Szimplektikus részsokaság Stein komplementummal

szakdolgozat

készítette
Varjú Tamás

témavezető
Stipsicz András

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Szimplektikus sokaságokkal foglalkozik ezen dolgozat nagy része. Ez a sokaságosztály azért lehet érdekes a matematikusok számára, mert a szimplektikus struktúra jelenléte megszorítást jelent a sokaság sima struktúrájára. (Ezek a feltételek még nincsenek pontosan tisztázva.) Reménykedhetünk abban, hogy ez az osztály elég szűknek bizonyul ahhoz, hogy a szimplektikus sokaságokat osztályozni lehessen, de elég gazdag ahhoz, hogy ez az osztályozás érdekes legyen a differenciáltopológusoknak. (Darboux tétele szerint egy szimplektikus sokaság lokálisan olyan, mint $\mathbb{R}^n$ a standard struktúrával, tehát olyasmi, mint a lapos metrika Riemann-sokaságokra, aminek erős topológiai következményei vannak, olyan erősek, hogy a lapos Riemann-sokaságok topológiai szempontból már nem is érdekesek.) Szimplektikus sokaságra számos példa akad, ezek a fizikusok számára sem érdektelenek, hiszen a Hamilton modell szerint ezek a klasszikus mechanika alapobjektumai. (A Hamilton-féle modell egy sima sokaság koérintőnyalábjáról szól, de a mechanikai elmélet csak a szimplektikus struktúrát használja.) Számos ebben a dolgozatban is felbukkanó fogalom egy ma a fizikai matematika homlokterében lévő elméletben a geometriai kvantálásban is fontos szerepet játszik. (A második fejezetben taglalt Kähler sokaság és a harmadikban alapvető fontosságú előkvantáló nyaláb.) Ez az elmélet arról szól, hogy hogyan lehet a klasszikus mechanika hamiltoni modelljéből megkonstruálni egy kvantummechanikai modellt.

A Kähler sokaságok természetes példák szimplektikusokra. Ezek topológiájára számos feltétel ismert (például páratlan indexű Betti-számok párosak). Kodaira beágyazási tétele szerint, ha a szimplektikus forma (ez esetben Kähler forma) egy egész kohomológiaelemet reprezentál, akkor a sokaság valamilyen N-re $\mathbb{CP}^N$ holomorf része. (Chow tétele szerint ekkor polinommal definiálható, tehát alkalmazhatók a klasszikus algebrai geometria tételei.) Vegyük észre, hogy $\mathbb{CP}^N$ holomorf részsokaságát egy általános helyzetű hipersíkkal elmetszve 1 kodimenziós holomorf részsokaságot kapunk, ami előáll, mint egy vonalnyaláb szelésének nullhelye. (Egy hipersík egy vonalnyalábot definiál, ezt kell megszorítani a sokaságra.) Ezt a tételt általánosítja Donaldson szimplektikus sokaságokra.

1.0.1. Tétel. *Legyen (V, ω) kompakt, szimplektikus sokaság, és tegyük fel, hogy $[\omega/2\pi] \in H^2(V;\mathbb{Z})$. Ekkor elég nagy k-ra ezen osztály k-szorosának Poincaré-duálisa szimplektikus részsokasággal reprezentálható.*

A bizonyítás hasonló, egy megfelelő vonalnyalábra (ez lesz az ún. előkvantáló nyaláb) keresünk ez esetben közelítőleg holomorf szelést.

1.0.2. Megjegyzés. *Két szelést véve definiálhatunk egy $\mathbb{CP}^1$-be mutató $f = s_1/s_2$ függvényt, ami nem definiált az $s_2 = s_1 = 0$ pontokban. Ezeket felfújva van egy $f : X' \to \mathbb{CP}^1$ függvényünk. Ezt Lefschetz fibrálásnak nevezik, és általános s_i-ket véve egy komplex Morse-függvény lesz. (Komplex kvadratikus kritikus pontjai lesznek.) Gompf szerint ez fordítva is igaz: egy komplex Morse-függvény ad egy szimplektikus struktúrát. Ez azt mutatja, hogy talán a szimplektikus sokaságok osztályozásához vezető út valamiféle komplex Morse elmélet: a sokaság felépítéséhez mindössze a fibrumot (ez egy 2n-2 dimenziós szimplektikus) és annak szingularitásait kell ismernünk. Ma még az $n = 2$ eset sem ismert, itt Riemann-felületeket kell vizgálni.*

Térjünk vissza az $X \subset \mathbb{CP}^N$ szituációhoz. Ha kivágunk egy hipersíkot, akkor a befoglaló térből $\mathbb{C}^N$ marad, tehát a fent megkonstruált részsokaság komplementere beágyazódik $\mathbb{C}^N$-be. A komplex beágyazások elmélete a maximum elv miatt kettéválik kompakt és nem kompakt sokaságokra, kompakt sokaság zárt analítikus része $\mathbb{CP}^N$-nek, ha a sokaság Kähler (és a Kähler forma egész), nyílt sokaság zárt analítikus része $\mathbb{C}^N$-nek, ha a sokaság Stein. Ez az osztály szintén klasszikus része a komplex geometriának. Meglepő tulajdonsága azonban, hogy (a 4 dimenziós esettől eltekintve) topológiailag karakterizálható:

1.0.3. Tétel. *Egy $n > 4$ dimenziós majdnem komplex sokaság pontosan akkor Stein, ha van rajta egy olyan valódi Morse függvény, aminek minden kritikus pontjában az indexe $n/2$-nél nem több.*

Donaldson eredményéből az is következik, hogy szimplektikusokra is igaz ez a szituáció, hogy kivágva a megkonstruált részsokaságot a maradék Stein.

A dolgozat célja az itt kimondott tételek feldolgozása, megértése, a szükséges háttérismeretek feltérképezése és feldolgozása. Először a szimplektikuson bevezethető „majdnem-Kähler" struktúrát vizsgáljuk, bebizonyítjuk azokat a fontosabb azonosságokat, amelyek a Kählerekhez hasonlatossá teszik, és kimondjuk azokat, melyekben különbözik. Ezután rátérünk Donaldson eredményének ismertetésére, majd az Eliashberg féle Stein-karakterizáció következik Morse elmélettel.

2. fejezet

Majdnem komplex struktúra szimplektikus sokaságon

2.1. Szimplektikus és majdnem komplex struktúrák fogalma, kompatibilitása

Ebben a szakaszban a szimplektikus struktúra és a majdnem komplex struktúra fogalmát fogjuk bevezetni, majd ezek kompatibilitását vizsgálni. Bebizonyítjuk, hogy minden szimplektikus sokaságon van kompatibilis majdnem komplex struktúra.

Egy valós vektortéren egy bilineáris ferdén szimmetrikus, nem elfajuló formát szimplektikus formának hívunk. Egy valós vektortéren komplex struktúrának hívunk egy automorfizmust, ha négyzete $-I$ (I az identitást jelöli). Egy sima sokaság felett ehhez még geometriai feltételeket is hozzáteszünk, maradjunk azonban még a lineáris algebránál. A kompatibilitás ötlete abból a gondolatból származik, hogy ezek együtt egy hermitikus komplex vektorteret határozzanak meg. Ennek az indíttatásáról szintén később lesz szó.

Adott tehát egy 2n dimenziós valós vektortér, amit szeretnénk hermitikus komplex vektortérré tenni. Ehhez egy J komplex struktúrára van szükségünk, valamint egy $h = g + i\omega$ $\mathbb{R}$-bilineáris, nem elfajuló formára melyek kielégítik az alábbi egyenleteket:

$$J^2 = -I \quad h(x, y) = \overline{h(y, x)} \quad h(Jx, y) = -ih(x, y) \quad h(x, x) > 0 \;\; (x \neq 0)$$

Ezeket egy rögzített valós bázis mellett mátrixegyenletekké alakítva a középső kettőből a

$$g^T = g \quad \omega^T = -\omega$$

illetve a

$$J^T g = \omega \quad J^T \omega = -g$$

kissé redundáns formulahalmazt kapjuk. Az utolsó segítségével bármelyik kettőből kifejezhető a harmadik, és így vele együtt a rá kirótt feltételek. Így a hermitikus vektortér struktúrát meghatározza két valós lineáris, illetőleg bilineáris struktúra a következőképpen: Ha adott J és ω és a

$$J^2 = -I \quad \omega^T = -\omega \quad J^T \omega J = \omega \quad \omega J > 0$$

feltételek teljesülnek, akkor $g = \omega J$ definícióval, ha J és g adott, valamint

$$J^2 = -I \quad g^T = g \quad g > 0 \quad J^T g J = g$$

igazak, akkor az $\omega = J^T g$ definícióval, ha pedig g és ω adott, valamint

$$g^T = g \quad g > 0 \quad \omega^T = -\omega \quad \omega^{-1} g = -g^{-1} \omega$$

teljesülnek, akkor pedig a $J = \omega^{-1} g$ definícióval kapjuk meg a kívánt harmadik struktúrát.

Minket persze az első eset fog érdekelni. Tekintsük mindezt egy V páros dimenziós sokaság érintőnyalábján! Ha $T(V)$-vel jelölöm V sokaság érintőnyalábját, akkor majdnem komplex struktúrának nevezem az $Aut_{\mathbb{R}}(T(V))$ fibrumonkénti lineáris automorfizmusok által alkotott nyaláb egy sima szelését, amely minden pont feletti érintőtéren komplex struktúra. (Ahhoz, hogy ez geometriai értelemben is komplex struktúra legyen egy további feltétel szükséges, erről később.) Egy ω 2-formát (differenciálformát) szimplektikusnak hívunk, ha zárt ($d\omega = 0$) és minden érintőtérre megszorítva szimplektikus Az előbbi feltételt csak később fogjuk használni, egyelőre csak a lineáris algebrai kompatibilitást fogalmazzuk át sokaságokra.

Rögzített J majdnem komplex struktúra és ω szimplektikus forma

$$\omega(Jx, Jy) = \omega(x, y) \quad \omega(x, Jx) > 0 \;\; (x \neq 0)$$

esetén $g(x, y) = \omega(x, Jy)$, adott g metrikus tenzor és J majdnem komplex struktúra

$$g(Jx, Jy) = g(x, y)$$

esetén $\omega(x, y) = g(Jx, y)$, g metrikus tenzor és ω szimplektikus forma

$$\tilde{\omega}^{-1} \circ \tilde{g} = -\tilde{g}^{-1} \circ \tilde{\omega}$$

esetén $J = \tilde{\omega}^{-1}\tilde{g}$ a kívánt harmadik struktúra, ahol

$$\tilde{g} : V \longrightarrow V^* \;\; x \longmapsto g(.,x)$$

$$\tilde{\omega} : V \longrightarrow V^* \;\; x \longmapsto \omega(.,x)$$

szokásos azonosító izomorfizmusok.

2.1.1. Tétel. *Minden (V,ω) szimplektikus sokasághoz létezik ω-val kompatibilis majdnem komplex struktúra.*

bizonyítás: Azt fogjuk belátni, hogy a kompatibilis majdnem komplex struktúrák egy pontrahúzható fibrumú nyalábot alkotnak V felett. Ehhez elég egy rögzített pont felett, vagyis egy érintőtéren vizsgálódni. Tekintsük azt a bázist, amiben ω ebben az érintőtérben a standard. (Ilyen bázis létezését a szimplektikus ortogonalizáció biztosítja.) Ebben a bázisban vett standard komplex struktúrát jelöljük J_0-val! Azt látjuk be, hogy a

$$J \to (J+J_0)^{-1}(J-J_0)$$

Cayley transzformáció az ω-val kompatibilis komplex struktúrákat

$$\left\{ S \mid J_0S + SJ_0 = 0 \quad \|S\| < 1 \quad S^T = S \right\}$$

golyóba képezi.

A fenti Cayley transzformáció jól definiált, mert $\omega(x,(J+J_0)x) > 0$, ha $x \neq 0$ tehát $J + J_0$ invertálható. Legyen $A = J_0^{-1}J$, ekkor J képe

$$S = (J+J_0)^{-1}(J-J_0) = (A+I)^{-1}(A-I)$$

$$\|S\| < 1 \iff \|Ax - x\|^2 < \|Ax + x\|^2 \quad x \neq 0.$$

Ez a feltétel teljesül, mert

$$\begin{aligned}
\|Ax+x\|^2 - \|Ax-x\|^2 &= \omega(J_0^{-1}Jx + x, J_0J_0^{-1}Jx + J_0x) \\
&\quad -\omega(J_0^{-1}Jx - x, J_0J_0^{-1}Jx - J_0x) \\
&= \omega(Jx, J_0Jx) + \omega(J_0x, J_0Jx) + \omega(x, Jx) \\
&\quad +\omega(x, J_0x) - \omega(Jx, J_0Jx) + \omega(J_0x, J_0Jx) \\
&\quad +\omega(x, Jx) - \omega(x, J_0x) \\
&= 4\omega(x, Jx) > 0
\end{aligned}$$

Mivel $\|S\| < 1$, ezért $I - S$ invertálható, tehát

$$J = J_0(I+S)(I-S)^{-1}$$

jól definiált. Ez a leképezés a fenti $J \to S$ inverze, amit könnyebben látni, ha ismét A-val írjuk fel a képleteket:

$$A = (I+S)(I-S)^{-1}.$$

Azt kell belátni, hogy ezek kompozíciója az identitás:

$$\begin{aligned}
(I+(A+I)^{-1}(A-I))(I-(A+I)^{-1}(A-I))^{-1} &= \\
(A+I)^{-1}((A+I)+(A-I))((A+I)^{-1}((A+I)-(A-I)))^{-1} &= \\
(A+I)^{-1}2A\frac{1}{2}I(A+I) &= A
\end{aligned}$$

A kölcsönös egyértelműség belátásához az kell még, hogy az inverz képe a kompatibilis majdnem komplex struktúrák tere, vagyis: $J^2 = -I$, illetve $\omega(Jx, Jy) = \omega(x, y)$, valamint, hogy $\omega(x, Jx) > 0$. A fentiek alapján ez utóbbi következik abból, hogy S normája kisebb mint 1. Megmutatjuk, hogy az első tulajdonság $J_0S + SJ_0 = 0$ egyenlettel ekvivalens, és hogy a második S szimmetrikusságával:

$$\begin{aligned}
0 &= J_0S + SJ_0 \\
&= J_0(A+I)^{-1}(A-I) + (A+I)^{-1}(A-I)J_0 \qquad /(A+I)\circ \\
0 &= (A+I)J_0(A+I)^{-1}(A-I) + (A-I)J_0 \\
&= (A+I)J_0(A+I)^{-1}(A+I) - 2(A+I)J_0(A+I)^{-1} + (A-I)J_0 \\
&= (A+I)J_0 - 2(A+I)J_0(A+I)^{-1} + (A-I)J_0 \qquad /\circ(A+I) \\
0 &= (A+I)J_0(A+I) - 2(A+I)J_0 + (A-I)J_0(A+I) \\
&= 2AJ_0A - 2J_0 \\
&\iff AJ_0AJ_0 = -I \\
&\iff J^2 = -I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega(Jx, Jy) &= \omega(J_0(I+S)(I-S)^{-1}x, J_0(I+S)(I-S)^{-1}y) \\
&= \omega((I+S)(I-S)^{-1}x, (I+S)(I-S)^{-1}y)
\end{aligned}$$

Ha alkalmazzuk az $I - S$ automorfizmust, akkor azt kapjuk, hogy ez a tulajdonság a

$$\omega((I-S)x, (I-S)y) = \omega((I+S)x, (I+S)y)$$

-nal ekvivalen, amit ha az egyenletet a bilinearitás alapján szétbontjuk, akkor az

$$\omega(Sx, y) + \omega(x, Sy) = 0$$

egyenletet kapjuk. Ezt mátrixegyenletként felírva: $SJ_0 + J_0S^T = 0$. (ω mátrixa ugyanaz, mint J_0-é) a fenti $SJ_0 + J_0S = 0$ egyenlettel egybevetve azt kapjuk, hogy S szimmetrikus. □

2.2. A majdnem komplex geometria alapfogalmai

Egy valós vektorteret egy komplex struktúrával most az egyszerűség kedvéért mindjárt komplex vektortérnek tekintek. Vegyük V komplex vektorterünk valós duálisának komplexifikáltját, vagyis $V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$-t. Ennek elemeire gondolhatunk, mint komplex értékű valós lineáris funkcionálokra. Ezt a teret feszíti a komplex lineáris funkcionálok altere $V^{*1,0}$ és a komplex antilineárisoké, vagy más néven konjugált lineárisoké $V^{*0,1}$, hiszen dimenzióik összege kiadja az egész tér dimenzióját, és nyilvánvaló hogy ha egy funkcionál egyszerre lineáris és antilineáris, akkor az csak azonosan nulla lehet. Tehát

$$V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V^{*1,0} \oplus V^{*0,1}$$

Definiálhatjuk továbbá a konjugálást, amely egy konjugált lineáris automorfizmus $V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$-n, felcseréli a két kitüntetett alteret. Így $V^{*1,0} \cong_{\mathbb{R}} V^{*0,1}$.

Nézzük most a külső algebrákat. $V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$-t $V^*_{\mathbb{C}}$-vel jelölve adódnak a következő természetes beágyazások:

$$\wedge V^{*1,0} \to \wedge V^*_{\mathbb{C}}$$

$$\wedge V^{*0,1} \to \wedge V^*_{\mathbb{C}}$$

Legyen $\wedge V^{*p,q}$ az az altere $V^*_{\mathbb{C}}$-nek, amelyet az $u \wedge w$ alakú elemek generálnak, ahol $u \in \wedge^p V^{*1,0}$ és $w \in \wedge^q V^{*0,1}$. Így adódik a következő kettős felbontás ($n = dim_{\mathbb{C}} V^{*1,0}$):

$$\wedge V^*_{\mathbb{C}} = \sum_{r=0}^{2n} \sum_{p+q=r} \wedge^{p,q} V^*.$$

Legyen X differenciálható m-sokaság, és legyen $T(X)^*_{\mathbb{C}} = T(X)^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ a koérintőnyaláb komplexifikáltja. Vegyük ennek a külső algebra nyalábját

$\wedge T^*(X)_{\mathbb{C}}$. Ennek a széléseit komplex értékű differenciálformáknak hívjuk. Ezekre kiterjeszthető a külső deriválás egyszerű komplex linearitással. Továbbra is igaz marad hogy $d^2 = 0$.

Tegyük fel, hogy (X, J) majdnem komplex sokaság. Ekkor alkalmazhatjuk rá a fenti lineáris algebrát. Jelölje $T^*(X)^{1,0}$, illetve $T^*(X)^{0,1}$ a megfelelő részнyalábokat. A fenti felbontásnak megfelelően:

$$\mathcal{E}^r(X) = \sum_{p+q=r} \mathcal{E}^{p,q}(X)$$

ahol

$$\mathcal{E}^{p,q}(X) = \mathcal{E}(X, \wedge^{p,q} T^*(X)).$$

($\mathcal{E}$ jelöli a mögötte zárójelben álló nyaláb széléseinek terét, de mint fent rövidíteni is fogunk bizonyos széléstereket, ez mindig értelemszerű.)

Legyen a homogén fokú differenciálformák projekciója:

$$\pi_{p,q} : \mathcal{E}^r(X) \to \mathcal{E}^{p,q}(X), \qquad p + q = r$$

Általában a d operátor

$$d : \mathcal{E}^{p,q}(X) \to \mathcal{E}^{p+q+1}(X) = \sum_{r+s=p+q+1} \mathcal{E}^{r,s}(x)$$

-be képez. Ezt vetítve definiálhatjuk

$$\begin{aligned} \partial : \mathcal{E}^{p,q}(X) &\to \mathcal{E}^{p+1,q}(X) \\ \bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(X) &\to \mathcal{E}^{p,q+1}(X) \end{aligned}$$

operátorokat. Precízen:

$$\begin{aligned} \partial &= \pi_{p+1,q} \circ d \\ \bar{\partial} &= \pi_{p,q+1} \circ d \end{aligned}$$

Ezekután kiterjeszthetjük lineárisan:

$$\mathcal{E}^*(X) = \sum_{r=0}^{\dim X} \mathcal{E}^r(X)$$

-re.

Válasszunk lokális koordinátázást $\{w_1, \dots, w_n\}$ a $T^*(X)^{1,0}$ nyalábnak. Ekkor $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ lokális koordinátázása $T^*(X)^{0,1}$-nek. (Bár a jelölés zavaró, különösen később válik majd azzá, itt ezek nem a sokaság koordinátafüggvényei, hanem 1-formák.) $\wedge^{p,q}T^*(X)$ koordinátázását pedig

$$\{w^I \wedge \bar{w}^J\}, \qquad |I| = p, \qquad |J| = q, \qquad (I, J \text{ szigorúan növekszik})$$

szolgáltatja.

Egy majdnem komplex struktúrát integrálhatónak, vagy más néven komplex struktúrának hívunk, ha vannak holomorf koordinátázások minden pont körül, tehát olyan $U \to \mathbb{C}^n$ lokálisan értelmezett diffeomorfizmusok, melyeknek a deriváltja komplex lineáris az érintőtereken. Egy rögzített pont körül jelöljük ezeket a koordinátafüggvényeket z_j $j = 1, \dots, n$-nel. Ekkor a fenti $\{w_1, \dots, w_n\}$ választható dz_j-nek $j = 1, \dots, n$.

2.2.1. Tétel. *Egy komplex sokaságon $d = \partial + \bar{\partial}$.*

bizonyítás: Legyen

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad j = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad j = 1, \dots, n$$

Ebből

$$dz_j = dx_j + i dy_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$d\bar{z}_j = dx_j - i dy_j, \quad j = 1, \dots, n$$

vagyis ha $s = \sum_{I,J} a_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J$ (p,q)-forma, akkor

$$\begin{aligned} ds &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{I,J} \left(\frac{\partial a_{IJ}}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial a_{IJ}}{\partial y_j} dy_j\right) \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{I,J} \frac{\partial a_{IJ}}{d z_j} dz_j \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J + \sum_{i=1}^{n} \sum_{I,J} \frac{\partial a_{IJ}}{d\bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J \end{aligned}$$

Az első tag $(p+1, q)$ típusú, így

$$\partial = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j} dz_j,$$

és hasonlóan

$$\bar{\partial} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$$

tehát $d = \partial + \bar{\partial}$. □

Ez a tétel visszafele is igaz:

2.2.2. Tétel (Newlander-Nirenberg). *Ha egy majdnem komplex struktúrára $d = \partial + \bar{\partial}$, akkor az integrálható.*

A bizonyításra ([NN57]) itt most nem térünk ki, de a tételt felhasználni sem fogjuk.

2.3. Kähler azonosságok

2.3.1. Definíció. *Egy komplex sokaságot Kähler sokaságnak hívunk, ha van az érintőtereken egy sima hermitikus pozitív definit skaláris szorzás, aminek imaginárius része, mint 2-forma zárt.*

A szimplektikus sokaság definíciójában ebből csak a nem elfajuló zárt 2-forma létezése maradt meg, de az előző szakasz vizsgálódásai azt mutatták, hogy a többi struktúra létét is tudjuk biztosítani, kivéve azt, hogy a majdnem komplex struktúra integrálható legyen, vagyis hogy a sokaság komplex. A két sokaságtípus közti analógia alkotja a szimplektikus topológia tekintélyes részét.

Ebben a szakaszban a Kähler azonosságokat fogjuk bebizonyítani szimplektikus sokaság fölötti hermitikus vektornyalábra. Ennek alkalmazásával már be lehetne bizonyítani fő tételünk egy gyengébb alakját ([Don90]), de ezzel itt most nem foglalkozunk. A Kähler azonosságok bizonyítása során egyetlen operátor kiszámítására koncentrálunk. Minden további azonosság ennek az egyszerű következménye lesz. Ez az operátor egy lineáris- és egy differenciál-operátor adjungáltjának a kommutátora. Először tehát bevezejük a lineáris operátorokat, majd megadjuk a skaláris szorzást, ami az adjungálást definiálja, végül a differenciáloperátort, előbb azonban rögzítsünk néhány jelölést:

Mindkét sokaságtípusban van tehát egy pozitív definit hermitikus skaláris szorzás az érintőtéren. Egy megfelelő bázisban ennek mátrixa az identitás. Jelölje a továbbiakban $z_1, \ldots, z_n$ ennek a bázisnak a duálisát a duális vektortér komplexifikáltjában. Ekkor h a szorzás a következő alakú:

$$h = \sum_{\mu} z_{\mu} \otimes \bar{z}_{\mu}.$$

Jelölje továbbá

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{\mu} z_\mu \wedge \bar{z}_\mu.$$

Ekkor

$$h = g - 2i\omega.$$

Jelölje z_ν valós és imaginárius részét rendre x_ν és y_ν, tehát

$$x_\nu = \frac{z_\nu + \bar{z}_\nu}{2}, \quad y_\nu = \frac{z_\nu - \bar{z}_\nu}{2i}.$$

Ebből az következik, hogy

$$\omega = \sum x_\mu \wedge y_\mu, \qquad \omega^n = n! x_1 \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge x_n \wedge y_n.$$

2.3.2. Definíció. *Legyen V valós, véges dimenziós irányított euklideszi vektortér $(e_1, \ldots, e_n)$ irányított, ortonormált bázissal és legyen $\wedge V = \sum_{p=0}^{n} \wedge^p V$ a külső algebra. A Hodge-féle $*$ operátor:*

$$* : \wedge^p V \longrightarrow \wedge^{n-p} V$$

$$*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = sgn(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_{n-p}) e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-p}}$$

lineáris kiterjesztése. (A fenti képletben $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_{n-p}$ az $1, \ldots, n$ elemek permutációja.)

Ez mindjárt megad nekünk egy kanonikus térfogati formát: $vol = *1$, más néven megadja $\wedge^n V$ egy bázisát. (Az imént azt láttuk be, hogy $\omega^n = n! vol$.) Ennek segítségével definiálhatunk egy hermitikus (pozitív definit, sesquilineáris) skaláris szorzást a külső algebra komplexifikáltján: legyen $\alpha, \beta \in \wedge^p V \otimes \mathbb{C}$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha \wedge * \bar{\beta}$$

A jobb oldal egy $\wedge^n V$-beli elem, amit a vol báziban felírva kapjuk meg a skaláris szorzatot. Legyen

$$\Pi_r : \wedge V \longrightarrow \wedge^r V$$

projekció, definiáljuk

$$w = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{nr+r} \Pi_r$$

operátort! Látható, hogy $** = w$. Közeledve célunk felé legyen most E egy komplex vektortér. A valós duális komplexifikáltjának külső algebráján (F) vehetjük az előző szakaszban bemutatott kettős felbontás tagjaira vetítő $\Pi_{p,q}$ projekciókat. Maga az eredeti vektortér komplex volt, a komplex struktúra hatását a kettős felbontásban könnyen felírhatjuk:

$$J = \sum i^{p-q} \Pi_{p,q}.$$

Vegyük észre, hogy $J^2 = w$. Legyen

$$L : \wedge^{p,q} F \longrightarrow \wedge^{p+1,q+1} F$$

$L(v) = \omega \wedge v$. A külső algebrán értelmezett skaláris szorzás segítségével vegyük L adjungáltját: $L^* = \Lambda$.

Legyen most E egy hermitikus vektornyaláb. Ekkor az E értékű formák között definiálhatunk egy $\mathcal{E}(\wedge^p T^*M \otimes E) \times \mathcal{E}(\wedge^q T^*M \otimes E) \longrightarrow \mathcal{E}(\wedge^{p+q} T^*M)$ szorzást:

$$\varphi_{\text{szelés}} \otimes \varphi_{\text{forma}} \wedge \psi_{\text{szelés}} \otimes \psi_{\text{forma}} = \langle \varphi_{\text{szelés}}, \psi_{\text{szelés}} \rangle_E \, \varphi_{\text{forma}} \wedge \bar{\psi}_{\text{forma}}$$

Definiáljunk egy hermitikus skaláris szorzást E értékű formák körében:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_M \varphi \wedge *\bar{\psi}$$

(A konjugálást a tenzorszorzat forma részében kell venni.)

Legyen ∇ egy unitér E konnexió. Terjesszük ki ∇-t a nyaláb értékű formákra a

$$d_E \varphi_{\text{szelés}} \otimes \varphi_{\text{forma}} = \nabla \varphi_{\text{szelés}} \wedge \varphi_{\text{forma}} + \varphi_{\text{szelés}} \otimes d\varphi_{\text{forma}}$$

formulával. Ekkor, mivel ∇ unitér volt

$$d(\varphi \wedge \psi) = d_E \varphi \wedge \psi + (-1)^p \varphi \wedge d_E \psi,$$

ahol φ p-forma. Ez mindjárt adódik ha a szereplő tagokat felbontjuk szelés és forma részekre.

2.3.3. Lemma. *E-értékű p-formán hatva a kiterjesztett konnexió adjungáltja:* $d_E^* = (-1)^{n+np+1} \bar{*} d_E \bar{*} = (-1)^{n+np+1} * d_E *$.

bizonyítás:

$$(d_E \varphi, \psi) = \int_M d_E \varphi \wedge *\bar{\psi} = \int_M d(\varphi \wedge \bar{*}\psi) - (-1)^{p-1} \int_M \varphi \wedge d_E * \bar{\psi},$$

Stokes tétele szerint az első tag eltűnik, és mivel $** = \bar{*}\bar{*} = w$, ezért

$$(d_E \varphi, \psi) = (-1)^p \int_M \varphi \wedge \bar{*}(\bar{*} w d_E \bar{*}) \psi = (-1)^{n+np+1} (\varphi, \bar{*} d_E \bar{*} \psi).$$

d_E valós operátor, amiből a kívánt második egyenlőség következik. $\square$

2.3.1. Egy lemma $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ reprezentációelméletéből

Szükségünk lesz a bizonyítás során egy reprezentációelméleti lemmára, amit itt most csak kimondok némi előkészítés után.

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-t a következő elemek generálják:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ezek a következő relációkat elégítik ki:

$$[X,Y] = H \quad [H,X] = 2X \quad [H,Y] = -2Y.$$

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, tehát $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ egy ábrázolásával, $\mathfrak{su}(2)$ is ábrázolódik. Most definiálunk egy elemet, aminek a képe fontos szerepet játszik majd a Kähler azonosságok bizonyításában. $\mathfrak{su}(2)$ egy valósak fölötti bázisa:

$$iH \quad X - Y \quad i(X+Y)$$

2.3.4. Definíció. *Tekintsük az $i(X+Y)$ által generált egyparaméteres részcsoportot $SU(2)$-ben. Ennek $\frac{\pi}{2}$-hez tartozó elemét Weyl féle elemnek hívjuk:*

$$w = \exp\left[\frac{i\pi}{2}(X+Y)\right] = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

2.3.5. Definíció. *Legyen ϱ $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ egy ábárzolása V véges dimenziós komplex vektortér felett. Ekkor $v \in V$ $(v \neq 0)$-t λ súlyú primitív elemnek hívjuk, ha $\varrho(H)v = \lambda v$ és $\varrho(X)v = 0$.*

Végül kimondom a lemmát, amiért szükségünk volt erre a kitérőre:

2.3.6. Lemma. *Legyen ϱ $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ egy n dimenziós irreducibilis ábrázolása, π a hozzá tartozó $SU(2)$ ábrázolás φ egy primitív n súlyú elem, ekkor:*

$$\pi(w)\varrho(Y)^k\varphi = i^n \frac{k!}{(n-k)!}\varrho(Y)^{n-k}\varphi.$$

bizonyítását lásd: [Wel80]

Mi a külső algebrán szeretnénk azonosságokat bizonyítani, ezért reprezentáljuk $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-t $\wedge F$-en a következőképp:

$$X \longmapsto \Lambda \quad Y \longmapsto L \quad H \longmapsto B,$$

ahol

$$B = \sum_{p=0}^{2n}(n-p)\Pi_p$$

Ennek jól definiáltsága könnyen belátható, vagyis hogy

$$[B, L] = -2L \quad [B, \Lambda] = 2\Lambda \quad [\Lambda, L] = B$$

Az ezen reprezentációhoz tartozó $SL(2, \mathbb{C})$ reprezentációnál a Weyl elem képe:

$$\sharp = \exp\left(\frac{i\pi}{2}(\Lambda + L)\right)$$

2.3.2. Néhány kommutátor

Legyen $(e_1, \ldots, e_{2n})$ valós irányított, ortonormált bázis, $e(\eta)\varphi = \eta \wedge \varphi$, könnyen ellenőrizhető, hogy

$$e^*(e_{j_1})(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}) = e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}, \tag{2.1}$$

ha $j_1 \notin (j_2, \ldots, j_k)$ és 0 egyébként. Világos, hogy $[L, e(\eta)] = 0$ minden külső algebrabeli η-ra, hiszen ω 2-forma. Másrészt

$$\begin{aligned} [\Lambda, e(x_\mu)] &= e^*(y_\mu), \\ [\Lambda, e(y_\mu)] &= -e^*(x_\mu). \end{aligned} \tag{2.2}$$

$\mu = 1, \ldots, n$ A második következik az elsőből, ha L definíciójában felcseréljük az x-eket és y-okat. Tehát lássuk az elsőt:

$$\begin{aligned} [\Lambda, e(x_j)] &= \sum_{\mu=1}^{n} e^*(y_\mu)e^*(x_\mu)e(x_j) - e(x_j)\sum_{\mu=1}^{n} e^*(y_\mu)e^*(x_\mu) \\ &= e^*(y_j)e^*(x_j)e(x_j) - e(x_j)e^*(y_j)e^*(x_j), \end{aligned}$$

mert $e(x_j)$ felcserélhető $e^*(x_\mu)e^*(y_\mu)$-vel $\mu \neq j$, amit (2.1) mutat meg. Tekintsük $[\Lambda, e(x_j)]$ és $e^*(y_j)$ hatását monomokon:

$$\psi = \psi_1 + x_j \wedge \psi_2 + y_j \wedge \psi_3 + x_j \wedge y_j \wedge \psi_4.$$

Látható, hogy

$$[\lambda, e(x_j)]\psi = \psi_3 - x_j \wedge \psi_4 = e^*(y_j)\psi$$

így (2.2)-t beláttuk.

Tegyük fel, hogy η (1,0)-forma. Ekkor

$$\begin{aligned} [\Lambda, e(\eta)] &= -ie^*(\bar{\eta}), \\ [\Lambda, e(\bar{\eta})] &= ie^*(\eta). \end{aligned}$$

Ez következik (2.2)-ből, mivel elég $\eta = x_j + iy_j$ esetet nézni. Ha most η valós 1-forma, akkor

$$[\Lambda, e(\eta)] = -Je^*(\eta)J^{-1}. \tag{2.3}$$

Ennek belátásához vegyük észre, hogy minden valós 1-forma felírható, mint $\eta = \varphi + \bar{\varphi}$, ahol φ (1,0) típusú, valamint hogy

$$\begin{aligned} -ie^*(\bar{\eta}) &= -Je^*(\bar{\eta})J^{-1}, \\ ie^*(\eta) &= -Je^*(\eta)J^{-1}. \end{aligned}$$

2.3.3. A bizonyítás

Elérkeztünk a bizonyítás lényegi részéhez.

2.3.7. Lemma. *Legyen η valós 1-forma!*

$$\sharp e(\eta)\sharp^{-1} = -iJe^*(\eta)J^{-1}.$$

bizonyítás: Legyen

$$e_t(\eta) = \exp(it(\Lambda + L))e(\eta)\exp(-it(\Lambda + L)).$$

Vegyük észre, hogy $e_{\pi/2}(\eta) = \sharp e(\eta)\sharp^{-1}$ Lie-csoportok és algebrák elméletéből tudjuk, hogy a konjugálásnak az ad a deriváltja, tehát

$$e_t(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty}(1/k!)ad^k[it(\Lambda + L)]e(\eta). \tag{2.4}$$

$ad^k(\Lambda+L)$ kifejtésében $[\Lambda, L] = B$-t, valamint $ad(L)e(\eta) = 0$ és $ad(-B)e(\eta) = e(\eta)$-t felhasználva

$$e_t(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)ad^k(\Lambda)e(\eta)$$

ahol $a_k(t)$-k valós analítikus függvények. (2.3) alapján tudjuk, hogy $ad^k(\Lambda)e(\eta)$ eltűnik, ha $k \geq 2$, mivel Λ mind J-vel, mind $e^*(\eta)$-val felcserélhető. Így

$$e_t(\eta) = a_0(t)e(\eta) + a_1(t)ad(\Lambda)e(\eta). \tag{2.5}$$

Differenciáljuk (2.4)-et t szerint!

$$e_t'(\eta) = iad(\Lambda + L)e_t(\eta)$$

Kezdeti feltételként pedig $e_0(\eta) = e(\eta)$. Ezt (2.5) segítségével meg tudjuk oldani:

$$\begin{aligned}
e_t'(\eta) &= a_0'(t)e(\eta) + a_1'(t)ad(\Lambda)e(\eta) \\
&= i(ad(\Lambda + L))[a_0(t)e(\eta) + a_1(t)ad(\Lambda)e(\eta)] \\
&= ia_0(t)ad(\Lambda)e(\eta) + ia_1(t)ad(L)ad(\Lambda)e(\eta) \\
ad(L)ad(\Lambda)e(\eta) &= ad([L,\Lambda])e(\eta) + ad(\Lambda)ad(L)e(\eta) \\
&= ad(-B)e(\eta) = e(\eta)
\end{aligned}$$

Megkaptuk a differenciálegyenletet:

$$a_0'(t)e(\eta) + a_1'(t)ad(\Lambda)e(\eta) = ia_0(t)ad(\Lambda)e(\eta) + ia_1(t)e(\eta),$$

tehát

$$\begin{aligned}
a_0'(t) &= ia_1(t) \\
a_1'(t) &= ia_0(t)
\end{aligned}$$

aminek egyértelmű megoldása: $a_0(t) = \cos(t)$, $a_1(t) = i\sin(t)$, vagyis

$$e_t(\eta) = \cos(t)e(\eta) + i\sin(t)ad(\Lambda)e(\eta)$$

speciálisan:

$$e_{\pi/2} = i[\Lambda, e(\eta)],$$

amit (2.3)-mal összehasonlítva a kívánt állítást kapjuk. □

Kifejezzük a Hodge-operátort:

2.3.8. Lemma. *Legyen $\varphi \in \wedge^p F$, ekkor*

$$*\varphi = i^{p^2-n}J^{-1}\sharp\varphi.$$

bizonyítás:

$$*e(\eta)\varphi = *e(\eta)**^{-1}\varphi = (-1)^p e^*(\eta)*\varphi$$

innen

$$\begin{aligned}
e(\eta) &= (-1)^p e^*(\eta), \\
*1 &= (1/n!)L^n(1)
\end{aligned}$$

Ez utóbbit a fejezet elején láttuk. Amiért ez érdekes az az, hogy ha bármely más operátor rendelkezik ezzel a fenti két tulajdonsággal, akkor az szükségképpen megegyezik $*$-gal, hiszen 1-re $e(\eta)$-t ismételten alkalmazva (esetleg különböző η-kkal) egész $\wedge F$-et kifeszíthetjük. Tehát definiáljuk

$$\tilde{*} = i^{p^2-n} J^{-1} \sharp$$

operátort és ellenőrizzük a fenti tulajdonságokat! Alkalmazzuk (2.3.6) lemmát $k = 0$ esetben 1-re, ami egy n-súlyú primitív 0-forma:

$$\sharp 1 = (i^n/n!) L^n(1)$$

így

$$\tilde{*} 1 = i^{-n}(i^n/n!) L^n(1).$$

Ha most $\eta \in \wedge^1_{\mathbb{R}} F$ és $\varphi \in \wedge^p F$, akkor

$$\begin{aligned}
\tilde{*} e(\eta)\varphi &= i^{(p+1)^2-n} J^{-1} \sharp e(\eta)\varphi \\
&= i^{p^2-n}(-1)^p i J^{-1} \sharp e(\eta) \sharp^{-1} \sharp \varphi \\
&= i^{p^2-n}(-1)^p e^*(\eta) J^{-1} \sharp \varphi \\
&= (-1)^p e^*(\eta) \tilde{*} \varphi
\end{aligned}$$

□

Elérkeztünk az első Kähler azonossághoz, aminek nizonyítása után a többit már egyszerűen megkapjuk:

2.3.9. Tétel.

$$[L, d_E^*] = J^{-1} d_E J \overset{\text{def}}{=} d_{E_c}$$

bizonyítás: Azt kell belátni, hogy $L^* d_E - d_E L^* = -J^{-1} d_E^* J$. (2.3.8) alapján tudjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sharp \varphi &= i^{-p^2+n} J * \varphi \\
\sharp^{-1} \varphi &= i^{p^2-n} *^{-1} J^{-1} \varphi. \\
\sharp d_E \sharp^{-1} \varphi &= i^{-(2n-p+1)^2+n} i^{p^2-n} J * d_E *^{-1} J^{-1} \varphi \\
&= i^{-1} i^{2p} J * d_E *^{-1} J^{-1} \varphi \\
&= i J [(-1)^{p+1} * d_E *^{-1}] J^{-1} \varphi \\
&= i J d_E^* J^{-1} \varphi.
\end{aligned}$$

Legyen

$$d_{E_t} = \exp(it(\Lambda + L)) \circ d_E \circ \exp(-it(\Lambda + L)).$$

Ugyanúgy mint (2.3.7) bizonyításában

$$d_{E_t} = \sum_{k=0}^{\infty} (1/k!) ad^k(it(\Lambda + L)) d_E$$

és mivel $ad(L)d_E = 0$

$$d_{E_t} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) ad^k(\Lambda) d_E$$

valamint tudván, hogy $d_{E_{\pi/2}}$ -1 fokú operátor,

$$d_{E_{\pi/2}} = a_1(\pi/2) ad(\Lambda) d_E$$

mert a kifejtésben minden más tagnak -1-től különböző foka van. Ebből tehát látjuk, hogy $iJd_E^*J^{-1}$ arányos $ad(\Lambda)d_E$-vel, és így mivel Λ felcserélhető d_E^*-gal és J-vel $ad^k(\Lambda)d_E = 0$ $k \geq 2$ Vagyis:

$$d_{E_t} = a_0(t) d_E + a_1(t) ad(\Lambda) d_E$$

Ebből tehát, mint (2.3.7)-ben

$$d_{E_t} = \cos(t) d_E + i \sin(t) ad(\Lambda) d_E,$$

amibe $t = \pi/2$-et helyettesítve, valamint észrevéve, hogy $Jd_E^*J^{-1} = -J^{-1}d_E^*J$ a kívánt állítás adódik. □

A többi Kähler azonosság ennek és $[L, d_E] = 0$-nak a különböző fokú tagjaira bontásával, illetve ezek adjungáltjaiként adódik:

2.3.10. Következmény.

$$\begin{array}{rcl}
[L, d_{E_c}] = 0 & & [L, d_{E_c}^*] = -d_E \\
[L, \partial_E] = 0 & & [L, \bar\partial_E] = 0 \\
[L, \partial_E^*] = i\bar\partial_E & & [L, \bar\partial_E^*] = -i\partial_E \\
d_E^* d_{E_c} = -d_{E_c} d_E^* & = & d_E^* L d_E^* = -d_{E_c} L^* d_{E_c} \\
d_E d_{E_c}^* = -d_{E_c}^* d_E & = & d_{E_c}^* L d_{E_c}^* = -d_E L^* d_E \\
\partial_E \bar\partial_E^* = -\bar\partial_E^* \partial_E & = & -i\bar\partial_E^* L \bar\partial_E^* = -i\partial_E L^* \partial_E \\
\bar\partial_E \partial_E^* = -\partial_E^* \bar\partial_E & = & i\partial_E^* L \partial_E^* = i\bar\partial_E L^* \bar\partial_E.
\end{array}$$

2.3.4. Kähler sokaság

Itt most csak vázlatosan megemlítünk néhány tételt, ami a Kähler azonosságok következménye Kähler sokaságokon, de már nem igaz általános szimplektikusra.

2.3.11. Definíció. *Laplace operátorok:*

$$\begin{aligned} \Delta_E &= d_E d_E^* + d_E^* d_E \\ \Box_E &= \partial_E \partial_E^* + \partial_E^* \partial_E \\ \bar{\Box}_E &= \bar{\partial}_E \bar{\partial}_E^* + \bar{\partial}_E^* \bar{\partial}_E \end{aligned}$$

2.3.12. Tétel. *Legyen X Kähler sokaság. Ekkor*

$$[L, \Delta] = 0 \qquad \Delta = 2\Box = 2\bar{\Box}$$

2.3.13. Tétel. *Ha X Kähler sokaság, akkor $b_q(X)$ páros, ha q páratlan.*

3. fejezet

Szimplektikus részsokaság

Ebben a fejezetben egyetlen tétel bizonyításával fogunk foglalkozni. A bizonyítás egy konstrukció, melynek ismertetése ezen dolgozat egyik fő célkitűzése, érdekes technikát használ. Ez a technika jól alkalmazható arra, hogy a konstrukció végeredményéről további tulajdonságokat bizonyítsunk (lásd 4.0.14).

3.0.14. Tétel. *Legyen (V, ω) kompakt, szimplektikus sokaság, és tegyük fel, hogy $[\omega/2\pi] \in H^2(V; \mathbb{Z})$. Ekkor elég nagy k-ra ezen osztály k-szorosának Poincaré-duálisa szimplektikus részsokasággal reprezentálható.*

3.0.15. Megjegyzés. *Az integralitási kritérium nem jelent semmi megkötést, hiszen a nem elfajultság egy nyílt feltétel ω-ra, a zártság pedig egy altér típusú, így lehet úgy perturbálni a szimplektikus struktúrát, hogy racionális osztályba essen, és a megkonstruálandó részsokaság szimplektikus maradjon az eredeti struktúrára is. Kähler esetben ezt nem tudnánk megtenni, mert esetleg elveszítenénk a kompatibilis majdnem komplex struktúra integrálhatóságát.*

Tekintsünk a sokaság fölött egy hermitikus komplex $L \to V$ vonalnyalábot egy unitér konnexióval, melynek görbülete ω. Egy ilyet előkvantáló nyalábnak hívnak, létezésének szükséges és elégséges feltétele, a fenti integralitási kritérium, hiszen ha van ilyen nyaláb, akkor $c_1(L) = [\omega/2\pi]$, ami egy egész osztály, ha pedig ez az osztály egész, akkor válasszunk egy olyan nyalábot, aminek ez a Chern-száma. Eme nyaláb k-adik tenzorhatványának egy olyan szelését fogjuk megkonstruálni, amire

$$\left|\bar{\partial} s\right| < |\partial s|$$

a szelés nullhelyei mentén egy tetszőleges konnexió tetszőleges kompatibilis majdnem komplex struktúra szerinti felbontására. Nyilvánvalóan a szelés a kívánt homológiaosztályt reprezentálja, az kell még, hogy szimplektikus, vagyis ω megszorítása szimplektikus. A zártság öröklődik, a nem-elfajultság belátására a következő gondolatmenetre van szükségünk:

Legyen $\mathbb{C}^n$-en a' $\mathbb{C}$-lineáris, a'' $\mathbb{C}$-antilineáris funkcionál! Tegyük fel, hogy ω $ker(a' + a'')$-re megszorítva elfajul. Legyen egy ω szerint minden magbeli elemre merőleges vektor $x \in ker(a' + a'')$! Ekkor a tér felbontható g-merőleges alterek direkt összegére, mint $x \oplus Jx \oplus x^{\perp_h}$. Az utolsó faktor semmiképpen sem üres, hiszen $n \geq 2$. Ha $Jx \not\perp ker(a' + a'')$, akkor $\exists v \in ker(a' + a'')$ $v = v_0 + Jx$ $v_0 \in x^{\perp_h}$. Így azonban $\omega(x, v) = \omega(x, v_0 + Jx) = \omega(x, Jx) \neq 0$. Tehát $Jx \perp ker(a' + a'')$. Ekkor viszont, mivel $ker(a' + a'')$ az $x^{\perp_h}$ komponensben 1 (valós) kodimenziós, választhatunk neki ott egy g-ortokomplementert y-t. $Jy \in ker(a' + a'')$, mert $y \perp Jy \in x^{\perp_h}$, vagyis $0 = a'(Jy) + a''(Jy) = ia'(y) - ia''(y) \Longrightarrow a'(y) = a''(y)$. Ugyanezt elmondhatjuk Jx-re is, hiszen $JJx = -x \in ker(a' + a'')$. Ebből a szimmetriából (a mag ortokomplementerén megegyeznek, a magon pedig annak definíciója szerint egymás negáltjai) látható, hogy a' és a'' normája megegyezik.

Térjünk vissza a sokaságra! Vegyük észre, hogy ∂s egy lineáris, $\bar{\partial} s$ egy antilineáris funkcionál az érintőtéren, vagyis a fenti gondolatmenetet alkalmazva azt kaptuk, hogy ha egy szelés teljesíti a fenti parciális differenciálegyenlőtlenséget, akkor a szimplektikus forma a szelés nullhelyére megszorítva nem fajul el, vagyis szimplektikus marad. A fenti egyenlőtlenséget kielégítő szelést a következő két szakaszban fogjuk megkonstruálni. Előbb lokálisan, vagyis V-beli kis golyókon definiáljuk, majd a globalizálásról szóló részben összeillesztjük ezeket a szelésdarabokat. A konstrukció során végig a fenti egyenlőtlenség teljesítése lebeg szemünk előtt. A lokális konstrukcióban az a cél, hogy bárhogy globalizálok $\bar{\partial} s$ k-val a nullához tartson, míg a végső lépések célja ∂s-nek k-tól független korlát felett tartása.

3.1. Lokális konstrukció

Tekintsük a $\mathbb{C}^n$-en definiált $e^{-|z|^2/4}$ függvényt egy $\mathbb{C}^n$-feletti trivializált vonalnyaláb szelésének. Vegyük a nyalábon az

$$A = \frac{1}{4}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha d\bar{z}_\alpha - \bar{z}_\alpha dz_\alpha\right)$$

mátrixú konnexiót.

Ez egy unitér konnexió, a görbülete pedig $-i\omega_0 = dA$, ahol

$$\omega_0 = \frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha$$

a standard Kähler forma. Ez az A konnexió definiálja a $\bar\partial_A$ operátort:

$$\bar\partial_A(f) = \bar\partial f + A^{0,1} f,$$

ahol $A^{0,1}$ a (0,1) komponense A-nak. Vegyük a szelésünket:

$$\begin{aligned} f &= e^{-|z|^2/4} = e^{-z\bar z/4} \\ \partial_\alpha f &= -\frac{\bar z_\alpha}{4} e^{-|z|^2/4} dz_\alpha \\ \bar\partial_\alpha f &= -\frac{z_\alpha}{4} e^{-|z|^2/4} d\bar z_\alpha \end{aligned}$$

Ebből pedig

$$\begin{aligned} \bar\partial_A \left(e^{-|z|^2/4}\right) &= \frac{1}{4}\left(\sum z_\alpha d\bar z_\alpha - z_\alpha d\bar z_\alpha\right) e^{-|z|^2/4} = 0 \\ \partial_A \left(e^{-|z|^2/4}\right) &= -\frac{1}{4}\left(\sum \bar z_\alpha dz_\alpha + \bar z_\alpha dz_\alpha\right) e^{-|z|^2/4} = -\frac{1}{2}\left(\sum \bar z_\alpha dz_\alpha\right) e^{-|z|^2/4}. \end{aligned}$$

Ennek a trivializált nyalábnak a k-adik tenzorhatványán az $e^{-k|z|^2/4} = e^{-\left|\sqrt{k}z\right|^2/4}$ szelést definiáljuk, amit úgy is elérhetünk, hogy a modellünket $k^{-1/2}$-del szorozzuk.

Most ezt a szelést visszahúzzuk V fölötti L^k nyaláb egy lokális szelésévé. Jelölje B^{2n} a $\mathbb{C}^n$-beli egységgolyót. Rögzített $p \in V$-re választható, Darboux tétele alapján, $\chi_p : B^{2n} \to V$ koordinátázás, $\chi(0) = p$-vel, úgy, hogy $\chi^*(\omega) = \omega_0$. Feltehetjük továbbá, hogy χ minden deriváltja g-vel és g Levi-Civita konnexiójával mérve p-től független korlát alatt marad. (Ehhez Darboux tételének egy olyan verziójára van szükség, amely a paraméterktől való sima függést is bizonyítja.) Adott k-ra komponáljuk ezt a $k^{-1/2}$-del való szorzással:

$$\tilde\chi = \chi \circ \delta_{k^{-1/2}} : k^{1/2} B^{2n} \to V$$

Ekkor a $\tilde\chi^*(-ik\omega) = -i\omega_0$ egyenletet kapjuk vagyis $\tilde\chi$-ot felemelhetjük (p egy környezetében) egy konnexiótartó nyalábleképezéssé (ezt szintén $\tilde\chi$ fogja jelölni).

Hogy valóban szimplektikus részsokaságot kapjunk a szelés nullhelyeként, meg kell becsülni a szelés deriváltjait, ehhez azonban a konnexió előre választott J szerinti felbontását kell használni. (Azt nem tehetjük fel, hogy J-t úgy választottuk, hogy a visszahúzásnál éppen az i-vel szorzást kapjuk.) Ezeket a becsléseket persze $\mathbb{C}^n$-ben fogjuk megadni a visszahúzott struktúrákra, majd megbecsüljük a mennyiségek deriváltjait annak érdekében, hogy a becsléseket más trivializációban is kézben tarthassuk. A derivált becslésének alapja, hogy a majdnem komplex struktúra visszahúzottja a konstrukció során alkalmazott összehúzással egyre jobban hasonlít a standard komplex struktúrára

$\mathbb{C}^n$-ben. Ennek számszerűsítéséhez a majdnem komplex struktúra függvényként való megjelenítésére lesz szükségünk.

Láttuk korábban (2.2) hogy

$$Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}) = \wedge^{1,0} \oplus \wedge^{0,1}.$$

Minden más komplex struktúra egy komplex lineáris

$$\mu : \wedge^{1,0} \to \wedge^{0,1}$$

leképezéssel egyenértékű úgy, hogy a J-komplex lineáris formák ($\wedge_J^{1,0}$ elemei) $\phi + \mu(\phi)$ alakúak, vagyis $\wedge_J^{0,1}$ nem más, mint μ gráfja. (Ez azt jelenti, hogy minél kisebb μ, annál közelebb van J a standard komplex struktúrához.) Ezt konjugálva $\wedge_J^{0,1}$ pedig $\bar{\mu} : \wedge^{0,1} \to \wedge^{1,0}$ gráfja, a feltétel, hogy ez a két altér legyen tranzverzális $(1-\mu\bar{\mu})$ invertálhatóságának felel meg. Ha most $\mathbb{C}^n$ mint sokaság egy origókörnyezetén tekintünk egy majdnem komplex struktúrát, akkor ez egy μ_z sima nyalábleképezéssel írható le. $\bar{\partial}_J$ operátor, ami df-et vetíti $\wedge_J^{0,1}$-re, pedig megkapható, mint

$$\bar{\partial}_J(f) = \bar{\partial} f - \mu(\partial f),$$

miután azonosítottuk $\wedge_J^{0,1}$-t és $\wedge^{0,1}$-et az $(1-\mu\bar{\mu})^{-1}$-et követő projekcióval, amit ϖ_J-vel jelölök.

A V majdnem komplex struktúráját visszahúzzuk a k-tól függő $\tilde{\chi}$ leképezés mentén, és az így $\mathbb{C}^n$ egy origókörnyezetén kapott majdnem komplex struktúrát hasonlítom össze a standarddal. A fentiekből világos, hogy a különbözést az így kapott $\tilde{\mu}$ nagysága adja meg. Az összehúzás miatt erre a következő becslések érvényesek:

$$\begin{aligned} |\tilde{\mu}_z| &\leq Ck^{-1/2}|z|, \\ |\nabla\tilde{\mu}| &\leq Ck^{-1/2}. \end{aligned}$$

Alkalmazzuk a fentieket a szelés deriváltjainak becslésére. Jelölje $\bar{\partial}_{A,\tilde{J}}$ az A konnexió mátrix és a $\tilde{J}$ majdnem komplex struktúra által definiált $\bar{\partial}$-operátort a $k^{1/2}B^{2n}$ golyó felett $\mathbb{C}^n$-ben. Használva $\varpi_{\tilde{J}}$ azonosítást:

$$\bar{\partial}_{A,\tilde{J}}(f) = (\bar{\partial} + A^{0,1}f) + \tilde{\mu}(\partial f + A^{1,0}f).$$

Ha $f = e^{-|z|^2/4}$, akkor

$$\bar{\partial}_{A,\tilde{J}} f = -\frac{1}{2}\tilde{\mu}\left(\sum \bar{z}_\alpha dz_\alpha\right) e^{-|z|^2/4},$$

valamint a fentiek alapján:

$$\left|\bar{\partial}_{A,\tilde{J}} f_z\right| \leq |\tilde{\mu}_z| \left|\partial f + A^{1,0} f\right| \leq C k^{-1/2} |z|^2 e^{-|z|^2/4}.$$

Ebben a képletben látszólag eltűnik a $\varpi_{\tilde{J}}$ azonosítás normája, de arról könnyen meggondolható, hogy ha $\tilde{\mu}$ normája tart a nullához, akkor $I - \tilde{\mu}\bar{\tilde{\mu}}$ normája tart az 1-hez, csakúgy, mint az inverzének a normája, a projekció normája pedig kisebb mint 1, tehát ezek kompozíciójának normája univerzális konstanssal felülről becsülhető. Most már $\bar{\partial}_{A,\tilde{J}} f$ deriváltját is tudjuk korlátozni:

$$\begin{aligned} \left|\nabla(\bar{\partial}_{A,\tilde{J}} f)\right| &\leq C(|\nabla\tilde{\mu}| \, |z| \, e^{-|z|^2/4} + |\tilde{\mu}| \left|\nabla \left(\sum \bar{z}_\alpha dz_\alpha e^{-|z|^2/4}\right)\right| \\ &\leq C k^{-1/2} \left(|z| + |z|^3\right) e^{-|z|^2/4}. \end{aligned}$$

Mint fent itt is megbújik a $\varpi_{\tilde{J}}$ azonosítás deriváltjának normája, amit a fenti gondolatmenethez hasonló okoskodással szintúgy kiszűrhetünk.

Mivel a szelés az értelmezési tartomány pereméhez tartva sem tart a nullához, hogy sima szelést kapjunk le kell csengetni valami $\beta_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ lecsengető függvénnyel. Legyen β egy sima egyváltozós levágó függvény, amire $\beta(x) = 1$ ha $\beta \leq \frac{1}{2}$ és $\beta(x) = 0$ ha $x \geq 1$

$$\beta_k(z) = \beta(k^{-1/6} |z|).$$

Ezzel β_k tartója a $k^{1/6}$ sugarú golyó lesz $\mathbb{C}^n$-ben, tehát benne van a $k^{1/2}$ sugarúban, ahol $\tilde{\chi}$ definiált. $\nabla\beta_k$ tartója egy $O(k^{1/6})$ átmérőjű körgyűrű, maga a derivált pedig $O(k^{-1/6})$, így

$$|\nabla\beta_k| \leq C k^{-1/2} |z|^2,$$

valamint

$$\left|\bar{\partial}_{A,\tilde{J}}(\beta_k f)\right| \leq \left|\bar{\partial}_{A,\tilde{J}} f\right| + |\nabla\beta_k| \, f \leq C k^{-1/2} |z|^2.$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} \left|\nabla(\bar{\partial}_{A,\tilde{J}} \beta_k f)\right| &\leq |\nabla\nabla\beta_k| + |\nabla\beta_k| \, |\nabla_A f| + \left|\nabla(\bar{\partial}_{A,\tilde{J}} f)\right| \\ &\leq C k^{-1/2} (|z| + |z|^3) e^{-|z|^2/4}, \end{aligned}$$

mivel

$$|\nabla\nabla\beta_k| \leq C \, |z| \, k^{-1/2}.$$

Röviden a levágó függvény nem ront a becsléseken.

A megkonstruált szelés tehát $L^k \to V$ vonalnyaláb σ_p sima szelése legyen $\tilde{\chi}(\beta_k\sigma)$ 0-vá kiterjesztve. Így σ_p tartója a p-körüli g-vel mérve $O(k^{-1/2}k^{1/6}) = O(k^{-1/3})$ sugarú golyó. Ezután d_k-val jelöljük a g_k-val mért távolságokat (vagyis $d_k = k^{1/2}d$), és legyen

$$\begin{aligned} e_k(p,q) &= e^{-d_k(p,q)^2/5} \quad \text{ha} \quad d_k(p,q) \leq k^{1/4} \\ &= 0 \quad \text{ha} \quad d_k(p,q) > k^{1/4}. \end{aligned}$$

Foglaljuk össze a lokális konstrukció eredményeit:

3.1.1. Lemma. *Minden $p \in V$ pontra, ha k elég nagy, létezik a V fölötti L^k nyalábnak sima szelése σ_p, hogy egy $q \in V$ pontra:*

1. *rögzített R-re $|\sigma_p(q)| \geq C^{-1}$, ha $d_k(p,q) \leq R$*
2. $|\sigma_p(q)| \leq e_k(p,q)$
3. $|\nabla_V \sigma_p| \leq C(1 + d_k(p,q))e_k(p,q)$
4. $\left|\bar{\partial}\sigma_p(q)\right| \leq Ck^{-1/2}d_k(p,q)^2 e_k(p,q)$
5. $\left|\nabla_V \bar{\partial}_{L^k}\sigma_p(q)\right| \leq Ck^{-1/2}(d_k(p,q) + d_k(p,q)^3)e_k(p,q)$

Mindezek a fenti tárgyalásból következnek.

3.2. Globalizálás

A következőkben szeretnénk összefűzni a megkonstruált lokális szeléseket egy globális szeléssé úgy, hogy az tranzverzális legyen a 0-ra, valamint a nullhelyek mentén $|\partial s| > \epsilon$ és $\left|\bar{\partial}s\right| \leq Ck^{-1/2}$ teljesüljön. Először lefedjük a lokális szelésekkel V-t, úgy hogy a lokálisan elért eredményeink megmaradjanak, ehhez az kell, hogy a 3.1.1. lemma jobboldalain álló kifejezések a fedő rendszerre összegezve mindentől független korlát alatt maradjanak.

3.2.1. Lemma. *Van olyan konstans C, hogy minden k-ra le tudjuk fedni V-t p_i $i = 1, \ldots M$ középpontú g_k-egység gömbökkel, hogy minden $q \in V$-re*

$$\sum_{i=1}^{M} d_k(p_i,q)^r e_k(p_i,q) \leq C \quad r = 0,1,2,3.$$

bizonyítás: Vegyük V-nek egy k-tól független véges fedését $\phi_s : O_s \to V$ koordinátalapokkal $s = 1, \ldots, S$, ahol $O_s \subset \mathbb{C}^n$ korlátos, valamint minden $x, y \in O_s$-re

$$\frac{1}{2}|x-y| \leq d(\phi x, \phi y) \leq 2|x-y|.$$

Válasszunk kisebb halmazokat $O_s'' \Subset O_s' \Subset O_s$, hogy V már O_s'' képeivel is le legyen fedve. Legyen Λ az $\alpha(\mathbb{Z}^n \oplus i\mathbb{Z}^n)$ rács $\mathbb{C}^n$-ben, ahol $\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^{1/2} k^{-1/2}$. Ezt úgy választottuk, hogy a rácspontokba állított $\frac{1}{2}k^{-1/2}$ sugarú gömbök lefedjék $\mathbb{C}^n$-et. Legyen $\Lambda_s \subset V$ a ϕ_s-képe $\Lambda_s \cap O_s'$-nek. Ha k nagy a Λ_s középpontú g_k-egységgolyók lefedik $\phi_s(O_s'')$-t. Legyen $\{p_i\}$ a Λ_s-ek uniója. Hogy a fenti összeget korlátozzuk, elég az egyéni hozzájárulásokat

$$R_s(q) = \sum_{p \in \Lambda_s} d_k(p,q)^r e_k(p,q)$$

korlátozni, mert S nem függ k-tól. Definíció szerint $e_k(p,q)$ eltűnik, ha $d_k(p,q) \geq k^{1/4}$, vagyis $d(p,q) \geq k^{-1/4}$. Tehát, ha k elég nagy, akkor $R_s(q)$ eltűnik, ha $q \notin \phi_s(O_s)$. Másrészt, ha $q = \phi_s(z) \in \phi_s(O_s)$, akkor

$$R_s(q) \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} 2^r k^{r/2} |z-\lambda|^r e^{-k|z-\lambda|^2/20} = \sum_{\mu \in \Lambda_0} 2^r |w-\mu|^r e^{-|\mu-w|^2/20},$$

ahol Λ_0 a rögzített $\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^{1/2}(\mathbb{Z}^n \oplus i\mathbb{Z}^n)$, és $w = k^{1/2}z$. Erről pedig tudjuk, hogy w-ben egyenletesen korlátos. $\square$

Megkaptuk tehát a p_i pontrendszert. Ezekbe a pontokba fogjuk a lokális konstrukció σ_i szeléseit lerakni, és w_i együtthatókkal ($|w_i| \leq 1$) összeadni, hogy megkapjuk a kívánt (globális) szelést. A lokális eredmények megmaradnak:

3.2.2. Lemma. *Minden w együtthatóvektorra ($|w_j| < 1$):*

$$\begin{aligned} |s| &\leq C, \\ \left|\bar\partial_L s\right| &\leq Ck^{-1/2}, \\ \left|\nabla_V \bar\partial_L s\right| &\leq Ck^{-1/2} \end{aligned}$$

mindenhol V-n

bizonyítás: Az állítás közvetlen következménye 3.1.1 és 3.2.1 lemmáknak. $\square$

Látjuk, hogy $\bar\partial s$ minden együtthatóválasztásra k-val a nullához tart, tehát már csak ∂s értékét kell k-tól független korlát felett tartani. Az alsó korlát teljesülésére a lokális modellben ($\mathbb{C}^n$) elnevezést vezetünk be.

3.2.3. Definíció. *Legyen $f : U \to \mathbb{C}$ sima leképezés $U \subset \mathbb{C}$ nyílt halmazon, és legyen $w \in \mathbb{C}$. $\eta > 0$-ra azt mondjuk, hogy f η-tranzverzális w-re U felett, ha minden olyan $z \in U$-ra, amire $|f(z) - w| \leq \eta$ a deriváltra $|(\partial f)_z| \geq \eta$ teljesül.*

Világos, hogy ha f η-tranzverzális w-re, valamint $\|f - g\|_{C^1} \leq \delta$, akkor g $\eta - \delta$-tranzverzális w-re.

A V sokaságot g_k-egységgömbökkel fedtük le. Ezekbe a gömbökbe rakjuk bele a lokális szeléseket, amelyek ott trivializálnak. (Valójában egy $O(k^{1/6})$ sugarúban.) Tegyük fel, hogy ezeknek az egységgömböknek a $\tilde{\chi}$ általi visszahúzottjai benne vannak a $\Delta = \frac{11}{10} B^{2n}$ halmazban. Egy tetszőleges s szelést az $f_i = \frac{s}{\sigma_i}$ függvényhalmaz teljes egészében leír. Azokra a szelésekre, amelyekkel mi dolgozunk a függvényhalmaz néhány fontos tulajdonsággal rendelkezik:

3.2.4. Lemma. *Ha s az L^k nyaláb egy olyan szelése, amire a w_i együtthatók 1-nél kisebb abszolút értékűek, akkor az ehhez tartozó f_i függvényekre:*

1. $\|f_i\|_{C^1(\Delta)} \leq C$
2. $\|\bar{\partial} f_i\|_{C^1(\Delta)} \leq C k^{-1/2}$
3. *Ha $|\partial f_i| > \epsilon$ $f_i^{-1}(0) \cap \Delta$ mentén, akkor (elég nagy k esetén) $|\partial_L s| > C^{-1}\epsilon$ $s^{-1}(0) \cap B_i$ mentén.*

Ez az utolsó pont azt is mutatja, hogy elég a függvények körében biztosítani valamilyen mértékű tranzverzalitást. A következő tétel kimondása érdekében jelöljük $\sigma > 0$-ra $\mathcal{H}_\sigma$-val azokat a Δ-n értelmezett függvényeket, amikre

1. $\|f\|_{C^0(\Delta)} \leq 1$,
2. $\|\bar{\partial} f\|_{C^1(\Delta)} \leq \sigma$.

Célunk a függvényekre olyan értéket találni, amire a megfelelő mértékben tranzverzálisak. Ha ezzel az értékkel megváltoztatjuk az adott függvényhez tartozó szelésdarab együtthatóját, a kapott szelés ebben a kis környezetben a nullára lesz ugyanolyan mértékben tranzverzális. A következő tétel, ami itt bizonyítás nélkül szerepel, a Sard lemma egy olyan alakja, ahol a tranzverzalitást becslésekkel vizsgáljuk:

3.2.5. Tétel. *Tetszőlegesen kis ($0 < \delta < \frac{1}{2}$) sugarú (origó középpontú) körre és $f \in \mathcal{H}_\sigma$ függvényre találunk a körön belül egy w értéket, hogy f w-re tranzverzális. A tranzverzalitás mértékét egy csak a dimenziótól függő Q_p függvénnyel becsülhetjük alulról (f $Q_p(\delta)\delta$-tranz.) és ugyanez korlátozza a függvényosztályt is ($\sigma \leq Q_p(\delta)\delta$) amire ez igaz. Mi több w-t egy tetszőleges (origót perempontként tartalmazó) félsíkban is választhatjuk.*

Ez utóbbi feltétel arra jó, hogy ha a lokális szelés együtthatóját w-vel megváltoztatjuk, akkor a kapott vektorról is feltehetjük, hogy 1-nél kisebb abszolút értékű. A bizonyítás megtalálható: [Don96].

A fenti 3.2.4 lemma alapján tudjuk, hogy $f_i \in \mathcal{H}_{C^{-1}k^{-1/2}}$. Most már megtehetjük, hogy a szelésünket beállítjuk egy kis gömb felett. Amikor azonban a következő golyón próbáljuk végrehajtani ezt a lépést, már csak kevéssel változtathatjuk meg azt az együtthatót, mivel nem akarjuk elrontani a korábban sorravett golyókon elért tranzverzalitást. Valamennyivel persze romlik, de végeredményképpen egy k-tól független ϵ fölött kell maradnia. Másrészt ha csak kevéssel változtathatunk a következő együtthatón, akkor az ott elérhető tranzverzalitás mértéke is csökken, de még ennek is (a későbbi lépésekben tovább rontva) ϵ-nál nagyobbnak kell lennie. Az első problémát úgy küszöbölhetjük ki, hogy k-tól független lépésszámban állítjuk be az együtthatókat, a másodikat pedig Q_p ismeretében numerikus okoskodással.

Nem akarjuk tehát hogy az alsó korlát k lépésben „elfogyjon", ezért k-tól független számú csokorba kell szedni a kis gömböket, és egy csokron belül egyszerre változtatni az együtthatókat. Arra van szükségünk, hogy az egy csokorba tartozók messze legyenek egymástól, hogy lényegében függetlenül lehessen ugyanazt a korlátot tartani mindegyiken. Ezt a partícionálást adja meg a következő lemma:

3.2.6. Lemma. *Tetszőleges $D > 0$-ra, és minden elég nagy k-ra ki tudjuk választani p_i pontok egy gyűjteményét, hogy azok kielégítsék 3.2.1 lemma feltételeit, valamint a kis körök $I = \{1, 2, \dots, M\}$ indexhalmazának van olyan -k-tól független- $N(D)$ részre partícionálása, hogy minden α-ra*

$$d_k(p_i, p_j) \geq D \text{ ha } p_i, p_j \in I_\alpha.$$

Egészen pontosan vehetjük $N(D) = CD^{2n}$-et.

bizonyítás: Egész D-re a standard rács $\Lambda = \mathbb{Z}^n \oplus i\mathbb{Z}^n$ felosztható $\Lambda/D\Lambda$ rács D^{2n} példányára, hogy bármelyikben két rácspont távolsága legalább D. Ezekután, mint 3.2.1-ben elég mindegyik Λ_s-et felosztani, mivel S nem függ k-tól. □

Ha csak az I_α indexekhez tartozó együtthatókat változtatjuk legfeljebb δ-val, akkor mindegyik másik indexre az ahhoz tartozó f_i, illetve a változtatás után kapott f_i' függvényekre

$$\|f_i' - f_i\|_{C^1(\Delta)} \leq C\delta.$$

Egy csokron belül az áthatást úgy tudjuk kifejezni, hogy ha csak egy együtthatót változtatunk meg, akkor egy vele azonos csokorba tartozó másik i

indexre

$$\|f_i' - f_i\|_{C^1(\Delta)} \leq C\exp(-D^2/5)\delta.$$

Ezt úgy kapjuk meg, hogy 3.2.1-beli összegzés előtt kiemelünk $\exp(-D^2/5)\delta$-t, hiszen az azonos indexhez tartozó golyók távolságát D-nél nagyobbnak választottuk (3.2.6).

Ezek ismeretében kell az együtthatókat lépésről lépésre beállítanunk. Lássuk az eljárást numerikusan! Jelölje

$$V_\alpha = \bigcup_{i\in I_\beta, \beta\leq\alpha} B_i.$$

Tegyük fel, hogy $s_{\alpha-1}$ már $\eta_{\alpha-1}$-tranzverzális $V_{\alpha-1} \subset V$ felett valamilyen $0 < \eta_{\alpha-1}$-re. Ha az I_α-hoz tartozó együtthatókat csak δ_α-val változtatjuk, akkor a fentiek értelmében s^α még mindig $\eta_{\alpha-1} - C\delta_\alpha$-tranzverzális $V_{\alpha-1}$ fölött. Tehát ha erre a C-re $\delta_\alpha = \frac{1}{2}C^{-1}\eta_{\alpha-1}$, akkor s_α még mindig $\frac{1}{2}\eta_{\alpha-1}$-tranzverzális $V_{\alpha-1}$ fölött. Korábbi lépéseket tehát nem rontunk el, csak korlátozott mértékben. Most állítsuk be az I_α-hoz tartozó együtthatókat a 3.2.5 alkalmazásával. Az ottani függvény legyen $C^{-1}f_i$, a $\delta = C^{-1}\delta_\alpha$, a feltétel, hogy ez legfeljebb fél legyen, η_1 alacsonyra választásával elérhtő (a későbbi η-k csak ennél kisebbek lesznek), $\sigma = C^{-1}k^{-1/2}$, a $\sigma < Q_p(\delta)\delta$ feltételt, vagyis hogy

$$k^{-1/2} \leq C\delta_\alpha Q_p(\delta_\alpha) \tag{3.1}$$

pedig később fogjuk meggondolni. A tétel állítása szerint létezik tehát egy $|v_i| \leq \delta_\alpha$, hogy f_i $Q_p(\delta_\alpha)\delta_\alpha$-tranzverzális v_i-re az egységgömb felett. Ezt a v_i-t minden $i \in I_\alpha$-ra kivonva $w^{\alpha-1}$-ből megkapjuk w^α-t. Ha gondoskodunk arról, hogy a többi golyón szimultán végrehajtott változtatás ezt ne rontsa le nagyon, vagyis hogy

$$C\exp(-D^2/5)\delta_\alpha \leq \frac{1}{2}Q_p(\delta_\alpha)\delta_\alpha \tag{3.2}$$

akkor készen vagyunk. $\eta_\alpha = \frac{1}{2}Q_p(\delta_\alpha)\delta_\alpha$-ra s^α η_α-tranzverzális V_α felett. Ennek biztosításához D megfelelő megválasztására van szükség. Hogy ezt megtehessük most már el kell árulni, hogy mi a Q_p függvény:

$$Q_p(\delta) = \log(\delta^{-1})^{-p}.$$

p esetleges újradefiniálásával elfeledkezhetünk a konstansokról, így azt kaptuk, hogy

$$\eta_\alpha = Q_p(\eta_{\alpha-1})\eta_{\alpha-1}.$$

3.2.7. Lemma. *Legyen $p > 0$ és x_α az*

$$x_\alpha = x_{\alpha-1} + p \log x_{\alpha-1}$$

rekurzióval definiált sorozat. Ekkor minden $q > p$-re létezik egy csak q-tól és x_1-től függő α_1 egész, hogy

$$x_\alpha \leq q(\alpha + \alpha_1) \log(\alpha + \alpha_1).$$

bizonyítás: A lemma azt mondja ki, hogy ha

$$y_\alpha = q\alpha \log \alpha,$$

akkor valamilyen α_1-re az $y_{\alpha+\alpha_1}$ sorozat majorálja x_α-t. Ehhez azt kell megmutatni, hogy az y_α sorozatnak nagyobb a differenciája, ezután legyen α_1 az az index, amire $x_1 \leq y_{\alpha_1+1}$.

A rekurzív definíció szerint az x_α sorozat differenciája $p \log x_{\alpha-1}$.

$$\begin{aligned}
y_\alpha - y_{\alpha-1} &= q(\alpha \log \alpha - (\alpha - 1) \log(\alpha - 1)) \\
&= q((\alpha - (\alpha - 1)) \log(\alpha - 1) + \alpha(\log \alpha - \log(\alpha - 1))) \\
&\geq q(\log(\alpha - 1) + 1).
\end{aligned}$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség az $\left(1 + \frac{1}{\alpha-1}\right)^\alpha \geq e$ logaritmálva.

$$p \log y_{\alpha-1} = p(\log(\alpha - 1) + \log\log(\alpha - 1) + \log q).$$

Tehát $y_\alpha - y_{\alpha-1} \geq p \log y_{\alpha-1}$ ha α elég nagy, mert a differenciában a főtag $(\log(\alpha - 1))$ nagyobb együtthatóval szerepel. Legyen α_1 ezen a küszöbön túl, valamint $x_1 \leq y_{\alpha_1+1}$. $\square$

Alkalmazzuk a lemmát $x_\alpha = -\log \eta_\alpha$ sorozatra. Azt kapjuk, hogy

$$Q_p(\eta_{\alpha-1}) \geq \frac{C}{(\alpha \log \alpha)^p}$$

valamilyen η_0-tól függő konstansra. Ebből

$$Q_p(\eta_{\alpha-1}) \geq \frac{C}{(N \log N)^p},$$

ahol N a csokrok száma. Tudjuk, hogy $N \leq cD^{2n}$, így

$$Q_p(\eta_{\alpha-1}) \geq \frac{C}{D^{2np+1}}$$

ha D elég nagy. Mivel nagy D-kre

$$e^{-D^2/5} \leq \frac{C}{D^{2np+1}},$$

ezért egy küszöb fölött a fenti 3.2 egyenlőtlenség teljesülni fog. Már csak azt kell meggondolni, hogy 3.1 egyenlőtlenség kielégíthető. Ez viszont igaz, hiszen az egyenlőtlenség nem tartalmaz D-t, csak k-t, ami viszont nem befolyásolja η_N-et, hiszen ezt k-tól függetlenül állítottuk be. Így k-t D rögzítése után elég nagyra választva megkaptuk az s^N szelésünket, amely egész V fölött η_N-tranzverzális a nullára. Ezzel 3.0.14 bizonyítását befejeztük.

4. fejezet

Stein sokaság

4.0.8. Definíció. *Egy M komplex analítikus sokaság Stein sokaság, ha*

1. *M holomorfan konvex, vagyis $\forall K \subset M$ kompaktra*

$$\hat{K} = \{z \in M \mid \forall f \in A(M)\, |f(z)| \leq \sup_K |f|\}$$

kompakt.

2. *$\forall z \in M$ vannak $f_1, \ldots, f_n \in A(M)$ függvények, amelyek z körül koordinátáznak.*

Ez a definíció igazából a későbbi ekvivalens jellemzésekkel válik számunkra is érdekessé, mi a későbbiekben is csak azokat fogjuk használni.

4.0.9. Definíció. *Ha (M, J) egy majdnem komplex sokaság $\phi : M \to \mathbb{R}$ függvényt szigorúan pluriszubharmónikusnak hívunk, ha minden holomorf görbére megszorítva szigorúan szubharmónikus. Továbbiakban a J-konvex elnevezést is használom.*

4.0.10. Definíció. *Legyen $\Sigma \subset M$ 1-(valós) kodimenziós irányított részsokaság. Minden érintőtér $T_x(\Sigma) \subset T_x(M)$ $(x \in \Sigma)$ tartalmaz egy egyértelmű (n-1)dimenziós komplex alteret ξ_x-et. ξ_x komplex irányítása és $T_x(\Sigma)$ irányítása együtt megadja $\xi_x \subset T_x(\Sigma)$ egy koirányítását. Legyen α egy olyan 1-forma Σ-n, amelyre $\xi = \{\alpha = 0\}$ és α az adott koirányítást definiálja. Az ilyen α-k pozitív függvényyel való szorzás erejéig egyértelműen meghatározottak. α függvénnyel szorzása $d\alpha|_\xi$ ugyanazon függvénnyel való szorzását eredményezi. Így az hermitikus $d\alpha(x, Jy)|_\xi$ szintén pozitív függvénnyel való szorzás erejéig egyértelműen meghatározott. Ezt a formát Σ Levi formájának hívjuk. Azt mondjuk, hogy Σ szigorúan pszeudokonvex, vagy (szigorúan) J-konvex, ha Levi formája pozitív definit.*

Egy J-konvex ϕ függvény nem-szinguláris szintje J-konvex, ha úgy irányítjuk, mint $\{\phi < c\}$ tartomány határát. Ez a tulajdonság majdnem karakterisztikus a J-konvex függvényekre nézve: Minden Morse-függvény, melynek kritikus pontokat nem tartalmazó szintjei J-konvexek a kritikus pontok környékén is J-konvexszé tehető egy kis C^2 perturbációval. Ha egy ϕ függvény már rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, akkor $f \circ \phi$ már J-konvex egy alkalmas sima $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-re.

4.0.11. Tétel. *Egy komplex sokaság M pontosan akkor Stein, ha létezik rajta egy $\phi \in C^\infty(M)$ J-konvex függvény, melyre $\{z \in M \mid \phi(z) < c\} \Subset M$ minden valós c-re. (Ezt az utóbbi tulajdonságot, hogy ezek a nívóhalmazok relatív kompaktak kissé zavaróan úgy hívom, hogy a függvény valódi.)*

4.0.12. Tétel. *Egy komplex sokaság Stein pontosan akkor, ha létezik valamilyen N-re holomorf beágyazása $\mathbb{C}^N$-be, hogy a kép zárt.*

Ezen két tételt nem bizonyítom. A bizonyítás megtalálható: [Hör66]

4.0.13. Tétel. *Minden n komplex dimenziós Stein sokaságon létezik olyan Morse függvény, amelynek minden kritikus pontjában az index legfeljebb n.*

bizonyítás: 4.0.12 alapján tekintsük a sokaságot $\mathbb{C}^N$ analítikus részsokaságának. Válasszunk egy olyan pontot, amely nem eleme a képnek $p \notin S$, és legyen a függvény a p-től mért távolság négyzete. Erre a célra a Sard lemma szerint majdnem minden pont megfelel, vagyis a távolságnégyzet függvénynek nem lesznek degenerált kritikus pontjai. $q \in S$ kritikus pont, ha $\overline{pq} \perp S$. Erre a pontra az index az a szám ahány dimenziónyi irányban S behatol a p körüli $|p-q|$ sugarú gömbbe, vagyis ahány dimenziónyi irányban a görbülete nagyobb mint $\frac{1}{|p-q|}$. Hogyha mozgatjuk a p pontot a pq tengelyen, addíg amíg Morse-függvények körében maradunk ez az index nyilván nem változik. Ha az index megváltozik, akkor átléptünk egy olyan pontot, amikor a távolságnégyzetfüggvénynek q degenerált kritikus pontja volt, vagyis volt olyan irány, amelyben S másodfokúan simult a p körüli $|p-q|$ sugarú gömbhöz. Ekkor p-t fokális pontnak nevezzük, multiplicitása az a szám, ahány dimenziónyi a másodrendben simuló rész. Precízen: $p_i \in \overline{pq}$ fokális pont, ha létezik $v \in T_q(S)$ vektor, hogy v irányba kétszer deriválva a beágyazóleképezést a $p_i - q$ vektort kapom. Az ilyen v-k által alkotott altér dimenziója p_i multiplicitása. Nyilvánvalóan q indexe a p pontra nézve annyi, amennyi p és q között a fokális pontok multiplicitással számolt száma, hiszen ha p egészen közel van q-hoz, akkor az index 0. Mivel S beágyazása holomorf leképezés a derivált a sorbafejtési tétel szerint holomorf, tehát a második derivált egy pontban mindkét változójában komplex lineáris. Így ha $v \in T_q(S)$ egy fokális pontot ad a pq tengelyen, akkor iv a másik irányba q-tól ugyanolyan távol egy másik fokális pontot produkál. Ugyanezen okból a két fokális pont indexe is megegyezik. Tehát a p és q közötti fokális pontok legfeljebb feleannyian lehetnek, mint S dimenziója, vagyis maximális számuk n. □

4.0.14. Tétel. *$V - s^{-1}(0)$-n létezik olyan Morse függvény, melynek minden kritikus pontjában az index legfeljebb fele V dimenziójának.*

bizonyítás: A klasszikus Morse elmélet szerint elég belátni, hogy van olyan alulról korlátos függvény, aminek minden kritikus pontjában az index és a nulltér dimenziójának összege nem több mint n. Ez a függvény a megkonstruált s szelésre a $\log \frac{1}{|s|^2}$ lesz. Ez a kivágott részhez, a szelés nullhelyéhez haladva végtelenhez tart, tehát a függvény valódi, másrészt mivel V kompakt felveszi minimumát. Elég belátni, hogy ha H a Hessian, akkor $H(x) + H(ix)$ pozitív definit. Ugyanis ha H indexének és a nulltér dimenziójának összege nagyobb lenne mint n akkor volna egy olyan P altér, amin H negatív szemidefinit és $\dim P > n$. Ekkor a dimenzióformula szerint $P \cap iP \neq 0$, tehát van olyan nemnulla elem, amire $H(x) \leq 0$ valamint $H(ix) \leq 0$, vagyis $H(x) + H(ix) \leq 0$, ami ellentmond a pozitív definitségnek.

Számoljuk ki $H(x) + H(ix) - et$! Egy kritikus pontban a Hessian:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i y_j} \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial y_i \partial x_j} & \frac{\partial^2\psi}{\partial y_i \partial y_j} \end{pmatrix}$$

Ha ezt a kvadratikus formát a vektorok i szereseire alkalmazzuk, akkor a

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\psi}{\partial y_i \partial y_j} & -\frac{\partial^2\psi}{\partial y_i x_j} \\ -\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial y_j} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} \end{pmatrix}$$

mátrixú formát kapjuk. Tekintsük most egy rövid időre a szelést a lokális konstrukció helyszínén $\mathbb{C}^n$-ben. Ott adottak a standard ∂ és $\bar\partial$ operátorok. Ezekre

$$\bar\partial\partial\psi = \bar\partial \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i} - i\frac{\partial\psi}{\partial y_i}\right) dz_i = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j} + i\frac{\partial\psi}{\partial y_j}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i} - i\frac{\partial\psi}{\partial y_i}\right) dz_i \wedge d\bar z_j$$

Tehát az (1,1) formák 2.2-ben tárgyalt $dz_i \wedge d\bar z_j$ bázisára vett együtthatómátrixa:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y_i \partial y_j} - i\frac{\partial^2\psi}{\partial y_i \partial x_j} + i\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial y_j}.$$

Ez egy hermitikus forma. Valósrészét valós bázisban felírva:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{\partial^2\partial}{\partial y_i\partial y_j} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial y_j} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial y_i} \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial y_i} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial y_j} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y_i\partial y_j} \end{pmatrix}$$

Ami nem más mint $H(x) + H(ix)$ mátrixa. Tehát elég belátni, hogy $\bar{\partial}\partial\psi$ együtthatómátrixa pozitív definit.

Térjünk most át a V-n értelmezett ∂_V és $\bar{\partial}_V$ operátorokra. Láttuk korábban, hogy ez megfelelő koordinátalapokon $\partial + \bar{\mu}\bar{\partial}$ illetve $\bar{\partial} + \mu\partial$ alakot ölt, amiről még az is feltehető, hogy μ a p-pontban eltűnik. Legyen most p a vizsgált kritikus pont, ahol ψ elsőrendben eltűnik.

$$\bar{\partial}_V\partial_V\psi = \bar{\partial}\left(\partial\psi + \bar{\mu}\bar{\partial}\psi\right) = \bar{\partial}\partial\psi + \bar{\partial}\bar{\mu}\bar{\partial}\psi = \bar{\partial}\partial\psi$$

Az első egyenlőség μ p-beli eltűnése miatt igaz, a második pedig azért, mert mind ψ deriváltja, mind μ eltűnik, így kompozíciójuk (szorzatuk) már első rendben tűnik el.

Mint korábban most is $\partial_L + \bar{\partial}_L$ jelöli az L^k vonalnyalábon a konnexió felbontását, és $< .,. >$ a hermitikus skaláris szorzást.

$$\partial_V\psi = -\partial_V \log|s|^2 = -\frac{1}{|s|^2}\left(< \partial_L s, s > + < s, \bar{\partial}_L s >\right)$$

és mivel ψ elsőrendben eltűnik:

$$\bar{\partial}_V\partial_V\psi = -\frac{1}{|s|^2}\begin{array}{ll} (\quad < \bar{\partial}_L\partial_L s, s > & + < \partial_L s, \partial_L s > \\ + < \bar{\partial}_L s, \bar{\partial}_L s > & + < s, \partial_L\bar{\partial}_L s >). \end{array}$$

Mivel $\bar{\partial}_L\partial_L + \partial_L\bar{\partial}_L = ik\omega$, ezért

$$\bar{\partial}_V\partial_V\psi = -ik\omega - \frac{1}{|s|^2}\begin{array}{ll} (\; - < \partial_L\bar{\partial}_L s, s > & + < s, \partial_L\bar{\partial}_L s > \\ + < \partial_L s, \partial_L s > & + < \bar{\partial}_L s, \bar{\partial}_L s >). \end{array}$$

Tudjuk, hogy $-ik\omega$ együtthatómátrixa pozitív definit, már csak azt kell belátnunk, hogy a hibatag kicsi. $\bar{\partial}_L s$ és $\nabla\bar{\partial}_L s$, így $\partial_L\bar{\partial}_L s$ az egész sokaságon $k^{-1/2}$ rendűek, továbbá mivel ψ egy kritikus pontjában vagyunk, vagyis $|s|^2$ deriváltja eltűnik, ezért

$$|\partial_L s| = \left|\bar{\partial}_L s\right|$$

tehát $\partial_L s$ is $k^{-1/2}$ rendű. A hibatag tehát akkor lesz kicsi, ha $|s|^2 \geq ck^{-1/2}$ megfelelő c-re.

A szelésre elért η-tranzverzalitás azt mondja ki, hogy s és $\partial_L s$ nem lehet ugyanabban a pontban egyszerre kicsi. Felhasználva, hogy η nem függött k-tól azt kapjuk, hogy $|s| > \eta$. $\square$

4.1. Stein sokaságok karakterizálása

Ha a 4.0.13 tételünket meg tudnánk fordítani, akkor a fentiek értelmében azt kapnánk, hogy a komplementer Stein. Ezzel foglalkozik a dolgozat hátralevő része, vagyis Eliashberg következő tételét fogjuk bizonyítani:

4.1.1. Tétel. *Egy $2n > 4$ dimenziós majdnem komplex sokaság pontosan akkor Stein, ha van rajta egy olyan valódi Morse függvény, aminek minden kritikus pontjában az indexe n-nél nem több.*

A bizonyítás a Morse-függvény kritikus pontjai szerinti indukcióval megy: fogantyúnként definiálunk egy komplex struktúrát, majd a fogantyúkra kiterjesztünk egy J-konvex függvényt, és így 4.0.11 szerint az eredmény Stein. Először a majdnem komplex, és a holomof fogantyúragasztás fogalmát tisztázzuk, majd megmutatjuk, hogy hogyan lehet áttérni a majdnem komplex ragasztásból a holomorfra, ez ahhoz kell majd nekünk, hogy a definiált komplex struktúrát kiterjeszthessük a fogantyúra.

Sima sokaságok körében egy fogantyúragasztáshoz csak egy tüskézés szükségeltetik, hogy a sima struktúra kiterjedjen. Majdnem komplex sokaságokra azonban a majdnem komplex struktúrát is ki kell tudnunk terjeszteni. Ehhez megadjuk a fogantyú egy komplex struktúráját, majd a tüskézés mellett egy további ragasztó nyalábleképezéssel egészítjük ki a ragasztást, amely a majdnem komplex struktúrákat fogja összeilleszteni.

Rögzítsünk egy dekompozíciót $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^{n-k} = \mathbb{R}^k \otimes i\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^{n-k} \otimes i\mathbb{R}^{n-k}$! A k indexű standard fogantyú $H = H_\epsilon = \mathcal{D}^k_\epsilon \times \mathcal{D}^k_{1+\epsilon} \times \mathcal{D}^{n-k}_\epsilon \times \mathcal{D}^{n-k}_\epsilon$. Jelölje $\mathcal{D}$ a $0 \times \mathcal{D}^k_1 \times 0$ golyót, továbbá $S = \partial\mathcal{D}$ a határgömböt. Legyen ν a $\mathcal{D}$-golyó H-beli normálnyalábja. Ennek a kanonikus dekompozícióját jelöljük $\nu = \nu_0 \oplus \nu_1 \oplus \nu_2$-vel. A faktorok a fogantyú-dekompozíció első, illetve utolsó kettő tagjához tartoznak. Mivel $iT(S) \subset \nu_0$ ezért a komplexifikált $T^{\mathbb{C}}(S) = T(S) \otimes \mathbb{C}$ tekinthető $T(H)\big|_S$ résznyalábjának. Jelölje továbbá v az S gömb $\mathcal{D}$-beli kifele mutató egységnormálvektor-mezőjét és τ a $\mathcal{D}$-nek S-re megszorított érintőnyalábját.

Legyen W kompakt komplex sokaság ∂W pszeudokonvex határral. Jelölje ξ a komplex érintők által alkotott kontakt struktúrát a peremen. Rögzítsünk a határon egy befele mutató tranzverzális w vektormezőt, amire $Jw \subset T(\partial W)$. Egy $f : S \to \partial W$ leképezésre jelölje $\mathcal{D}f$ azt a $\tau \to T(W)$ homomorfizmust, ami $T(S)$-en df-fel azonos, v-t pedig w-be küldi. Jelölje $\overline{\mathcal{D}f}$ a $-J \circ \mathcal{D}f \circ i : \nu_0 \to T(W)$ tüskéző homomorfizmust. Fontos, hogy ha f Legendre immerzió, vagyis érinti ξ-t, akkor $\overline{\mathcal{D}f}(\nu) \subset T(\partial W)$, valamint $\overline{\mathcal{D}f}(\nu)$ tranzverzális $\mathcal{D}f(\tau)$-ra, és $\mathcal{D}f \oplus \overline{\mathcal{D}f}$ komplex homomorfizmus $\tau \oplus \nu$-ből $T(W)$-be.

A majdnem komplex sokaságok kategóriájában egy fogantyúragasztáshoz egy fogantyúragasztó hármas (FRH) szükségeltetik: (f, β, ϕ), ahol f egy $S \to \partial W$ beágyazás, β egy nem degenerált valós $\nu \to \nu_f = T(\partial W)|_{f(S)}/df(T(S))$ homomorfizmus (tüskézés), valamint ϕ egy komplex $T(H)|_S \to T(W)$ homomorfizmus, amely valósként homotóp $\mathcal{D}f \oplus \beta$-val.

Egy (f, β, ϕ) FRH-t speciálisnak hívunk, ha $f : S \to \partial W$ Legendre, és β egyenlő $\overline{\mathcal{D}f} \oplus \theta$-val, valamilyen $\theta : \nu_1 \oplus \nu_2 \to T(W)$ komplex monomorfizmusra.

FRH-k izotópiáján $f_t : S \to \partial W$ izotópiát értünk, amit $\beta_t : \nu \to \nu_{f_t}$, valamint $\phi_t : T(H)|_S \to T(W)$ homotópiák fednek.

Egy fogantyú holomorf ragasztása alatt egy F holomorf függvényt értek, ami S egy H_ϵ-beli környezetéből W-be megy, (úgy képzeljük, hogy a komplex struktúra egy kicsit ki van terjesztve a határon túlra) valamint $F(S) \subset \partial W$, $dF(v) = w$, illetve $dF(\nu) \subset T(\partial W)$. Ha F holomorf ragasztás, akkor $F|_S$ Legendre és $(F|_S, dF|_\nu, dF|_{T(H)|_S})$ egy speciális FRH.

4.1.2. Tétel. *Minden FRH izotóp egy speciálissal, ha $n > 2$.*

Ebből a tételből, melynek bizonyítása [Eli90]-ben található már könnyű áttérni holomorf ragasztásra. Ezt az alábbi két lemma adja meg.

4.1.3. Lemma. *Legyen (V, ξ) valós-analítikus kontakt sokaság, és legyen $L \subset V$ egy sima legendre részsokaság. Ekkor L simán approximálható valós-analítikus legendre részsokaságokkal.*

bizonyítás: Legyen $\tilde{L} \subset V$ valós-analítikus részsokaság, amely közel van L-hez, de nem feltétlen legendre. A kontakt struktúra ξ definiálható egy valós-analítikus α 1-formával. Van egy olyan $\tilde{\alpha}$ 1-forma, amely közel van α-hoz és eltűnik $T(\tilde{L})$-on. Ha $\tilde{\alpha}$ elég közel van α-hoz, akkor minden $t \in [0, 1]$-re az $\alpha_t = (1-t)\alpha + t\tilde{\alpha}$ 1-forma kontakt. Így $\xi_t = \{\alpha_t = 0\}$ kontakt struktúrák homotópiája. Gray tétele szerint van egy identitáshoz közeli valós-analítikus izotópia $f_t : V \to V$, hogy $\xi_t = f_t^* \xi$. $f_1(\tilde{L})$ tehát egy legendre sokaság ξ kontakt struktúrára nézve és közel van L-hez. □

4.1.4. Lemma. *Legyen W komplex sokaság valós-analítikus pszeudokonvex ∂W határral, és (f, β, ϕ) egy FRH. Ekkor $n > 2$-re létezik a H fogantyúnak egy holomorf F ragasztása W-be úgy hogy $(F|_S, dF|_\nu, dF|_{T(H)|_S})$ izotóp (f, β, ϕ)-vel.*

bizonyítás: Deformáljuk (f, β, ϕ)-t speciálissá: $(\tilde{f}, \tilde{\beta}, \tilde{\phi})$. Ez azt jelenti, hogy $\tilde{\beta}$ egyenlő $\overline{\mathcal{D}\tilde{f}} \oplus \theta$, ahol θ egy $\nu_1 \oplus \nu_2 \to T(W)$ komplex homomorfizmus.

A fentiek szerint $\tilde{f}$-ot valós analítikussá tehetjük. Ezen túlmenően $\overline{\mathcal{D}\tilde{f}}$-ról, valamint ν_1-ről és ν_2-ről is feltehetjük, hogy valós-analítikusak. Legyen $P_\epsilon = 0 \times \mathcal{D}_{1+\epsilon} \times 0 \times \mathcal{D}_\epsilon \subset H_\epsilon$. Létezik valós-analítikus ψ leképezése S-nek egy P_ϵ-beli környezetéből W-be úgy, hogy $\psi_S = \tilde{f}$, és $d\psi|_{T(P_\epsilon)|_S} = \overline{\mathcal{D}\tilde{f}} \oplus \nu_2$. Ekkor ψ komplexifikáltja F adja a kívánt ragasztást H_ϵ-ból W-be. $\square$

4.1.5. Lemma. *Legyen ψ az S-nek egy H_ϵ-beli U környezetén definiált pluriszubharmonikus függvény. Tegyük fel, hogy $\psi|_S = -1$, $d\psi|_\nu = 0$, és $d\psi(v) < 0$. Ekkor bármely $\tilde{U} \subset U$ környezetre van $\mathcal{D} \cup U$-nak egy H_ϵ-beli V környezete, és egy pluriszubharmonikus $\phi : V \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $\phi|_{U \setminus \tilde{U}}$ ekvivalens $\psi|_{U \setminus \tilde{U}}$val, vagyis $\phi(x) = f(\psi(x))$, valamilyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffeomorfizmusra; ϕ-nek egy kritikus pontja van: a 0 kritikus értékhez tartozó origó, ez nem elfajuló, és indexe k. Továbbá $\phi|_{\{\psi=-1\} \setminus \tilde{U}} = c > 0$, és $\phi|_{\partial U \setminus \{\psi \leq -1\}} > c$.*

A bizonyítás azon múlik, hogy a már meglévő csírát standardizáljuk S mentén (ez azért lehetséges, mert S teljesen valós, vagyis $T(S) \cap iT(S) = 0$), majd konstruálunk immár a fogantyún egy kanonikus pluriszubharmonikus függvényt. Részletesen lásd [Eli90].

4.1.6. Tétel. *Legyen X egy $2n$-dimenziós sima sokaság, és J egy majdnem komplex struktúra X-en. Legyen $\varphi : X \to \mathbb{R}$ valódi Morse függvény, amelyre minden kritikus pont indexe $\leq n$. Tegyük fel, hogy $n > 2$. Ekkor J homotóp egy valódi komplex struktúrával $\tilde{J}$-mal, amire φ már $\tilde{J}$-konvex. Speciálisan $(X, \tilde{J})$ Stein.*

bizonyítás: Legyenek $y_1 \leq y_2 \leq \dots$ a φ függvény kritikus értékei. Feltehető, hogy ezek mind különböznek. Vegyünk olyan valós $t_1, t_2, \dots$ valós számokat, hogy $y_1 < t_1 < y_2 < t_2 < \dots$, és legyen $X_k = \{\varphi \leq t_k\}$. Ekkor X_1 egy golyó, X_{k+1} pedig egy fogantyú ragasztásával kapható X_k-ból. Megkonstruáljuk komplex sokaságok egy növő sorozatát: $W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_k \subset \dots$, pluriszubharmonikus függvények egy sorozatát: $\varphi_k : W_k \to \mathbb{R}$, és diffeomorfizmusok egy sorozatát: $f_k : X_k \to W_k$ a komplex érintőnyalábok f_k-t fedő izomorfizmusával: $\phi_k : T(X_k) \to T(W_k)$, hogy a következők teljesüljenek:

$$\varphi_k|_{W_{k-1}} = \varphi_{k-1}, \quad f_k|_{X_{k-1}} = f_{k-1}, \quad \phi_k|_{T(X_{k-1})} = \phi_{k-1}, \quad \varphi_k \circ f_k = \varphi|_{X_k}$$

Legyen $W_1 \subset \mathbb{C}^n$ az egységgolyó, és legyen $\varphi_1(z) = t_1 \left\|z\right\|^2$. Legyen f_1 az a diffeomorfizmus, amire $\varphi_1 \circ f_1 = \varphi|_{X_1}$, és ϕ_1 a fedő komplex izomorfizmus $T(X_1) \to T(W_1)$. Tegyük fel, hogy $i \leq k$-ra már megkonstruáltuk W_i-t, φ_i-t, f_i-t, ϕ_i-t. X_{k+1} az egy $s \leq n$ indexű H fogantyú hozzáragasztásával keletkezett X_k-ból. Legyen (g, β, ψ) az ezt a fogantyút ragasztó hármas.

Legyen $\tilde{g} = f_k \circ g$, $\tilde{\beta} = \phi_k \circ \beta$, és $\tilde{\psi} = \phi_k \circ \psi$. Ekkor $(\tilde{g}, \tilde{\beta}, \tilde{\psi})$ egy H-t W_k-hoz ragasztó hármas. Legyen $\tilde{W}_k \supset W_k$ egy kicsit nagyobb peremes komplex sokaság. 4.1.4 szerint létezik komplex analítikus ragasztás, vagyis egy F holomorf leképezés S egy H_ϵ-beli U környezetéből $\tilde{W}_k$-ba, hogy $F(S) \subset \partial W_k$, $dF(\nu) \subset T(\partial W_k)$, és $dF(v)$ egy befele mutató ∂W_k-hoz tranzverzális vektormező W_k-ban, és a $(F|_S, dF|_\nu, dF|_{T(H)|_S})$ izotóp $(\tilde{g}, \tilde{\beta}, \tilde{\psi})$-mal. ϵ-t és $\tilde{W}_k \supset W_k$-t megfelelően választva elérhetjük, hogy $F^{-1}(\tilde{W}_k)$ zárt része H_ϵ-nak. Legyen $\tilde{W}_{k+1} = \tilde{W}_k \cup_F H_\epsilon$. Alkalmazva 4.1.5-öt kiterjeszthetjük φ_k-t pluriszubharmonikusan egy $W_k \cup \mathcal{D} \supset \tilde{W}_{k+1}$ környezetben értelmezett φ_{k+1}-é, hogy φ_{k+1}-nek a fogantyún pontosan egy kritikus pontja van, ez a fogantyú középpontja, indexe s, az y_{k+1} kritikus értékhez tartozik, és a $\varphi_{k+1}^{-1}(t_{k+1})$ szint zárt részsokasága $\tilde{W}_{k+1} - nek$.

Legyen $W_{k+1} = \{\varphi_{k+1} \leq t_{k+1}\} \subset \tilde{W}_{k+1}$. Ezek után az $f_{k+1} : X_{k+1} \to W_{k+1}$ diffeomorfizmus, és a $\phi : T(X_{k+1}) \to T(W_{k+1})$ komplex izomorfizmus konstrukciója nyilvánvaló. A $W = \cup_k W_k$ direkt limesz egy komplex sokaság J_W komplex struktúrával. Legyen $f : X \to W$ az a diffeomorfizmus, ami X_k-n f_k-val egyezik meg. Ekkor $\tilde{J} = f^* J_W$ komplex struktúra X-en homotóp J-vel majdnem komplex struktúrákon keresztül, és φ pedig $\tilde{J}$-konvex. $\square$

Irodalomjegyzék

[Don90] S. K. Donaldson. Yang-mills invariants of four-manifolds. In Donaldson and Thomas, editors, *Geometry of low-dimensional manifolds*, number 1. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Don96] S. K. Donaldson. Symplectic submanifolds and almost-complex geometry. *J. Differential Geometry*, 44:666–705, 1996.

[Eli90] Yakov Eliashberg. Topological characterisation of stein manifolds of dimension ¿2. *International Journal of Mathematics*, 1(1):29–46, 1990.

[Hör66] Lars Hörmander. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. Van Nostrand Reinhold Conpany, New York, 1966.

[NN57] A. Newlander and L. Nirenberg. Complex analytic coordinates in almost-complex manifolds. *Annals of Mathematics*, 65:391–404, 1957.

[Wel80] R. O. Wells, Jr. *Differential Analysis on Complex Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, New York, 1980.