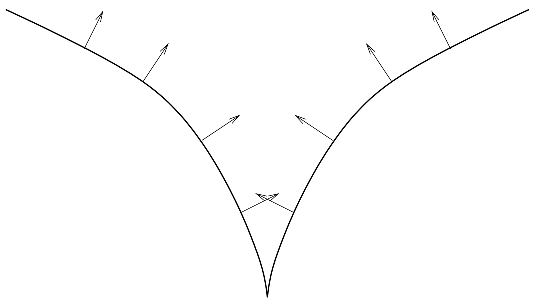
(2) *h'' 0 indexű kritikus pontjainál. Ha t^* egy ilyen z kritikus pontnak a h''-képe és $f_2(z)$ két őse f-nél x és y, akkor pontosan akkor lehet t^*-on áthaladni (és akkor pontosan egyféleképpen), ha léteznek x-nek, illetve y-nak M-ben olyan U, illetve V, az $f^{-1}(Q(t))$-t metsző diszjunkt környezetei, hogy akárhogyan is választva egy-egy pontot $f(U) \cap Q(t)$-ből és $f(V) \cap Q(t)$-ből, ezek egyszer sincsenek összepárosítva az F_t^{Σ} által indukált párosításnál semmilyen $Q(t)$-beli út mentén sem.*

Az alábbi esetekben képzelhető el, hogy t^*-on egynél többféleképpen lehet áthaladni:

(3) *h' nem-kapcsolódó 0 indexű kritikus pontjainál. Ha egy ilyen ponthoz tartozó v vektor a c cellába mutat, akkor a lehetőségek száma $\binom{l'(c)}{2}$.*

(4) *h 1 indexű kritikus pontjainál. Ha ez a pont a c cellába esik, akkor a lehetőségek szám $(l'(c))!$ (F_t^{Σ}-nak a leszálló 1-diszk és $P(t)$ két metszéspontjánál levő $l'(c)$-$l'(c)$ darab „ágát” kell ugyanis összepárosítani).*

Az immerziókon kívül a Σ-leképezések még egy osztályára fogjuk megadni a kiterjesztéseket előállító eljárást (illetve leírni annak elágazásait és zsákutcáit), ezek pedig a zárt 1-sokaságokat (azaz körvonalak véges diszjunkt



3.1 ábra: f egy elsőfajú csúcsa és ennek környezetében a v normális vektormező

unióit) irányított felületekbe képező Σ-leképezések. Vegyük észre, hogy egy ilyen sima görbe pontosan akkor Σ-leképezés, ha nincsenek másodfajú csúcsai, csak véges sok elsőfajú csúcsa és inflexiós pontja (ld. [HC, 203-204. oldal]). Meggyőződésünk, hogy magasabb dimenziókra vonatkozó hasonló tételek megfogalmazásának és bebizonyításának egyetlen előfeltétele a Morin-szingularitások pontos megértése.

Legyen tehát M zárt 1-sokaság, W irányított 2-sokaság, $f\colon M \to W$ pedig sima görbe másodfajú csúcsok nélkül. Rögzítsük a $v\colon \Sigma^0(f) \to TW$ normális vektormezőt úgy, hogy az általa (és W irányítása által) indukált irányítás $\Sigma^0(f)$-en kiterjedjen M egy olyan irányításává, melyre $f_*[M] = 0$. Tegyük fel azt is, hogy f szinguláris pontjainak a környezetében v a 3.1 ábrának megfelelően van megadva. Egy ilyen v vektormező, ugyanúgy, mint az előző szakaszban, megad végtelen sok v-vel kompatibilis lefedettség-függvényt (amelyek egy affin teret alkotnak $\mathbb{Z}$ felett). A $h\colon W \to \mathbb{R}$ Morse-függvényről az eddigieken kívül az is feltehető, hogy f elsőfajú csúcsaiban grad_h a csúccsal párhuzamos (azaz v mindkét oldali határértékére merőleges). A csúcsokat, illetve azok h-képeit is az akadályok közé soroljuk; feltehető, hogy az akadályok továbbra is mind különböző szinteken találhatóak. A csúcsot *kapcsolódónak* nevezzük, ha ott grad_h a csúcs belseje felé mutat (azaz arra az oldalra, amerre v), ellenkező esetben *nem-kapcsolódónak*. Az $F^{\Sigma}_{t_0}$ kezdeti kiterjesztést ugyanúgy választjuk, mint eddig. Világos, hogy egy c cellának az $F^{\Sigma}_{t_0}$ bármely továbbterjesztésénél most is $l'(c) = l(c_0) + 2(l(c) - l(c_0))$ lesz a tényleges lefedettsége. A kiterjesztési eljárás leírásához a 3.2.5. Tételen kívül az alábbi, a csúcsokon való áthaladásról szóló Állításra van szükség.

3.2.6. Állítás. *Legyen adva az $f\colon M^1 \to W^2$ Σ-leképezés, ahol W irányított. Rögzítsük a fentieknek megfelelően a v normális vektormezőt és a vele kompatibilis l lefedetség-függvényt, továbbá a $h\colon W \to \mathbb{R}$ Morse-függvényt. Legyen $s \in S(f)$ egy tetszőleges csúcs f^{-1}-képe. Tegyük fel, hogy rendelke-*

zünk f-nek egy Σ-kiterjesztésével a t-hez tartozó szintig, ahol t olyan, hogy $P(t)$ metszi az $f(s)$-ből kiinduló görbeágakat és a $[t, \infty)$ intervallumba eső legkisebb akadály $t < t^* = h(f(s))$.

(1) *Ha $f(s)$ kapcsolódó, akkor t^*-on $l'(c)$-féleképpen lehet áthaladni, ahol c az a cella, amelybe a csúcs mutat.*

(2) *Ha $f(s)$ nem-kapcsolódó, akkor t^*-on pontosan akkor lehet áthaladni (és akkor pontosabban egyféleképpen), ha a csúcsból kiinduló két görbedarabnak és $P(t)$-nek a metszéspontjai pontosan egyszer vannak összepárosítva az F_t^Σ által indukált párosításnál egy alkalmas $P(t)$-beli görbe mentén.*

Az Állítás teljesen nyilvánvaló. Természetesen, h megváltoztatásával elérhető, hogy az összes csúcs kapcsolódó (vagy az összes nem-kapcsolódó) legyen, de ez általában az akadályok számának növekedésével jár.

4. Fejezet

Morin-leképezések 4-sokaságok között

Ebben a fejezetben négydimenziós sokaságok közötti stabil leképezésekkel foglalkozunk. Ennél a dimenzió-párnál (amely a 1.1.3. Állítás értelmében szép) a stabil leképezések a Morin-szingularitások mellett izolált $\Sigma^{2,0}$-szingularitásokkal is rendelkezhetnek, amelyeknek ez esetben kétféle normálformája képzelhető el:

$$\begin{array}{llll} y_1 = x_1, & y_2 = x_2, & y_3 = x_3^2 + x_1x_4, & y_4 = x_4^2 + x_2x_3 \quad \text{vagy} \\ y_1 = x_1, & y_2 = x_2, & y_3 = x_3^2 - x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4, & y_4 = x_3x_4 + x_2x_3 - x_1x_4. \end{array}$$

Az első esetben *hiperbolikus umbilikus pontról*, a másodikban pedig *elliptikus umbilikus pontról* beszélünk. A $(4,4)$ dimenzió-párhoz tartozó Thom-polinomok megtalálhatóak az 1.2.3. Tételben és az 1.2.5 Állításban. Megjegyezzük még, hogy amíg minden hiperbolikus umbilikus pont minden környezetében található fecskefarok-szingularitás, addig az elliptikusokra ennek ellenkezője igaz. Pontosabban, ha $F\colon M^4 \to N^4$ stabil leképezés és $\Sigma_h^{2,0}(f)$ jelöli f hiperbolikus umbilikus szingularitásainak halmazát, akkor a következők teljesülnek (ld. [La]-t):

$$\begin{aligned} S(f) = \overline{A_1(f)} &= \left(\bigcup_{l=1}^{4} A_l(f)\right) \cup \Sigma^{2,0}(f) \\ \overline{A_2(f)} &= \left(\bigcup_{l=2}^{4} A_l(f)\right) \cup \Sigma^{2,0}(f) \\ \overline{A_3(f)} &= \left(\bigcup_{l=3}^{4} A_l(f)\right) \cup \Sigma_h^{2,0}(f). \end{aligned}$$

4.1 A normál Euler-szám

Az alábbi Lemma alapvető fontosságú a Morin-szingularitások vizsgálatában:

4.1.1. Lemma (Fukuda [F]). *Legyen M^n zárt, N^p pedig összefüggő sokaság ($n \geqq p$). Ha $f\colon M \to N$ Morin-leképezés, akkor*

$$\chi(M) \equiv \sum_{l=1}^{p} \chi(\overline{A_l(f)}) + \chi_f \chi(N) \pmod 2,$$

ahol χ_f az f egy reguláris fibruma Euler-karakterisztikájának a paritása ($n = p$ esetén a modulo 2 fokszám) és ha N nem zárt, akkor $\chi(N) = 0$.

A 4-sokaságok elméletéből kölcsönözzük a következő Állítást:

4.1.2. Állítás. *Egy M zárt, irányított négydimenziós sokaság pontosan akkor stabilan parallelizálható, ha $w_2(M) = 0 \in H^2(M; \mathbb{Z}_2)$ és $\sigma(M) = 0$.*

Emlékeztetünk továbbá a Rohlintól és Thomtól származó 4-dimenziós szignatúra-formulára:

4.1.3. Állítás. *Ha M egy zárt, irányított 4-sokaság, akkor $\langle p_1(M), [M] \rangle = 3\sigma(M)$.*

4.1.4. Definíció. Egy $g\colon F^k \to V^{2k}$, zárt sokaságot irányított sokaságba képező immerzió (speciálisan, egy beágyazás) $e(\nu_g)$ *normál Euler-száma* alatt a következőt értjük: Tekintsük a $\pi_g\colon \nu_g \to F$ normálnyalábnak egy $s\colon F \to \nu_g$ generikus szelését és ezt komponáljuk egy $i\colon \nu_g \to N(g(F))$ immerzióval, ahol $N(g(F))$ a $g(F)$ egy csőszerű környezete. Ha $s(x) = \mathbf{0}$, akkor rögzítsük a T_xF vektortér egy tetszőleges irányítását és ezt T_xg, illetve $T_x(i \circ s)$ segítségével vigyük át $T_xg(T_xF)$-re illetve $T_x(i \circ s)(T_xF)$-re. Legyen

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } T_xg(T_xF) \text{ és } T_x(i \circ s)(T_xF) \text{ irányításai (eb-} \\ & \text{ben a sorrendben) kiadják } T_{g(x)}V \text{ irányítását} \\ -1, & \text{ha nem} \end{cases}.$$

Vegyük észre, hogy $\epsilon(x)$ értéke nem függ T_xF irányításától. Végül legyen

$$e(\nu_g) := \sum_{x \in M\,:\, s(x) = \mathbf{0}} \epsilon(x).$$

Világos, hogy ez az összeg véges és az is könnyen meggondolható, hogy $e(\nu_g)$ nem függ az s szelés választásától. A következő Tétel megtalálható [SS]-ben.

4.1.5. Tétel. *Legyen M zárt, N pedig stabilan parallelizálható 4-sokaság. Ha $f\colon M \to N$ Morin-leképezés, akkor*

(1) $\chi(M) \equiv \chi(\overline{A_2(f)}) \pmod 2$.

(2) *Ha M irányítható, akkor $\overline{A_2(f)} \subset M$ normál Euler-száma 0. Továbbá, M pontosan akkor stabilan parallelizálható, ha $\left[\overline{A_2(f)}\right]_2 = 0 \in H_2(M;\mathbb{Z}_2)$.*

Bizonyítás. Először (1)-et bizonyítjuk. Mivel $\chi(N) = 0$, a 4.1.1. Lemma szerint

$$\chi(M) \equiv \chi(S(f)) + \chi(\overline{A_2(f)}) + \chi(\overline{A_3(f)}) + \chi(A_4(f)) \pmod 2.$$

A páratlan dimenziós sokaságok Euler-karakterisztikája 0 lévén, elegendő bebizonyítanunk, hogy a pillangó-szingularitások száma páros. A 1.2.3. Tételt alkalmazva

$$\chi(A_4(f)) \equiv \langle \bar{w}_1^4 + \bar{w}_1 \cup \bar{w}_3, [M]_2\rangle \equiv \langle w_1^4 + w_1 \cup (w_1^3 + w_3), [M]_2\rangle \equiv \langle w_1 \cup w_3, [M]_2\rangle \pmod 2$$

adódik. A Wu-formulát, a v_k Wu-osztályok definícióját (ezeket ld. [MS]-ben), illetve az Sq^i Steenrod-négyzet operátorokra vonatkozó Adem-relációt felhasználva (ezeket pedig ld. [MT]-ben) kapjuk, hogy

$$w_1 \cup w_3 = v_1 \cup \mathrm{Sq}^1 v_2 = \mathrm{Sq}^1 \mathrm{Sq}^1 v_2 = 0 \in H^4(M;\mathbb{Z}_2),$$

amiből (1) már triviálisan adódik.

(2) első állításának bizonyításához elegendő megmutatni, hogy a megfelelő normálnyalábnak létezik sehol sem eltűnő szelése, azaz, egy $\overline{A_2(f)} \to TM$ normális vektormező az $\overline{A_2(f)}$ mentén. Mivel az $\overline{A_2(f)}$ felület részsokasága $S(f)$-nek, azért elegendő, ha $S(f)$ mentén létezik normális vektormező, azaz, ha $S(f) \subset M$ 1-dimenziós normálnyalábja triviális. Ez pedig teljesül, hiszen M és N irányíthatósága miatt az $M \setminus S(f)$ halmaznak legalább két összefüggőségi komponense van.

Mivel létezik az f Morin-, azaz umbilikus szingularitásokkal nem rendelkező leképezés, azért az 1.2.5. Állítás értelmében $p_1(M) = 0$ kell, hogy legyen. A 4.1.2. Állítás miatt tehát M pontosan akkor lesz stabilan parallelizálható, ha $w_2(M) = 0$. Az 1.2.3. Tételből viszont az olvasható ki, hogy esetünkben $\mathcal{D}_M \left[\overline{A_2(f)}\right]_2 = w_2(M)$, és ebből (2) már triviális. $\square$

4.2 A csúcs-szingularitások felülete

Először az alábbi formulát bizonyítjuk be (ld. [Sz]). Legyen $g\colon M^n \to \mathbb{R}^{2n-1}$ öntranszverzális immerzió és jelölje $\theta_2(g) \subset \mathbb{R}^{2n-1}$ a g kettőspontjainak halmazát. Ez $\mathbb{R}^{2n-1}$-be immertált körvonalak uniója, nevezetesen, legyen $h\colon \tilde{\theta}_2(g) \to \theta_2(g)$ egy ilyen immerzió. Ha C a $\tilde{\theta}_2(g)$ egy komponense, akkor adódik egy $g^{-1}(h(C)) \to C$ kettős fedés; attól függően, hogy ez triviális-e vagy sem (azaz $g^{-1}(h(C))$ összefüggő-e vagy sem), C-t *triviálisnak*, illetve *nemtriviálisnak* nevezzük. Jelölje $\delta(g) \in \mathbb{Z}_2$ a $\tilde{\theta}_2(g)$ nemtriviális komponensei számának paritását.

4.2.1. Lemma. *Ha n páros, akkor $\delta(g) = \langle w_1(M) \cup \bar{w}_{n-1}(M), [M]_2\rangle$.*

Bizonyítás. Legyen ν a $g^{-1}(\theta_2(g))$ normálnyalábja M-ben, ε^1 pedig triviális vonalnyaláb $g^{-1}(\theta_2(g))$ felett. Mivel ($TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ miatt) $\nu \oplus \varepsilon^1 = TM\big|_{g^{-1}(\theta_2(g))}$, azért $w_1(\nu) = w_1(M)\big|_{g^{-1}(\theta_2(g))}$. Ezek szerint

$$\langle w_1(\nu), [g^{-1}(\theta_2(g))]_2\rangle = \langle w_1(M) \cup \bar{w}_{n-1}(M), [M]_2\rangle,$$

hiszen $\mathcal{D}_M[g^{-1}(\theta_2(g))]_2 = \bar{w}_{n-1}(M)$ (ld. [He]-t). Másrészt

$$\langle w_1(\nu), [g^{-1}(\theta_2(g))]_2\rangle = \delta(g),$$

hiszen mindkettő megegyezik $g^{-1}(\theta_2(g))$ azon komponensei számának paritásával, amelyeknek nemtriviális az M-beli normálnyalábjuk (ha C triviális komponense $\tilde{\theta}_2(g)$-nek, akkor $g^{-1}(h(C))$ két komponense közül vagy mindkettő, vagy egyik sem rendelkezik triviális M-beli normálnyalábbal; ezzel szemben egy nemtriviális C' komponens esetén $g^{-1}(h(C'))$ normálnyalábja mindig nemtriviális). $\square$

4.2.2. Definíció. Legyen M egy n-dimenziós sokaság és $a \in H_k(M;\mathbb{Z}_2)$, valamint $b \in H_{n-k}(M;\mathbb{Z}_2)$ $\quad (k \in \{0, 1, \ldots, n\})$. Az a és b *metszési számának* nevezzük és $a \cdot b$-vel jelöljük a $\langle \mathcal{D}_M a \cup \mathcal{D}_M b, [M]_2\rangle \in \mathbb{Z}_2$ értéket. Ha M irányított, továbbá a és b egész együtthatós (és továbbra is komplementer dimenziós) homológia-osztályok, akkor hasonlóan definiálható az $a \cdot b$ *egész értékű metszési szám.*

Ha a és b (a $\mathbb{Z}_2$-, illetve $\mathbb{Z}$-együtthatós esetben) reprezentálhatóak (a $\mathbb{Z}$-együtthatós esetben irányított) sokaságok $f_a\colon A \to M$ és $f_b\colon B \to M$ (feltehetően egymásra transzverzális) immerzióival, akkor természetesen $a \cdot b$ megegyezik $\operatorname{im}(f_a)$ és $\operatorname{im}(f_b)$ metszéspontjainak algebrai számával. Az $a = b$ esetben is biztosítani kell a transzverzalitást, például úgy, hogy egy adott reprezentáló immerziót „perturbálunk” és ezután képezzük a merszéspontok algebrai számát.

A következő formula Audintól [Au] és Litől [Li] származik.

4.2.3. Állítás. *Legyen F zárt felület, N irányított 4-sokaság és $f\colon F \to N$ stabil leképezés (és mint ilyen, immerzió). Ekkor*

$$e + 2D(f) \equiv \langle \tilde{\mathrm{P}}(\mathcal{D}_N f_*[F]_2), [N]_4\rangle + 2\chi(F) \pmod 4, \tag{4.1}$$

ahol e az f normál Euler-száma, $D(f)$ az f kettőspontjainak a száma, $\tilde{\mathrm{P}}\colon H^2(N;\mathbb{Z}_2) \to H^4(N;\mathbb{Z}_4)$ a Pontrjagin-négyzet, $[N]_4 \in H_4(N;\mathbb{Z}_4)$ pedig N modulo 4 fundamentális osztálya.

Egy sokaság modulo 4 fundamentális osztálya pontosan akkor definiálható, ha a sokaság irányítható; ha a sokaság irányított, akkor az egész együtthatós fundamentális osztály (amelyet 0-nak tekintünk, ha a sokaság nem zárt) modulo 4 redukciójával egyezik meg. A Pontrjagin-négyzettel és tulajdonságaival kapcsolatban ld. [MT]-t. Nekünk itt csak arra lesz szükségünk, hogy kohomológia-osztályok folytonos függvénnyel való visszahúzásával szemben természetes módon viselkedik, illetve arra, hogy hogyan hat egész együtthatós kohomológia-osztályok modulo 2 redukcióin (ld. a következő Bizonyítást).

Bizonyítás. Először bebizonyítjuk az Állítást az $N = \mathbb{R}^4$ esetre azzal a további feltétellel, hogy az f immerziónak létezik ún. *tüskézése*, azaz a ν_f normálnyalábnak egy sehol sem eltűnő szelése. Ekkor persze $e = 0$ és így nyilván a $D(f) \equiv \chi(F) \pmod 2$ kongruenciát kell igazolni. A Hirsch-lemma [Hi] szerint f regulárisan homotóp egy $g\colon F \to \mathbb{R}^3$ (öntranszverzális) immerzióval, ahol $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ affin altér. Könnyű meggondolni, hogy $D(f) \equiv \delta(g) \pmod 2$. A 4.2.1. Lemma szerint tehát $D(f) \equiv \langle w_1(M) \cup \bar{w}_1(M), [M]_2\rangle \equiv \langle w_1^2(M), [M]_2\rangle \equiv \langle w_2(M), [M]_2\rangle \equiv \chi(M) \pmod 2$, amint kívántuk.

A bizonyítás szinte triviális abban az esetben, amikor F irányítható. Ekkor ugyanis $\langle \tilde{\mathrm{P}}(\mathcal{D}_N f_*[F]_2), [N]_4\rangle \equiv f_*[F] \cdot f_*[F] \pmod 4$, ahol $f_*[F] \in H_2(N;\mathbb{Z})$ az f által reprezentált egész együtthatós homológia-osztály, továbbá nyilván $2\chi(F) \equiv 0 \pmod 4$. Ezek után a normál Euler-osztály definíciója alapján a bizonyítás erre az esetre már könnyen elvégezhető (az ott szereplő s szelés $\mathbf{0}$-helyeihez egy-egy, f minden kettőspontjához pedig két-két metszéspontja tartozik $f(F)$-nek és $\mathrm{im}(i \circ s)$-nek, másrészt f és $i \circ s$ egyaránt $f_*[F]$-et reprezentálják). A továbbiakban az Állítást visszavezetjük erre az esetre.

Ehhez először visszavezetjük a $\chi(F) \equiv 0 \pmod 2$ esetre. Tekintsünk egy $\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^3$ immerziót (pl. a Boy-felületet) és egy reguláris homotópiával vigyük ezt át egy $\alpha\colon \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ öntranszverzális immerzióba. Ha $\chi(F)$ páratlan, akkor $\mathrm{im}(f)$ egy csőszerű környezetében, de $\mathrm{im}(f)$-től diszjunktan (és a kettőspontoktól „távol") válasszunk egy „kis", $\mathbb{R}^4$-gyel diffeomorf halmazt; ezt azonosítsuk $\mathbb{R}^4$-gyel és az azonosítás segítségével másoljuk bele $\alpha(\mathbb{R}P^2)$-t. Képezzük $f(F)$ és $\alpha(\mathbb{R}P^2)$ összefüggő összegét: ezzel egy olyan, M-be immertált felület adódik, amelynek páros az Euler-karakterisztikája. $e(\nu_\alpha) = 0$

(Hirsch-lemma) alapján könnyű meggondolni, hogy ezzel az operációval e-n nem változtattunk. (4.1)-nek a Pontrjagin-négyzetet tartalmazó tagján szintén nem, hiszen az eredeti és a módosított felületek egymással homológok. Azt kell tehát még meggondolni, hogy páratlan számmal növeltük a kettőspontok számát, azaz, hogy α-nak páratlan sok kettőspontja van; ez azonban az első bekezdés alapján világos.

Feltehető tehát, hogy $\chi(F)$ páros. Ekkor $w_1(F)$ reprezentálható egyetlen, a felületbe triviális normálnyalábbal beágyazott $C \subset F$ körvonallal. Feltehető az is, hogy $f(C)$ elkerüli f kettőspontjait. Ekkor $f(C)$ egy N-be ágyazott körvonal, melynek N irányíthatósága miatt irányítható, és így triviális a normálnyalábja, F-beli normálnyalábja pedig ennek egy triviális résznyalábjával azonosítható. Tekintsünk egy $\beta\colon \hat{A}_2 \to S^4$ immerziót, amit egy $\mathbb{R}^3$-ba menő immerzió $\mathbb{R}^4$-be való felemelésével, majd ennek kompaktifikálásával kapunk. Erre (és egy $C' \subset \hat{A}_2$, $w_1(\hat{A}_2)$-t reprezentáló körvonalra) hasonlóak mondhatók el, mint az előbb. $f(C)$ és $\beta(C')$ egy-egy zárt csőszerű környezete tehát azonosítható oly módon, hogy $f(F)$-nek, illetve $\beta(\hat{A}_2)$-nak ezekbe eső részei egymásnak felelnek meg. Hagyjuk el ezeknek a halmazoknak a belsejeit a megfelelő 4-sokaságokból és a keletkező peremeket ragasszuk össze az iménti azonosítás segítségével. Ily módon egy N' irányítható 4-sokaság (azért az, mert az elhagyott csőszerű környezetek peremei, $S^1 \times S^2$-vel diffeomorfak lévén, összefüggőek) és egy ebbe immertált F' *irányítható* felület jön létre. Egyszerűen adódik, hogy $\chi(F') = \chi(F)$. Irányítsuk N'-t N (megmaradt része) irányításának kiterjesztésével. Könnyű meggondolni, hogy $e(\nu_\beta) = 0$ és az is elérhető, hogy $D(\beta) = 0$ legyen. Ezekből az következik, hogy (4.1) baloldalának tagjai és a jobboldal második tagja az iménti operációnál nem változnak, és az első bekezdés alapján az is világos, hogy $\langle \tilde{\mathrm{P}}(\mathcal{D}_{S^4}\beta_*[\hat{A}_2]_2), [S^4]_4\rangle = 0$. Készen leszünk tehát (felhasználva, hogy N' kobordáns N és S^4 diszjunkt uniójával), ha bebizonyítjuk az alábbi Lemmát. $\square$

4.2.4. Lemma. *Legyenek A és B irányított 4-sokaságok, $f_1\colon F_1 \to A$ és $f_2\colon F_2 \to B$ pedig stabil immerziók. Tegyük fel, hogy az $(A, f_1(F_1))$ és $(B, f_2(F_2))$ térpárok között létezik egy* pár-kobordizmus*, amin most a következőt értjük. Legyen W egy irányított peremes 5-sokaság, $g\colon X \to W$ pedig egy peremes 3-sokaságnak egy immerziója ebbe. Tegyük fel, hogy ∂W azonosítható $A \cup B$-vel (úgy, hogy W irányítása A-n az adott irányítást, B-n viszont annak ellentettjét indukálja valamilyen rögzített konvenció mellett), ∂X pedig $F_1 \cup F_2$-vel oly módon, hogy mindezen azonosítások után $g\big|_{\partial X}$ megegyezik $f_1 \cup f_2$-vel. Ekkor*

$$\langle \tilde{\mathrm{P}}(\mathcal{D}_A f_{1*}[F_1]_2), [A]_4\rangle = \langle \tilde{\mathrm{P}}(\mathcal{D}_B f_{2*}[F_2]_2), [B]_4\rangle.$$

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy $\langle\tilde{\mathrm{P}}(\mathcal{D}_{\partial W} g_*[\partial X]_2), [\partial W]_4\rangle = 0$. Márpedig, ha j-vel jelöljük a $\partial W \to W$ identikus beágyazást, akkor

$$\langle\tilde{\mathrm{P}}(\mathcal{D}_{\partial W} g_*[\partial X]_2), [\partial W]_4\rangle = \langle j^* \tilde{\mathrm{P}}(\mathcal{D}_W g_*[X]_2), [\partial W]_4\rangle =$$
$$\langle\tilde{\mathrm{P}}(\mathcal{D}_W g_*[X]_2), j_*[\partial W]_4\rangle = \langle\tilde{\mathrm{P}}(\mathcal{D}_W g_*[X]_2), 0\rangle = 0.$$

□

4.2.5. Tétel ([SS]). *Legyen M zárt 4-sokaság, N pedig zárt, irányított és stabilan parallelizálható 4-sokaság. Ha $f\colon M \to N$ stabil leképezés csak hajtás- és csúcs-szingularitásokkal, akkor*

$$2D(f) \equiv \langle\tilde{\mathrm{P}}(f_! w_2(M)), [N]_4\rangle + 2\chi(M) \pmod 4, \tag{4.2}$$

ahol $D(f)$ az $f\big|_{A_2(f)}$ immerzió kettőspontjainak a száma, $f_! = \mathcal{D}_N \circ f_* \circ \mathcal{D}_M^{-1}$ pedig a Gysin-homomorfizmus.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 4.2.3. Állítást $f\big|_{A_2(f)}$-re:

$$e + 2D(f) \equiv \langle\tilde{\mathrm{P}}(\mathcal{D}_N f_*[A_2(f)]_2), [N]_4\rangle + 2\chi(A_2(f)),$$

ahol e a megfelelő normál Euler-osztályt jelöli. Mivel a 4.1.5. Tétel (1) pontja szerint $2\chi(A_2(f)) \equiv 2\chi(M) \pmod 4$, továbbá az 1.2.3. Tételből $[A_2(f)]_2 = \mathcal{D}_M w_2(M)$, azért elegendő megmutatni, hogy $e = 0$. Ehhez pedig elegendő egy sehol sem eltűnő $f(A_2(f))$-re normális vektormezőt mutatni $f\big|_{A_2(f)}$ mentén, ami könnyen megtehető a csúcs-szingularitás normálformájának felhasználásával (az (1.1) képletben szereplő koordinátákban felírt $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (1, 0, 0, 0)$ vektor egy kanonikus normálirányt határoz meg). □

4.2.6. Következmény. *Legyenek M és N zárt 4-sokaságok, N stabilan parallelizálható, továbbá $f\colon M \to N$ stabil leképezés csak hajtás- és csúcs-szingularitásokkal. Ha M irányítható spin-sokaság (azaz $w_2(M) = 0$), vagy ha $\chi(M)$ páros és $H^2(N; \mathbb{Z}_2) = 0$, akkor $D(f)$ páros.*

Bizonyítás. Az előző Tételt alkalmazva, mindkét esetben elegendő belátni, hogy (4.2) jobboldalának mindkét tagja 4-gyel osztható. A második esetben ez mindkét tagról triviálisan látszik és az első esetben is csak az nem magától értetődő, hogy $\chi(M)$ páros. Ezt sem nehéz azonban belátni, ugyanis $\Sigma^{2,0}(f) = \varnothing$ miatt $p_1(M) = 0$ és így $\sigma(M) = 0$ kell, hogy legyen (ld. az 1.2.5. és a 4.1.3. Állításokat), tehát valóban $\chi(M) \equiv \sigma(M) \equiv 0 \pmod 2$. □

5. Fejezet

A Sakuma-sejtés

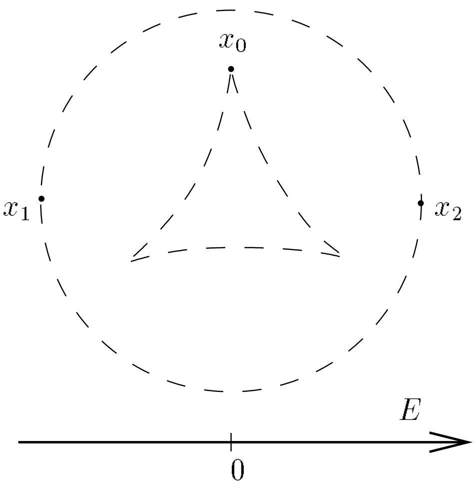
A szingularitáselmélet egy érdekes nyitott kérdése a következő sejtés igaz vagy hamis voltának eldöntése. Maga a sejtés Kazuhiro Sakumától származik; a következőkben bebizonyítunk néhány, már ismert részeredményt (5.2.10. és 5.3.5. Tételek), illetve megmutatjuk, hogy a feltételek valamennyien szükségesek.

5.1 A feltételek szükségessége

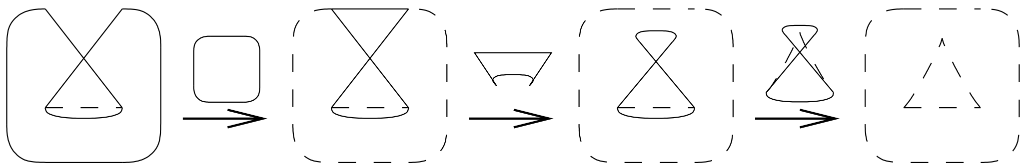
5.1.1. Sejtés. *Legyen M zárt, irányítható és páratlan Euler-karakterisztikájú 4-sokaság. Ekkor nem létezik $M \to \mathbb{R}^3$ hajtás-leképezés.*

Először megmutatjuk, hogy az 5.1.1. Sejtés feltételei közül nem hagyható el M irányíthatósága.

5.1.2. Példa. Először egy olyan $\varphi_0 \colon \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezést konstruálunk, amelynél a szinguláris halmaz képe az 5.1 ábrán látható görbepár. Az 5.2 ábrát követve, először képezzünk le egy Möbius-szalagot a síkba; ezt egy diszkkel, majd egy „trapézzal" kiegészítve továbbra is egy Möbius-szalagot kapunk, amelynek a határa egy „8-asba" képeződik. Egy diszket $\mathbb{R}^3$-ban megcsavarva, majd alkalmasan levetítve a síkba a perem ugyanebbe a görbébe megy át, miközben egy csúcs-szingularitás keletkezik. Együttesen pedig éppen a projektív síknak nyerjük egy leképezését; ennek a legelőször létrejött hajtás-szakasz végpontjaiban keletkezőkkel együtt összesen három csúcs-szingularitása van. Legyen pr az E egyenesre (amelyet, az 5.1 ábrán látható módon, $\mathbb{R}$-rel azonosítunk) vonatkozó merőleges vetítés. Ekkor $h = \mathrm{pr} \circ \varphi_0 \colon \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}$ egy Morse-függvény három kritikus ponttal; $\varphi_0^{-1}(x_1)$ az egyetlen lokális minimum, $\varphi_0^{-1}(x_2)$ az egyetlen lokális maximum, a harmadik kritikus pont pedig a kételemű $\varphi_0^{-1}(\{x_0\})$ halmaz szinguláris eleme, amelynek az indexe csak 1



5.1 ábra: A projektív sík leképezése $\mathbb{R}^2$-be



5.2 ábra: A 5.1 ábrán látható leképezés konstrukciója

lehet. A konstrukció, illetve annak szimmetriája segítségével könnyen igazolható, hogy létezik egy olyan $\gamma\colon \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ involúció, hogy ha $\tau\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jelöli az x_0-on átmenő, E-re merőleges egyenesre vonatkozó tükrözést, akkor az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}P^2 & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathbb{R}^2 \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\ \mathbb{R}P^2 & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Jelölje α a $(-\operatorname{id}) \times \gamma\colon S^2 \times \mathbb{R}P^2 \to S^2 \times \mathbb{R}P^2$ involúciót, β pedig a $(-\operatorname{id}) \times (-\operatorname{id})\colon S^2 \times \mathbb{R} \to S^2 \times \mathbb{R}$ involúciót; az előbbiekből nyilvánvaló, hogy az alábbi diagram szintén kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} S^2 \times \mathbb{R}P^2 & \xrightarrow{\operatorname{id} \times h} & S^2 \times \mathbb{R} \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ S^2 \times \mathbb{R}P^2 & \xrightarrow{\operatorname{id} \times h} & S^2 \times \mathbb{R}. \end{array}$$

Mivel α és β fixpontmentesek, azért az $M = (S^2 \times \mathbb{R}P^2)/\alpha$ és $N = (S^2 \times \mathbb{R})/\beta$

faktorterek sima sokaságok, az iménti diagram pedig azt mutatja, hogy definiálható az $\mathrm{id}\times h$ által indukált $g\colon M\to N$ sima leképezés, amelynek csak hajtás-szingularitásai vannak: $(S^2\times\{x_0\})/(\alpha\big|_{S^2\times\{x_0\}})$ az $\mathbb{R}P^2$-vel diffeomorf, $(S^2\times\{x_1,x_2\})/(\alpha\big|_{S^2\times\{x_1,x_2\}})$ pedig S^2-vel. Világos, hogy M Euler-karakterisztikája $\frac{2\cdot 1}{2}=1$; másrészt, M egy ($\mathbb{R}P^2$ feletti) $\mathbb{R}P^2$-nyaláb totális tere lévén nem-irányítható (mivel bármely fibrum normálnyalábja a totális térben triviális, azért egy irányításváltó út egy tetszőleges fibrumban egyben a totális térben is irányításváltó). Végül, vegyük észre, hogy N irányítható, hiszen $(-\mathrm{id}_{S^2})$ és $(-\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ mindketten irányításfordítóak; ezek szerint parallelizálható és mint ilyen, lévén nyílt is, $\mathbb{R}^3$-ba immertálható. Ezzel az immerzióval komponálva g-t egy $M\to\mathbb{R}^3$ hajtás-leképezés adódik, amelynek szinguláris halmaza g-ével egyezik meg.

5.1.3. Megjegyzés. A φ_0 leképezés előáll a következőképpen is. Állítsuk elő a μ Möbius-szalagot, mint egy S^1 feletti $[-1,1]$-fibrálás totális terét. Azonosítsuk minden fibrumban az átellenes pontpárok tagjait és az így kapott szalagot képezzük le a síkbeli $\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leqq x^2+y^2\leqq 4\,\}$ koncentrikus körgyűrűre oly módon, hogy az eredeti szalag középvonalának képe a külső körvonal legyen. Tekintsük továbbá a $D^2=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqq 1\,\}$ körlapnak önmagára történő, a $(\cos\vartheta,\sin\vartheta)\mapsto(\cos 2\vartheta,\sin 2\vartheta)$ képlettel definiált leképezését. Nyilvánvaló, hogy $\partial\mu$ és ∂D^2 azonosíthatóak úgy, hogy az előbb definiált $\mu\to\mathbb{R}^2$ és $D^2\to\mathbb{R}^2$ leképezéseknek a megfelelő peremekre való megszorításai megegyezzenek. Ha tehát ennek az azonosításnak a segítségével ragasztjuk össze μ-t és D^2-t, akkor a keletkező projektív síknak mindjárt egy leképezése is adódik $\mathbb{R}^2$-be. Ez azonban nem stabil a $(0,0)\in D^2$ pontbeli viselkedése miatt; kis megváltoztatásával azonban(ld. [AVG]-t) egy olyan stabil leképezés jön létre, amely már stabil leképezéseken keresztül homotóp φ_0-lal.

A sejtés többi feltételének szükségessége lényegesen egyszerűbben belátható. Az $S^4\subset\mathbb{R}^5$ standard egységgömb (amely természetesen irányítható) merőleges vetítése valamely $\mathbb{R}^3\subset\mathbb{R}^5$ altéren például $\Sigma^{1,0}$-leképezés. Megjegyezzük még, hogy az 5.1.1. Sejtésben szereplő 4-sokaság nem képezhető le sem $\mathbb{R}^2$-be (ld. a 2.1.1. Tételt), sem pedig $\mathbb{R}^4$-be csak hajtás-szingularitásokkal (ez utóbbi azért van így, mert a csúcs-szingularitás Thom-polinomja ebben az esetben w_2 (1.2.3. Tétel), a $\Sigma^{2,0}$-szingularitásé (egész együtthatókkal, ld. az 1.2.5. Állítást) pedig p_1, és ha ezek mindketten 0-val egyenlőek, akkor M stabilan parallelizálható, és így páratlan karakterisztikájú volna (4.1.2. Állítás)). $\mathbb{R}^1$-be a Morse-lemma szerint bármely sokaság leképezhető csak $\Sigma^{1,0}$-szingularitásokkal.

5.2 A Sejtés egy speciális esete

Az 5.1.1. Sejtést Saeki [Sae1] bebizonyította a $\mathbb{C}P^2$ komplex projektív síkra. A bizonyítás csak a zárt 4-sokaság homologikus struktúráját használja. Több előkészületre is szükségünk lesz, amelyek közül nem mindent bizonyítunk be, köztük az alábbi Tételt sem, amelyet Rohlin [Roh] bizonyított először, majd Guillou és Marin [GM] általánosítottak.

5.2.1. Tétel. *Legyen M olyan irányított, zárt négydimenziós sokaság, melyre $H_1(M;\mathbb{Z}) = 0$ és $F \subset M$ karakterisztikus felület (azaz $\mathcal{D}_M[F]_2 = w_2(M)$). Ekkor*

$$\sigma(M) \equiv F \cdot F + 2\chi(F) \pmod 4.$$

5.2.2. Lemma. *Legyen M zárt 4-sokaság, N stabilan parallelizálható 3-sokaság és $f\colon M \to N$ stabil leképezés. Ekkor* $\chi(M) \equiv \chi(S(f)) \pmod 2$.

Bizonyítás. A 4.1.1. Lemma szerint $\chi(M) \equiv \chi(\overline{A_1(f)}) + \chi(\overline{A_2(f)}) + |A_3(f)|$. Mivel $A_2(f)$ körvonalak egyesítése, azért $\chi(\overline{A_2(f)}) = 0$. Másrészt, mivel $A_3(f)$ Thom-polinomja esetünkben $w_1^4 + w_1 \cup w_3$ (ld. [An]) és $w_1(M) = 0$, azért $|A_3(f)| \equiv \langle w_1^4 + w_1 \cup w_3, [M]_2\rangle \equiv 0 \pmod 2$. Az 1.1.7. Állítás felhasználásával tehát készen is vagyunk. □

5.2.3. Tétel (Sakuma [Sak]). *Legyen M olyan zárt, irányított 4-sokaság, melyre $H_1(M;\mathbb{Z}) = 0$, N pedig stabilan parallelizálható 3-sokaság. Ha $f\colon M \to N$ stabil leképezés, akkor* $\sigma(M) \equiv -S(f) \cdot S(f) \pmod 4$.

Bizonyítás. Az 1.2.4. Állítás szerint $S(f) \subset M$ karakterisztikus felület, az 5.2.1 Tételt alkalmazva tehát azt kapjuk, hogy

$$\sigma(M) \equiv S(f) \cdot S(f) + 2\chi(S(f)) \pmod 4. \tag{5.1}$$

Mivel $\sigma(M) \equiv \chi(M) \equiv \chi(S(f)) \pmod 2$ (az első kongruencia közismert, a második pedig az 5.2.2. Lemma állítása), azért $2\chi(S(f)) \equiv 2\sigma(M) \pmod 4$, amit (5.1)-be helyettesítve éppen a bizonyítandó állítást kapjuk. □

Legyen $f\colon M^n \to N^p$ stabil leképezés ($n \geqq p$), S pedig $S(f)$ egy hajtás-komponense. Jelölje $\nu(S)$ az S részsokaság M-beli, $\nu(f\big|_S)$ pedig az $f\big|_S$ öntranszverzális immerzió N-beli normálnyalábját (ezek $(n-p+1)$-, illetve 1-dimenziósak); ha $x \in S$, akkor jelöljék az ehhez tartozó fibrumokat $\nu_x(S)$, illetve $\nu_x(f\big|_S)$.

5.2.4. Lemma. *Létezik egy $d^2f\colon \nu(S) \to \nu(f\big|_S)$ sima fibrumonkénti leképezés (azaz $\pi_2 \circ d^2f = \pi_1$, ahol $\pi_1\colon \nu(S) \to S$ és $\pi_2\colon \nu(f\big|_S) \to S$ a nyalábprojekciók), melyre minden $x \in S$ esetén $d^2f\big|_{\nu_x(S)}\colon \nu_x(S) \to \nu_x(f\big|_S)$ egy λ indexű kvadratikus alak, ahol λ az S indexe.*

Bizonyítás. Minden $x \in S$-re létezik egy

$$(d^2f)_x\colon \ker(T_xf) \to \big(T_{f(x)}N/\operatorname{im}(T_xf)\big) = \operatorname{coker}(T_xf)$$

kvadratikus alak [B][1], ahol $\ker(T_xf)$ a $\nu_x(S)$-sel, $\operatorname{coker}(T_xf)$ pedig $\nu(f\big|_S)$-sel azonosítható; a hajtás-szingularitás normálformájából az is könnyen látható, hogy a kapott $d^2f\colon \nu(S) \to \nu(f\big|_S)$ leképezés indexe minden pontban λ. $\square$

5.2.5. Lemma. *Ha $\nu(f\big|_S)$ nem triviális, akkor az S hajtás-komponens λ indexére $2\lambda = n - p + 1$ teljesül.*

Bizonyítás. Ha $x \in S$, akkor $\nu(f\big|_S)$ nem triviális volta miatt (azaz amiatt, hogy egy alkalmas S-beli hurok mentén körbemenve $\nu_x(f\big|_S)$-nek $\mathbb{R}$-rel való azonosítása „átfordul") létezik egy olyan $\varphi\colon \nu_x(S) \to \nu_x(S)$ lineáris izomorfizmus és egy olyan $a < 0$ valós szám, melyekre $(d^2f)_x \circ \varphi = a(d^2f)_x$ teljesül. Ezek szerint $(d^2f)_x$ és $-(d^2f)_x$ indexe megegyezik $\nu_x(f\big|_S)$ és $\mathbb{R}$ *ugyanazon* azonosítása mellett, amiből az állítás már nyilvánvaló. $\square$

Az előző Bizonyítás kevésbé precíz fogalmazásban a következőképpen is elmondható. $\nu_x(f\big|_S)$ és $\mathbb{R}$ egy azonosításával egy kvadratikus alak adódik $\nu_x(S)$-en, amihez rendelhető (sajnos, nem kanonikusan) egy-egy λ-, illetve $(n-p+1-\lambda)$-dimenziós altér, amelyekre megszorítva a kvadratikus alakot az negatív-, illetve pozitív definit (vagy fordítva). Ha ezek különböző dimenziósak, akkor kanonikusan kijelölhető $\nu_x(f\big|_S)$ egyik félegyenese, pl. az, amelyre a kettő közül a nagyobb dimenziós altér képződik.

5.2.6. Állítás. *Legyen $f\colon M^n \to N^p$ $(n > p)$ sima leképezés és S ennek egy λ indexű hajtás-komponense $(0 < \lambda < n - p + 1)$. Ekkor a $\nu(S)$ normálnyaláb struktúracsoportja redukálható a*

$$G = \begin{cases} O(\lambda) \times O(n-p+1-\lambda) & (2\lambda \neq n-p+1) \\ \{O(\lambda) \times O(\lambda)\} \rtimes \mathbb{Z}_2 & (2\lambda = n-p+1) \end{cases}$$

csoportra ($G \subset O(n-p+1)$), ahol $O(\lambda)$-t a

$$\left\{ \begin{pmatrix} P & 0 \\ O & I_{n-p+1-\lambda} \end{pmatrix} \in O(n-p+1) : P \in O(\lambda) \right\},$$

$O(n-p+1-\lambda)$-t pedig az

$$\left\{ \begin{pmatrix} I_\lambda & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \in O(n-p+1) : R \in O(n-p+1-\lambda) \right\}$$

halmazzal azonosítjuk, továbbá $\{O(\lambda) \times O(\lambda)\} \rtimes \mathbb{Z}_2$ nem más, mint $O(2\lambda)$-nak az $O(\lambda) \times O(\lambda)$ részcsoport és a $\left(\begin{smallmatrix} 0 & I_\lambda \\ I_\lambda & 0 \end{smallmatrix}\right)$ elem által generált részcsoportja.

[1] Belátható, hogy f másodrendű parciális deriváltjai jól definiáltak „modulo $\operatorname{im}(T_xf)$", ha a deriválási irányok $\ker T_xf$-hez tartoznak.

Bizonyítás. Az első esetben, amikor $2\lambda \neq n-p+1$, az 5.2.5. Lemma szerint $\nu(f\big|_S)$ triviális. Rögzítve egy trivializációját az 5.2.4. Lemma felhasználásával egy $d^2f\colon \nu(S) \to \mathbb{R}$ leképezést kapunk, amely minden fibrumra megszorítva egy λ indexű kvadratikus alak. Ezek szerint $\nu(S)$ struktúracsoportja redukálható az $O(\lambda, n-p+1-\lambda) \subset GL(n-p+1)$, a $Q_\lambda\colon \mathbb{R}^{n-p+1} \to \mathbb{R}$, $Q_\lambda(x_1, \ldots, x_{n-p+1}) = -x_1^2 - \ldots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \ldots + x_{n-p+1}^2$ kvadratikus alakot megőrző ortogonális csoportra, amelyről pedig ismert, hogy maximális kompakt részcsoportja (amelyre a struktúracsoport tovább-redukálható) nem más, mint $O(\lambda) \times O(n-p+1-\lambda)$.

Ha $2\lambda = n-p+1$, akkor az előzőhöz hasonlóan azt találjuk, hogy $\nu(S)$ struktúracsoportja redukálható a

$$G' = \{\, \varphi \in GL(n-p+1) : Q_\lambda \circ \varphi = aQ_\lambda \text{ valamely } a \in \mathbb{R}^* \text{ mellett} \,\}$$

csoportra. Könnyen látható, hogy $G' \cong (O(\lambda,\lambda) \rtimes \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{R}_+$, ahol $\mathbb{R}_+$ a pozitív valós számok multiplikatív csoportja, és azt sem nehéz bebizonyítani, hogy ennek a maximális kompakt részcsoportja éppen $\{O(\lambda) \times O(\lambda)\} \rtimes \mathbb{Z}_2$; ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Jelölje $\mathbb{Z}_r < SO(2)$ a $\frac{2\pi}{r}$ szögű elforgatás által generált részcsoportot.

5.2.7. Lemma. *Legyen $\xi\colon E \to B$ egy $\mathbb{R}^2$-nyaláb, amelynek struktúracsoportja $\mathbb{Z}_r$-re redukálható. Ha $H^2(B;\mathbb{Z})$-ben nincsen r-torzió elem, akkor ξ triviális.*

Bizonyítás. Legyenek $B\mathbb{Z}_r$ és $BSO(2)$ a $\mathbb{Z}_r$-, illetve $SO(2)$ struktúracsoportú nyalábok klasszifikáló terei. Mivel $\mathbb{Z}_r \subset SO(2)$, azért létezik az $\iota\colon B\mathbb{Z}_r \to BSO(2)$ kanonikus leképezés. Legyen $\alpha_\xi\colon B \to BSO(2)$ a ξ-nek megfelelő $[B, BSO(2)]$-beli homotópiaosztály egy eleme. A feltétel szerint létezik egy olyan $\beta_\xi\colon B \to B\mathbb{Z}_r$ folytonos leképezés, melyre α_ξ és $\iota \circ \beta_\xi$ homotópak. Legyen $e \in H^2(BSO(2);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ az a generátor, amelyre (és a ξ nyaláb $e(\xi)$ Euler-osztályára) $e(\xi) = \alpha_\xi^* e = \beta_\xi^* \iota^* e$; mivel $H^2(B\mathbb{Z}_r;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_r$, azért[2] $re(\xi) = r\beta_\xi^*\iota^* e = \beta_\xi^* r\iota^* e = \beta_\xi^* 0 = 0$, amiből feltételünk szerint az következik, hogy $e(\xi) = 0$, amint az bizonyítandó volt. $\square$

---

[2] A $B\mathbb{Z}_r$ tér, amely természetesen csak homotopikus ekvivalencia erejéig van meghatározva, előáll a következőképpen. A $\mathbb{Z}_r$ csoport hat az $S^{2m-1} = \{\, (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_1|^2 + \ldots + |z_m|^2 = 1 \,\} \subset \mathbb{C}^m$ egységgömbön $(a^q, (z_1, \ldots, z_m)) \mapsto (\varepsilon^q z_1, \ldots, \varepsilon^q z_m)$ által, ahol a a $\mathbb{Z}_r$ egy rögzített generátora, ε pedig rögzített primitív r-edik egységgyök. Ez a hatás kiterjed a páratlan dimenziós gömbök induktív limeszeként standard módon előálló S^∞ CW-komplexusra; a keletkező faktortér $B\mathbb{Z}_r$. Ebből az előállításból egy CW-struktúra is adódik $B\mathbb{Z}_r$-en, amelynek 4-(valójában 3-)váza az $L = S^3/\mathbb{Z}_r$ lencse-tér. Ezért $H^2(B\mathbb{Z}_r;\mathbb{Z}) \cong H^2(L;\mathbb{Z}) \cong H_1(L;\mathbb{Z}) \cong \pi_1(L)/[\pi_1(L), \pi_1(L)] \cong \mathbb{Z}_r/[\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}_r] \cong \mathbb{Z}_r$.

5.2.8. Állítás. *Legyen $f\colon M^n \to N^{n-1}$ egy irányítható zárt sokaság sima leképezése és S ennek egy 1 indexű hajtás-komponense.*

(1) *Ha S irányítható és $H^2(S;\mathbb{Z})$-ben nincsen 4-torzió elem, akkor $\nu(S)$ triviális.*

(2) *Ha S nem irányítható és $\omega\colon \tilde{S} \to S$ az irányítható kettős fedése, továbbá $H^2(\tilde{S};\mathbb{Z})$ nem tartalmaz 4-torziót, akkor $\omega^*\nu(S)$ triviális.*

Bizonyítás. (1) esetében, mivel M és S irányíthatóak, azért $\nu(S)$ is az, emiatt és az 5.2.6. Állítás miatt tehát struktúracsoportja $SO(2) \cap (\{O(1) \times O(1)\} \rtimes \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_4$-re redukálható. Az 5.2.7 Lemmát felhasználva tehát készen vagyunk. (2)-re térve, itt is elegendő bebizonyítani, hogy $\omega^*\nu(S)$ struktúracsoportja $\mathbb{Z}_4$-re redukálható. Mivel $\nu(S)$ totális tere (M-be ágyazható lévén) irányítható, azért $\omega^*\nu(S)$-é is az és így $\omega^*\nu(S)$ irányítható (mert $\tilde{S}$ az). Másrészt, az 5.2.6. Állítás most is alkalmazható, tehát $\nu(S)$, és így $\omega^*\nu(S)$ struktúracsoportja is redukálható $\{O(1) \times O(1)\} \rtimes \mathbb{Z}_2$-re. □

Speciálisan, $n = 4$ esetén a következő adódik.

5.2.9. Következmény. *Legyen M^4 irányított, $f\colon M^4 \to N^3$ sima leképezés és $S \subset M$ ennek egy 1 indexű hajtás-komponense. Ekkor az $S \cdot S$ önátmetszési szám 0.*

Bizonyítás. Ha S irányítható, akkor $H^2(S;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ és az állítás nyilvánvaló az 5.2.8. Állításból. Ha S nem irányítható és $\omega\colon \tilde{S} \to S$ az irányítható kettős fedése, akkor (mivel S be van ágyazva M-be) $S \cdot S = \frac{1}{2}\tilde{S} \cdot \tilde{S}$, ahol $\tilde{S} \cdot \tilde{S}$ a **0**-szelés önátmetszési száma $\omega^*\nu(S)$-ben (amelyet $\nu(S)$ irányításának visszahúzásával irányítunk). Másfelől, mivel $H^2(\tilde{S};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, $\omega^*\nu(S)$ triviális és így $\tilde{S} \cdot \tilde{S} = 0$. □

5.2.10. Tétel. *Legyen M zárt 4-sokaság, melyre $H_*(M;\mathbb{Z}) \cong H_*(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})$. Ekkor nem létezik $f\colon M \to \mathbb{R}^3$ hajtás-leképezés.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy mégis létezik egy ilyen f leképezés. Állítsuk elő $S(f)$-et $S(f) = S_d(f) \cup S_i(f)$ alakban, ahol $S_d(f)$ a definit (0 vagy 2 indexű), $S_i(f)$ pedig az indefinit (1 indexű) hajtás-szingularitások halmaza. $S_d(f)$ és $S_i(f)$ M-be ágyazott felületek; vegyük észre, hogy $S_d(f)$ irányítható és így egy $[S_d(f)] \in H_2(M;\mathbb{Z})$ elemet reprezentál, ugyanis az $f\big|_{S_d(f)}$ immerzió normálnyalábja az 5.2.5. Lemma szerint triviális és $\mathbb{R}^3$ irányítható. Mivel $H_4(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, azért M irányítható, rögzíthetjük tehát egy tetszőleges irányítását. Az 5.2.9. Következmény alapján $S_i(f) \cdot S_i(f) = 0$. Másrészről, az 5.2.3. Tétel szerint $S(f) \cdot S(f) \equiv -\sigma(M) \pmod 4$, tehát $-\sigma(M) \equiv$

$S(f)\cdot S(f) = S_d(f)\cdot S_d(f) + S_i(f)\cdot S_i(f) = S_d(f)\cdot S_d(f) \pmod 4$. Ha a a $H^2(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ csoport egy generátora és $[S_d(f)] \in H_2(M;\mathbb{Z})$ Poincaré-duálisa la ($l \in \mathbb{Z}$), akkor $S_d(f)\cdot S_d(f) = \langle la \cup la, [M]\rangle = l^2\langle a \cup a, [M]\rangle = l^2\sigma(M)$, amit az iménti kongruenciába helyettesítve $-\sigma(M) \equiv l^2\sigma(M) \pmod 4$, azaz $-1 \equiv l^2 \pmod 4$ adódik, ami ellentmondás. $\square$

5.3 Egyszerű hajtás-leképezések

A 5.1.1. Sejtésnek még egy fontos részeredményét fogjuk bebizonyítani. A tételben szerepelni fog az alábbi fogalom.

5.3.1. Definíció. Legyen $f\colon M \to N$ sima leképezés. Az $x \in S(f)$ pontot *egyszerűnek* nevezzük, ha az $f^{-1}(\{f(x)\})$ halmaz x-et tartalmazó összefüggő komponense $S(f)$-et csak x-ben metszi. Maga az f leképezés *egyszerű*, ha minden szingularitása egyszerű.

Például, az 5.1.2. Példában megkonstruált leképezés egyszerű. Továbbá egyszerű minden speciális generikus leképezés, ugyanis egy ilyen f esetén bármely x szingularitásra az $f^{-1}(\{f(x)\})$-nek x-et tartalmazó összefüggő komponense $\{x\}$. A következő fogalom alapvető fontosságú hajtás-leképezések vizsgálatánál.

5.3.2. Definíció. Legyen $f\colon M \to N$ sima leképezés. Vezessük be a következő relációt (amely nyilván ekvivalencia-reláció) M-en: $x \sim y$, ha $f(x) = f(y)$, továbbá x és y az $f^{-1}(\{f(x)\})$-nek ugyanahhoz az összefüggőségi komponenséhez tartoznak. A $W_f := M/\sim$ topologikus teret M *Stein-faktorizáltjának*, a $q_f\colon M \to W_f$ faktor-leképezést pedig az *f-hez tartozó Stein-faktorizációnak* nevezzük.

Az egyszerű leképezések fontos tulajdonsága, hogy ilyeneknél a Stein-faktorizáció megszorítása a szinguláris halmazra beágyazás. Bármely olyan f-re, melyre $\dim M \geqq \dim N$, a $q_f(\Sigma^0(f)) \subset W_f$ halmaz egy p-dimenziós sokaság. A szinguláris pontok képeinek környezetében azonban W_f általában nem rendelkezik sokaság-struktúrával, még egyszerű leképezések, sőt, egyszerű hajtás-leképezések esetén sem. Ez utóbbi esetben azonban kielégítő leírást kaphatunk W_f-ről (ld. [Le4]-et, illetve az 5.3.4. Állítást); ehhez lesz szükség a következő fogalomra.

5.3.3. Definíció. Legyen $f\colon M^n \to N^p$ stabil leképezés, ahol $n \geqq p$ és $x \in \Sigma^{1,0}(f)$. Ha $J \subset N$ elegendően kicsiny sima, $f(x)$-et belsejében tartalmazó, $T_xf(T_xM)$-re transzverzális görbedarab, akkor az $f^{-1}(J)$ halmaz x-et tartalmazó T komponense és bármely hasonló tulajdonságú $J' \subset J$

ívdarabhoz tartozó hasonlóan definiált T' halmazok peremes sokaságok és diffeomorfak; T-t az x-hez tartozó *transzverzális sokaságnak* nevezzük.

Jelöljük I-vel a $[0,1]$ szakaszt, Y-nal pedig az $\bigcup_{j=0}^{2}\{\, t(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^j : t \in \mathbb{R}\,\} \subset \mathbb{C}$ topologikus teret.

5.3.4. Állítás. *Legyen $f\colon M^n \to N^p$ stabil leképezés ($n \geqq p$) és $x \in M$ egy egyszerű hajtás-szingularitás. Jelölje továbbá $U \subset S(f)$ az x egy elég kis környezetét, $U^* \subset M$ pedig $S(f)$ egy elég kis zárt csőszerű környezetének „U feletti részét” (azaz, a csőszerű környezetet a normálnyaláb golyónyalábjával azonosítva, az U inverz képét a nyaláb-projekciónál). Legyen végül $V = q_f(U^*)$.*

(1) *Ha $n-p+1=1$, akkor $(V, q_f(U)) \cong (U\times I, U\times\{\frac{1}{2}\})$.*

(2) *Ha $n-p+1=2$, akkor*

  (a) *ha $\lambda=0$ vagy 2, akkor $(V, q_f(U)) \cong (U\times I, U\times\{0\})$.*

  (b) *ha $\lambda=1$, akkor $(V, q_f(U)) \cong (U\times I, U\times\{\frac{1}{2}\})$ vagy $(V, q_f(U)) \cong (U\times Y, U\times\{0\})$.*

(3) *Ha $n-p+1 \geqq 3$, akkor*

  (a) *ha $\lambda=0$ vagy $n-p+1$, akkor $(V, q_f(U)) \cong (U\times I, U\times\{0\})$.*

  (b) *ha $\lambda=1$ vagy $n-p$, akkor $(V, q_f(U)) \cong (U\times I, U\times\{\frac{1}{2}\})$ vagy $(V, q_f(U)) \cong (U\times Y, U\times\{0\})$.*

  (c) *ha $2 \leqq \lambda \leqq n-p-1$, akkor $(V, q_f(U)) \cong (U\times I, U\times\{\frac{1}{2}\})$.*

Bizonyítás. Az Állítás a szemi-euklideszi vektorterek ismert tulajdonságaiból és egyszerű megfontolásokból következik. Azt kell ugyanis megvizsgálni, hogy a $(d^2 f)_x$ kvadratikus függvény $\mathbf{0}$-helyeinek halmaza hány összefüggőségi komponensre bontja a $\nu_x(U)$ értelmezési tartományt, illetve, hogy az U^* megfelelő fibrumával történt azonosítás után ezek közül a részek közül melyek köthetőek össze egymással q_f egy alkalmas szinthalmazában (pl. az x-hez tartozó T transzverzális sokaság egy peremkomponensében) haladó úttal. Az Állításnak az $n-p+1 \geqq 2$, ezen belül a definit esetekre vonatkozó részei ezek után triviálisak, hiszen ott a $\mathbf{0}$-halmaz egyelemű, így a „felbontás” 1 részre történik. Ha $n-p+1=1$, azaz $n=p$, akkor először 2 komponensünk van, amelyek meg is maradnak; ebben az esetben ugyanis stabil leképezésekre $(W_f, q_f) \cong (M, \mathrm{id}_M)$. Ha $n-p+1=2$ és $\lambda=1$, akkor a felbontás 4 részre történik (ugyanis $(d^2 f)_x$ alkalmas bázisokban $x_1^2 - x_2^2$ alakú), azt kell tehát csak megmutatnunk, hogy ezek közül legalább 2 a mondott módon összeköthető. Ebben az esetben T egy peremes felület, amely x egy környezetében egy olyan körlappal diffeomorf, amelyből 4 szalag indul ki (az $x = y$, illetve $x = -y$ egyenletű egyenesek összesen 4 irányának megfelelően). Mivel x egyszerű, azért ezeknek a szalagoknak egymással találkozva kell egy peremes felületet alkotniuk. A J ívdarab ellenkező végpontjaiba képződő pontok természetesen nem lehetnek a peremben összeköthetőek; ennek alapján könnyű meggondolni, hogy lényegében csak két eset lehetséges: vagy a szemköztes szalag-párok találkoznak, együttesen egy Möbius-szalagot alkotva, vagy pedig szomszédos szalag-párok, csavarodás nélkül. Ezek pedig éppen a fenti két esetnek felelnek meg. Végül, ha $n - p + 1 \geqq 3$, akkor a kiindulási komponensek száma a (b) esetben 3, a (c) esetben pedig 2 és az indefinitség miatt nem lehet mindegyik mindegyikkel összeköthető. Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

A Fejezetet és magát a szakdolgozatot az alábbi gondolatmenettel zárjuk, amely jól illusztrálja a Stein-faktorizáció hasznosságát.

5.3.5. Tétel. *Legyen M zárt, irányítható és páratlan Euler-karakterisztikájú 4-sokaság, N pedig irányítható 3-sokaság. Ekkor nem létezik $f\colon M \to N$ hajtás-leképezés.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f mégis ilyen. Legyen S_i az f indefinit (1 indexű), S_d pedig a definit (0 vagy 2 indexű) hajtás-szingularitásainak a halmaza (felülete). Legyenek X_i, illetve X_d ezeknek elég kis zárt csőszerű környezetei M-ben, továbbá $Z_i = q_f(X_i)$ és $Z_d = q_f(X_d)$. Az 5.3.4. Állítás szerint $q_f(S_d) \subset \partial Z_d$ és Z_d egy S_d feletti I-nyaláb struktúrával rendelkezik. Az indefinit esetben fennálló két lehetőség közül most csak a második jöhet számításba, ugyanis M irányíthatósága miatt a transzverzális sokaságok (felületek) is irányíthatóak (ugyanis egy $S(f)$ feletti lokálisan triviális fibrálás fibrumai lévén, triviális az M-beli normálnyalábjuk). Ezek szerint Z_i egy S_i feletti kanonikus Y-nyaláb struktúrával rendelkezik. Vegyük észre, hogy a $W_f \setminus \operatorname{int} Z_i \setminus \operatorname{int} Z_d$ háromdimenziós peremes sokaság egy kobordizmus egy S_i-t háromszorosan fedő (nem feltétlenül összefüggő) felület, illetve S_d (pontosabban ezekkel diffeomorf felületek) között. Az ellentmondás onnan fog származni, hogy megmutatjuk: $\chi(S_d)$ páros, $\chi(S_i)$ pedig páratlan, a kobordizmus tehát egy páros és egy páratlan Euler-karakterisztikájú felület között áll fenn. Az előbbi igen egyszerű, hiszen $f\big|_{S_d}$ egy immerziója S_d-nek N-be és mivel N irányítható, S_d-nek is annak kell lennie. Másrészt, a 4.1.1. Lemma szerint $\chi(M) \equiv \chi(\overline{A_1(f)}) + \chi_f \chi(N) \pmod 2$, ahol persze $\chi(N) = 0$, tehát valóban $1 \equiv \chi(M) \equiv \chi(S(f)) \equiv \chi(S_d) + \chi(S_i) \equiv \chi(S_i) \pmod 2$. $\square$

Irodalomjegyzék

[An] Y. Ando, *On the higher Thom polynomials of Morin singularities*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 23 (1987.), 195-207.

[AVG] V. I. Arnold, A. N. Varcsenko és Sz. M. Guszejn-Zade, *Aszobennosztyi differencirujemüh atabrazsenyij*, Nauka, Moszkva, 1982.

[Au] M. Audin, *Quelques remarques sur les surfaces lagrangiennes de Givental*, Journal of Geometry and Physics 7 (1990.), 583-598.

[B] T. Bröcker, *Differentiable germs and catastrophes*, ford. L. Lander, London Math. Soc. Lect. Note Ser. 17, Cambridge Univ. Press, 1975.

[E] J. Èliašberg, *On singularities of folding type*, Math. USSR Izv. 4 (1970.), 1119-1134.

[F] T. Fukuda, *Topology of folds, cusps and Morin singularities*, A Fete of Topology (szerk. Y. Matsumoto, T. Mizutani és S. Morita), Academic Press, 1987., 331-353.

[Ga] T. Gaffney, *The Thom polynomials of* $\overline{\Sigma^{1111}}$, Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc. 40 (1983.), 399-408.

[GM] L. Guillou és A. Marin, *Une extension d'une théorème de Rohlin sur la signature*, C. R. Acad. Sci. Paris 285 (1977.), 95-98.

[He] R. J. Herbert, *Multiple points of immersed manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. 34, no.250, 1981.

[HC] D. Hilbert és S. Cohn-Vossen, *Szemléletes geometria*, ford. Strommer Gy., Gondolat Könyvkiadó Budapest, 1982.

[Hi] M. W. Hirsch, *Immersions of manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959.), 242-276.

[La] L. Lander, *The structure of the Thom-Boardman singularities of stable germs with type* $\Sigma^{2,0}$, Proc. London Math. Soc. 33 (1976.), 113-137.

[Le1] H. Levine, *Elimination of cusps*, Topology 3 (suppl. 2) (1965.), 263-296.

[Le2] H. Levine, *Mappings of manifolds into the plane*, Am. J. of Math. LXXXVIII no.2 (1966.), 357-365.

[Le3] H. Levine, *Stable maps: an introduction with low dimensional examples*, Bol. Soc. Bras. Mat. 7.2 (1976.), 145-184.

[Le4] H. Levine, *Classifying immersions into* $\mathbb{R}^4$ *over stable maps of 3-manifolds into* $\mathbb{R}^2$, Lecture Notes in Math. vol. 1157, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1985.

[Li] B. H. Li, *Generalization of the Whitney-Mahowald theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. 346 (1994.), 511-521.

[Ma] J. Mather, *Stability of* C^∞ *mappings : VI, The nice dimensions*, Proceedings of Liverpool Singularities - Symposium I, Lecture Notes in Math. vol. 192, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1971., 207-253.

[Mill] K. C. Millett, *Generic smooth maps of surfaces*, Topology Appl. 18 (1984.), 197-215.

[Miln] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1963.

[MS] J. W. Milnor és J. Stasheff, *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Study 76, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1974.

[Mo] B. Morin, *Formes canoniques des singularités d'une application différentiable*, C. R. Acad. Sci. Paris 260 (1965.), 5662-5665, 6503-6506.

[MT] R.E Mosher és M. C. Tangora, *Cohomology operations and applications in homotopy theory*, Harper & Row, New York-Evanston-London, 1968.

[O] T. Ohmoto, *A geometric approach to Thom polynomials for smooth stable mappings*, J. London Math. Soc. 47 (1993.), 157-166.

[Pa] C. Pappas, *Extensions of codimension one immersions*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996.), 3065-3083.

[Po] I. R. Porteous, *Simple singularities of maps*, Proceedings of Liverpool Singularities - Symposium I, Lecture Notes in Math. vol. 192, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1971., 286-307.

[Roh] V. A. Rohlin, *Proof of a conjecture of Gudkov*, Functional Anal. Appl. 6 (1972.), 62-64.

[Ron] F. Ronga, *Le calcul des classes duales aux singularités de Boardman d'ordre deux*, Comment. Math. Helv. 47 (1972.), 15-35.

[Sae1] O. Saeki, *Notes on the topology of folds*, J. Math. Soc. Japan 44 (1992.), 551-566.

[Sae2] O. Saeki, *Studying the topology of Morin singularities from a global viewpoint*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 117 (1995.), 223-235.

[SS] O. Saeki és K. Sakuma, *Stable maps between 4-manifolds and elimination of their singularities*, preprint, 1995.

[Sak] K. Sakuma, *On special generic maps of simply connected $2n$-manifolds into* $\mathbb{R}^3$, Topology Appl. 50 (1993.), 249-261.

[Sz] Szűcs. A., *Note on double points of immersions*, Manuscripta Math. 76. (1992.), 251-256.

[T] R. Thom, *Les singularités des applications différentiables*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 6 (1955-56.), 43-87.