Kiss Sándor

Additív Reprezentációfüggvények

Szakdolgozat

témavezető
Sárközy András

2005. május

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Ebben a szakdolgozatban az additív reprezentációfüggvények regularitási tulajdonságaival szeretnék foglalkozni. E témakör kutatása az 1950-es években kezdődött. Azóta több mint 50 cikket írtak erről a témakörről, és számos érdekes problémát vetettek fel, melyek nagy része ma is megoldatlan.

A dolgozat első fejezetében a kezdeti eredményeket tárgyalom. Ezen eredmények nagy része az 1940-es évekből való, és Erdős Pál valamint Turán Pál nevéhez fűződik. A második fejezetben egy alapvetően fontos eredményt az Erdős-Fuchs tételt ismertetem. Ez a tétel 1954-ből való, és azért nagyon fontos, mert kiindulópontja volt az additív reprezentációfüggvények regularitási tulajdonságai vizsgálatának. Végül a harmadik fejezetben foglalkozom az additív reprezentációfüggvények regularitási tulajdonságaival. Főként a két legfontosabb tulajdonságot a korlátosságot és a monotonitást vizsgálom. Ebben a fejezetben közlöm az önálló eredményeimet is.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Sárközy Andrásnak az érdekes témáért és a hasznos megjegyzéseiért.

A továbbiakban bevezetünk néhány jelölést. $\mathbb{N}$ jelöli a természetes számok halmazát, $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát, míg $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát. Legyen $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots\} \quad (a_1 < a_2 < \dots)$, $i, j \in \mathbb{N}$. Jelölje az alábbi

$$a_i + a_j = n, \quad a_i, a_j, \in \mathcal{A},$$

$$a_i + a_j = n, \quad i < j, \quad a_i, a_j \in \mathcal{A},$$

$$a_i + a_j = n, \quad i \leq j, \quad a_i, a_j, \in \mathcal{A},$$

egyenletek megoldásainak a számát $R_1(n)$, $R_2(n)$ és $R_3(n)$. Jelölje továbbá $\mathcal{A}^c$ az $\mathcal{A}$ halmaz komplementerét. Végül, ha $F(n) = O(G(n))$, akkor $F(n) \ll G(n)$, és

$$A(n) = \sum_{\substack{a \leq n \\ a \in \mathcal{A}}} 1.$$

1. fejezet

Kezdeti eredmények

Ebben a fejezetben bemutatok néhány fontos és számomra érdekes eredményt, amelyek fontos részét képezték az additív reprezentációfüggvények vizsgálatának.

1.0.1 Definíció. Legyenek g és h természetes számok, és legyen $h \geq 2$. Jelölje $B_h[g]$ azon $\mathcal{A}$ sorozatok osztályát, melyre minden n pozitív egész számnak legfeljebb g darab

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_h = n \quad (a_1 \in \mathcal{A}, \ldots a_h \in \mathcal{A}) \quad a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_h \tag{1.1}$$

alakú reprezentációja van.

1.0.2 Definíció. Ha $\mathcal{A} \subset B_h[g]$ akkor azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ egy $B_h[g]$-sorozat. A $g = 1$ esetben $B_h[1]$ helyett egyszerűen csak B_h-t írunk.

1.0.3 Definíció. Jelölje $F_h(n)$ azon elemek maximális számát $\mathbb{N}$-ből, melyek B_h-sorozatot alkotnak.

1.0.4 Tétel. *(Erdős-Turán)*

$$F_2(n) < n^{1/2} + O(n^{1/4}). \tag{1.2}$$

Bizonyítás. Jelölje $r = F_2(n)$, és legyen $a_1 < a_2 < \ldots < a_r$ a maximális B_2 sorozat, amit $\mathcal{A}$-val jelölünk. Világos, hogy $\mathcal{A} \subset [1, n]$. Legyen u egy pozitív egész, $u < n$, és tekintsük a következő $n + u$ darab intervallumot:

$$J_m = [-u + m, -1 + m] \quad \textit{ahol} \quad (m = 1, 2, \ldots n + u).$$

Jelölje

$$A_m = \sum_{a \in \mathcal{A} \cap J_m} 1.$$

Mivel minden egyes a_i pontosan u darab intervallumban van, ezért

$$\sum_{m=1}^{n+u} A_m = ru. \tag{1.3}$$

A J_m-ben lévő (a_i, a_j) $(i < j \leq r)$ párok száma éppen $\frac{1}{2}A_m(A_m - 1)$. Ezért az összes ilyen párok száma, amelyek mind ugyanabban a J_l $(1 \leq l \leq n+u)$ intervallumban vannak, éppen

$$\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n+u} A_m(A_m - 1). \tag{1.4}$$

A Cauchy-egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$(ru)^2 = \left(\sum_{m=1}^{n+u} A_m\right)^2 \leq \left(\sum_{m=1}^{n+u} 1\right)\left(\sum_{m=1}^{n+u} A_m^2\right) = (n+u)\sum_{m=1}^{n+u} A_m^2,$$

amiből

$$\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n+u} A_m(A_m - 1) \geq \frac{1}{2}ru\left(\frac{ru}{n+u} - 1\right).$$

Másrészt bármely (1.4)-ben lévő (a_i, a_j) párra $a_j - a_i = d$, melyre $1 \leq d \leq u - 1$. Mivel ezek a d-k mind különbözők, ezért minden egyes d-hez legfeljebb egy ilyen pár tartozik. Egy bizonyos d-hez tartozó pár pontosan $u-d$ darab J_l intervallumban van benne. Emiatt a (1.4)-ben kiszámolt párok száma legfeljebb

$$\sum_{d=1}^{u-1}(u-d) = \frac{1}{2}u(u-1).$$

Összevetve a (1.4)-re kapott alsó és felső becslést azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}ru(ru - n - u) \leq \frac{1}{2}u(u-1)(u+n).$$

Ebből $1 \leq u < n$ felhasználásával következik, hogy

$$r(ru - 2n) < u(u+n),$$

azaz

$$r < \frac{n}{u} + \left(n + u + \frac{n^2}{u^2}\right)^{1/2}.$$

Ebből $u = [n^3/4]$ választással kapjuk, hogy

$$r < n^{1/2} + O(n^{1/4}).$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

1.0.5 Következmény. $\limsup_{n\to\infty} n^{-1/2} F_2(n) = 1.$

Erdős és Turán azt sejtették, hogy $\lim_{n\to\infty} n^{-1/2} F_2(n) = 1$. Néhány évvel később Chowla és Erdős egymástól függetlenül bebizonyították, hogy $\liminf_{n\to\infty} n^{-1/2} F_2(n) \geq 1$, ami igazolja a fenti sejtést. Valójában ennél sokkal pontosabb eredmények is vannak. Szükségünk lesz az alábbi tételre:

1.0.6 Tétel. *(Bose-Chowla) Legyen $h \geq 2$ pozitív egész, és legyen m egy prímhatvány. Ekkor*

$$F_h(m^h - 1) \geq m.$$

1.0.7 Következmény. *Legyen $t \geq 0$ egész, m prímhatvány, $h \geq 2$ egész. Ekkor létezik olyan B_h sorozat, ami m elemet tartalmaz, és valódi része a $[t; t + m^h - 2]$ intervallumnak.*

Ebből a tételből $m = p$ és $F_h(n)$ függvény n-ben növekedő választással kapjuk, hogy $F_h(p^h) \geq p$ minden $h \geq 2$ egészre, és minden p prímre. Figyelembe véve, hogy $\lim_{p\to\infty} \frac{p}{p'} = 1$ ahol p, p' egymást követő prímek, azonnal látszik, hogy $\liminf_{n\to\infty} n^{-1/h} F_h(n) \geq 1$ ahol $(h = 2, 3, \dots)$. Felhasználva azt a sokkal mélyebb eredményt, amely szerint $p - p' = O(p^{5/8})$ minden p, p' egymást követő prímekre, azonnal adódik az alábbi tétel:

1.0.8 Tétel. *(Bose-Chowla) Minden egyes $h \geq 2$ egészre*

$$F_h(n) > n^{1/h} - O(n^{5/(8h)}).$$

Összefoglalva az eddigieket a következő igaz:

1.0.9 Tétel.

$$n^{1/2} - O(n^{5/16}) < F_2(n) < n^{1/2} + O(n^{1/4}).$$

Ebből következik, hogy $F_2(n) = n^{1/2} + O(n^{5/16})$.

Ezek után érdemes megvizsgálni a végtelen B_2 sorozatok esetét is. Ezen a területen ugyancsak Erdős Pál ért el fontos eredményeket.

1.0.10 Tétel. *Minden $\mathcal{A}$ végtelen B_2 sorozatra igaz, hogy*

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-1/2}(\log n)^{1/2} A(n) \ll 1.$$

Bizonyítás. Legyen N egy nagy pozitív egész, és legyen

$$\tau_{\mathcal{A}}(N) = \inf_{n \geq N} A(n)(\log n/n)^{1/2},$$

belátjuk, hogy $\tau_{\mathcal{A}}(N) \ll 1$ abszolút konstanssal. Jelölje D_l egy adott $\mathcal{A}$ B_2 sorozat $(l-1)N < a \leq lN$ intervallumba eső elemeinek a számát. A

$$0 < a_i - a_j < N,$$

$a_i, a_j \in \mathcal{A}$ -beli megoldások száma kevesebb, mint N. Emiatt

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2} D_l(D_l - 1) < N. \tag{1.5}$$

De ha $D_l > 1$, akkor $D_l(D_l-1) \geq \frac{1}{2}D_l^2$, és (1.5)-ből következik, hogy

$$\sum_{l=1}^{N} D_l^2 = \sum_{\substack{l=1 \\ D_l=1}} 1 + \sum_{\substack{l=1 \\ D_l>1}} D_l^2 \leq N + 2\sum_{l=1}^{\infty} D_l(D_l-1) < 5N. \tag{1.6}$$

Másrészt a Cauchy egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{l}\right)\left(\sum_{l=1}^{N} D_l^2\right) \geq \left(\sum_{l=1}^{N} \frac{D_l}{l^{1/2}}\right)^2. \tag{1.7}$$

Ezekből

$$\sum_{l=1}^{N} \frac{D_l}{l^{1/2}} = \sum_{l=1}^{N} (A(lN) - A((l-1)N)) \frac{1}{l^{1/2}} = \sum_{l=1}^{N} A(lN) \left(\frac{1}{l^{1/2}} - \frac{1}{(l+1)^{1/2}}\right) +$$

$$\frac{A(N^2)}{(N+1)^{1/2}} \geq \tau_{\mathcal{A}}(N) \sum_{l=1}^{N} \left(\frac{lN}{\log lN}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{l^{1/2}} - \frac{1}{(l+1)^{1/2}}\right) \gg$$

$$\tau_{\mathcal{A}}(N)\left(\frac{N}{\log N}\right)^{1/2}\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{l}.$$

Behelyettesítve (1.7)-be kapjuk, hogy

$$\sum_{l=1}^{N} D_l^2 \gg N\tau_{\mathcal{A}}^2(N)$$

és (1.6) adja a kívánt eredményt. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Erdős Pál konstrukciót is adott:

1.0.11 Tétel. *Létezik olyan $\mathcal{A}$ végtelen B_2 sorozat, melyre* $\limsup_{n\to\infty} n^{-1/2}A(n) \geq \frac{1}{2}$.

Bizonyítás. Minden egyes páratlan prímhez konstruálunk olyan $\mathcal{A}_p$ sorozatot, amely a következő $p-1$ számból áll:

$$a_k = 2p(k+p) + (k^2)_p \quad (k = 1, 2, \dots p-1), \tag{1.8}$$

ahol $(k^2)_p$ jelöli azt az u egészt, amelyre $u \equiv k^2 \pmod{p}$, $1 \leq u \leq p-1$.

Világos, hogy $\mathcal{A}_p$ egy B_2 sorozat. Ha ugyanis $a_{k_1} + a_{k_2} = a_{k_3} + a_{k_4}$, akkor $2p(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) = (k_3^2)_p + (k_4^2)_p - (k_1^2)_p - (k_2^2)_p$, azaz $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$ és $k_1^2 + k_2^2 \equiv k_3^2 + k_4^2 \pmod{p}$; ebből azonnal következik, hogy $k_1 = k_3$ és $k_2 = k_4$ vagy $k_1 = k_4$ és $k_2 = k_3$. Világos, hogy

$$\mathcal{A}_p \subset (2p^2; 4p^2 - p). \tag{1.9}$$

Valamint ha a', a'' különböző elemei $\mathcal{A}_p$-nek, akkor

$$p < |a' - a''| < 2p^2 - p. \tag{1.10}$$

Ez utóbbi mutatja, hogy ha az $\mathcal{A}_p$ halmazok $\mathcal{P}$ elég gyorsan növő prímszámok halmazához tartozó p-khez tartoznak, akkor

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{P}) = \cup_{p\in\mathcal{P}}\mathcal{A}_p$$

is B_2-ben van. Ez elég a tétel bizonyításához, ugyanis $\mathcal{A}_p$ tartalmaz $p-1$ elemet, úgy, hogy (1.9)-ból

$$A(4p^2 - p - 1) \geq p - 1 \qquad ha \quad p \in \mathcal{P}.$$

Tegyük fel, hogy $p_1 < p_2 < \dots$ a $\mathcal{P}$ elemei, és

$$p_{r+1} \geq 4p_r^2 \quad ahol \quad (r = 1, 2, \dots). \tag{1.11}$$

Elegendő bebizonyítani, hogy ha $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)} \in \mathcal{A}_p$, melyekre $a^{(1)}$ nem egyenlő $a^{(2)}$ és $a^{(1)}$ nem egyenlő $a^{(3)}$ akkor

$$a^{(1)} - a^{(2)} = a^{(3)} - a^{(4)} \tag{1.12}$$

nem állhat fenn.
Feltehetjük, hogy

$$a^{(1)} > a^{(2)} \geq a^{(3)} > a^{(4)}. \tag{1.13}$$

Tegyük most fel, hogy $a^{(1)} \in \mathcal{A}_{p_s}$. Mivel $\mathcal{A}_{p_s}$ elemei nem elégítik ki (1.12)-t, ezért feltehetjük, hogy $a^{(4)} \notin \mathcal{A}_{p_s}$ (speciálisan $s > 1$). Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $a^{(3)}$ benne van e $\mathcal{A}_{p_s}$-ben vagy sem.
Tegyük fel először, hogy $a^{(3)} \in \mathcal{A}_{p_s}$ (azaz (1.13) miatt $a^{(2)}$ is $\mathcal{A}_{p_s}$-ben van). Ekkor (1.10) miatt

$$a^{(1)} - a^{(2)} < 2p_s^2 - p_s,$$

ahonnan (1.9) és (1.11) felhasználásával kapjuk, hogy

$$a^{(3)} - a^{(4)} > 2p_s^2 - 4p_{s-1}^2 \geq 2p_s^2 - p_s$$

tehát (1.12) nem állhat fenn.
Tegyük most fel, hogy $a^{(3)} \notin \mathcal{A}_{p_s}$. Ekkor (1.9),(1.10) és (1.11)-ból kapjuk, hogy

$$a^{(1)} - a^{(2)} > \min(p_s, 2p_s^2 - 4p_{s-1}^2) = p_s;$$

valamint (1.9) és (1.11) miatt

$$a^{(3)} - a^{(4)} < 4p_{s-1}^2 \leq p_s,$$

azaz (1.12) ugyancsak nem állhat fenn.
Ezzel a tételt bebizonyítottuk. Valamivel többet mond Krückeberg nevezetes tétele.

1.0.12 Tétel. *Létezik olyan $\mathcal{A}$ végtelen B_2 sorozat, amelyre* $\limsup_{n\to\infty} n^{-1/2}A(n) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ennek a tételnek a bizonyítása túlságosan hosszú, ezért itt nem tárgyaljuk, de megtalálható például [1]-ben.

2. fejezet

Erdős - Fuchs tétel

Ebben a fejezetben egy alapvetően fontos eredményről, az Erdős - Fuchs tételről lesz szó. Ez a tétel 1954-ben született, és azért nagyon fontos, mert ebből alakult ki az additív reprezentációfüggvények elmélete.

2.0.13 Tétel. *(Erdős - Fuchs) Legyen az $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$, és $c > 0$. Jelölje $a_i + a_j \leq n$, $(a_i, a_j \in \mathcal{A})$ megoldásszámát $S(\mathcal{A}, n)$. Ekkor*

$$S(\mathcal{A}, n) - cn = o\left(\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{\log n}}\right) \tag{2.1}$$

nem állhat fenn.

Nyilván ki kell zárni a $c = 0$ esetet, mert $S(\mathcal{A}, n) = o\left(\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{\log n}}\right)$ könnyen elérhető, ha $a_i \longrightarrow \infty$ elég gyorsan. Az $a_i = i^2$ esetben az $S(\mathcal{A}, n)$ becslése az úgynevezett körprobléma vagyis az a probléma, hogy az origó középpontú $\sqrt{n}$ sugarú körben hány rácspont van, azaz az $x^2 + y^2 \leq n$, $(x, y \in \mathbb{Z})$ megoldásszáma. Hardy és Landau bebizonyították, hogy $S(\mathcal{A}, n) = cn + d\sqrt{n} + o\left(\sqrt[4]{\frac{n}{\log n}}\right)$ $(d \in \mathbb{R})$ nem állhat fenn. A fenti tétel akkor is igaz, ha a nemnegatív számokból álló $\mathcal{A}$ halmaz elemei nem feltétlenül egészek. Legyen ugyanis $a'_i = [a_i]$, az $S(\mathcal{A}, n)$ pedig az $a'_i + a'_j \leq n$ megoldásszáma. Ekkor $S(\mathcal{A}, n) \leq S'(\mathcal{A}, n) \leq S(\mathcal{A}, n+2)$ és mivel $S'(\mathcal{A}, n)$-re igaz (2.1) azért $S(\mathcal{A}, n)$-re is igaz. A tételt először Erdős és Fuchs bizonyították be, az ő módszerük bonyolult komplex függvénytani eszközöket használ, ezért itt egy W. Jurkattól származó valamivel egyszerűbb bizonyítást adunk.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy (2.1) teljesül. Legyen az $a + a' = m$ $a, a' \in \mathcal{A}$ egyenlet megoldásszáma $R(m)$. Ekkor $S(\mathcal{A}, n) = S(n) =$

$\sum_{m=1}^{n} R(m)$. Legyen $z = re(\alpha)$. Jelölje az $\mathcal{A}$ generátorfüggvényét

$$F(z) = \sum_{a \in \mathcal{A}} z^a.$$

Ez a sor $|z| < 1$ esetén abszolút konvergens. Ekkor

$$F^2(z) = \sum_{a \in \mathcal{A}} z^a \sum_{a' \in \mathcal{A}} z^{a'} = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{a' \in \mathcal{A}} z^{a+a'} = \sum_{m=1}^{\infty} R(m) z^m.$$

Vagyis

$$\frac{F^2(z)}{1-z} = \sum_{m=1}^{\infty} R(m) z^m \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\sum_{m \le n} R(m) \big) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} S(n) z^n.$$

Írjunk $S(n) = cn + K(n)$ - et, ahol az indirekt feltevés szerint

$$K(n) = o\left(\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{\log n}} \right);$$

ebből fogunk ellentmondást kihozni. Beírva a fentieket

$$\frac{F^2(z)}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} S(n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (cn + K(n)) z^n = c \sum_{n=1}^{\infty} n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} K(n) z^n$$

$$= cz \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} K(n) z^n = \frac{cz}{(1-z)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} K(n) z^n.$$

Beszorozva $(1-z)$ - vel

$$F^2(z) = \frac{cz}{1-z} + (1-z) \sum_{n=1}^{\infty} K(n) z^n,$$

ahol $K(n) = o\left(\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{\log n}} \right)$. Most bevezetünk néhány jelölést: $\varepsilon = \varepsilon(c)$ egy c-től függően elég kicsi szám; $N \in \mathbb{N}$ ε-tól és c-től függően elég nagy szám, ezzel az N-nel legyen $|z| = r = 1 - \frac{1}{N}$, $z = re(\alpha)$ ahol α fut. Végül legyen $m = [\varepsilon N^{1/2} (\log N)^{-1}]$. A következő integrált fogjuk becsülni:

$$I = \int_0^1 |F(z)|^2 \left| \frac{1-z^m}{1-z} \right|^2 d\alpha.$$

Alsó és felső becslést adunk I-re, és ennek segítségével kapunk ellentmondást. Lássuk az alsó becslést!

$$\left|\frac{1-z^m}{1-z}\right|^2 = \sum_{k=0}^{m-1} r^k e(k\alpha) \sum_{l=0}^{m-1} r^l e(-l\alpha)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} r^{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{m-1} r^{2l+j}\right)\big(e(j\alpha)+e(-j\alpha)\big) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k e(k\alpha),$$

innen

$$d_0 = \sum_{k=0}^{m-1} r^{2k} > m r^{2(m-1)}.$$

Behelyettesítve kapjuk, hogy

$$d_0 > \frac{\varepsilon}{2} N^{1/2} (\log N)^{-1}$$

és $d_k \geq 0$ minden k - ra. Másrészt,

$$|F^2(\alpha)| = F(\alpha)F(-\alpha) = \sum_{a\in\mathcal{A}} r^a e(a\alpha) \sum_{a'\notin\mathcal{A}} r^{a'} e(-a'\alpha)$$

$$= \sum_{a\in\mathcal{A}} r^{2a} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Big(\sum_{\substack{a,a'\in\mathcal{A}\\ a-a'=j}} r^{a+a'} \Big) e(j\alpha) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g_l e(l\alpha)$$

ekkor

$$g_0 = \sum_{a\in\mathcal{A}} r^{2a} \geq \sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ a\leq N}} r^{2N} = \big(1-\frac{1}{N}\big)^{2N} \sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ a\leq N}} 1 > \frac{1}{10} A(N),$$

és $g_l \geq 0$ minden l-re. Ekkor

$$I = \int_0^1 \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} g_l e(l\alpha)\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k e(k\alpha)\right) d\alpha$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g_l d_{-l} \geq g_0 d_0 > \frac{\varepsilon}{20} N^{1/2} (\log N)^{-1} A(N).$$

Szükségünk lesz az alábbi lemmára:

2.0.14 Lemma. *Az indirekt feltevésből következik, hogy elég nagy N-re $A(N) > \sqrt{\frac{cN}{2}}$.*

Bizonyítás.

$$S(N) = \sum_{\substack{a,a' \in \mathcal{A} \\ a+a' \le N}} 1 \le \sum_{\substack{a,a' \in \mathcal{A} \\ a,a' \le N}} 1 = (A(N))^2,$$

ahonnan $A(N) > \sqrt{\frac{cN}{2}}$ következik.

Így:

$$I > \frac{\varepsilon}{20} N^{1/2} (\log N)^{-1} \sqrt{\frac{c}{2}} N^{1/2} > \frac{\varepsilon}{30} \sqrt{c} \frac{N}{\log N}.$$

Ezek után felső becslést adunk I-re.

$$I = \int_0^1 \left| \frac{cz}{1-z} + (1-z) \sum_{n=1}^{\infty} K(n) z^n \right| \left| \frac{1-z^m}{1-z} \right|^2 d\alpha$$

$$\le \int_0^1 \left| \frac{cz}{1-z} \right| \left| \frac{1-z^m}{1-z} \right|^2 d\alpha + \int_0^1 |1-z^m| \left| \frac{1-z^m}{1-z} \right| \left| \sum_{n=1}^{\infty} K(n) z^n \right| d\alpha = I_1 + I_2.$$

Először I_1 - et becsüljük felülről. Ehhez $|1-z|$ - t kell alúlról.

$$|1-z|^2 = |1 - re(\alpha)|^2 = (1 - re(\alpha))(1 - re(-\alpha))$$

$$= 1 + r^2 - 2r \cos 2\pi\alpha = (1-r)^2 + 2r(1 - \cos 2\pi\alpha)$$

$$= \frac{1}{N^2} + 4r \sin^2 \pi\alpha$$

Mivel $|\sin \beta| \ge \frac{2}{\pi} |\beta|$ ha $|\beta| \le \frac{\pi}{2}$ amiből

$$\frac{1}{N^2} + 4r \sin^2 \pi\alpha \ge \begin{cases} \frac{1}{N^2}, \text{ ha } |\alpha| \le \frac{1}{N} \\ 48\alpha^2, \text{ ha } \frac{1}{N} \le |\alpha| \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vagyis

$$\frac{1}{|1-z|} \le \begin{cases} N, \text{ ha } |\alpha| \le \frac{1}{N} \\ \frac{1}{3|\alpha|}, \text{ ha } \frac{1}{N} \le |\alpha| \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

Emiatt

$$\int_0^1 \frac{1}{|1-z|} d\alpha \le \int_{|\alpha|\le\frac{1}{N}} N d\alpha + \int_{\frac{1}{N}\le|\alpha|\le\frac{1}{2}} \frac{1}{3|\alpha|} d\alpha$$

$$\le 2 + \frac{2}{3}\log N < \log N.$$

Tehát

$$I_1 \le m^2 c \int_0^1 \frac{1}{|1-z|} d\alpha \le [\varepsilon N^{1/2}(\log N)^{-1}]^2 c \log N < \varepsilon^2 c \frac{N}{\log N}.$$

Ezek után I_2 - t becsüljük felülről. Ehhez felhasználjuk a Cauchy egyenlőtlenséget, és a Parseval formulát.

$$I_2 \le 2 \int_0^1 \left|\frac{1-z^m}{1-z}\right| \left|\sum_{n=1}^{\infty} K(n) z^n\right|^2 d\alpha$$

$$\le 2\left(\int_0^1 \left|\frac{1-z^m}{1-z}\right| d\alpha\right)^{1/2} \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} K(n) z^n\right|^2 d\alpha\right)^{1/2}.$$

Az első tényező becsléséhez a Parseval formulát használom.

$$\int_0^1 \left|\frac{1-z^m}{1-z}\right|^2 d\alpha = \int_0^1 \left|\sum_{k=0}^{m-1} z^k\right|^2 d\alpha = \int_0^1 \left|\sum_{k=0}^{m-1} r^k e(k\alpha)\right| d\alpha = \sum_{k=0}^{m-1} r^{2k} < m.$$

A második tényező becsléséhez a Parseval formulát, és az indirekt feltevést használom.

$$\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} K(n) r^n e(n\alpha)\right|^2 d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} (S(n))^2 r^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} o\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right) r^{2n}$$

$$= \sum_{n\le\sqrt{N}} o\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right) + \sum_{\sqrt{N}<n} o\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right) = O\left(\sum_{n\le\sqrt{N}} \sqrt{N}\right) + o\left(\sum_{\sqrt{N}<n} \frac{\sqrt{n}}{\log n} r^{2n}\right)$$

$$= O(N) + o\left(\frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(r^2)^n\right) = O(N) + o\left(\frac{N^{3/2}}{\log N}\right).$$

Ugyanis $0 < x < 1$ - re $(1-x)^{-3/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k x^k$ - t írva igazolható, hogy $\sqrt{k} < \frac{1}{c_1} h_k$. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(r^2)^n < \frac{1}{c_1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} h_k (r^2)^n\right) = (1-r^2)^{-3/2} = \frac{1}{(1+r)^{3/2}(1-r)^{3/2}}$$

$$< \frac{1}{\left(\frac{1}{N}\right)^{3/2}} = N^{3/2}.$$

Emiatt

$$I_2 \leq 2\sqrt{m} o\left(\frac{N^{3/4}}{\sqrt{\log N}}\right) = o\left(\sqrt{N^{1/2}(\log N)^{-1}} \frac{N^{3/4}}{\sqrt{\log N}}\right) = o\left(\frac{N}{\log N}\right).$$

Összegezve

$$\frac{\varepsilon}{30}\sqrt{c}\frac{N}{\log N} < I \leq I_1 + I_2 < \varepsilon^2 c \frac{N}{\log N} + o\left(\frac{N}{\log N}\right).$$

Ebből

$$\frac{\varepsilon}{30}\sqrt{c} < \varepsilon^2 c + o(1).$$

Ha N ε - tól és c - től függően elég nagy, és ε c - től függően elég kicsi, például $\varepsilon = \frac{1}{40\sqrt{c}}$ akkor ellentmondást kapunk. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Csak megemlítem, hogy ennek a tételnek számos általánosítása, kiterjesztése ismert. Sárközy András 1980 - ban bebizonyította a tétel kiterjesztését arra az esetre, amikor két olyan sorozatot adunk össze, amelyek csak közel azonosak.(Lásd: [2]). Az Erdős - Fuchs tétel számos más irányban történő általánosítását, kiterjesztését végezte el Horváth Gábor a [3], [4] és [5] cikkekben, ezekkel itt részletesebben nem foglalkozom.

3. fejezet

Additív reprezentációfüggvények tulajdonságai

Ebben a fejezetben az additív reprezentációfüggvények tulajdonságaival foglalkozunk. Az előző fejezetekben már tárgyaltuk a Sidon által felvetett kérdéseket, és az ezzel kapcsolatos Erdős - Fuchs tételt is. (lásd 2.0.13 tétel.) Ezen eredmények után kezdte el vizsgálni Erdős Pál és Sárközy András az additív reprezentációfüggvények regularitási tulajdonságait, majd kicsit később csatlakozott hozzájuk T. Sós Vera is. Első ebben a témában írt közös cikkükben Erdős és Sárközy a következő kérdést vizsgálták: Mi a helyzet az $|R_1(n) - F(n)|$ különbséggel, ahol $F(n)$ valamilyen "sima" függvény? Egészen pontosan az alábbi eredményt kapták(lásd:[6]):

3.0.15 Tétel. *Legyen $F(n)$ egy olyan számelméleti függvény, melyre a következők igazak:*

$$F(n) \longrightarrow \infty, \tag{3.1}$$

$$F(n+1) \geq F(n) \quad n \geq n_0, \tag{3.2}$$

$$F(n) = o(n(\log n)^{-2}), \tag{3.3}$$

valamint legyen

$$\Gamma(N) = \sum_{n=1}^{N} (R_1(n) - F(n))^2. \tag{3.4}$$

Ekkor

$$\Gamma(N) = o(NF(N)) \tag{3.5}$$

nem állhat fenn.

Ennek a tételnek a bizonyítását alább közöljük.

Bizonyítás. Ha egy számelméleti függvény kielégíti (3.1)-t akkor

$$F(N) \geq 1 \quad ha \quad N \geq N_0. \tag{3.6}$$

Tegyük fel, hogy csak véges sok olyan pozitív egész M létezik, melyre

$$\frac{F(M+j)}{F(M)} < \left(\frac{M+j}{M}\right)^2 \quad ha \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Ekkor létezik olyan M_0 pozitív egész melyre $M \geq M_0$, és létezik olyan $M' = M'(M)$ pozitív egész is, hogy $M' > M$ és

$$\frac{F(M')}{F(M)} \geq \left(\frac{M'}{M}\right).$$

Ekkor ha $M_1 = \max(N_0, M_0)$ indukcióval kapjuk, hogy létezik olyan pozitív egészekből álló $M_1 < M_2 < \cdots < M_j < \ldots$ sorozat, melyre

$$\frac{F(M_{j+1})}{F(M_j)} \geq \left(\frac{M_{j+1}}{M_j}\right)^2$$

ha $j = 1, 2, \ldots$ amiből

$$\frac{F(M_{k+1})}{F(M_1)} = \prod_{j=1}^{k} \frac{F(M_{j+1})}{F(M_j)} \geq \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{M_{j+1}}{M_j}\right)^2 = \left(\frac{M_{k+1}}{M_1}\right),$$

$$F(M_{k+1}) \geq \frac{F(M_1)}{M_1^2} M_{k+1}^2 \geq \frac{1}{M_1^2} M_{k+1}^2 > M_{k+1}^{3/2}$$

elég nagy k-ra. Vagyis

$$R_1(n) = \sum_{a_i + a_j = n} 1 \leq \sum_{k+l=n} 1 = n - 1 < n$$

fennáll minden n-re. Ezért elég nagy k-ra

$$\Gamma(M_{k+1}) = \sum_{n=1}^{M_{k+1}} (R_1(n) - F(n))^2 \geq (R_1(M_{k+1}) - F(M_{k+1}))^2$$

$$= (F(M_{k+1}))^2 \left(1 - \frac{R_1(M_{k+1})}{F(M_{k+1})}\right)^2 > (F(M_{k+1}))^2 \left(1 - \frac{M_{k+1}}{(M_{k+1})^{3/2}}\right)^2$$

$$> \frac{1}{2}(F(M_{k+1}))^2 > \frac{1}{2}M_{k+1}^{3/2}F(M_{k+1})$$

amiből látszik, hogy (3.5) nem állhat fenn.
Tegyük fel, hogy létezik végtelen sok M pozitív egész, melyre

$$\frac{F(M+j)}{F(M)} < \left(\frac{M+j}{M}\right)^2 \quad ha \quad j = 1, 2, \dots. \tag{3.7}$$

Indirekt tegyük fel, hogy $F(n)$ kielégíti (3.1), (3.2) és (3.3) feltételeket, és fennáll (3.5), de létezik egy olyan $\mathcal{A} = (a_1 < a_2 < \dots)$ sorozat, melyre (3.5) teljesül. Szükségünk lesz a következő lemmára:

3.0.16 Lemma. *Tegyük fel, hogy $F(n)$ kielégíti (3.1), (3.2) feltételeket, és fennáll (3.3), (3.5) is, M nagy és kielégíti (3.7)-et. Legyen $N = 2M$. Ekkor létezik d pozitív egész, melyre*

$$0 < d \leq 10^6 F(n) \tag{3.8}$$

és

$$\sum_{\substack{a \leq N \\ a \in \mathcal{A}, a-d \notin \mathcal{A}}} 1 > \frac{1}{6}\big(NF(N)\big)^{1/2}. \tag{3.9}$$

Bizonyítás. Először alsó becslést adunk $A(n)$-re, ahol

$$A(N) = \sum_{\substack{a \leq N \\ a \in \mathcal{A}}} 1.$$

Figyelembe véve az $F(n)$-re vonatkozó feltételeket, (3.5), (3.7)-öt, és felhasználva a Cauchy - egyenlőtlenséget kapjuk, hogy elég nagy M-re

$$(A(N))^2 = \big(\sum_{a_i \leq N} a_i\big)^2 = \sum_{a_i \leq N, a_j \leq N} 1 \geq \sum_{a_i + a_j \leq N} 1 \tag{3.10}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} R_1(n) = \sum_{n=1}^{N} F(n) + \sum_{n=1}^{N}(R_1(n) - F(n))$$

$$\geq \sum_{n=M+1}^{N} F(n) - \sum_{n=1}^{N} |R_1(n) - F(n)|$$

$$\geq \sum_{n=M+1}^{N} F(M) - (\Gamma(N)N)^{1/2} = MF(M) - o\big(N(F(N))^{1/2}\big)$$

$$> \frac{N}{2}\left(\frac{M}{2M}\right)^2 F(2M) - N(F(N))^{1/2}$$

$$= \frac{N}{8}F(N)\big(1 - (F(N))^{-1/2}\big) > \frac{1}{9}NF(N)$$

ahonnan

$$A(N) > \frac{1}{3}(NF(N))^{1/2}.$$

Ha rögzített d-re a

$$a_x - a_y = d, \quad a_x \leq N \tag{3.11}$$

egyenlet megoldásszámát $\varphi(d)$ jelöli, és d nem elégíti ki (3.9)-et, akkor

$$\varphi(d) = \sum_{\substack{a \leq N \\ a \in \mathcal{A}, a-d \notin \mathcal{A}}} 1 = \sum_{\substack{a \leq N \\ a \in \mathcal{A}}} 1 - \sum_{\substack{a \leq N \\ a \in \mathcal{A}, a-d \notin \mathcal{A}}} 1 \tag{3.12}$$

$$= A(N) - \sum_{\substack{a \leq N \\ a \in \mathcal{A}, a-d \notin \mathcal{A}}} 1 \geq \frac{1}{6}\big(NF(N)\big)^{1/2}.$$

Ha kiindulunk (a_{x_1}, a_{y_1}), (a_{x_2}, a_{y_2}), $x_1 < x_2$ tetszőleges párokból, amelyek a (3.11) egyenlet megoldásai, akkor

$$a_{x_1} - a_{y_1} = a_{x_2} - a_{y_2}, \quad y_1 < x_1 < x_2,$$

azaz

$$a_{x_1} + a_{y_2} = a_{x_2} + a_{y_1} \quad (\leq 2N), \quad y_1 < x_1 < x_2,$$

ezért ily módon kapunk egy $(a_u, a_v), (a_z, a_t)$ párt, amire

$$a_u + a_v = a_z + a_t \quad (\leq 2N), \quad t < u < z. \tag{3.13}$$

Világos, hogy ily módon minden (3.13)-et kielégítő $(a_u, a_v), (a_z, a_t)$ számpárt kétszer kapunk meg. Tehát ha nem létezik olyan d amire (3.8) és (3.9) igaz, akkor (3.12) figyelembevételével a (3.13) egyenlet megoldásszáma legalább

$$\frac{1}{2} \sum_{d=1}^{[10^6 F(N)]} \frac{\left(\frac{1}{6}(NF(N))^{1/2}\right)^2}{3} \tag{3.14}$$

$$= \frac{1}{216} NF(N)\left[10^6 F(N)\right] > 1000N(F(N))^2.$$

Másrészt rögzített n-re az

$$a_u + a_v = a_z + a_t = n, \quad t < u < z,$$

egyenlet meghatároz egy számpárt az $\binom{R_1(n)}{2}$ darab $(a_u, a_v), (a_z, a_t)$ számpárok közül amelyek a $a_x + a_y = n$ egyenlet megoldásai. Ezért a (3.13)-at kielégítő párok száma legfeljebb

$$\sum_{n=1}^{2N} \binom{R_1(n)}{2} \le \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{2}(R_1(n))^2 \le \sum_{n=1}^{2N} (F(n))^2 + \sum_{n=1}^{2N} (R_1(n) - F(n))^2$$

$$\le 2N(F(2N))^2 + \Gamma(2N) = 2N(F(2N))^2 + o(NF(2N))$$

$$< 3N(F(2N))^2 = 3N(F(4M))^2 < 3N\left(F(M)\left(\frac{4M}{M}\right)^2\right)^2$$

$$< 768N(F(M))^2 \le 768N(F(N))^2.$$

Ez az alsó becslés könnyen láthatóan nagyobb, mint a (3.13)-ben nyert felső becslés, ami ellentmondás. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

A továbbiakban a tétel bizonyítása során a következő jelöléseket fogjuk használni: M legyen egy nagy pozitív egész ami kielégíti (3.7)-et, legyen $N = 2M$. d jelöljön egy olyan pozitív egészt, ami kielégíti (3.8) és (3.9)-et a lemmában. Legyen továbbá $e^{2i\pi\alpha} = e(\alpha)$, és legyen $r = e^{-1/N}, z = re(\alpha)$ ahol α egy valós változó, olyan, hogy egy $p(z)$ függvény α valós függvénye: $p(z) = p(re(\alpha)) = P(\alpha)$. Jelölje

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^{a_j}.$$

$r < 1$ esetén ez a végtelen sor, és a bizonyítás során az összes többi végtelen sor abszolút konvergens. Ekkor

$$f^2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} R_1(n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} F(n) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} (R_1(n) - F(n)) z^n$$

amiből

$$|f(z)(1-z^d)|^2 \leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} F(n) z^n \right| |1-z^d|^2 \tag{3.15}$$

$$+ \left| \sum_{n=1}^{\infty} (R_1(n) - F(n)) z^n \right| |1-z^d|^2.$$

Definiáljuk

$$J = \int_0^1 |f(z)(1-z^d)|^2 d\alpha \leq \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} F(n) z^n \right| |1-z^d|^2 d\alpha$$

$$+ \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} (R_1(n) - F(n)) z^n \right| |1-z^d|^2 d\alpha = J_1 + J_2.$$

Ezután alsó becslést adunk J-re, és felső becslést J_1-re és J_2-re. A J-re adott alsó korlát nagyobb lesz, mint a felső, ami ellentmondás.

Alsó becslést adunk J-re. Legyen

$$f(z)(1-z^d) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n.$$

Ekkor nyilvánvaló, hogy ha $n \in \mathcal{A}$, $n - d \notin \mathcal{A}$ akkor $b_n = 1$, a Parseval - formula és (3.9) felhasználásával kapjuk, hogy

$$J = \int_0^1 |f(z)(1-z)^d|^2 d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 r^{2n} \geq \sum_{n=1}^{N} b_n^2 r^{2n} \tag{3.16}$$

$$\geq r^{2N} \sum_{\substack{n \leq N \\ n \in \mathcal{A}, n-d \notin \mathcal{A}}} b_n^2 = e^{-2} \sum_{\substack{n \leq N \\ n \in \mathcal{A}, n-d \notin \mathcal{A}}} 1 > \frac{e^{-2}}{6} (NF(N))^{1/2} > \frac{1}{60} (NF(N))^{1/2}.$$

Most felső becslést adunk J_1-re. Világos, hogy

$$J_1 = \int_0^1 \Big| \sum_{n=1}^{\infty} F(n) z^n \Big| |1 - z^d|^2 d\alpha \tag{3.17}$$

$$= \int_0^1 \Big| (1 - z) \sum_{n=1}^{\infty} F(n) z^n \Big| \Big| \frac{1 - z^d}{1 - z} \Big| |1 - z^d| d\alpha.$$

(3.1) és (3.2) miatt

$$\Big| (1 - z) \sum_{n=1}^{\infty} F(n) z^n \Big| = \Big| F(1) z + \sum_{n=2}^{\infty} (F(n) - F(n-1)) z^n \Big| \tag{3.18}$$

$$\leq F(1) + \sum_{n=2}^{\infty} |F(n) - F(n-1)| r^n$$

$$\leq c_3 + \sum_{n=2}^{n_0} |F(n) - F(n-1)| r^n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |F(n) - F(n-1)| r^n$$

$$= c_4 + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (F(n) - F(n-1)) r^n$$

$$= c_4 + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} F(n)(r^n - r^{n+1}) - F(n_0) r^{n_0+1}$$

$$< c_4 + (1 - r) \Big(\sum_{n=n_0+1}^{\infty} F(n) r^n \Big)$$

$$= c_4 + (1 - r) \Big(\sum_{n=n_0+1}^{N} F(n) r^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} F(n) r^n \Big)$$

$$< c_4 + (1 - r) \Big(\sum_{n=n_0+1}^{N} F(N) + \sum_{n=N+1}^{\infty} F(N) \big(\frac{n}{N}\big)^2 r^n \Big)$$

$$= c_4 + (1-r)NF(N) + N^{-2}F(N)\sum_{n=N+1}^{\infty} n^2(r^n - r^{n+1})$$

$$= c_4 + (1-r)NF(N)$$

$$+N^{-2}F(N)\Bigg(\sum_{n=N+1}^{\infty}(n^2-(n-1)^2)r^n + N^2r^Nr^{N+1}\Bigg)$$

$$< c_4 + (1-r)NF(N) + N^{-2}F(N)\Bigg(2\sum_{n=N+1}^{\infty} nr^n + N^2\Bigg)$$

$$< c_4 + (1-r)NF(N) + N^{-2}F(N)\Bigg(2\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} + N^2\Bigg)$$

$$= c_4 + (1-r)NF(N) + 2N^{-2}F(N)(1-r)^{-2} + F(N)$$

$$= c_4 + (1-e^{-1/N})NF(N) + 2N^{-2}F(N)(1-e^{-1/N})^{-2} + F(N)$$

$$< c_4 + N^{-1}NF(N) + 2N^{-2}F(N)(1/2N)^{-2} + F(N)$$

$$= c_4 + 10F(N) < 11F(N).$$

Másrészt

$$\left|\frac{1-z^d}{1-z}\right| = \left|\sum_{j=0}^{d-1} z^j\right| \le \sum_{j=0}^{d-1}|z^j| < \sum_{j=0}^{d-1} 1 = d$$

minden α-ra,

$$|1-z| = ((1-z)(1-\bar{z}))^{1/2} = \big(1+|z|^2 - 2Rez\big)^{1/2}$$

$$= (1+r^2-2r\cos 2\pi\alpha)^{1/2} = \big((1-r)^2 + 2r(1-\cos 2\pi\alpha)\big)^{1/2}$$

$$> (2r(1-\cos 2\pi\alpha))^{1/2} = (2e^{-1/N} 2\sin^2 \pi\alpha)^{1/2}$$

$$\geq (8\alpha^2)^{1/2} \geq 2\alpha.$$

minden $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ ezért

$$\left|\frac{1-z^d}{1-z}\right| \leq \frac{1+|z^d|}{|1-z|} < \frac{2}{2\alpha} = \frac{1}{\alpha} \quad ha \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}, \tag{3.19}$$

és

$$|1-z^d| \leq 1+|z^d| < 2 \tag{3.20}$$

minden α-ra.

(3.1), (3.3), (3.9), (3.11), (3.19), (3.20) és (3.21) miatt (3.18)-ból kapjuk, hogy elég nagy N esetén

$$J_1 \leq \int_0^1 22F(N)\left|\frac{1-z^d}{1-z}\right| d\alpha = 44F(N)\int_0^{1/2}\left|\frac{1-z^d}{1-z}\right| d\alpha \tag{3.21}$$

$$= 44F(N)\left(\int_0^{1/d}\left|\frac{1-z^d}{1-z}\right| d\alpha + \int_{1/d}^{1/2}\left|\frac{1-z^d}{1-z}\right| d\alpha\right)$$

$$< 44F(N)(1+\log d) \leq 44F(N)(1+\log 10^6 F(N))$$

$$< 45F(N)\log F(N) < 45F(N)\log 9(A(N))^2 N^{-1}$$

$$< 45F(N)\log 9N < 46F(N)\log N$$

$$< 46(NF(N))^{1/2}\big(F(N)N^{-1}(\log N)^2\big)^{1/2} = 46(NF(N))^{1/2}o(1)$$

$$< o(NF(N))^{1/2}.$$

Ezután megbecsüljük J_2-t. Felhasználva (3.1), (3.2) ,(3.8)-t, az indirekt feltevést, a Cauchy - egyenlőtlenséget, a Parseval - formulát kapjuk, hogy ha N valamilyen ε-tól függően elég nagy, akkor

$$J_2 = \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} (R_1(n) - F(n)) z^n \right| |1 - z^d| d\alpha \tag{3.22}$$

$$\leq \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} (R_1(n) - F(n)) z^n \right| \big(1 + |z|^d\big)^2 d\alpha$$

$$\leq 4 \bigg(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} (R_1(n) - F(n)) z^n \right|^2 d\alpha \bigg)^{1/2}$$

$$= 4 \bigg(\sum_{n=1}^{\infty} (R_1(n) - F(n))^2 r^{2n} \bigg)^{1/2}$$

$$= 4 \bigg(\sum_{n=1}^{\infty} (\Gamma(n) - \Gamma(n-1)) r^{2n} \bigg)^{1/2} = 4 \bigg(\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(n) (r^{2n} - r^{2n+2}) \bigg)^{1/2}$$

$$= 4 \bigg((1 - r^2) \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(n) r^{2n} \bigg)^{1/2}$$

$$< 4 \bigg((1 - r^2) \bigg(c_5 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^2 n F(n) r^{2n} \bigg) \bigg)^{1/2}$$

$$< 4 \bigg((1 - r^2) \bigg(c_5 + \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{N} N F(N) r^{2n} + \varepsilon^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} n F(n) r^{2n} \bigg) \bigg)^{1/2}$$

$$< 4 \bigg((1 - e^{-2/N})(c_5 + \varepsilon^2 N^2 F(N)) +$$

$$+ \varepsilon^2 (1 - r^2) \sum_{n=N+1}^{\infty} n F(M + (n - M)) r^{2n} \bigg)^{1/2}$$

$$< 4\left(\frac{4}{N}\varepsilon^2 N^2 F(N) + \varepsilon^2(1-r^2)\sum_{n=N+1}^{\infty} nF(M)\big(\frac{n}{M}\big)^2 r^{2n}\right)^{1/2}$$

$$< 4\left(4\varepsilon^2 NF(N) + 4\varepsilon^2 F(N)N^{-2}\sum_{n=N+1}^{\infty} n^3(r^{2n}-r^{2n+2})\right)^{1/2}$$

ámde

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n^3(r^{2n}-r^{2n+2}) = N^3 r^{2(N+1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty}(n^3-(n-1)^3)r^{2n}$$

$$< N^3 + \sum_{n=N+1}^{\infty} 4n^2 r^{2n} = N^3 + 4(1-r^2)^{-1}\sum_{n=N+1}^{\infty} n^2(r^{2n}-r^{2n+2})$$

$$= N^3 + 4(1-e^{-2/N})^{-1}\left(N^2 r^{2(N+1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty}(n^2-(n-1)^2 r^{2n}\right)$$

$$< N^3 + 4N\left(N^2 + 2\sum_{n=N+1}^{\infty} nr^{2n}\right)$$

$$= 5N^3 + 8N(1-r^2)^{-1}\sum_{n=N+1}^{\infty} n(r^{2n}-r^{2n+2})$$

$$= 5N^3 + 8N(1-e^{-2/N})^{-1}\left(Nr^{2(N+1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} r^{2n}\right)$$

$$< 5N^3 + 8N^2\big(N + 4^{2(N+1)}(1-r^2)^{-1}\big)$$

$$< 13N^3 + 8N^2(1-e^{-2/N})^{-1} < 13N^3 + 8N^3 = 21N^3.$$

Tehát azt kaptuk (3.23) figyelembevételével, hogy elég nagy N-re

$$J_2 < 4\big(4\varepsilon^2 NF(N) + 4\varepsilon^2 F(N)N^{-2}21N^3\big)^{1/2} \tag{3.23}$$

$$= 4(88\varepsilon^2 NF(N))^{1/2} < 40\varepsilon(NF(N))^{1/2}.$$

Ekkor ha N elég nagy (3.16), (3.17), (3.22) és (3.24) figyelembevételével

$$\frac{1}{60}(NF(N))^{1/2} < J \leq J_1 + J_2 < \varepsilon(NF(N))^{1/2} + 40\varepsilon(NF(N))^{1/2} = 41\varepsilon(NF(N))^{1/2}.$$

Ha $\varepsilon = \frac{1}{2500}$ és N olyan nagy, hogy $F(N) > 0$, akkor a fenti egyenlőtlenség nem állhat fenn, ami ellentmondás. Ezzel a tételt igazoltuk.

3.0.17 Következmény. *Legyen $F(n)$ olyan számelméleti függvény, melyre teljesül (3.1), (3.2), és (3.3). Ekkor* $\max_{n \leq N} |R_1(n) - F(n)| = o((F(n))^{1/2})$ *nem állhat fenn.*

Egy későbbi cikkükben azt is megmutatták, hogy ez az eredmény csaknem a legjobb. Ehhez a következőt kellett bebizonyítani:

3.0.18 Tétel. *Ha $F(n)$ egy olyan számelméleti függvény, amire*

$$F(n) > 36 \log n$$

teljesül ha n elég nagy, és g olyan valós függvény, melyre ($x_0, n_1 \in \mathbb{R}$)

(i) $g'(x)$ *létezik, és folytonos* $(0, +\infty)$*-ben,*

(ii) $g'(x) \leq 0$ *ha* $x \geq x_0$*,*

(iii) $0 < g(x) < 1$ *ha* $x \geq x_0$*,*

(iv) $|F(n) - 2\int_0^{\frac{n}{2}} g(x)g(n-x)dx| < (F(n)\log n)^{1/2}$ *ha* $n > n_1$*.*

Ekkor létezik olyan $\mathcal{A}$ halmaz melyre

$$|R_1(n) - F(n)| < 8(F(n)\log n)^{1/2} \quad ha \quad n > n_2.$$

Ennek a tételnek számos fontos következménye van.

3.0.19 Következmény. *Ha β tetszőleges valós szám, melyre $\beta > 8/\pi^{1/2}$, akkor létezik olyan $\mathcal{A}$ végtelen sorozat melyre $c_1 \log n < R_1(n) < c_2 \log n$ fennáll az alábbi konstansokkal: $c_1 = \beta^2\pi - 8\beta\pi^{1/2}$ és $c_2 = \beta^2\pi + 8\beta\pi^{1/2}$.*

3.0.20 Következmény. *Ha $G(x)$ olyan $(0, +\infty)$-n definiált valós függvény melyre* *(i)* $\lim_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{\log x} = +\infty$,

(ii) $G(x) = o(x)$,

(iii) $G'(x)$ *létezik és folytonos* $(0, +\infty)$ - *ben,*

(iv) $G'(x) > 0$ *ha* $x > x_0$,

(v) $G'(x) = o\left(\frac{G(x)}{x}\right)$.

Ekkor létezik olyan $\mathcal{A}$ *sorozat, melyre*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R_1(n)}{G(n)} = 1$$

3.0.21 Következmény. *Ha* $0 < \alpha < 1$ *akkor létezik olyan* $\mathcal{A}$ *sorozat, hogy*

$$|R_1(n) - n^\alpha| < 8n^{\alpha/2}(\log n)^{1/2} \quad ha \quad n > n_0.$$

Ennek a tételnek a bizonyításához valószínűségelméleti módszerekre van szükség,de ez túl hosszú ahhoz, hogy itt részletezzem. A bizonyítás megtalálható [7] - ben.

Az előbbi tételekben tárgyalt kérdések természetesen általanosíthatók több tagú összegre is. Jelölje $a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k} = n$, $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots a_{i_k} \in \mathcal{A}$, ahol $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ $(a_1 < a_2 \ldots)$ egyenlet megoldásszámát $R_k(n)$. Ezzel kapcsolatban az alábbi eredmény ismert:

3.0.22 Tétel. *Ha* $F(n)$ *olyan valós értékű számelméleti függvény melyre az alábbiak igazak*

(i) $F(n) \longrightarrow +\infty$,

(ii) $F(n+1) \geq F(n)$ *ha* $n \geq n_0$,

(iii) $F(n) = o\left(n(\log n)^{-2}\right)$,

és legyen $\Gamma_k(N) = \sum_{n=0}^{N} (R_k(n) - F(n))^2$.
Ekkor

$$\Gamma_k(N) = o(NF(N))$$

nem állhat fenn.

3.0.23 Következmény. *Ha $F(n)$ olyan számelméleti függvény ami kielégíti az előző tétel feltételeit, akkor*

$$\max_{n\leq N} |R_k(n) - F(n)| = o\Big((F(N))^{1/2}\Big)$$

nem állhat fenn.

Ez utóbbi tétel és következmény Horváth Gábor eredménye, a bizonyítás megtalálható [8] - ban. Az máig sem tisztázott, hogy ez a legjobb becslés e.

Foglalkozzunk most a l-edik differenciák kérdésével. Egy adott s_n sorozat l-edik differenciáját a következőképpen definiáljuk: $\Delta_1 s_n = s_{n+1} - s_n$, és $\Delta_l s_n = \Delta_1(\Delta_{l-1} s_n)$ Bebizonyítható teljes indukcióval, hogy

$$\Delta_l s_n = \sum_{i=0}^{l} (-1)^{l-i} \binom{l}{i} s_{n+i}. \tag{3.24}$$

A kérdésben az első eredményeket Sárközy András, Erdős Pál, és T. Sós Vera érték el. Ők az $R_1(n)$ függvény első differenciáját vizsgálták, és az alábbi tételeket bizonyították be:

3.0.24 Tétel. *Legyenek $s_1 < s_2 < \dots$, és $t_1 < t_2 < \dots$ amelyekre teljesül, hogy $s_k < t_k \leq \frac{s_{k+1}}{2} - 1$ $(k = 1, 2, \dots)$, és $\mathcal{A} = \cup_{k=1}^{\infty}\{s_k, s_{k+1}, \dots t_k\}$. Ekkor $|R_1(n+1) - R_1(n)| \leq 3$ teljesül minden n-re.*

3.0.25 Tétel. *Legyen $S(N) = \sum\limits_{n=1}^{N} (R_1(n+1) - R_1(n))^2$. Ekkor $S(N) = o((B(\mathcal{A}, n))^2)$ nem állhat fenn.*

Ezekből triviálisan következik az alábbi:

3.0.26 Következmény. *Ha $\lim_{N\to\infty} \frac{B(\mathcal{A},N)}{\sqrt{N}} = +\infty$, akkor $|\Delta_1 R_1(n)| = |R_1(n+1) - R_1(n)|$ nem lehet korlátos.*

Ezen tételek bizonyítása megtalálható [9]-ben.

Végül megmutatták,hogy ez utóbbi eredmény csaknem a legjobb:

3.0.27 Tétel. *Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy végtelen $\mathcal{A}$ sorozat úgy, hogy*

- $B(\mathcal{A}, n) \gg N^{1/2-\varepsilon}$
- $R_1(n)$, $\quad |\Delta_1 R_1(n)|$ *is korlátos.*

Én $k \geq 2$-re általánosítottam az egyik eredményüket, konkrétabban az alábbi tételt bizonyítottam be(lásd [10]):

3.0.28 Tétel. *Ha* $\lim_{N\to\infty} \frac{B(\mathcal{A},N)}{\sqrt[k]{N}} = \infty$ *akkor* $|\Delta_k R_k(n)|$ *nem lehet korlátos.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy létezik $C > 0$ konstans, hogy $|\Delta_k R_k(n)| \leq C$ fennáll. A bizonyítás során a következő jelöléseket használjuk: N jelöl egy nagy pozitív egészt, $e^{2i\pi\alpha} = e(\alpha)$, és $r = e^{1/N}$, $z = re(\alpha)$, ahol α egy valós változó olyan, hogy $p(z) = p(re(\alpha)) = P(\alpha)$. Jelölje $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^{a_j}$ ($r < 1$ esetén ez a sor és az összes többi sor a bizonyításban abszolút konvergens.) Kiindulunk az $I = \int_0^1 |f(z)(1-z)|^k d\alpha$ integrálból. Alsó és felső becslést adunk I-re, és kapunk egy konstans felső becslést $\frac{B(\mathcal{A},N)}{\sqrt[k]{N}}$-re, ami ellentmondás. Az alsó becsléshez használjuk a Hölder-egyenlőtlenséget és a Parseval-formulát. Legyen $f(z)(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$. Világos, hogy ha $n-1 \notin \mathcal{A}$, $n \in \mathcal{A}$ akkor $b_n = 1$.

$$I^{2/k} = \left(\int_0^1 |f(z)(1-z)|^k d\alpha\right)^{2/k} \left(\int_0^1 1 d\alpha\right)^{1-2/k}$$

$$\geq \int_0^1 |f(z)(1-z)|^2 d\alpha = \int_0^1 \Big|\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n\Big|^2 d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 r^{2n} \geq r^{2N} \sum_{\substack{n \leq N \\ n-1\notin\mathcal{A}, n\in\mathcal{A}}} b_n^2$$

$$= e^{-2} \sum_{\substack{n \leq N \\ n-1\notin\mathcal{A}, n\in\mathcal{A}}} 1 = e^{-2} B(\mathcal{A},N)$$

ahonnan

$$I \geq e^{-k} (B(\mathcal{A},N))^{k/2} \tag{3.25}$$

Ezután térjünk rá a felső becslésre. Ehhez a Cauchy-egyenlőtlenséget, és a Parseval-formulát használom.

$$I = \int_0^1 |f(z)(1-z)^k| d\alpha = \int_0^1 |f^k(z)(1-z)^k| d\alpha = \int_0^1 \left|\left(\sum_{j=0}^{\infty} z^{a_j}\right)^k (1-z)^k\right| d\alpha$$

$$= \int_0^1 \left| \left(\sum_{n=1}^{\infty} R_k(n) z^n \right) (1-z)^k \right| d\alpha = \int_0^1 \left| \left(\sum_{n=1}^{\infty} R_k(n) z^n \right) \left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} z^i \right) \right| d\alpha$$

$$= \int_0^1 \left| \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} R_k(m-i) z^m \right| d\alpha = \int_0^1 \left| \sum_{m=1}^{\infty} \Delta_k R_k(m-k) z^m \right| d\alpha$$

$$\leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{m=1}^{\infty} \Delta_k R_k(m-k) z^m \right|^2 d\alpha \right)^{1/2} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left| \Delta_k R_k(m-k) \right|^2 r^{2m} \right)^{1/2}$$

$$\leq C \left(\sum_{m=1}^{\infty} r^{2m} \right)^{1/2} = C \left(\frac{1}{1-r^2} \right)^{1/2} \leq C \left(\frac{1}{1-r} \right)^{1/2} = C \left(\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{N}}} \right)^{1/2} \leq C\sqrt{2N}$$

felhasználva, hogy

$$1 - e^{-x} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \cdots > x - \frac{x^2}{2!} = x(1 - \frac{x}{2}) > \frac{x}{2},$$

ha 0 < x < 1.

A két becslést összevetve azt kapjuk, hogy

$$e^{-k} \left(B(\mathcal{A}, N) \right)^{k/2} < I < C\sqrt{2N}$$

amiből

$$\frac{B(\mathcal{A}, N)}{\sqrt[k]{N}} < e^2 \sqrt[k]{2C^2}$$

ami ellentmondás. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

3.0.29 Megjegyzés. Bebizonyítottam azt is, hogy alkalmas feltételek mellett $\Delta_l R_1(n)$ sem lehet korlátos, de a bizonyítás sokkal bonyolultabb, és szükség van hozzá néhány új ötletre; ezeket itt hely hiányában nem részletezem.

Ezzel befejeztük az additív reprezentációfüggvény korlátosságának vizsgálatát. Most rátérünk a monotonitási tulajdonságok vizsgálatára. Először is meghatározzuk azokat a sorozatokat, amelyekre az $R_1(n)$ függvény monoton növő valahonnan kezdve. Egészen pontosan az alábbi tétel igaz:

3.0.30 Tétel. *Az $R_1(n)$ függvény monoton növő valahonnan kezdve, azaz létezik egy olyan n_0 küszöbindex, hogy*

$$R_1(n+1) \geq R_1(n) \quad ha \quad n \geq n_0 \tag{3.26}$$

akkor és csak akkor, ha az $\mathcal{A}$ sorozat tartalmazza az összes pozitív egész számot valahonnan kezdve, azaz létezik egy olyan n_1 küszöbindex, hogy

$$\mathcal{A} \cap \{n_1, n_1+1, n_1+2, \dots\} = \{n_1, n_1+1, n_1+2, \dots\}. \tag{3.27}$$

Meglepő, de az $R_2(n)$ függvény teljesen másképp viselkedik, ugyanis sokkal több olya $\mathcal{A}$ sorozat van amelyre az $R_2(n)$ függvény monoton növő. Szükségünk lesz az alábbi definícióra:

3.0.31 Definíció. Legyen $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots\}$ $(b_1 < b_2 < \dots)$ pozitív egész számok sorozata. Ekkor $\mathcal{B}$ - t Sidon-sorozatnak nevezzük, ha teljesülnek az alábbiak: ha $b_x + b_y = b_u + b_v, b_x, b_y, b_u, b_v \in \mathcal{B}, b_x \leq b_y$ és $b_u \leq b_v$ akkor $b_x = b_u$ és $b_y = b_v$.

Ezek után kimondhatjuk az idevonatkozó tételt.

3.0.32 Tétel. *Legyen $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots\}$ $(b_1 < b_2 < \dots)$ pozitív egészekből álló sorozat, melyre az alábbiak teljesülnek:*

(i) $\mathcal{B}$ Sidon-sorozat,

(ii) $\mathcal{B}$ minden eleme páros,

(iii) ha $b_x, b_y \in \mathcal{B}$, akkor $\frac{b_x+b_y}{2} \notin \mathcal{B}$.

Ekkor az $\mathcal{A} = \mathbb{N} \setminus \mathcal{B}$ sorozat olyan, hogy a hozzá tartozó $R_2(n)$ reprezentációfüggvény monoton növő, azaz

$$R_2(n+1) \geq R_2(n) \quad ha \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.28}$$

A mohó algoritmus segítségével könnyen belátható, hogy létezik olyan $\mathcal{B}$ sorozat, ami kielégíti az előző tétel feltételeit és

$$B(n) = \sum_{\substack{b \in \mathcal{B} \\ b \leq n}} 1 \ll n^{1/3}$$

minden n-re. Ily módon látható, hogy létezik olyan $\mathcal{A}$ sorozat melyre

$$A(n) < n - cn^{1/3}$$

elég nagy n-re és $R_2(n)$ monoton növő valahonnan kezdve.

Igaz viszont a következő tétel is:

3.0.33 Tétel. *Ha*

$$A(n) = o\left(\frac{n}{\log n}\right) \tag{3.29}$$

akkor $R_2(n)$ és $R_3(n)$ nem lehetnek monoton növők valahonnan kezdve.

Ezek a tételek Erdős Pál, Sárközy András, és T. Sós Vera eredményei. A 3.0.30 és a 3.0.31 tételeket nem bizonyítjuk be. A bizonyítás megtalálható [11]-ben. A 3.0.32 tétel bizonyítását alább közöljük.

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy (3.24) igaz, de $R_2(n)$ és $R_3(n)$ monoton növők valahonnan kezdve. Először megmutatjuk, hogy létezik végtelen sok N pozitív egész, melyekre

$$A(N+j) < A(N)\left(\frac{N+j}{N}\right) \quad ha \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{3.30}$$

Ha ugyanis (3.30) csak véges sok N esetén teljesülne, akkor létezik olyan N_0, hogy

$$A(N_0) > 1$$

és $N \geq N_0$ létezik olyan $N' = N'(N)$ pozitív egész amire $N > N'$ és

$$A(N') \geq A(N)\left(\frac{N'}{N}\right)^2.$$

Ekkor indukcióval látjuk, hogy létezik olyan pozitív egészekből álló $N_1 < N_2 < \ldots$ sorozat, melyre

$$A(N_{j+1}) \geq A(N_j)\left(\frac{N_{j+1}}{N_j}\right)^2 \quad ha \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

ahonnan

$$A(N_{k+1}) = A(N_0)\prod_{j=0}^{k}\frac{A(N_{j+1})}{A(N_j)} \geq A(N_0)\prod_{j=0}^{k}\left(\frac{N_{j+1}}{N_j}\right)^2 \tag{3.31}$$

$= A(N_0)\left(\frac{N_{k+1}}{N_0}\right)^2 > \left(\frac{N_{k+1}}{N_0}\right)^2 > N_{k+1}^{3/2}$ elég nagy k-ra. Másrészt világos, hogy

$$A(N_{k+1}) = \sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ a\le N_{k+1}}} 1 \le \sum_{a\le N_{k+1}} 1 = N_{k+1} \tag{3.32}$$

(3.31) és (3.32) nem állhat fenn egyszerre, tehát ellentmondásra jutottunk.

Ezek után megbecsüljük $R_j(n)$-et ahol $j = 2, 3$.
Felhasználva az $R_j(n+1) \ge R_j(n)$ indirekt feltevést ha $n \ge n_0$ kapjuk, hogy

$$(A(2n))^2 = \Bigg(\sum_{\substack{a_i\in\mathcal{A}\\ a_i\le 2n}} 1\Bigg)^2 = \sum_{\substack{a_i,a_j\in\mathcal{A}\\ a_i\le 2n, a_j\le 2n}} 1 \ge \sum_{\substack{a_i+a_j\le 2n\\ a_i\in\mathcal{A}, a_j\in\mathcal{A}}} 1,$$

$$\ge \sum_{i=1}^{2n} R_j(i) \ge \sum_{i=n+1}^{2n} R_j(i) \ge \sum_{i=n+1}^{2n} R_j(n) = nR_j(n)$$

amiből

$$R_j(n) \le \frac{(A(2n))^2}{n} \quad ha \quad n \ge n_0. \tag{3.33}$$

Ekkor az indirekt feltevés szerint elég nagy n-re $R_j(n) \ge 1$ tehát (3.33)-ból azt kapjuk, hogy elég nagy n-re

$$(A(2n))^2 \ge n. \tag{3.34}$$

A továbbiakban az alábbi jelöléseket fogjuk használni: N legyen egy nagy pozitív egész, ami kielégíti (3.30)-t. Legyen $e^{2i\pi\alpha} = e(\alpha)$, és legyen $r = e^{-1/N}$ valamint $z = re(\alpha)$ ahol α egy valós változó, azaz egy $p(z)$ függvény α valós függvénye: $p(z) = p(re(\alpha)) = P(\alpha)$. Legyen továbbá

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^{a_j}.$$

$r < 1$ esetén ez a végtelen sor, és az összes többi végtelen sor ami a bizonyításban szerepel, mind abszolút konvergens. Ekkor

$$\frac{1}{2}((f(z))^2 - f(z^2)) = \sum_{n=1}^{\infty} R_2(n) z^n$$

és

$$\frac{1}{2}((f(z))^2+f(z^2))=\sum_{n=1}^{\infty}R_3(n)z^n$$

azaz mind $j=2$-re, mind $j=3$-ra teljesül, hogy

$$|f(z)|^2-|f(z^2)|\le 2\left|\sum_{n=1}^{\infty}R_j(n)z^n\right|$$

ahonnan

$$\int_0^1|f(z)|^2d\alpha-\int_0^1|f(z^2)|d\alpha\le 2\int_0^1\Big|\sum_{n=1}^{\infty}R_j(n)z^n\Big|d\alpha. \qquad (3.35)$$

Jelölje

$$J_1=\int_0^1|f(z)|^2d\alpha,\quad J_2=\int_0^1|f(z^2)|d\alpha$$

és

$$J=\int_0^1|\sum_{n=1}^{\infty}R_j(n)z^n|d\alpha,$$

Ekkor (3.35) átirható a következő alakba:

$$J_1-J_2\le 2J. \qquad (3.36)$$

Alsó becslést adunk J_1-J_2-re majd felső becslést adunk $2J$-re, és látni fogjuk, hogy az alsó becslés nagyobb mint a felső becslés, ami ellentmondás.

Először alsó becslést adunk J_1-J_2 - re. Becsüljük meg J_1 - et!
A Parseval - formula szerint

$$J_1=\int_0^1|f(z)|^2d\alpha=\sum_{a\in\mathcal{A}}r^{2a}\ge\sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\a\le N}}r^{2N}=e^{-2}\sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\a\le N}}1 \qquad (3.37)$$

$$=e^{-2}A(N)>\frac{1}{10}A(N).$$

Most megbecsüljük J_2-t. A (3.30), a Parseval - formula, a Cauchy - egyenlőtlenség felhasználásával elég nagy N-re kapjuk, hogy

$$J_2 = \int_0^1 |f(z^2)| d\alpha = \left(\int_0^1 |f(z^2)|^2 d\alpha\right)^{1/2} = \left(\sum_{a\in\mathcal{A}} r^{4a}\right)^{1/2} \tag{3.38}$$

$$= \left((1-r^4)\left(\frac{1}{1-r^4}\sum_{a\in\mathcal{A}} r^{4a}\right)\right)^{1/2} = \left((1-r^4)\left(\sum_{n=1}^{\infty} A(n) r^{4n}\right)\right)^{1/2}$$

$$= \left((1-r^4)\left(\sum_{n=1}^{N} A(n) r^{4n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} A(n) r^{4n}\right)\right)^{1/2}$$

$$< \left((1-r)(1+r+r^2+r^3)NA(N) + (1-r^4)\sum_{n=N+1}^{\infty} A(N)\left(\frac{n}{N}\right)^2 r^{4n}\right)^{1/2}$$

$$< \left((1-e^{-1/N})NA(N) + \frac{A(N)}{N^2}(1-r^4)\sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^{4n}\right)^{1/2}$$

$$< \left(N^{-1}NA(N) + A(N)N^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-(n-1)^2) r^{4n}\right)^{1/2}$$

$$< \left(A(N) + A(N)N^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} 2n r^{4n}\right)^{1/2} < \left(A(N) + A(N)N^{-2}2r^4\sum_{n=1}^{\infty} n r^{4(n-1)}\right)^{1/2}$$

$$= \left(A(N) + A(N)N^{-2}2r^4(1-r^4)^{-2}\right)^{1/2}$$

$$< \left(A(N) + 2A(N)N^{-2}(1-r)^{-2}\right)^{1/2} = \left(A(N) + 2A(N)N^{-2}(1-e^{-1/N})^{-2}\right)^{1/2}$$

$$< \left(A(N) + 2A(N)N^{-2}(1/2N)^{-2}\right)^{1/2}$$

$$= (9A(N))^{1/2} = 3(A(N))^{1/2}.$$

(3.37)-ból, és (3.38)-ből következik, hogy elég nagy N-re

$$J_1 - J_2 > \frac{1}{20}A(N) - 3(A(N))^{1/2} > \frac{1}{21A(N)}. \tag{3.39}$$

Ezután adunk egy felső becslést J-re.

$$J = \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} R_j(n) z^n\right| d\alpha = \int_0^1 \left|(1-z)\sum_{n=1}^{\infty} R_j(n) z^n\right| |1-z|^{-1} d\alpha. \tag{3.40}$$

Ekkor (3.30), (3.33) és az indirekt feltevést használva kapjuk, hogy

$$\left|(1-z)\sum_{n=1}^{\infty} R_j(n) z^n\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} |(R_j(n) - R_j(n-1)) z^n\right| \tag{3.41}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{n_0} |R_j(n) - R_j(n-1)| r^n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |R_j(n) - R_j(n-1)| r^n <$$

$$\sum_{n=1}^{n_0} |R_j(n) - R_j(n-1)| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |R_j(n) - R_j(n-1)| r^n =$$

$$\sum_{n=1}^{n_0} |R_j(n) - R_j(n-1)| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (R_j(n) - R_j(n-1)) r^n$$

$$< 2\sum_{n=1}^{n_0} |R_j(n) - R_j(n-1)| + \sum_{n=1}^{\infty} (R_j(n) - R_j(n-1) r^n =$$

$$c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} R_j(n)(r^n - r^{n+1}) = c_1 + (1-r)\sum_{n=1}^{\infty} R_j(n) r^n <$$

$$c_1 + \sum_{n=1}^{n_0-1} R_j(n) + (1-r)\sum_{n=n_0}^{\infty} R_j(n) r^n$$

$$< c_2 + (1 - e^{-1/N})\left(\sum_{n=n_0}^{N} R_j(n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} R_j(n) r^n\right)$$

$$< c_2 + N^{-1}\left(N\frac{(A(2N))^2}{N} + \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(A(2n))^2}{n}r^n\right)$$

$$< c_2 + N^{-1}\left((A(N))^2(\frac{2N}{N})^4 + \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(A(N)(\frac{2n}{N})^2\right)^2\frac{r^n}{n}\right)$$

$$< c_2 + (A(N))^2\big(16N^{-1} + 4N^{-5}\sum_{n=1}^{\infty}n^3r^n\big)$$

$$= c_2 + (A(N))^2\big(16N^{-1} + 4N^{-5}(1-r)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}n^3(r^n - r^{n+1})\big)$$

$$= c_2 + (A(N))^2\big(16N^{-1} + 4N^{-5}(1-r)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(n^3-(n-1)^3)r^n\big)$$

$$< c_2 + (A(N))^2\big(16N^{-1} + 4N^{-5}(1-r)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}4n^2r^n\big)$$

$$= c_2 + (A(N))^2\big(16N^{-1} + 16N^{-5}(1-r)^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2(r^n - r^{n+1})\big)$$

$$= c_2 + (A(N))^2\big(16N^{-1} + 16N^{-5}(1-r)^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-(n-1)^2)r^n\Big)$$

$$< c_2 + (A(N))^2\big(16N^{-1} + 32N^{-5}(1-r)^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}nr^{n-1}\big)$$

$$= c_2 + (A(N))^2(16N^{-1} + 32N^{-5}(1-r)^{-4})$$

$$< c_2 + (A(N))^2(16N^{-1} + 32N^{-5}(1-e^{-1/N})^{-4}) < c_2 + (A(N))^2(16N^{-1} + 32N^{-5}(2N)^4)$$

$$< c_2 + 600(A(N))^2 N^{-1} < c_3 (A(N))^2 N^{-1}.$$

Másrészt

$$|1-z| = ((1-z)(1-\bar{z}))^{1/2} = (1+|z|^2 - 2Rez)^{1/2} = \tag{3.42}$$

$$(1+r^2 - 2r\cos 2\pi\alpha)^{1/2} = ((1-r)^2 + 2r(1-\cos 2\pi\alpha))^{1/2} >$$

$$(2r(1-\cos 2\pi\alpha))^{1/2} = (2e^{-1/N} 2\sin^2 \pi\alpha)^{1/2}$$

$$\geq (8\alpha^2)^{1/2} \geq 2\alpha$$

ha $0 \leq \alpha \leq 1/2$, és ha N elég nagy, valamint

$$|1-z| = ((1-r)^2 + 2r(1-\cos 2\pi\alpha))^{1/2} > ((1-r)^2)^{1/2} \tag{3.43}$$

$$= 1 - r = 1 - e^{-1/N} > 1/2N$$

minden α - ra.

Ekkor (3.40), (3.41), (3.42) és (3.43) miatt

$$J \leq \int_0^1 c_3 (A(N))^2 N^{-1} |1-z|^{-1} d\alpha = \tag{3.44}$$

$$= 2c_3 (A(N))^2 N^{-1} \int_0^{1/2} |1-z|^{-1} d\alpha =$$

$$= c_4 (A(N))^2 N^{-1} \left(\int_0^{1/N} |1-z|^{-1} d\alpha + \int_{1/N}^{1/2} |1-z|^{-1} d\alpha \right) <$$

$$< c_4 (A(N))^2 N^{-1} \left(\int_0^{1/N} 2N d\alpha + \int_{1/N}^{1/2} (2\alpha)^{-1} d\alpha \right) <$$

$$< c_4 (A(N))^2 N^{-1} (2 + \log N) < c_5 (A(N))^2 N^{-1} \log N.$$

Ekkor (3.36), (3.39) és (3.44)-ból következik, hogy

$$\frac{1}{21}A(N) < J_1 - J_2 \leq 2J < c_6(A(N))^2 N^{-1} \log N$$

amiből

$$c_7 \frac{N}{\log N} < A(N).$$

Ez viszont ellentmond az indirekt feltevésnek, ami ellentmondás. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Az előbb említett tételekre Balasubramanian adott [12]-ben egyszerűbb bizonyítást; a következő tételeket bizonyította be.

3.0.34 Tétel. *Ha $R_3(n+1) \geq R_3(n)$ minden elég nagy n-re, akkor*

$$A(N) = N + O(\log N).$$

3.0.35 Tétel. *Ha $R_2(n+1) \geq R_2(n)$ minden elég nagy n-re, akkor*

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} e^{-a/N} \gg \frac{N}{\log N}.$$

Ezek után mutatok néhány érdekes eredményt. Dombi Gergely konstruált [13]-ban olyan halmazokat, hogy a nekik megfelelő reprezentációfüggvényeknek speciális tulajdonságai vannak. Az alábbi eredményeket érte el:

3.0.36 Tétel. *Létezik olyan $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ halmaz, hogy $R_k(n)$ növekvő minden $k > 4$ és $n > n_0(k)$-ra, valamint az $\mathcal{A}$ halmaz sűrűsége* $1/2$.

Ennek a tételnek a bizonyítása megtalálható [13]-ban; a bizonyítás komplex függvénytani eszközöket használ, ezért itt nem tárgyaljuk.

A következő problémát Sárközy András vetette fel. Van e a pozitív egész számok halmazának két olyan $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ részhalmaza amelyek szimmetrikus differenciája végtelen, és $n > n_0$-ra $R_i(\mathcal{A}, n) = R_i(\mathcal{B}, n)$ teljesül $i = 1, 2, 3$ esetén. Ha $i = 1$ akkor a válasz nem. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ halmazok, amelyekre $R_1(\mathcal{A}, n) = R_1(\mathcal{B}, n)$ valamely $n > n_0$-ra. Mivel a szimmetrikus differenciájuk végtelen, azért létezik olyan a, hogy $a \in \mathcal{A}$, de $a \notin \mathcal{B}$ és $a > n_0$. Ekkor $R_1(\mathcal{A}, 2a)$ páratlan, míg $R_1(\mathcal{B}, 2a)$ páros. Azonban $i = 2$-re a válasz igen mint ahogy ezt az alábbi tétel is mutatja.

3.0.37 Tétel. *A pozitív egész számok halmaza felpartícionálható két olyan $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ részhalmazra, hogy $R_2(\mathcal{A}, n) = R_2(\mathcal{B}, n)$ minden n pozitív egészre.*

Dombi Gergely $i = 3$-ra azt sejtette, hogy a válasz nem. Ezt a sejtést azonban Yong Gao Chen és Bin Wang [14]-ben megcáfolták, pontosabban a következő tételt bizonyították be:

3.0.38 Tétel. *Az $\mathbb{N}$ partícionálható két olyan $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ részre, hogy $R_3(\mathcal{A}, n) = R_3(\mathcal{B}, n)$ teljesül minden $n \geq 3$-ra.*

Bizonyítás. Legyenek

$$U(\mathcal{A}, n) = \{(x, y) | x + y = n, x, y \in \mathcal{A}, x \leq y\},$$

$$U_0(\mathcal{A}, n) = \{(x, y) | (x, y) \in U(\mathcal{A}, n), 2|x\},$$

$$U_1(\mathcal{A}, n) = \{(x, y) | (x, y) \in U(\mathcal{A}, n), 2 \nmid x\}.$$

Ekkor $R_3(\mathcal{A}, n) = |U(\mathcal{A}, n)| = |U_0(\mathcal{A}, n)| + |U_1(\mathcal{A}, n)|$. Jelölje $T(n)$ az $n \geq 0$ kettes számrendszerbeli felírásában a 0 jegyek számát. Ekkor $T(2n + 1) = T(2n) - 1$ $(n \geq 0)$ és $T(2n) = T(n) + 1$ $(n \geq 1)$. Legyen továbbá

$$\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} : 2|T(n-1)\}, \quad \mathcal{B} = \{n \in \mathbb{N} : 2 \nmid T(n-1)\}.$$

n-re vonatkozó teljes indukcióval belátjuk, hogy $|U(\mathcal{A}, n)| = |U(\mathcal{B}, n)|$ minden $n \geq 3$-ra. Közvetlen számolással látható, hogy $n = 3, 4, 5$-re $|U(\mathcal{A}, n)| = |U(\mathcal{B}, n)|$ igaz. Tegyük fel, hogy $3 \leq n \leq k - 1 (k \geq 6)$ - ra $|U(\mathcal{A}, n)| = |U(\mathcal{B}, n)|$ teljesül. Két esetet különböztetünk meg.
1. eset: $2|k$. Definiálunk egy leképezést

$$f : U_0(\mathcal{A}, k) \setminus \{(2, k-2)\} \longrightarrow U\left(\mathcal{A}, \frac{k}{2}\right) \setminus \left\{\left(1, \frac{k-2}{2}\right)\right\},$$

és

$$f(a, b) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right).$$

Világos, hogy f jóldefiniált, mert ha $b \geq a \geq 4$, $2|a$ és $2|b$, akkor

$$T\left(\frac{a}{2} - 1\right) = T(a-2) - 1 = T(a-1),$$

$$T\left(\frac{b}{2} - 1\right) = T(b-2) - 1 = T(b-1).$$

Azt is könnyű látni, hogy f bijektív, ugyanis

$$|U_0(\mathcal{A},k)\setminus\{(2,k-2)\}| = \left|U\left(\mathcal{A},\frac{k}{2}\right)\setminus\left\{\left(1,\frac{k-1}{2}\right)\right\}\right|. \tag{3.45}$$

Hasonlóan

$$|U_0(\mathcal{B},k)\setminus\{(2,k-2)\}| = \left|U\left(\mathcal{B},\frac{k}{2}\right)\setminus\left\{\left(1,\frac{k-1}{2}\right)\right\}\right|. \tag{3.46}$$

Definiáljunk egy másik leképezést a következőképpen:

$$g : U_1(\mathcal{A},k)\setminus\{(1,k-1)\} \longrightarrow U\left(\mathcal{B},\frac{k+2}{2}\right)\setminus\left\{\left(1,\frac{k}{2}\right)\right\}$$

és

$$g(a,b) = \left(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right).$$

Ha $b \geq a \geq 2$ és $2 \nmid a$, $2 \nmid b$ akkor

$$T\left(\frac{a+1}{2}-1\right) = T\left(\frac{a-1}{2}\right) = T(a-1)-1,$$

$$T\left(\frac{b+1}{2}-1\right) = T\left(\frac{b-1}{2}\right) = T(b-1)-1.$$

Könnyű belátni, hogy g bijektív, ugyanis

$$|U_1(\mathcal{A},k)\setminus\{(1,k-1)\}| = \left|U\left(\mathcal{B},\frac{k+2}{2}\right)\setminus\left\{\left(1,\frac{k}{2}\right)\right\}\right|. \tag{3.47}$$

Hasonlóan

$$|U_1(\mathcal{B},k)\setminus\{(1,k-1)\}| = \left|U\left(\mathcal{A},\frac{k+2}{2}\right)\setminus\left\{\left(1,\frac{k}{2}\right)\right\}\right|. \tag{3.48}$$

Mivel $1 \notin \mathcal{A}$ és $2 \notin \mathcal{B}$, ezért (3.45.)-(3.48.) miatt

$$|U(\mathcal{A},k)\setminus\{(2,k-2)\}| \tag{3.49}$$

$$=\left|U\left(\mathcal{A},\frac{k}{2}\right)\right|+\left|U\left(\mathcal{B},\frac{k+2}{2}\right)\setminus\left\{\left(1,\frac{k}{2}\right)\right\}\right|,$$

$$|U(\mathcal{B},k)\setminus\{(1,k-1)\}| \tag{3.50}$$

$$=\left|U\left(\mathcal{B},\frac{k}{2}\right)\setminus\left\{\left(1,\frac{k-2}{2}\right)\right\}\right|+\left|U\left(\mathcal{A},\frac{k+2}{2}\right)\right|.$$

Mivel $T(k-2)=T\left(\frac{k}{2}-1\right)+1$ és $T(k-3)=T(k-4)-1=T\left(\frac{k-4}{2}\right)=T\left(\frac{k-2}{2}-1\right)$, emiatt négy lehetőség van.

Ha $2\nmid T\left(\frac{k}{2}-1\right)$ és $2\nmid T\left(\frac{k-2}{2}-1\right)$, akkor

$$\left(1,\frac{k}{2}\right)\in U\left(\mathcal{B},\frac{k+2}{2}\right),\left(1,\frac{k-2}{2}\right)\in U\left(\mathcal{B},\frac{k}{2}\right),$$

és

$$(2,k-2)\notin U(\mathcal{A},k),(1,k-1)\notin U(\mathcal{B},k).$$

Ekkor (3.49) és (3.50) miatt

$$|U(\mathcal{A},k)|=\left|U\left(\mathcal{A},\frac{k}{2}\right)\right|+\left|U\left(\mathcal{B},\frac{k+2}{2}\right)\right|-1,$$

$$|U(\mathcal{B},k)|=\left|U\left(\mathcal{B},\frac{k}{2}\right)\right|+\left|U\left(\mathcal{A},\frac{k+2}{2}\right)\right|-1.$$

Ha $2\nmid T\left(\frac{k}{2}-1\right)$ és $2|T\left(\frac{k-2}{2}-1\right)$, akkor

$$\left(1,\frac{k}{2}\right)\in U\left(\mathcal{B},\frac{k+2}{2}\right),\left(1,\frac{k-1}{2}\right)\notin U\left(\mathcal{B},\frac{k}{2}\right),$$

és

$$(2,k-2)\in U(\mathcal{A},k),(1,k-1)\notin U(\mathcal{B},k).$$

Ekkor (3.49) és (3.50) miatt

$$|U(\mathcal{A},k)| = \left|U\left(\mathcal{B},\frac{k}{2}\right)\right| + \left|U\left(\mathcal{B},\frac{k+2}{2}\right)\right| - 1,$$

$$|U(\mathcal{B},k)| = \left|U\left(\mathcal{A},\frac{k}{2}\right)\right| + \left|U\left(\mathcal{A},\frac{k+2}{2}\right)\right| - 1.$$

Ha $2|T\left(\frac{k}{2}-1\right)$ és $2\nmid T\left(\frac{k-2}{2}-1\right)$, akkor

$$\left(1,\frac{k}{2}\right) \notin U\left(\mathcal{B},\frac{k+2}{2}\right), \left(1,\frac{k-2}{2}\right) \in U\left(\mathcal{B},\frac{k}{2}\right),$$

és

$$(2,k-2) \notin U(\mathcal{A},k), (1,k-1) \in U(\mathcal{B},k).$$

Ekkor (3.49) és (3.50) miatt

$$|U(\mathcal{A},k)| = \left|U\left(\mathcal{A},\frac{k}{2}\right)\right| + \left|U\left(\mathcal{B},\frac{k+2}{2}\right)\right|,$$

$$|U(\mathcal{B},k)| = \left|U\left(\mathcal{B},\frac{k}{2}\right)\right| + \left|U\left(\mathcal{A},\frac{k+2}{2}\right)\right|.$$

Ha $2|T\left(\frac{k}{2}-1\right)$ és $2|T\left(\frac{k-2}{2}-1\right)$, akkor

$$\left(1,\frac{k}{2}\right) \notin U\left(\mathcal{B},\frac{k+2}{2}\right), \left(1,\frac{k-2}{2}\right) \notin U\left(\mathcal{B},\frac{k}{2}\right),$$

és

$$(2,k-2) \in U(\mathcal{A},k), (1,k-1) \in U(\mathcal{B},k).$$

Ekkor (3.49) és (3.50) miatt

$$|U(\mathcal{A},k)| = \left|U\left(\mathcal{A},\frac{k}{2}\right)\right| + \left|U\left(\mathcal{B},\frac{k+2}{2}\right)\right| + 1,$$

$$|U(\mathcal{B},k)| = \left|U\left(\mathcal{B},\frac{k}{2}\right)\right| + \left|U\left(\mathcal{A},\frac{k+2}{2}\right)\right| + 1.$$

Mivel $3 \leq k/2 < k$, $3 \leq (k+2)/2 < k$, az indukciós feltevés szerint

$$\left|U\left(\mathcal{A}, \frac{k}{2}\right)\right| = \left|U\left(\mathcal{B}, \frac{k}{2}\right)\right|, \left|U\left(\mathcal{A}, \frac{k+2}{2}\right)\right| = \left|U\left(\mathcal{B}, \frac{k+2}{2}\right)\right|.$$

Ezekből következik, hogy

$$|U(\mathcal{A}, k)| = |U(\mathcal{B}, k)|.$$

2. eset $2 \nmid k$. Definiáljunk egy leképezést a következőképpen: $h : U_0(\mathcal{A}, k) \longrightarrow U_1(\mathcal{B}, k)$ és

$$h(a, b) = (a-1, b-1)$$

Mivel $2|a$, ezért $2 \nmid b$, $b+1 \geq a-1 \geq 1$. Másrészt mivel $T(a-2) = T(a-1)+1$ és $T(b) = T(b-1)-1$, azért h jóldefiniált. Világos, hogy h injektív. Most belátjuk, hogy szürjektív. Tegyük fel, hogy $(u, v) \in U_1(\mathcal{B}, k)$. Legyen $a' = u+1$ és $b' = v-1$. Ekkor $2|u+1$, $2|v-2$, $T(a'-1) = T(u) = T(u-1)-1$ és $T(b'-1) = T(v-2) = T(v-1)+1$. Ahhoz, hogy $(a', b') \in U_0(\mathcal{A}, k)$ elég belátni, hogy $a' \leq b'$. Ha $a' > b'$, akkor mivel $u \leq v$, $2 \nmid u$ és $2|v$, azért $a'-1 = b'$, de

$$T(a'-1) = T(u-1) - 1 \equiv T(v-1) - 1 = T(b') - 1 (mod 2),$$

ami ellentmondás. Így $a' \leq b'$ azaz $(a', b') \in U_0(\mathcal{A}, k)$, vagyis h bijektív. Tehát

$$|U_0(\mathcal{A}, k)| = |U_1(\mathcal{B}, k)|.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $|U_0(\mathcal{A}, k)| = |U_1(\mathcal{B}, k)|$, ahonnan $|U(\mathcal{A}, k)| = |U(\mathcal{B}, k)|$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Erdős Pál, Sárközy András és T. Sós Vera azt vizsgálták [15]-ben, hogy milyen kapcsolat van $R_3(2k)$ és $R_3(2k+1)$ között.

3.0.39 Tétel. *Ha $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots\}$ $(a_1 < a_2 < \dots)$ pozitív egészek olyan végtelen sorozata, amelyre fennáll*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A^c(n)}{\log n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n - A(n)}{\log n} = +\infty.$$

Ekkor

$$\limsup_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{N} (R_3(2k) - R_3(2k+1)) = +\infty.$$

3.0.40 Következmény. *Ha $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots\}$ $(a_1 < a_2 < \dots)$ olyan pozitív egészekből álló sorozat, melyre teljesül a (3.0.38) tétel feltétele, akkor az $R_3(n)$ függvény nem lehet monoton növő.*

3.0.41 Következmény. *Ha $\mathcal{A}$ végtelen Sidon-sorozat, akkor létezik végtelen sok k pozitív egész melyekre $R_3(2k) = 1$ és $R_3(2k+1) = 0$.*

Azt is bebizonyították, hogy a (3.0.38.) tétel csaknem a legjobb.

3.0.42 Tétel. *Létezik olyan pozitív egészekből álló $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots\}$ $(a_1 < a_2 < \dots)$ és olyan c, n_3 pozitív valós számok, hogy $\mathcal{A}^c(n) > c \log n \quad (n > n_3)$ és $\limsup_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} (R_3(2k) - R_3(2k+1)) < +\infty$.*

Irodalomjegyzék

[1] H. Halberstam, K. F. Roth. *Sequences*, Second edition, Springer-Verlag (1983).

[2] A. Sárközy. *On a theorem of Erdős and Fuchs.* Acta Arithmetica 37 (1980), pp. 333-338.

[3] G. Horváth. *An improvement on an extension of a theorem Erdős-Fuchs.* Acta Math. Hungar. 104 (2004), no. 1-2., 27-37.

[4] G. Horváth. *On a generalization of a theorem of Erdős and Fuchs.* Acta Math. Hungar. 92 (2001), no. 1-2. 83-110.

[5] G. Horváth. *On a theorem of Erdős and Fuchs.* Acta Arithmetica 103 (2002), 321-328.

[6] P. Erdős, A. Sárközy. *Problems and results on additive properties of general sequences I.*. Pacific J. Math. 118 (1985), pp. 347-357.

[7] P. Erdős, A. Sárközy. *Problems and results on additive properties of general sequences, II.* Acta Math. Hungar., 48 (1986), pp. 201-211.

[8] G. Horváth. *On an additive property of sequences of nonnegative integers.* Periodica Math. Hungar., 45 (1-2), (2002), pp. 73-80.

[9] P. Erdős, A. Sárközy, V. T. Sós. *Problems and results on additive properties of general sequences III.*, Studia Sci. Math., 22 (1987), 53-63.

[10] S. Kiss. *Generalization of a theorem on additive representation functions*, Annales Univ. Sci. Budapest. Eötvös, Közlésre elfogadva.

[11] P. Erdős, A. Sárközy, V. T. Sós. *Problems and results on additive properties of general sequences IV.* In: Number Theory. Proc.,Ootacamud, India. Lect. Notes Math. 1122, pp. 85-104. Berlin-Heidelberg-New York: Springer. 1984.

[12] R. Balasubramanian. *A note on a result of Erdős, Sárközy and Sós.* Acta Arithmetica, XLIX, (1987), pp. 45-53.

[13] G. Dombi. *Additive properties of certain sets*, Acta Arithmetica, 103.2, (2002) pp. 137-146.

[14] Y-G. Chen, B. Wang. *On additive properties of two special sequences.* Acta Arithmetica, 110.3 (2003), pp. 299-303.

[15] P. Erdős, A. Sárközy, V. T. Sós. *Problems and results on additive properties of general sequences V.*. Monatshefte für Mathematik 102, (1986), pp. 183-197.