Halmazrendszerek pakolása

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Bárász Mihály

Témavezető: Frank András egyetemi tanár

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

2002

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**

2. Clutterek **4**
2.1. MFMC tulajdonság és az idealitás . . . 4
2.2. Blokker . . . 6
2.3. Szélesség–hosszúság egyenlőtlenség . . . 8
2.4. Minor . . . 8
2.5. Példák . . . 11
2.6. Kombinatorikai példák . . . 12
2.6.1. st-kötések és st-vágások . . . 12
2.6.2. T-kötések és T-vágások . . . 13
2.6.3. Irányított kötések és vágások . . . 13

3. Ideális mátrixok **14**
3.1. Minimálisan nemideális mátrixok . . . 14
3.2. A Lehman-tétel bizonyítása . . . 17
3.3. Példák *mni* clutterekre . . . 21

4. Előjelezett gráfok **22**
4.1. Gyengén és erősen páros gráfok . . . 23
4.2. Előjelezett gráfok . . . 23
4.2.1. Gyengén páros gráfok jellemzése . . . 25
4.2.2. Erősen páros gráfok jellemzése . . . 26
4.2.3. Előjelezetlen gráfok jellemzése . . . 26
4.3. A Guenin-tétel bizonyítása . . . 27
4.4. Alkalmazások multifolyamokra . . . 30
4.5. Alkalmazás a maximális vágás problémára . . . 32

5. Bináris clutterek **33**
5.1. Bináris clutterek jellemzése . . . 33
5.2. Példák bináris clutterekre . . . 35
5.3. Ideális és MFMC bináris clutterek . . . 36

Hivatkozások **37**

1. fejezet

Bevezetés

A dolgozat egy érdekes kombinatorikai struktúrával, a *clutterekkel* foglalkozik.

A második fejezetben definiáljuk az alapfogalmakat, és megfogalmazunk néhány alapvető állítást. Bemutatjuk a legfontosabb clutterosztályokat.

Ezután közelebbről megvizsgáljuk az ideális clutterek osztályát. A 3. fejezetben bebizonyítjuk Lehman [11] tételét az ideális 0,1 mátrixokról.

A 4. fejezetben bevezetjük az előjelezett gráfok fogalmát és ezek páratlan köreinek clutterét vizsgáljuk. Az eredményeket két fontos problémára alkalmazzuk: a többtermékes folyam problémára és a maximális vágás problémára. A többtermékes folyam problémánál azt vizsgáljuk, hogy a vágásfeltétel mikor elégséges a folyam létezéséhez, és mikor elégséges egészértékű folyam létezéséhez. A maximális vágás problémánál leírunk egy gráfosztályt, melyre a probléma megoldható egy természetes módon kapható lineáris programozási feladat megoldásával.

Az 5. fejezetben a bináris clutterek osztályát vizsgáljuk. Többek között tiltott minorokkal is jellemezzük ezeket, belátva Lehman idevágó tételét.

A dolgozat több különböző forrásból építkezik, de elsősorban Gérard Cornuéjols [3] és Alexander Schrijver [17] könyveiből. A dolgozatban szereplő bizonyítások több helyen — főleg technikai részletekben — eltérnek az eredeti bizonyításoktól. Jelentősen át van dolgozva az 5.1.3. tétel bizonyítása.

2. fejezet

Clutterek

Clutter-nek nevezzük egy véges halmaz olyan részhalmazcsaládját, amelyben egyik tag sem része a másiknak. Egy $\mathcal{C}$ clutter alaphalmazát $V(\mathcal{C})$-vel jelöljük, ennek elemeit a clutter csúcsainak nevezzük; a cluttert meghatározó részhalmazcsaládot pedig $E(\mathcal{C})$-vel jelöljük és a $\mathcal{C}$ éleinek nevezzük. Az elnevezés nem véletlenül emlékeztet a gráfoknál használtakra: egy egyszerű gráf egyben clutter is.

Egy clutterben *matching*nek nevezzük páronként diszjunkt élek egy részhalmazát. *Transzverzális*nak nevezzük a csúcsoknak egy olyan halmazát, amely metszi a clutter minden élét. A cluttert *pakolhatónak* mondjuk, ha a matchingek maximális elemszáma megegyezik a transzverzálisok minimális elemszámával. (Nyilvánvaló, hogy az utóbbi mindig legalább akkora, mint az előbbi.) Sok ismert min-max tétel megfogalmazható úgy, hogy egy bizonyos clutter pakolható, többek között a Kőnig-tétel is. További példákat a fejezet végén mutatunk.

2.1. MFMC tulajdonság és az idealitás

2.1.1. Definíció. *Clutter*-nek nevezünk egy $\mathcal{C} = (V, E)$ párt, ahol V egy véges halmaz, E pedig a V részhalmazainak egy olyan családja, amelyre $S_1 \not\subseteq S_2$ különböző $S_1, S_2 \in E$-re.
A cluttert triviálisnak mondjuk, ha az élhalmaza üres vagy az üres halmaz az egyetlen éle.
A cluttereket szokás még *Sperner-családnak* nevezni az irodalomban.

Minden nemtriviális $\mathcal{C}$ clutterhez hozzárendelünk egy $M(\mathcal{C})$ 0,1 mátrixot, melynek oszlopai $V(\mathcal{C})$-vel vannak indexelve, sorai pedig $E(\mathcal{C})$-vel és amelyben pontosan akkor 1 az i-edik sor j-edik eleme (m_{ij}), ha a j-nek megfelelő pont eleme az i-nek megfelelő élnek. Más szóval az $M(\mathcal{C})$ sorai az $E(\mathcal{C})$-beli halmazok karakterisztikus vektorai. Az $M(\mathcal{C})$ egyértelmű a sorok és oszlopok permutációjának erejéig, továbbá nem tartalmaz domináló sort. (Azt mondjuk, hogy egy v vektor *dominálja* a w vektort, ha $v \geqslant w$, azaz $v_i \geqslant w_i$, minden i koordinátára.) Ennek alapján egy olyan M 0,1 mátrixot, amely nem tartalmaz domináló sort *clutter mátrixnak* nevezünk és $\mathcal{C}(M)$-el jelöljük azt a cluttert, amire $M(\mathcal{C}(M)) = M$.

Legyen $M \neq 0$ egy clutter mátrix, és tekintsük a következő lineáris programozási feladatpárt:

$$\min\{w^T x : x \geqslant 0, Mx \geqslant \mathbf{1}\} = \tag{2.1}$$

$$= \max\{y^T \mathbf{1} : y \geqslant 0, yM \leqslant w^T\} \tag{2.2}$$

Itt $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, és $x, \mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$, $y, w \in \mathbb{R}^m$ oszlopvektorok. $\mathbf{1}$ egy olyan vektort jelöl, aminek minden komponense 1.

Vegyük észre, hogy a (2.1) 0,1-es megengedett megoldásai pont a clutterünk transzverzálisainak felelnek meg (azoknak a karakterisztikus vektorai). Sőt az is világos, hogy a $P(\mathcal{C}) = \{x \geqslant 0 : M(\mathcal{C})x \geqslant \mathbf{1}\}$ poliéder egész csúcsai a clutter (tartalmazásra nézve) minimális[1] transzverzálisainak felelnek meg. Hasonlóan $w = \mathbf{1}$ esetén a (2.2) optimális egész megoldásai a clutter maximális matchingjeinek felelnek meg. Ezek fényeben tekintsük a következő definíciókat.

2.1.2. Definíció. A $\mathcal{C}(M)$ clutter *pakolható*, ha mind (2.1)-nek mind (2.2)-nek van egész optimális megoldása $w = \mathbf{1}$ esetén.

2.1.3. Definíció. A $\mathcal{C}(M)$ clutter rendelkezik a *pakolási tulajdonsággal* ha mindkét feladatnak van egész optimális megoldása minden olyan w-re, aminek komponensei 0, 1 vagy ∞ értékeket vesznek föl.

2.1.4. Definíció. A $\mathcal{C}(M)$ clutter rendelkezik az *MFMC tulajdonsággal* (az angol „max flow min cut” — „maximális folyam minimális vágás” kifejezésből), ha mindkét feladatnak van egész optimális megoldása minden nemnegatív egész w esetén.

Másképpen ezt úgy lehet megfogalmazni, hogy a $P(\mathcal{C})$ poliédert leíró $x \geqslant 0, Mx \geqslant \mathbf{1}$ egyenletrendszer TDI.

Nyilvánvaló, hogy az MFMC tulajdonságból következik a pakolási tulajdonság, amiből viszont következik, hogy a clutter pakolható. Conforti és Cornuéjols sejtése szerint a pakolási tulajdonság és az MFMC tulajdonság valójában ekvivalens.

2.1.5. Definíció. A $\mathcal{C}(M)$ clutter *ideális*, ha (2.1)-nek van egész optimális megoldása minden $w \geqslant 0$. Másképpen, ha a $P(\mathcal{C})$ poliéder egész.

Az irodalomban ez a tulajdonság megtalálható még *szélesség-hosszúság tulajdonság* (width-length property), *gyenge MFMC tulajdonság* (Seymour [19]) és $\mathbb{Q}_+$*-MFMC tulajdonság* (Schrijver [15]) néven. Nyilvánvaló, hogy az MFMC tulajdonságból következik az idealitás. Meg fogjuk mutatni a 3. fejezetben (az előbbi sejtéssel összhangban), hogy már a pakolási tulajdonság meglétéből is következik a clutter idealitása.

2.1.6. Definíció. Legyen k egy pozitív egész szám. A $\mathcal{C}(M)$clutter rendelkezik az $\frac{1}{k}$*-MFMC tulajdonsággal*, ha ideális és minden nemnegatív egész w-re (2.2)-nek van olyan optimális y megoldása, melyre ky egész.

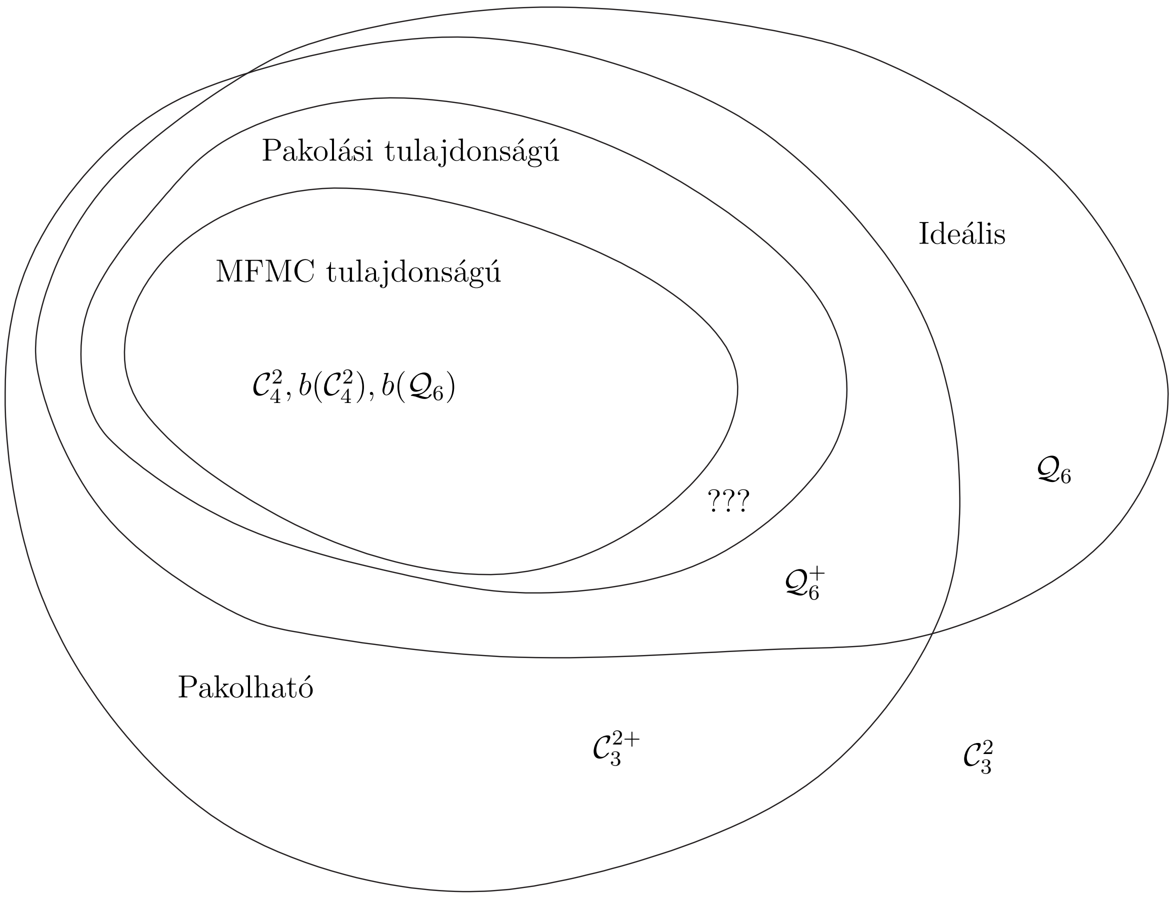
Kicsit másképpen ezt a feltételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy (2.1)-nek és (2.2)-nek is van optimális egész megoldása minden olyan $w \in \mathbb{Z}_+$-ra, melynek minden koordinátája osztható k-val. (Ebből ugyanis az idealitás automatikusan következik, mert ha (2.1)-nek van optimális egész megoldása minden k-val osztható w-re, akkor minden egész w-re is van, hiszen $w = w'$ és $w = kw'$ esetén ugyanazok az optimális megoldások.)

Ez az utóbbi tulajdonság $k = 1$ esetén megegyezik az MFMC tulajdonsággal, nagyobb k-kra általában gyengébb nála. Nyilvánvaló, hogy ha $\mathcal{C}$ rendelkezik az $\frac{1}{k}$-MFMC tulajdonsággal, akkor rendelkezik az $\frac{1}{q}$-MFMC tulajdonsággal is minden k-val osztható q-ra is.

Megegyezés szerint úgy tekintjük, hogy a triviális clutterek rendelkeznek az összes eddigi tulajdonsággal.

Később látunk példákat különböző oszálybéli clutterekre. Addig is sematikusan a következő ábráról lehet leolvasni a fontosabb osztályok viszonyát:

[1] A dolgozatban végig minimálison tartalmazásra nézve minimálisat értek. Ha minimális elemszámú, súlyú valamiről van szó, akkor azt explicite kiírom.



2.1. ábra. Clutter osztályok.

2.2. Blokker

A $\mathcal{C}$ clutter $b(\mathcal{C})$ *blokkere* egy olyan clutter, aminek az alaphalmaza megegyezik a $\mathcal{C}$-ével, az élhalmaza pedig a $\mathcal{C}$ minimális transzverzálisaiból áll. Más szóval $E(b(\mathcal{C}))$ a $\{B \subseteq V(\mathcal{C}) : |B \cap A| \geqslant 1,\ \ \forall A \in E(\mathcal{C})\}$ minimális elemeiből áll.

A fogalmat legjobban a következő példa világítja meg:

2.2.1. Példa. Legyen G egy irányítatlan gráf, s, t két csúcsa. Ha $\mathcal{C}$ az st-utak cluttere, akkor $b(\mathcal{C})$ a minimális st-vágások cluttere (utakat és vágásokat élhalmazként értelmezve).

2.2.2. Megjegyzés. A két triviális clutter egymás blokkere.

Edmonds és Fulkerson [4] megmutatták, hogy $b(b(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$. Mielőtt ezt bebizonyítanánk vegyük észre a következőt.

2.2.3. Állítás. *Legyen $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ két azonos alaphalmazon definiált clutter. Ha*

(i) *$\mathcal{C}_1$ mindegyik éle tartalmaz $\mathcal{C}_2$-beli élt és*

(ii) *$\mathcal{C}_2$ mindegyik éle tartalmaz $\mathcal{C}_1$-beli élt,* *akkor* $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$. $\square$

2.2.4. Tétel. *Ha* $\mathcal{C}$ *egy clutter, akkor* $b(b(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$.

Bizonyítás. Legyen A egy éle $\mathcal{C}$-nek. A $b(\mathcal{C})$definíciójából következik, hogy $|A \cap B| \geqslant 1$ minden $B \in E(b(\mathcal{C}))$-re. Tehát A egy transzverzálisa $b(\mathcal{C})$-nek, és így tartalmaz $b(\mathcal{C})$-beli élt.

Most legyen A egy éle a $b(b(\mathcal{C}))$-nek. Tegyük fel, hogy ez nem tartalmaz $\mathcal{C}$-beli élt. Akkor $V(\mathcal{C}) - A$ transzverzálisa $\mathcal{C}$-nek, és így definíció szerint tartalmaz egy B $b(\mathcal{C})$-beli élt. De akkor $A \cap B = \emptyset$ ellentmondásban azzal, hogy A éle $b(b(\mathcal{C}))$-nek. Tehát A tartalmaz $\mathcal{C}$-beli élt és ezzel beláttuk az állítást. $\square$

Ha két 0,1 mátrix olyan, hogy egy clutterhez és a blokkeréhez tartoznak, azaz $M(\mathcal{C})$ és $M(b(\mathcal{C}))$ alakúak, akkor blokkoló párnak nevezzük őket. A következő fontos tétel Lehman-tól származik. Azt állítja, hogy ha A és B mátrixok blokkoló párt alkotnak, akkor a következő egyenlőtlenségekkel meghatározott P poliéder

$$Ax \geqslant \mathbf{1}, \tag{2.3}$$

$$x \geqslant 0 \tag{2.4}$$

pontosan akkor egész, ha egész az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott Q poliéder is.

$$Bx \geqslant \mathbf{1}, \tag{2.5}$$

$$x \geqslant 0 \tag{2.6}$$

A bizonyítás a következő egyszerű állítást használja.

2.2.5. Állítás. *Egy x extremális pontja P-nek pontosan akkor egész (0,1 értékű), ha* $x^T \geqslant \lambda^T B$*, alkalmas λ-val, melyre* $\lambda_i \geqslant 0$ *és* $\sum \lambda_i \geqslant 1$ *(másképpen x^T dominálja a B sorainak egy konvex kombinációját).*

Bizonyítás. Ha $x \in P$, akkor $x + e_i$ is $\in P$, tehát ha x extremális pontja P-nek, akkor $x - \varepsilon e_i \notin P$ ha $\varepsilon > 0$, amiből következik, hogy x minden koordinátája 0 és 1 közötti. Továbbá, ha x egy egész extremális pont, akkor karakterisztikus vektora $\mathcal{C}$ egy minimális transzverzálisának, azaz sora B-nek. (Itt $A = M(\mathcal{C})$ és $B = M(b(\mathcal{C}))$.)

Fordítva, legyen x olyan extremális pontja P-nek ami dominálja B sorainak egy konvex kombinációját, azaz eleme a $P_I = \{\chi : \chi^T \geqslant \lambda^T B,$ ahol $\lambda_i \geqslant 0$ és $\sum \lambda_i = 1\}$ poliédernek. Nyilvánvaló, hogy $P_I \subseteq P$ amiből következik, hogy x a P_I-nek is extremális pontja (nem lehet két tőle különböző P_I-beli pontnak konvex kombinációja, mert azok egyben P-beliek is lennének). Az viszont könnyen látszik, hogy P_I extremális pontjai pontosan a B sorai. $\square$

2.2.6. Tétel (Lehman [10]). *Egy clutter pontosan akkor ideális, ha a blokkere az.*

Bizonyítás. A 2.2.4. tétel miatt elég azt belátni, hogy ha a (2.3)-(2.4) egyenlőtlenségekkel definiált P poliéder egész, akkor a (2.5)-(2.6) által megadott Q poliéder is egész.

Legyen a a Q egy tetszőleges pontja. $Ba \geqslant \mathbf{1}$ ((2.5) miatt), azaz $a^T x \geqslant 1$ teljesül minden olyan x-re, amire x^T a B egy sora, azaz (2.2.5. állítás miatt) a P összes egész csúcsára. És mivel P egész, ez a P összes csúcsára teljesül. Továbbá, mivel $a \geqslant 0$ (2.6) ezért $a^T x \geqslant 1$ minden P-beli x pontra teljesül. Így a lineáris programozási dualitás miatt kapjuk:

$$1 \leqslant \min\{a^T x : x \in P\} = \max\{\lambda^T \mathbf{1} : \lambda^T A \leqslant a^T,\ \lambda \geqslant 0\}$$

Tehát, ha a a Q-nak egy extremális pontja, akkor is van egy olyan $\lambda \geqslant 0$, hogy $a^T \geqslant \lambda^T A$ és $\sum \lambda_i = \lambda^T \mathbf{1} \geqslant 1$. És akkor a Q poliéderre alkalmazva a 2.2.5. állítást kapjuk, hogy a egy egész extremális pontja Q-nak. $\square$

2.3. Szélesség–hosszúság egyenlőtlenség

Ismeretes, hogy egy gráfban a legrövidebb st-út hosszának és a minimális st-vágás elemszámának a szorzata mindig kisebb vagy egyenlő, mint a gráf éleinek száma. Ez a szélesség–hosszúság egyenlőtlenség általánosítható bármilyen nemnegatív élhosszúságra és szélességre. Azaz, ha minden e élre adva van egy l_e hosszúság és egy w_e szélesség, akkor a minimális st-úthosszúság és a minimális st-vágásszélesség szorzata legfeljebb $l^T w$.

Még általánosabban definiálhatjuk a hosszúságot és szélességet bármilyen clutterre és blokkerére. Lehman [10] megmutatta, hogy a szélesség–hosszúság egyenlőtlenség használható, mint az idealitás karakterizációja.

2.3.1. Tétel (Szélesség–hosszúság egyenlőtlenség, Lehman). *Egy $\mathcal{C}$ clutterre és a $b(\mathcal{C})$ blokkerére a következő állítások ekvivalensek:*

(i) $\mathcal{C}$ *és* $b(\mathcal{C})$ *ideálisak,*

(ii) $\min\{w(C) : C \in E(\mathcal{C})\} \times \min\{l(D) : D \in E(b(\mathcal{C}))\} \leqslant w^T l$ *minden* $l, w \in \mathbb{R}_+^{V(\mathcal{C})}$

Bizonyítás. Legyen $A = M(\mathcal{C})$ és $B = M(b(\mathcal{C}))$ a két clutterhez rendelt blokkoló párt alkotó mátrix.

Először megmutatjuk, hogy ha $\mathcal{C}$ és $b(\mathcal{C})$ ideálisak, akkor minden $l, w \in \mathbb{R}_+^{V(\mathcal{C})}$ -re $\alpha\beta \leqslant w^T l$, ahol $\alpha = \min\{w(C) : C \in E(\mathcal{C})\}$ és $\beta = \min\{l(D) : D \in E(b(\mathcal{C}))\}$.

Ha $\alpha = 0$ vagy $\beta = 0$, akkor ez nyilván teljesül. Ha $\alpha > 0$ és $\beta > 0$, akkor w és l skálázása segítségével feltehető, hogy $\alpha = \beta = 1$. Így $Aw \leqslant \mathbf{1}$, azaz w eleme a $P = \{x \geqslant 0, Ax \leqslant \mathbf{1}\} = P(\mathcal{C})$. Tehát w nagyobb vagy egyenlő, mint a P csúcsainak egy konvex kombinációja, amik, mivel P egész, a B soraival egyeznek meg. Azaz $w^T \geqslant \lambda^T B$, ahol $\lambda \geqslant 0$ és $\sum \lambda_i = 1$. Hasonlóan $l^T \geqslant \mu^T A$, ahol $\mu \geqslant 0$ és $\sum \mu_i = 1$. Mivel B és A minden sorának skaláris szorzata legalább 1 (mert $\mathcal{C}$ és $b(\mathcal{C})$ minden élének metszete nem üres), ezért $BA^T \geqslant J$, ahol J a csupa 1-ből álló mátrixot jelöli. Így kapjuk:

$$w^T l \geqslant \lambda^T BA\mu \geqslant \lambda^T J\mu = 1 = \alpha\beta$$

Ezek után belátjuk a másik irányt. Legyen $\mathcal{C}$ egy nemtriviális clutter és legyen w tetszőleges extremális pontja a $P(\mathcal{C})$ poliédernek. Az $Aw \geqslant \mathbf{1}$ pontosan azt jelenti, hogy $\min\{w(C) : C \in E(\mathcal{C})\} \geqslant 1$. A $Q = \{x \geqslant 0, Bx \leqslant \mathbf{1}\} = P(b(\mathcal{C}))$ tetszőleges l pontjára hasonlóan $\min\{l(D) : D \in E(b(\mathcal{C}))\} \geqslant 1$. Így a feltételezésünk miatt $w^T l \geqslant 1$ teljesül Q minden pontjára. Így a lineáris programozási dualitásból:

$$1 = \min\{w^T z : z \in Q\} = \max\{\mu^T \mathbf{1} : \mu^T B \leqslant w^T,\ \mu \geqslant 0\}.$$

Így a 2.2.5. állításból kapjuk, hogy w egész extremális pontja P-nek. Tehát $\mathcal{C}$ ideális. Hasonlóan kapjuk, hogy $b(\mathcal{C})$ is ideális. (A feltétel szimmetrikus $\mathcal{C}$-re és $b(\mathcal{C})$-re, és $b(b(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$). □

2.4. Minor

2.4.1. Definíció. Legyen $\mathcal{C}$ egy clutter. Egy $j \in V(\mathcal{C})$-re definiáljuk $\mathcal{C}\backslash j$ -t a j *törlésével* keletkező cluttert és $\mathcal{C}/j$ -t a j *összehúzásával* keletkező cluttert a következőképpen: Mindkettő alaphalmaza a $V(\mathcal{C}) - \{j\}$ és $E(\mathcal{C}\backslash j) = \{S \in E(\mathcal{C}) : j \notin S\}$, $E(\mathcal{C}/j)$ pedig a $\{S - \{j\} : S \in E(\mathcal{C})\}$ minimális elemeiből áll.

2.4.2. Példa. Legyen G egy irányítatlan gráf és tekintsük azt a $\mathcal{C}$ cluttert, aminek az alaphalmaza a G élei, élei pedig a G körei, és legyen j egy éle a G-nek (pontja a $\mathcal{C}$-nek). Ekkor $\mathcal{C}/j$ ill. $\mathcal{C}\backslash j$ clutterek G/j ill. $G\backslash j$ -ből állnak elő hasonló módon.

Analóg eredményt tudunk mondani, ha a clutterek éleinek az st-utakat vesszük valamilyen rögzített $s,t \in V(G)$-re.

Több törlést és összehúzást is végezhetünk egy clutteren egymás után. Könnyű megmutatni, hogy az eredmény nem függ a sorrendtől.

2.4.3. Állítás. *Egy $\mathcal{C}$ clutterre és két különböző j_1, j_2 pontjára teljesülnek:*

(i) $(\mathcal{C}\backslash j_1)\backslash j_2 = (\mathcal{C}\backslash j_2)\backslash j_1$

(ii) $(\mathcal{C}/j_1)/j_2 = (\mathcal{C}/j_2)/j_1$

(iii) $(\mathcal{C}\backslash j_1)/j_2 = (\mathcal{C}/j_2)\backslash j_1$ □

2.4.4. Definíció. Egy $\mathcal{D}$ cluttert, amit $\mathcal{C}$-ből törlések és összehúzások sorozatával kapunk, a $\mathcal{C}$ *minorjának* nevezünk. Ha V_1 és V_2 két diszjunkt részhalmaza $\mathcal{C}$-nek, akkor $\mathcal{C}/V_1\backslash V_2$-vel jelöljük a V_1-beli csúcsok összehúzásával és V_2-beli csúcsok elhagyásával kapott minort. Meggondolható, hogy $\mathcal{C}/V_1\backslash V_2$ alaphalmaza: $V(\mathcal{C}) - V_1 - V_2$ élei pedig $\{S - V_1 : S \in E(\mathcal{C}),\ S \cap V_2 = \emptyset\}$. Ha $V_1 \cup V_2 \neq \emptyset$, akkor a minor *valódi.*

Szintén a definíciók egyszerű ellenőrzésével könnyen adódik a következő állítás:

2.4.5. Állítás. *Egy $\mathcal{C}$ clutterre és egy $U \subset V(\mathcal{C})$-re:*

(i) $b(\mathcal{C}\backslash U) = b(\mathcal{C})/U$,

(ii) $b(\mathcal{C}/U) = b(\mathcal{C})\backslash U$. □

Egy minor halmazlefogási poliédere (a (2.1) feladat poliédere) könnyen megkapható az eredeti clutter poliéderéből. Egy j elem összehúzása az $x_j = 0$ megszorításnak felel meg, hiszen a clutter mátrixából egyszerűen kihagyjuk a j-ik oszlopot és a keletkezett domináló sorokat. A j törlése pedig az $x_j = 1$ megszorításnak felel meg, hiszen M-ből elhagyjuk a j-ik oszlopot és az összes olyan sort, aminek j-ik oszlopában 1-es áll.

Formálisan ha $\mathcal{C}$ egy clutter és $j \in V(\mathcal{C})$, akkor

$$P(C/j) = \{x' \in \mathbb{R}^{V'} : \exists x \in P(\mathcal{C}),\ x_j = 0,\ x' = x|_{V'}\}$$
$$P(C\backslash j) = \{x' \in \mathbb{R}^{V'} : \exists x \in P(\mathcal{C}),\ x_j = 1,\ x' = x|_{V'}\}$$

(ahol $V' = V - \{j\}$ és $P(\mathcal{D}) = \{x \in \mathbb{R}^{V(\mathcal{D})} : x \geqslant 0,\ \forall H \in E(\mathcal{D}),\ x(H) \leqslant 1\}$ egy $\mathcal{D}$ clutter halmazlefogási (fedési) poliédere).

2.4.6. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a lefogási poliéder egyértelműen meghatározza a cluttert: $E(\mathcal{C})$ a $\{H \subseteq V(\mathcal{C}) : x(H) \leqslant 1\ \forall x \in P(\mathcal{C})\}$ minimális elemeiből áll. Ez például könnyen látszik fölhasználva azt, hogy $b(\mathcal{C})$ élei(nek a karakterisztikus vektorai) pontjai a $P(\mathcal{C})$ poliédernek és $b(b(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$. Így az előbbi megjegyzésekből rögtön adódik a 2.4.3. állítás.

A minor fogalma jól kapcsolódik a 2.1. fejezetben bevezetett clutter tulajdonságokhoz. Így például igazak a következő állítások.

2.4.7. Állítás (Seymour). *Ha egy $\mathcal{C}$ clutter rendelkezik az MFMC tulajdonsággal, akkor az összes minorja is rendelkezik vele.*

Bizonyítás. A triviális clutterek rendelkeznek az MFMC tulajdonsággal. Legyen $\mathcal{C}' = \mathcal{C}/V_1\backslash V_2$ egy nemtriviális minorja $\mathcal{C}$-nek. Azt kell megmutatnunk, hogy minden $w' \in \mathbb{Z}_+^{V(\mathcal{C}')}$ -re a

$$\max\{y'^T\mathbf{1} : y' \geqslant 0,\, y'^T M(\mathcal{C}') \leqslant w'^T\} \tag{2.7}$$

feladatnak van egész optimális megoldása.

Mivel $\mathcal{C}'$ nemtriviális, ezért ez a maximum véges. Legyen τ egy legalább ekkora egész szám. (Például tudjuk, hogy $\tau = \min\{w'(B') : B' \in E(b(\mathcal{C}'))\}$ vagy még egyszerűbben a $\sum w'_i$ egy jó felső korlát). Definiáljuk w-t a következőképpen:

$$\begin{aligned} w_j &= w'_j && \text{ha } j \in V(\mathcal{C}') \\ w_j &= \infty && \text{ha } j \in V_1 \\ w_j &= 0 && \text{ha } j \in V_2 \end{aligned}$$

Ezzel a w-vel a (2.7) feladat és az eredeti clutterre vonatkozó

$$\max\{y^T\mathbf{1} : y \geqslant 0,\, y^T M(\mathcal{C}) \leqslant w^T\} \tag{2.8}$$

feladat megengedett megoldásai között szoros összefüggés van. A (2.7) feladat egy y' megengedett megoldása ugyanolyan értékű megengedett megoldása a (2.8) feladatnak is (értelemszerűen kiterjesztve 0-kkal). És viszont, legyen y megengedett megoldása (2.8)-nak. Akkor ha A egy olyan éle $\mathcal{C}$-nek, hogy $y_A > 0$, akkor $A \cap V_2 = \emptyset$, és így $A - V_1$ tartalmaz egy A' $\mathcal{C}'$-beli élt. Készítsünk el egy $y' \in \mathbb{R}_+^{E(\mathcal{C}')}$ -t úgy, hogy kiindulunk az $y' = 0$ -ból, és minden $A \in E(\mathcal{C})$-re, amire $y_A > 0$, növeljük meg $y'_{A'}$-t y_A-nyival. Így egy megengedett megoldását kapjuk a 2.7 feladatnak, aminek az értéke megegyezik y-éval és ráadásul egész, ha y egész. A (2.8) feladatnak viszont van egész optimális megoldása, mert ha w-ben a ∞-eket lecseréljük τ-ra, akkor nyilván nem változik a feladat és erre az MFMC tulajdonság garantál egész optimális megoldást. Tehát (2.7)-nek szintén van egész optimális megoldása. □

Hasonlóan bizonyíthatóak a következő állítások.

2.4.8. Állítás. *Ha $\mathcal{C}$ rendelkezik a pakolási tulajdonsággal, akkor az összes minorja is rendelkezik vele.*

2.4.9. Megjegyzés. A bizonyítás menetéből az is látszik, hogy egy $\mathcal{C}$ clutter pontosan akkor rendelkezik a pakolási tulajdonsággal, ha pakolható és minden minorja is pakolható.

2.4.10. Állítás. *Ha $\mathcal{C}$ ideális, akkor az összes minorja is az.*

Ennek az állításnak egy egyszerű következménye az, hogy ha egy clutter lefogási poliédere egész, akkor azt $x_j = 1$ típusú hipersíkkal elmetszve is egész poliédert kapunk, amiből következik, hogy $x_j \leqslant 1$ féltérrel vett metszete is egész. Így adódik az önmagában is érdekes következmény:

2.4.11. Következmény. *Legyen M egy 0,1 mátrix. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

- *az $\{x \geqslant 0 : Mx \geqslant \mathbf{1}\}$ poliéder egész;*

- *a $\{0 \leqslant x \leqslant \mathbf{1} : Mx \geqslant \mathbf{1}\}$ politóp egész.*

Az előbbi állítások után érdekesek lehetnek a következő fogalmak:

2.4.12. Definíció. Egy clutter *minimálisan nem-MFMC*-nek nevezünk, ha nem rendelkezik az MFMC tulajdonsággal, de az összes valódi minorja rendelkezik vele.
Egy clutter *minimálisan nemideális* (röviden mni), ha nem ideális, de az összes minorja az.
Egy clutter *minimálisan nempakolható*, ha nem pakolható, de az összes minorja az.

Ezeknek a cluttereknek a tulajdonságaival a következő fejezetekben foglalkozunk.

2.5. Példák

Először lássunk néhány egyszerű példát különböző osztályokbéli clutterekre.

2.5.1. Példa. Tekintsük a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixszal adott $\mathcal{C}_3^2$ cluttert. Ennek a blokkere jól láthatóan önmaga. Így transzverzálisainak minimális elemszáma 2, viszont nincs két diszjunkt éle, azaz ez a clutter nem pakolható.

$x_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ pontja a lefogási poliédernek, erre $\mathbf{1}^T x_0 = \frac{3}{2}$. Viszont minden egész x pontjára a poliédernek $\mathbf{1}^T x \leqslant 2$. Tehát a clutter nem is ideális.

2.5.2. Példa. Legyen $\mathcal{Q}_6$ a K_4 háromszögeinek cluttere. Azaz az alaphalmaza álljon az K_4 éleiből, élei pedig legyenek a K_4 háromszögei. Ennek a clutternek a mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jól látszik, hogy $\mathcal{Q}_6$-nak nincsen két független éle és nincsen egy elemű transzverzálisa sem. Tehát $\mathcal{Q}_6$ nem pakolható. Így nem rendelkezhet a pakolási és MFMC tulajdonságokkal sem.

Könnyű meggondolni, hogy a $\mathcal{Q}_6$ blokkere az a clutter, amelynek élei a K_4 háromszögei és a három független élpár, azaz a mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Erről megmutatjuk, hogy rendelkezik az MFMC tulajdonsággal. Amiből következik, hogy ideális (és rendelkezik a pakolási tulajdonsággal is). Ebből viszont a 2.2.4. tétel szerint következik, hogy a $\mathcal{Q}_6$ is ideális.

Jelöljük $\mathcal{Q}_6$ alaphalmazát $V = \{f_1, f_2, f_3, e_1, e_2, e_3\}$ a fenti mátrixok oszlopainak megfelelően (azaz e_1, e_2, e_3 a K_4 egy háromszögét alkotják és e_i, f_i független élek $i = 1, 2, 3$ -ra). Azt kell megmutatni, hogy ha adva van egy $w \in \mathbb{Z}_+^V$, akkor a $b(\mathcal{Q}_6)$ ból tudunk választani annyi élet, mint amennyi a minimális súlyú $\mathcal{Q}_6$-beli él (háromszög) súlya úgy, hogy minden e elem legfeljebb w_e választott élben szerepel. Szimmetria okokból föltehető, hogy a minimális súlyú háromszög a e_1, e_2, e_3. Ha $w_{e_i} \leqslant w_{f_i}$, $i = 1, 2, 3$ -ra, akkor $\{e_i, f_i\}$ éleket választjuk w_{e_i}-szer, a többit 0-szor.

Tegyük föl most, hogy $w_{e_1} \geqslant w_{f_1}$, és legyen $k = w_{e_1} - w_{f_1}$, akkor mivel $w(e_1, e_2, e_3) \leqslant w(f_1, e_2, f_3)$ ezért $w_{f_3} \geqslant w_{e_3} + k$. Hasonlóan $w_{f_2} \geqslant w_{e_2} + k$. Így válasszuk az $\{e_1, f_1\}$ élt w_{f_1}-szer, $\{e_2, f_2\}$ és $\{e_3, f_3\}$ éleket w_{e_2} illetve w_{e_3}-szor és még a $\{e_1, f_2, f_3\}$ élt k-szor. Azaz $y^T = (w_{f_1}, w_{e_2}, w_{e_3}, k, 0, 0, 0)$ egy olyan választás, amire $y^T M(b(\mathcal{Q}_6)) \leqslant w^T$ és $y^T\mathbf{1} = w(e_1, e_2, e_3) = \min\{w(S) : S \in E(\mathcal{Q}_6)\}$.

2.5.3. Példa. A következő mátrixszal adott

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{C}_3^2$ clutterről és a blokkeréről is (aminek mátrixa: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$) szintén nagyon egyszerű megmutatni, hogy rendelkeznek az MFMC tulajdonsággal.

2.5.4. Példa. Egy $\mathcal{C}$ clutterre legyen $\mathcal{C}^+$ az a clutter, aminek a mátrixát úgy kapjuk, hogy $M(\mathcal{C})$-hez hozzáadunk egy csupa 1-ből álló oszlopot (ez jól láthatóan, egy clutter mátrix). Ez nyilvánvalóan pakolható, hiszen az alaphalmaz új eleme benne van minden élben, így egyelemű transzverzálist alkot. Az is könnyen látszik, hogy $\mathcal{C}^+$ pontosan akkor ideális (pakolási illetve MFMC tulajdonságú), ha $\mathcal{C}$ az volt.

Ebből kapjuk, hogy $\mathcal{Q}_6^+$ ideális és pakolható, de nem rendelkezik a pakolási tulajdonsággal. $\mathcal{C}_3^2$ viszont pakolható, de még csak nem is ideális.

Ezzel a 2.1. ábrán lévő összes clutterről megmutattuk, hogy tényleg azokba az osztályokba tartoznak, ahova az ábra mutatja.

2.6. Kombinatorikai példák

Most lássunk néhány gráfelméleti fogalomhoz kapcsolódó clutter definíciót és néhány híres tételt, melyek megfogalmazhatóak mint ezekről a clutterekről szóló állítások.

2.6.1. *st*-kötések és *st*-vágások

Legyen G egy irányított gráf, s és t két kijelölt pontja. Definiáljuk a $\mathcal{C}$ cluttert a G élhalmazán úgy, hogy a $\mathcal{C}$ élei legyenek az st-utak. Ford és Fulkerson híres „maximális folyam – minimális vágás” tétele megfogalmazható úgy, hogy $\mathcal{C}$ rendelkezik az MFMC tulajdonsággal.

2.6.1. Tétel (Ford és Fulkerson). *Egy G gráf st-útjainak cluttere rendelkezik az MFMC tulajdonsággal.*

Az st-vágások clutteréről (élei a minimális s-et és t-t elválasztó tartalmazásra nézve minimális élhalmazok) könnyen megmutatható, hogy szintén rendelkezik az MFMC tulajdonsággal. Ez a clutter egyébként az előző blokkere.

2.6.2. T-kötések és T-vágások

Legyen G egy irányítatlan gráf és legyen $T \subseteq V(G)$ egy páros elemszámú kijelölt ponthalmaz. Egy J élhalmazt T-kötésnek nevezünk, ha egy olyan körmentes gráfot feszít, melynek a páratlan fokú csúcsai pontosan a T-beli csúcsok. T-vágásnak nevezzük az olyan $\delta(U)$ alakú élhalmazokat, melyekre $|U \cap T|$ páratlan. A T-kötések cluttert alkotnak. A minimális T-vágások cluttere ennek a blokkere.

2.6.2. Tétel (Edmonds és Johnson [5]). *A T-vágások cluttere ideális.*

Így a 2.2.6. tétel miatt a T-kötések cluttere is ideális.

A T-vágások cluttere nem pakolható, de rendelkezik az $\frac{1}{2}$-MFMC tulajdonsággal (Seymour [20]). A T-vágások cluttere nem rendelkezik az $\frac{1}{2}$-MFMC tulajdonsággal; nyitott probléma, hogy rendelkezik-e az $\frac{1}{4}$-MFMC tulajdonsággal.

2.6.3. Irányított kötések és vágások

Legyen $D = (V, A)$ egy irányított gráf. Egy $C \subseteq A$ élhalmazt irányított vágásnak nevezünk, ha létezik egy nemüres $S \subset V$ ponthalmaz, melyre $C = (S, N - S)$ és $(N - S, S) = \emptyset$, ahol (S_1, S_2) jelöli az S_1-et elhagyó, S_2-be belépő élek halmazát. Egy irányított kötésnek nevezünk egy olyan minimális élhalmazt, ami minden irányított vágást metsz.

2.6.3. Tétel (Lucchesi–Younger [12]). *A (minimális) irányított vágások cluttere rendelkezik az MFMC tulajdonsággal.*

Lehman tételéből következik, hogy akkor az irányított kötések cluttere ideális. Sokáig sejtés volt, de Schrijver [17] mutatott példát arra, hogy az irányított kötések cluttere nem mindig rendelkezik az MFMC tulajdonsággal.

2.6.4. Sejtés (Woodall [22]). *Az irányított kötések cluttere pakolható.*

3. fejezet

Ideális mátrixok

Egy 0,1 mátrixot ideálisnak nevezünk, ha a $Q(A) = \{x \geqslant 0 : Ax \geqslant \mathbf{1}\}$ poliéder egész. Ezt a fogalmat Lehman [10] vezette be szélesség–hosszúság tulajdonság néven. Lehman megmutatta, hogy az ideális 0,1 mátrixok mindig párokban jelennek meg (2.2.6. tétel: egy mátrix pontosan akkor ideális, ha a blokkere az) és a szélesség–hosszúság tulajdonság egy karakterizációja az idealitásnak (2.3.1. tétel). Egy másik fontos Lehmantól származó az ideális 0,1 mátrixokról szóló eredmény a következő:

3.0.1. Tétel (Lehman). *Egy A 0,1 mátrixra ekvivalensek a következő állítások:*

(i) *A ideális,*

(ii) $\min\{w^T x : Ax \geqslant \mathbf{1}, x \geqslant 0\}$ *feladatnak van egész optimális megoldása minden* $w \in \{0, 1, \infty\}^n$*-re (amire egyáltalán értelme van, azaz véges az optimum érték).*

Az, hogy (i)-ből következik (ii) egyenes következménye az idealitásnak. Ennek a fejezetnek a fő célja annak a bizonyítása, hogy (ii)-ből következik (i). Ezt a minimálisan nemideális mátrixok tulajdonságainak vizsgálatával tesszük.

Ezzel a tétellel bepótoljuk továbbá egy előző fejezetbeli adósságunkat: a 2.1. fejezetben megemlítettük, hogy a pakolási tulajdonságból következik a clutter idealitása. Ez ennek a tételnek egyszerű következménye, ugyanis a pakolási tulajdonság az (ii) feltételben szereplő feladatra nem csak primál optimális, de duál optimális egész megoldás létezését is garantálja.

3.1. Minimálisan nemideális mátrixok

A 2.4.12. definíció szerint egy cluttert akkor nevezünk minimálisan nemideálisnak, ha nem ideális de minden valódi minorja az. Ennek alapján a 0,1 mátrixokra kapjuk a következő definíciót:

3.1.1. Definíció. Egy $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ clutter mátrix *mni*, ha

(i) $Q(A) = \{x \geqslant 0 : Ax \geqslant \mathbf{1}\}$ poliéder nem egész

(ii) $i = 1, \dots, n$-re $Q(A) \cap \{x_i = 1\}$ és $Q(A) \cap \{x_i = 0\}$ is egész poliéderek.

A 2.2.6. tétel és a 2.4.5. állítás miatt ha egy clutter *mni*, akkor a blokkere is az. Ebben a fejezetben kényelmes lesz a mátrixok blokkeréről beszélni. Azaz, ha A egy clutter mátrix, akkor $M(b(\mathcal{C}(A)))$-t $b(A)$-val jelöljük és az A blokkerének nevezzük. Így egy A mátrix pontosan akkor *mni*, ha $b(A)$ is az.

3.1.2. Példa. Tetszőleges $t \geqslant 2$ egészre jelölje $\mathcal{J}_t$ azt a $t+1$ ponton definiált cluttert, aminek az élei a degenerált projektív sík egyeneseinek felelnek meg. Nevezetesen $V(\mathcal{J}_t) = \{0, \dots, t\}$ és $E(\mathcal{J}_t) = \{\{1, \dots, t\}, \{0, 1\}, \dots, \{0, t\}\}$.

Vegyük észre, hogy ennek minden minimális transzverzálisa vagy tartalmazza a 0 elemet és egy tetszőleges másik elemet, vagy az összes 0-tól különböző elemet tartalmaznia kell. Azaz $\mathcal{J}_t$ blokkere önmaga. Továbbá az is nyilvánvaló, hogy ha egy $t+1$ ponton adott clutter tartalmazza $\mathcal{J}_t$-t, akkor megegyezik vele (precízen: ha $V(\mathcal{C}) = V(\mathcal{J}_t)$ és $E(\mathcal{J}_t) \subseteq E(\mathcal{C})$, akkor $E(\mathcal{J}_t) = E(\mathcal{C})$).

$\mathcal{J}_t$ nem ideális: $\mathbf{1}^T x \geqslant 2$ minden x-re, ami egész csúcsa $P(\mathcal{J}_t)$-nek (minden transzverzális legalább kételemű). Viszont $x = \left(\frac{t-1}{t}, \frac{1}{t}, \dots, \frac{1}{t}\right)^T$-ra $x(S) = 1$ minden $S \in E(\mathcal{J}_t)$-re, tehát $x \in P(\mathcal{J}_t)$, de $\mathbf{1}^T x = 2 - \frac{1}{t} < 2$. Tehát $P(\mathcal{J}_t)$-nek van nemegész csúcsa. (Könnyen látszik az is, hogy ez a konkrét x az egyetlen nemegész csúcsa $P(\mathcal{J}_t)$-nek).

$\mathcal{J}_t$ minden minorja ellenben ideális. Ha a 0 elemet töröljük, a kapott clutter egyetlen éle a $\{1, \dots, t\}$; ha 0-t összehúzzuk, a kapott clutter élhalmaza: $\{\{1\}, \dots, \{t\}\}$. Ha egy 0-tól különböző tetszőleges elemet törlünk vagy összehúzunk, szimmetria okokból föltehetjük, hogy az a t. $E(\mathcal{J}_t/t) = \{\{0\}, \{1, \dots, t-1\}\}$ és $E(\mathcal{J}_t \backslash t) = \{\{0, 1\}, \dots, \{0, t-1\}\}$. Ezekről mindről nagyon könnyen látszik, hogy ideálisak.

Tehát $\mathcal{J}_t$ mni.

3.1.3. Definíció. Két mátrixot izomorfnak nevezünk, ha megkaphatók egymásból sorok és oszlopok permutációjával.

3.1.4. Definíció. Legyen A egy *mni* mátrix és legyen $\bar{x}$ a $Q(A)$ poliéder egy tört[1] extremális pontja. A-nak azt az $\bar{A}$ maximális sorrészmátrixát, melyre $\bar{A}\bar{x} = \mathbf{1}$ *magnak* nevezzük (azaz a mag A-nak azon soraiból áll, melyekben $Ax \geqslant \mathbf{1}$ egyenlőséggel teljesül). Tehát A-nak van egy magja $Q(A)$ minden tört csúcsához.

3.1.5. Megjegyzés. Az *mni* definíciójából rögtön következik, hogy $Q(A)$ tört extremális pontjának minden koordinátája szigorúan 0 és 1 között van. Következésképp A minden magja teljes oszloprangú és különböző tört csúcsokhoz különböző magok tartoznak (ha $\bar{A}$ az $\bar{x}$-hez tartozó magja A-nak, akkor $\bar{x}$ az egyetlen megoldása az $\bar{A}x = \mathbf{1}$ egyenletnek).

3.1.6. Tétel (Lehman). *Legyen A egy mni mátrix és legyen $B = b(A)$. Akkor*

(i) *A-nak és B-nek egyértelmű a magja, jelöljük ezeket $\bar{A}$-val és $\bar{B}$-vel. (Másképpen: $Q(A)$ és $Q(B)$ poliédereknek egyetlen tört csúcsuk van.)*

(ii) *$\bar{A}$ és $\bar{B}$ négyzetes mátrixok.*

(iii) *vagy A izomorf $M(\mathcal{J}_t)$-vel, valamely $t \geqslant 2$, vagy $\bar{A}$ és $\bar{B}$ sorai megpermutálhatóak úgy, hogy*

$$\bar{A}\bar{B}^T = J + dI$$

valamilyen pozitív egész d-re.

A következőkben egy olyan bizonyítást adunk erre a tételre, ami Padberg [14] poliéderes megközelítését követi. A bizonyítás a Cornuéjols [3] konyvéből származik. Ehhez a következő, Bridges és Ryser-től származó tételre lesz szükségünk:

[1] a *tört* kifejezést a *„nem egész”* szinonimájaként használom a dolgozatomban

3.1.7. Tétel (Bridges és Ryser [2]). *Legyen Y és Z két $n \times n$-es 0,1 mátrix olyanok, hogy $YZ = J + dI$ teljesül valamely pozitív egész d-re. Ekkor:*

(i) *Y és Z minden sora és oszlopa azonos számú (r illetve s darab) 1-est tartalmaz úgy, hogy $rs = n + d$;*

(ii) *$YZ = ZY$.*

Bizonyítás. Könnyen látszik, hogy $J + dI$ invertálható és $(J + dI)^{-1} = \frac{1}{d}I - \frac{1}{d(n+d)}J$. Ebből következik, hogy Y és Z is invertálható, és így

$$YZ\left(\frac{1}{d}I - \frac{1}{d(n+d)}J\right) = I \Longrightarrow Z\left(\frac{1}{d}I - \frac{1}{d(n+d)}J\right)Y = Y^{-1}Y = I,$$
$$\text{azaz,}\quad ZY = \frac{1}{n+d}ZJY + dI = \frac{1}{n+d}\mathbf{s}\mathbf{r}^T + dI,$$

ahol $\mathbf{s} = Z\mathbf{1}$ és $\mathbf{r} = Y^T\mathbf{1}$.

Mivel ZY és dI mátrixok elemei egészek, ezért $n+d$ osztja $s_i r_j$-t minden i és j-re. Másrészt tudjuk, hogy ZY nyoma megegyezik YZ-ével, ami $n(d+1)$. Tehát $\frac{1}{n+d}\sum_1^n s_i r_i = n$ és, mivel $s_i > 0$ és $r_i > 0$ (Y, Z-nek nincsenek 0 soraik és oszlopaik), ez csak úgy lehetséges, ha $r_i s_i = n + d$. Most tekintsünk különböző i, j-t. Mivel $r_i s_i = r_j s_j = n + d$ és $n + d$ osztja $r_i s_j$-t és $r_j s_i$-t, ezért $r_i = r_j$ és $s_i = s_j$ (ha nem, mondjuk $r_i < r_j$, akkor $0 < r_i s_j < r_j s_j = n + d$, ellentmondásban azzal, hogy $n + d \mid r_i s_j$). Tehát Z minden sora s darab 1-est és Y minden oszlopa r darab 1-est tartalmaz. Továbbá $\frac{1}{n+d}\mathbf{s}\mathbf{r}^T = J$ és így $ZY = J + dI$. De ekkor Z, Y-ra megismételve az érvelést kapjuk, hogy Y minden sorának azonos az összege és Z minden oszlopának azonos az összege, és ezek nyilván csak r és s lehetnek. $\square$

Az előző tétel és a 3.1.6. tétel következménye:

3.1.8. Következmény. *Legyen A egy mni mátrix, ami nem izomorf $M(\mathcal{J}_t)$-vel. Akkor van egy $\bar{A}$ nemszinguláris sorrészmátrixa, melynek minden sorában és oszlopában r egyes van. Továbbá A-nak $\bar{A}$-n kívüli soraiban legalább $r + 1$ egyes van.*

Hasonlóak igazak a $B = b(A)$ mátrixra: van egy $\bar{B}$ nemszinguláris sorrészmátrixa, melynek minden sorában és oszlopában s darab egyes van, azon kívüli sorokban pedig s-nél több egyes van. Továbbá igaz még az, hogy $rs > n$, ahol n a mátrixok szélessége.

Bizonyítás. Legyen $\bar{A}$ az A egyértelmű magja. Mivel kikötöttük, hogy A nemizomorf $M(\mathcal{J}_t)$-vel, ezért $\bar{A}$ és $\bar{B}$ négyzetesek és $\bar{A}\bar{B}^T = J + dI$, ahol $\bar{B}$ a B magja, d valamilyen pozitív egész szám. Így az előző tétel szerint $\bar{A}$ nemszinguláris és minden sorában és oszlopában r darab 1-es van, $\bar{B}$-nek minden sorában és oszlopában s darab 1-es van és $rs = n + d > n$. Tekintsük most az $\bar{A}x = \mathbf{1}$ egyenletet. Ennek az $\bar{x} = (\frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r})^T$ a megoldása (egyértelmű, mivel $\bar{A}$ nemszinguláris), az egyetlen tört csúcsa $Q(A)$-nak. A mag definíciója miatt A-nak az összes a^T sorára, ami nincs $\bar{A}$-ban $a^T\bar{x} > 1$, ami pontosan azt jelenti, hogy ezekben a sorokban legalább $r + 1$ 1-es van. $\square$

Ezzel már be tudjuk látni a 3.0.1. tételt, vagyis egy kicsit átfogalmazva, adódik a következő:

3.1.9. Következmény. *Legyen A egy 0,1 mátrix. A $Q(A) = \{x \geqslant 0 : Ax \geqslant \mathbf{1}\}$ poliéder akkor és csakis akkor egész, ha a $\min\{w^T x : x \in Q(A)\}$ feladatnak van egész optimális megoldása minden $w \in \{0, 1, \infty\}^n$-re.*

Bizonyítás. A nemtriviális irányhoz azt kell megmutatnunk, hogy ha A egy nemideális mátrix, akkor létezik olyan $w \in \{0, 1, \infty\}^n$, hogy $\min\{w^T x : x \in Q(A)\}$ nem vétetik föl egész x-en.

Legyen először A egy *mni* mátrix. Megmutatjuk, hogy a $w = \mathbf{1}$ egy jó választás. Ha A izomorf $M(\mathcal{J}_t)$-vel, akkor a 3.1.2. példában, ahol megmutattuk, hogy $\mathcal{J}_t$ nem ideális, pontosan azt láttuk be, hogy $P(\mathcal{J}_t)$-nek van olyan x csúcsa, amire $\mathbf{1}^T x$ kisebb, mint az egész csúcsokra. Ha viszont A nemizomorf $M(\mathcal{J}_t)$-vel, akkor az előző következmény miatt vagyunk készen. Ugyanis $\bar{x} = (\frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r})^T$-re, a $Q(A)$ tört csúcsára, $\mathbf{1}^T \bar{x} = \frac{n}{r}$, ami kisebb, mint s, mivel $rs > n$ az előző következmény szerint. s viszont a $b(A)$ sorainak, azaz $Q(A)$ egész csúcsainak összegének a minimuma.

Legyen most A tetszőleges nemideális mátrix és legyen $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A)$ a hozzá tartozó clutter. Tekintsük $\mathcal{C}$ egy $\mathcal{C}' = \mathcal{C}/V_1 \backslash V_2$ minimálisan nemideális minorját és legyen $A' = M(\mathcal{C}')$. Tudjuk, hogy $Q(A') = Q(A) \cap \{x_i = 0,\ i \in V_1\} \cap \{x_i = 1,\ i \in V_2\}$ vetülete $V(\mathcal{C}')$-re. Legyen w a következő:

$$\begin{aligned} w_i &= 1 && \text{ha } i \in V(\mathcal{C}') \\ w_i &= \infty && \text{ha } i \in V_1 \\ w_i &= 0 && \text{ha } i \in V_2 \end{aligned}$$

Ezzel $\min\{w^T x : x \in Q(A)\} = \min\{\mathbf{1}^T x' : x' \in Q(A')\}$ és a két feladatnak egyszerre van egész optimális megoldása. Ugyanis ha x megengedett megoldása az elsőnek, akkor $x' = x|_{V(\mathcal{C}')}$ megoldása a másodiknak és fordítva, ha x' megoldása a másodiknak, akkor $x_i = \begin{cases} x_i' & \text{ha } i \in V(\mathcal{C}') \\ 0 & \text{ha } i \in V_1 \\ 1 & \text{ha } i \in V_2 \end{cases}$ egyenlettel megadott x megoldása az elsőnek, és a megoldások azonos értékűek ($w^T x = \mathbf{1}^T x'$).

Tehát ezzel a w-vel a $\min\{w^T x : x \in Q(A)\}$ feladatnak nincsen egész megoldása. $\square$

3.2. A Lehman-tétel bizonyítása

Ebben a részben a 3.1.6. tételt bizonyítjuk. A bizonyítás néhány részletében különbözik a [3]-ban közöltektől, például egy kicsit egyszrűsítettünk a 3.2.4. lemma bizonyításán.

Legyen A egy $m \times n$-es *mni* mátrix, $\bar{x}$ a $Q(A)$-nak egy tört csúcsa és $\bar{A}$ az ehhez tartozó magja A-nak. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\bar{A}$ az A első p sorából áll. Mint már megjegyeztük abból, hogy A mni következik, hogy $\bar{x}$ minden koordinátája szigorúan 0 és 1 között van és $\bar{A}$ teljes oszloprangú. Tehát $p \geqslant n$ és $\bar{A}$ nem tartalmaz tiszta 0 oszlopot. Továbbá csak 1-esekből álló oszlopot sem tartalmazhat $\bar{A}$, mert akkor $\bar{A}x = \mathbf{1}$-nek lenne $\bar{x}$-től különböző megoldása: e_j, ha a j-ik oszlopban csak 1-esek vannak. Ezen kívül, mivel A clutter mátrix, ezért nem tartalmazhat csak 0-kból vagy 1-esekből álló sort (ha egy clutter mátrix tartalmaz ilyen sort, akkor az az egyetlen sora és így nem lehet mni).

A következő egyszerű eredményt arra a páros gráfra fogjuk alkalmazni, melynek 0,1 mátrix reprezentációja a $J - \bar{A}$ (ahol J most a $p \times n$-es csupa 1-es mátrixot jelöli). Azaz a gráf két osztálya p és n elemű és ij pontosan akkor éle a gráfnak, ha $a_{ij} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant p$ és $1 \leqslant j \leqslant n$-re.

3.2.1. Lemma (de Bruijn és Erdős). *Legyen $(I, J; E)$ egy izolált pont nélküli páros gráf. Ha $|I| \geqslant |J|$ és $d(i) \geqslant d(j)$ minden olyan $i \in I$, $j \in J$-re, amire $ij \in E$, akkor $|I| = |J|$ és $d(i) = d(j)$ minden olyan $i \in I$, $j \in J$-re, amire $ij \in E$. ($d(v)$ a v pont fokát jelöli). Sőt* *minden összefüggőségi komponensnek ugyanannyi pontja van a két osztályban és $d(u) = d(v)$, ha u és v egy összefüggőségi komponensben vannak.*

Bizonyítás.

$$|I| = \sum_{i\in I}\sum_{j\in N(i)} \frac{1}{d(i)} \leqslant \sum_{i\in I}\sum_{j\in N(i)} \frac{1}{d(j)} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in N(j)} \frac{1}{d(j)} = |J|\,.$$

Itt $N(v)$ a v pont szomszédainak halmazát jelöli. Az $|I| \geqslant |J|$ feltevés miatt végig egyenlőségnek kell teljesülnie, azaz $|I| = |J|$ és $d(i) = d(j)$ minden olyan $i \in I$, $j \in J$-re, amire $ij \in E$. Az összefüggőségi komponensekre vonatkozó állítások ezekből már triviálisan következnek. □

A Lehman-tétel bizonyításában kulcsszerepet játszik a következő lemma:

3.2.2. Lemma. *Ha $p = n$ és ha $a_{ij} = 0$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, akkor $\bar{A}$ i-ik sora és j-ik oszlopa azonos számú 1-est tartalmaz.*

Bizonyítás. Az előző lemmát akarjuk alkalmazni a $J - \bar{A}$ páros gráf reprezentációjára. Ehhez már csak azt kell megmutatni, hogy $\bar{A}$ i-ik sorában legalább annyi 0 van, mint a j-ik oszlopában, ha $a_{ij} = 0$. Ehhez elég megmutatni, hogy $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \leqslant \sum_{k=1}^{p} a_{kj}$ minden olyan i, j-re, amire $a_{ij} = 0$.

Legyen x^j a következőképpen definiálva:

$$x_k^j = \begin{cases} \bar{x}_k & \text{ha } k \neq j, \\ 1 & \text{ha } k = j. \end{cases}$$

Ez nyilvánvalóan pontja a $Q(A)\cap\{x_j = 1\}$ poliédernek; legyen F_j ennek minimális dimenziójú lapja, ami tartalmazza x^j-t. Az állítás, meglepő módon, F_j dimenziójának becsléséből fog kijönni.

Az x^j pont rajta van az összes $\{a^T x = 1\}$ hipersíkon, ahol a^T sora $\bar{A}$-nek és $a_j = 0$ (mert $a^T x = 1$ és $\bar{x}$ és x^j csak j-ik koordinátában különböznek). Ezekből legalább $n - \sum_{k=1}^{p} a_{kj}$ független, mivel $\bar{A}$ rangja n. Továbbá x^j rajta van az előzőektől független $\{x_j = 1\}$ hipersíkon. Így

$$\dim F_j \leqslant n - \left(n - \sum_{k=1}^{p} a_{kj} + 1\right) = \sum_{k=1}^{p} a_{kj} - 1.$$

Legyen most a^{i^T} egy olyan sora $\bar{A}$-nek, melyre $a_{ij} = 0$. Mivel x^j eleme F_j-nek, ezért nagyobb vagy egyenlő, mint az F_j extremális pontjainak egy konvex kombinációja: $x^j \geqslant \sum \gamma_l b^l$, ahol $\gamma > 0$ és $\sum \gamma_l = 1$, b^l extremális pontja F_j-nek. Ezért

$$1 = a^{i^T} x^j \geqslant \sum \gamma_l a^{i^T} b^l \geqslant \sum \gamma_l = 1 \tag{3.1}$$

És így mindenhol egyenlőségnek kell lennie. Speciálisan $a^{i^T} b^l = 1$ minden l-re. Most kihasználjuk, hogy A mni és ezért $Q(A) \cap \{x_j = 1\}$ és vele együtt F_j is egész poliéderek. Tehát mindegyik b^l 0,1 vektor és így pontosan 1 nemnulla koordinátája van az olyan k koordináták közül, amikre $a_{ik} = 1$.

Egy másik következménye annak, hogy (3.1) egyenlőséggel teljesül az, hogy $x_k^j = \sum \gamma_l b_k^l$ minden olyan k-ra, melyre $a_{ik} = 1$. És mivel x^j minden koordinátája nagyobb 0-nál, következik, hogy F_j tartalmaz legalább $\sum_k a_{ik}$ lineárisan független b^l pontot. Azaz

$$\dim F_j \geqslant \sum_{k=1}^{p} a_{ik} - 1.$$

Tehát megmutattuk, hogy $\sum a_{ik} \leqslant \sum a_{kj}$ minden olyan i, j-re, hogy $a_{ij} = 0$. Alkalmazva a 3.2.1. lemmát kapjuk, hogy $p = n$ és ha $a_{ij} = 0$, akkor az i-ik sor és a j-ik oszlop azonos számú 0-át és következésképp azonos számú 1-est tartalmaz. □

3.2.3. Lemma. *$\bar{x}$-nek pontosan n szomszédos csúcsa van $Q(A)$-ban és mindegyik egész.*

Bizonyítás. Az előző lemma szerint a $Q(A)$-t meghatározó $Ax \geqslant \mathbf{1}$, $x \geqslant 0$ egyenlőtlenségekből pontosan n teljesül egyenlőséggel $\bar{x}$-ben, nevezetesen az $\bar{A}\bar{x} = \mathbf{1}$. Tehát a $Q(A)$ poliéderben egy $\bar{x}$-re illeszkedő él az $\bar{A}x = \mathbf{1}$ egyenlőségekből $n-1$ által van meghatározva, és így $\binom{n}{n-1} = n$ van belőlük. Egy ilyen él mentén mozogva legalább egy koordináta csökken (egy él irányát az $\tilde{A}x = 0$ valamelyik nemtriviális megoldása adja meg, ahol $\tilde{A}$ az $\bar{A}$ $n-1$ sorából áll). Így, mivel $Q(A) \subseteq \mathbb{R}^n_+$, következik, hogy $\bar{x}$-nek pontosan n szomszédos extremális pontja van.

Tegyük fel, hogy $\bar{x}'$ egy tört szomszédos csúcsa $\bar{x}$-nek, legyen $\bar{A}'$ a hozzá tartozó magja A-nak. Mivel $\bar{x}$ és $\bar{x}'$ szomszédos csúcsai $Q(A)$-nak, ezért $\bar{A}$ és $\bar{A}'$ csak egy sorban különböznek. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\bar{A}'$ az A $2, \ldots, n+1$-ik sorából áll. Tekintsünk egy olyan j-t, amire $a_{1j} = 0$ és $a_{n+1,j} = 1$ (ilyen nyilván van, mert A sorai különbözőek, sőt egyik sem dominálja a másikat). Mivel $\bar{A}'$ nem tartalmazhat csupa 1-esből álló oszlopot, ezért van $2 \leqslant i \leqslant n$, amire $a_{ij} = 0$. $\bar{A}$ és $\bar{A}'$ j-ik oszlopa láthatóan különböző számú 1-est tartalmaz ellentmondásban azzal, hogy mindkettőnek ugyan annyi 1-est kell tartalmaznia, mint az i-ik sor, az előző lemma szerint. □

Tudjuk, hogy $Q(A)$ egész csúcsai a $B = b(A)$ mátrix sorai. Tehát az a $\bar{B}$ mátrix, melynek sorai az $\bar{x}$ szomszédai, egy sorrészmátrixa B-nek. És az előző bizonyítás menetéből látszik, hogy $\bar{A}\bar{B}^T = J + D$, ahol D egy diagonális mátrix valamilyen $d_1, \ldots, d_n$ pozitív egész főátlóbeli elemekkel.

3.2.4. Lemma. *Két eset közül valamelyik teljesül:*

(i) *$\bar{A}$ izomorf $M(\mathcal{J}_{n-1})$-el,*

(ii) *$D = dI$, ahol d pozitív egész.*

Bizonyítás. Megint tekintsük azt a G páros gráfot, melynek mátrix reprezentációja $J - \bar{A}$.

1. eset. G összefüggő.

Akkor a 3.2.2. lemmából következik, hogy $\sum_k a_{ik} = \sum_k a_{kj}$ minden i, j-re. Legyen α ez a közös sor és oszlop összeg.

$$(n + d_1, \ldots, n + d_n) = \mathbf{1}^T(J + D) = \mathbf{1}^T\bar{A}\bar{B}^T = (\mathbf{1}^T\bar{A})\bar{B}^T = \alpha\mathbf{1}^T\bar{B}^T$$

Nyilvánvaló, hogy legfeljebb egy olyan d létezik, amire $1 \leqslant d < \alpha$ és $n + d$ osztható α-val. Így mivel mindegyik d_i-nek ezeket teljesíteni kell, egyenlőknek kell lenniük, azaz $D = dI$.

2. eset. G nem összefüggő.

Legyen q az összefüggő komponensek száma, ekkor $\bar{A}$ a következő alakú:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} K_1 & & & 1 \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & K_q \end{pmatrix},$$

ahol K_t 0,1 mátrix négyzetes alakú és minden sorában és oszlopában ugyan annyi 1-es van a 3.2.2. lemma miatt.

Ha a^{i^T} tetszőleges sora $\bar{A}$-nek, akkor van egy b^T sora B-nek, amire $a^{i^T}b > 1$, de $\bar{A}$ minden más a^{l^T} sorára $a^{l^T}b = 1$. Következésképpen van az $\bar{A}$-nek két oszlopa j, k úgy, hogy $a_{ij} = a_{ik} = 1$, de nincsen másik l sor, amire $a_{lj} = a_{lk} = 1$.

Ennek az észrevételnek a segítségével belátjuk, hogy $\bar{A}$ izomorf $M(\mathcal{J}_{n-1})$-el. Először megmutatjuk, hogy van $\bar{A}$-nak egy olyan sora, ami $n-1$ darab 1-est tartalmaz. Különben akárhogy veszünk két oszlopot j-t és k-t, van két különböző sor i, l úgy, hogy $a_{ij} = a_{ik} = a_{lj} = a_{lk} = 1$, ellentmondásban az előző megjegyzéssel. Ugyanis ekkor minden K_t komponens mátrix legalább 2×2-es és mivel $\bar{A}$-ban nem lehet két egyforma sor, K_t minden sorában és oszlopában legalább egy 1-es van. Most ha egy komponensből veszünk két oszlopot, akkor másik komponensből választott két sor megfelelő lesz. Ha viszont két különböző komponensből választunk két oszlopot, mondjuk j-t K_t-ből és k-t K_s-ből, akkor K_t-ben található egy i sor, melyre $a_{ij} = 1$ és K_s-ben egy l sor, melyre a_{lk}=1, és ez lesz a két megfelelő sor.

Tehát biztosan van egy $n-1$ darab 1-est tartalmazó sor. Föltehető, hogy ez az első sor és $a_{11} = 0$ és $a_{12} = \cdots = a_{1n} = 1$. Mivel nincsen domináló sor, ezért $a_{i1} = 1$ minden $i > 1$-re, azaz $\bar{A}$ valahogy így néz ki: $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & K \end{pmatrix}$. Ha K-ban van olyan sor vagy oszlop, amivel csak egy 1-es szerepel, akkor az egész K egy összefüggő komponenshez tartozik és minden sorában és oszlopában egy darab 1-es van (vagy esetleg $n = 3$ és $\bar{A} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$). Azaz ekkor $\bar{A}$ izomorf $M(\mathcal{J}_{n-1})$-el.

Akkor most legyen K minden sorában és oszlopában legalább két 1-es. Tekintsünk egy $i \geqslant 2$ sort és két oszlopot, amik 1-esekben metszik ezt a sort. Ha ezek közül egyik sem az első oszlop, akkor az első sor olyan, amit szintén 1-esekben metszi ez a két oszlop. Ha viszont az egyik oszlop az első, akkor amiatt, hogy a másik oszlop legalább két 1-est tartalmaz K-ban van ellentmondó sorunk. □

A Lehman-tétel bizonyításának befejezéséhez már csak azt kell megmutatnunk, hogy az $\bar{A}$ mag egyértelmű és hogy $\bar{B}$ a B magja.

Ha $\bar{A} = M(\mathcal{J}_t)$, akkor abból a tényből, hogy A nem tartalmaz dominált sort (mint már elmondtuk a 3.1.2. példánál) következik, hogy $A = \bar{A}$. És akkor $M(\mathcal{J}_t) = B = \bar{B}$. Tehát ebben az esetben teljesül az állítás.

Ha $\bar{A}\bar{B}^T = J + dI$ valamilyen pozitív egész d-re, akkor a 3.1.7. tétel miatt $\bar{A}$ minden sora r darab 1-est és $\bar{B}$ minden sora s darab 1-est tartalmaz és $rs = n + d$. Ekkor (mint a 3.1.8. következményben) $\bar{x} = (\frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r})^T$ és így A-nak $\bar{A}$-n kívüli soraiban több, mint r darab 1-es van. Tehát a mag sorait pontosan az jellemzi, hogy ezek A-nak a minimális összegű sorai, azaz a mag tényleg egyértelmű. Nyilván ez a B magjára is vonatkozik, tehát ahhoz, hogy belássuk, hogy $\bar{B}$ a B magja csak azt kell megmutatni, hogy B minden sorának az összege $\geqslant s$ ($\bar{B}$ sorainak összege s, n sorból áll és tudjuk, hogy a magot alkotó minimális összegű sorból pontosan n darab van). Tudjuk, hogy $\mathbf{1}^T\bar{x} = \frac{n}{r} < s$, viszont minden $\bar{x}$-el szomszédos x csúcsára $Q(A)$-nak $\mathbf{1}^T x = s$, hiszen ezek pontosan a $\bar{B}$ sorai. Tehát az $\{\mathbf{1}^T x = s\}$ hipersík szeparálja $\bar{x}$-et a $Q(A)$ összes többi csúcsától, így $Q(A)$ minden $\bar{x}$-től különböző x csúcsára $\mathbf{1}^T x \geqslant s$. Speciálisan minden egész csúcsra is, amikről tudjuk, hogy pontosan a B sorai. Ezzel a tételt beláttuk.

3.3. Példák *mni* clutterekre

3.3.1. Definíció. Legyen Z_n a moduló n összeadás csoportja, és legyen $k \leqslant n-1$ egy pozitív egész. Minden $i \in Z_n$-re jelölje C_i a $\{i, i+1, \ldots, i+k-1\}$-nak megfelelő részhalmazát Z_n-nek. Definiáljuk a $\mathcal{C}_n^k$ *ciklikus* cluttert a következőképpen: $V(\mathcal{C}_n^k) = \{0, \ldots, n-1\}$ és $E(\mathcal{C}_n^k) = \{C_0, \ldots, C_{n-1}\}$.

3.3.2. Példa. Tekintsük a $\mathcal{C}_n^2$ cluttereket páratlan $n \geqslant 3$-ra. Könnyű meggondolni, hogy ennek blokkere izomorf $\mathcal{C}_n^{\frac{n+1}{2}}$-vel. Az is könnyen látszik, hogy $\mathcal{C}_n^2$ nem ideális, ugyanis $\bar{x} = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})^T$ olyan pontja $P(\mathcal{C}_n^2)$-nak, amire $\mathbf{1}^T\bar{x} = \frac{n}{2}$, viszont minimális transzverzális elemszáma $\frac{n+1}{2}$. Viszont bármelyik pontját törölve vagy összehúzva már ideális cluttert kapunk, amit szintén nagyon egyszerű ellenőrizni. Tehát $\mathcal{C}_n^2$ és vele együtt $\mathcal{C}_n^{\frac{n+1}{2}}$ is mni.

Ezzel most már három végtelen sorozat mni cluttert tudunk: $\mathcal{C}_n^2$ és $\mathcal{C}_n^{\frac{n+1}{2}}$, $n \geqslant 3$ páratlanra és $\mathcal{J}_n$, $n \geqslant 2$-re. Egy sejtés azt mondja, hogy elég nagy n-re csak ilyen mni clutterek vannak, legalábbis ha csak a magot tekintjük:

3.3.3. Sejtés (Cornuéjols és Novick). *Létezik egy n_0, hogy minden $n \geqslant n_0$-ra bármely mni mátrixnak a magja izomorf $\mathcal{C}_n^2$, $\mathcal{C}_n^{\frac{n+1}{2}}$-nel, $n \geqslant 3$ páratlanra, vagy $\mathcal{J}_t$-vel, $t \geqslant 2$-re.*

Azonban ismert néhány „kicsi” mni mátrix, amik nem tartoznak a fönti osztályokba. Például Lehman észrevette, hogy ilyen az $\mathcal{F}_7$. $\mathcal{F}_7$ az a clutter, aminek az alaphalmaza a Fano sík (hét pontú projektív sík) pontjai, élei pedig az egyenesei. Vagyis ez a következő mátrixszal adott clutter:

$$M(\mathcal{F}_7) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ellenőrizhető, hogy $b(\mathcal{F}_7) = \mathcal{F}_7$ és $\mathcal{F}_7$ mni.

4. fejezet

Előjelezett gráfok

Ebben a fejezetben gráfok páratlan köreinek clutterét fogjuk vizsgálni. Guenin jellemezte, hogy mikor ideális ez a clutter, Seymour pedig azt, hogy mikor rendelkezik az MFMC tulajdonsággal. Két fontos alkalmazási területe van ezeknek a jellemzéseknek: a többtermékes folyamok és a maximális vágás probléma.

Szemléltetésként tekintsünk egy irányítatlan G gráfot és legyen $w \in \mathbb{R}_+^{E(G)}$ egy nemnegatív élsúlyozás. Legyen $\mathcal{C}$ az a clutter, aminek az alaphalmaza $E(G)$, élei pedig a G páratlan körei (mint élhalmazok[1]). Erre a (2.1) feladat egész megoldása a $\mathcal{C}$ egy minimális súlyú T transzverzálisát határozza meg. Mivel T minden páratlan kört metsz, ezért a komplementere $E(G) - T$ egy páros gráfot feszít. Azaz egy minimális transzverzális komplementere nyilván egy maximális vágás. Azaz, ha $\mathcal{C}$ ideális, akkor (2.1) megoldása meghatároz egy maximális súlyú vágást G-ben.

Lássunk néhány példát. Először egy gráfosztály, amire mindig ideális a páratlan kör clutter:

4.0.1. Tétel (Orlova, Dorfman [13]). *Síkgráfra a páratlan körök cluttere ideális.*

Bizonyítás. Legyen G egy síkgráf és D a síkduálisa. A G korlátos tartományai egy körbázist alkotnak (minden kör előáll ilyenek szimmetrikus differenciájaként). Tehát minden páratlan kör tartományok szimmetrikus differenciája, melyekből páratlan sok páratlan sok élből áll. Legyen T a D páratlan fokú csúcsainak halmaza. A G egy páratlan köre a D egy olyan W ponthalmaz által meghatározott vágásának felel meg, melyre $W \cap D$ páratlan elemszámú, azaz a D egy T-vágásának. A D T-vágásainak cluttere ideális az Edmonds–Johnson-tétel (2.6.2. tétel) szerint, tehát ideális a G páratlan köreinek cluttere is. □

Wagner [21] dekompoziciós tételének segítségével ez az eredmény kiterjeszthető minden olyan gráfra, ami nem tartalmaz K_5 minort (lásd Barahona [1]), de mi itt egy más megközelítésből egy általánosabb eredményt fogunk adni.

Ha $G = K_5$ az ötpontú teljes gráf, akkor a páratlan körök $\mathcal{C}$ cluttere nem ideális. Vegyük ugyanis észre, hogy a minimális elemszámú transzverzális 4 elemű (minden vágás legfeljebb 6 élt tartalmaz a 10-ből). Viszont az az x pont, amire $x_j = \frac{1}{3}$, $j = 1, \ldots, 10$-re nyilvánvalóan pontja a $P(\mathcal{C})$ poliédernek és $\mathbf{1}^T x = \frac{10}{3} < 4$. Könnyű megmutatni, hogy ez a clutter valójában mni.

[1] Ebben a fejezetben általában mindig élhalmazokat fogunk érteni körök, vágások, utak, … alatt.

4.1. Gyengén és erősen páros gráfok

4.1.1. Definíció. Ha G egy irányítatlan gráf, akkor $\mathcal{O}_G$-vel jelöljük a G páratlan köreinek clutterét. Azaz $V(\mathcal{O}_G) = E(G)$, és $E(\mathcal{O}_G)$ a G páratlan köreiből áll.

4.1.2. Definíció. Egy G irányítatlan gráfot *gyengén párosnak* nevezünk, ha $\mathcal{O}_G$ clutter ideális.

4.1.3. Definíció. Egy G irányítatlan gráfot *erősen párosnak*[2] nevezünk, ha $\mathcal{O}_G$ rendelkezik az MFMC tulajdonsággal.

A gyengén páros gráfokat Guenin [7] karakterizálta, bebizonyítva Seymournak egy sejtését. Ez a karakterizáció általánosabb környezetben, *előjelezett gráfokra* is igaz, amit a későbbiekben ismertetünk. Egyszerű irányítatlan gráfokra ez a következőképpen hangzik.

Nevezzük a H gráfot a G gráf páratlan minorjának, ha megkapható G-ből élek és csúcsok törlésével és teljes vágások élhalmazának összehúzásával. Könnyű ellenőrizni, hogy a gyengén páros gráfok osztálya zárt a páratlan minor képzésre nézve. Ezzel Guenin karakterizációja a következőképpen hangzik:

$$\text{egy } G \text{ irányítatlan gráf gyengén páros} \iff K_5 \text{ nem páratlan minorja } G\text{-nek} \tag{4.1}$$

Erősen páros gráfokra Seymour [19] adott egy hasonló jellemzést. Kiderül, hogy ezek pontosan azok, amik nem tartalmaznak K_4-et páratlan minorként. Itt is egyszerűbb a problémát az előjelezett gráfok körében kezelni.

4.2. Előjelezett gráfok

4.2.1. Definíció. *Előjelezett gráf*nak nevezünk egy $G = (V, E, \Sigma)$ hármast, ahol (V, E) egy irányítatlan gráf és $\Sigma \subseteq E$. Σ-t a G előjelezésének nevezzük. Szokás a Σ-beli éleket *páratlannak*, a Σ-n kívüli éleket pedig *párosnak* hívni.

Egy előjelezett gráfban általában egy élhalmazt, vagy speciálisan egy kört, vágást, utat *páratlan*nak(*páros*nak) nevezünk, ha páratlan(páros) sok Σ-beli élt tartalmaz.

Ha G egy egyszerű irányítatlan gráf és $\Sigma \subseteq E(G)$, akkor — egy kicsit pongyolán — (G, Σ)-val jelöljük a $(V(G), E(G), \Sigma)$ előjelezett gráfot.

Ha a Σ a gráf összes éléből áll, akkor a „páratlanság” igazi páratlanságot jelent, azaz egy kör pontosan akkor lesz ebben az értelemben páratlan, ha páratlan sok élből áll. A következő állítás azt mondja meg, hogy mikor nincs egyáltalán páratlan köre egy előjelezett gráfnak, amit ilyenkor *párosnak* szokás nevezni.

4.2.2. Állítás. *(G, Σ)-ban pontosan akkor nincsen páratlan kör, ha Σ egy vágás élhalmaza.*

Bizonyítás. Ha egy nem Σ-beli élt összehúzunk, akkor minden, a keletkezett gráfbeli páratlan körnek egyértelműen megfelel egy páratlan kör az eredeti gráfból. Húzzuk össze az összes nem Σ-beli élt. A keletkezett előjelezett gráfban továbbra sincsen páratlan kör, viszont itt az összes él Σ-beli, azaz ebben a gráfban nincsen „igazi” páratlan kör, azaz a gráf szokásos értelemben páros. Jelöljük U'-vel az egyik pontosztályát és legyen U ennek őse. Könnyen látszik, hogy $\Sigma = \delta(U)$. $\square$

[2] Ez az elnevezés eléggé megtévesztő, ugyanis egy erősen páros gráf nem feltétlenül páros, mint azt a K_3 példája mutatja.

4.2.3. Állítás. *(G,Σ)-nak és (G,Σ')-nek ugyanazok a páratlan körei $\Longleftrightarrow$ Σ és Σ' szimmetrikus differenciája egy vágás, azaz $\Sigma' = \Sigma \triangle \delta(U)$ alkalmas $U \subseteq V(G)$-vel.*

Bizonyítás. Tekintsük a $(G, \Sigma\triangle\Sigma')$ előjelezett gráfot. (G,Σ)-nak és (G,Σ')-nek pontosan akkor azonosak a páratlan köreik, ha $(G,\Sigma\triangle\Sigma')$-nek nincsen páratlan köre, ami az előző állítás szerint pontosan akkor teljesül, ha $\Sigma\triangle\Sigma' = \delta(U)$, azaz $\Sigma' = \Sigma\triangle\delta(U)$. □

Ha két előjelezés olyan, mint az előző állításban, akkor *ekvivalensnek* nevezzük őket. Mivel általában az előjelezett gráfnak csak a páratlan körei érdekelnek minket, ezért sokszor két ekvivalens előjelezéssel rendelkező gráfot nem tekintünk különbözőnek.

Pontosan ugyan úgy, mint sima gráfoknál definiáljuk a páratlan körök clutterét és azt, hogy mikor nevezünk egy előjelezett gráfot erősen illetve gyengén párosnak:

4.2.4. Definíció. Ha $G = (V, E, \Sigma)$ egy előjelezett gráf, akkor $\mathcal{O}_G$-vel jelöljük a G páratlan köreinek clutterét. Azaz $V(\mathcal{O}_G) = E$, és $E(\mathcal{O}_G)$ a G páratlan köreiből áll.

4.2.5. Definíció. Egy G előjelezett gráf *gyengén páros*, ha $\mathcal{O}_G$ clutter ideális, és *erősen páros*, ha $\mathcal{O}_G$ rendelkezik az MFMC tulajdonsággal.

$\mathcal{O}_G$ egy transzverzálisát, azaz egy olyan élhalmazt, ami minden páratlan körből tartalmaz élt, *páratlan kör fedésnek* nevezünk. Egy Σ-val ekvivalens előjelezés páratlan sok élben metsz minden páratlan kört, tehát nyilvánvalóan egy páratlan kör fedés. Meglepő módon minden minimális páratlan kör fedés egy Σ-val ekvivalens előjelezés.

4.2.6. Állítás. *Legyen $G = (V, E, \Sigma)$ egy előjelezett gráf és $F \subseteq E$ egy minimális páratlan kör fedés. Akkor F egy Σ-val ekvivalens előjelezés.*

Bizonyítás. Két bizonyítást is adunk erre az állításra.

1. Legyen $G' = (V, E', \Sigma') = (V, E - F, \Sigma - F)$. Mivel F egy páratlan kör fedés, ezért G'-ben nincsen páratlan kör. Így a 4.2.2. állítás miatt létezik egy $U \subseteq V$ olyan, hogy $\Sigma' = \delta_{G'}(U)$, amiből következik, hogy $\Sigma\triangle\delta_G(U) \subseteq F$. De $\Sigma\triangle\delta_G(U)$ egy ekvivalens előjelezés és így egy páratlan kör fedés, tehát az F minimalitása miatt $F = \Sigma\triangle\delta_G(U)$.

2. Mivel F minimális, ezért minden $e \in F$-hez létezik egy olyan C_e páratlan köre G-nek, amire $C_e \cap F = \{e\}$. Legyen C egy tetszőleges köre a gráfnak, és legyen $C \cap F = \{e_1, \ldots, e_k\}$ $(k \geqslant 0)$. Tekintsük a $B = C \triangle C_{e_1} \triangle \ldots \triangle C_{e_k}$ élhalmazt, ez körök szimmetrikus differenciája és így előáll diszjunkt körök uniójaként. Nyilvánvaló, hogy $B \cap F = \emptyset$, tehát a B-t előállító körök között nincsen páratlan, azaz B egy páros élhalmaz. Következésképpen a $C, C_{e_1}, \ldots, C_{e_k}$ körök között páros sok páratlan van. Azaz ha C egy páratlan kör, akkor F páratlan sok élben metszi, ha viszont C páros, akkor páros sokban. □

Az előző állításban beláttuk, hogy $\mathcal{O}_G$ éleinek és minimális transzverzálisainak metszete mindig páratlan, az ilyen tulajdonságú cluttereket *binárisnak* nevezzük és részletesebben az 5. fejezetben foglalkozunk velük. A második bizonyításban ráadásul adtunk egy egyszerű bizonyítást a bináris clutterek egyik ekvivalens jellemzésére (lásd az 5.1.3. tételt).

4.2.7. Definíció. Ki szeretnénk terjeszteni a minor fogalmát az előjelezett gráfokra. Legyen $G = (V, E, \Sigma)$ egy előjelezett gráf.

Átelőjelezés alatt értjük a Σ lecserélését egy ekvivalens előjelezésre.

Egy $e \in E$ él *törlésével* keletkező előjelezett gráfot a következőképpen definiáljuk: $G \backslash e = (V, E - \{e\}, \Sigma - \{e\})$. Egy $v \in V$ csúcs törlése az összes rá illeszkedő él törlését és v-nek V-ből való eltávolítását jelenti.

Egy $e \in E - \Sigma$ él (nem hurokél) *összehúzása*: $G/e = (\tilde{V}, \tilde{E}, \Sigma)$, ahol $(\tilde{V}, \tilde{E}) = (V, E)/e$ az e él összehúzásával kapható irányítatlan gráf. Ha egy olyan élt szeretnénk összehúzni, ami eleme Σ-nak, akkor először egy átelőjelezés segítségével (mondjuk lecserélve Σ-t $\Sigma \triangle \delta(v)$-re, ahol v az él egyik vége) elérjük, hogy ne legyen eleme Σ-nak és utána összehúzhatjuk.

Egy G' előjelezett gráfot a G *minorjának* nevezzük, ha megkapható belőle a fenti műveletek segítségével. G' részgráfja a G-nek, ha élek és csúcsok törlésével kapható meg belőle.

4.2.8. Megjegyzés. Könnyű meggondolni, hogy a minorképzés „lényegében" csak attól függ, hogy mely éleket húzzuk össze és melyeket töröljük. Azaz, hogy ha E_1-beli éleket összehúzzuk, E_2-belieket pedig töröljük valamilyen sorrendben (akár keverve is) és közben átelőjelezéseket végzünk tetszőlegesen, akkor az eredmény ekvivalens előjelezés erejéig egyértelmű. Így ha az ekvivalens előjelezéssel rendelkező előjelezett gráfokat nem különböztetjük meg, akkor írhatunk $G/E_1 \backslash E_2$ -t ennek a minornak a jelölésére.

A következő állítás az mondja, hogy egy előjelezett gráf páratlankör-clutterének minorja, mindig egy másik előjelezett gráf páratlankör-cluttere, sőt ez a másik gráf az eredetinek minorja. Ez az, ami miatt a fejezet elején említett jellemzéseket könnyebb előjelezett gráfokra bizonyítani, ugyanis előjelezetlen gráfokra ez az állítás nem igaz.

4.2.9. Állítás. *Legyen* $G = (V, E, \Sigma)$ *egy előjelezett gráf és* $E_1, E_2 \subseteq \Sigma$ *két diszjunkt élhalmaz. Ekkor* $\mathcal{O}_G / E_1 \backslash E_2 = \mathcal{O}_{G/E_1 \backslash E_2}$.

Bizonyítás. Mint már megjegyeztük egy átelőjelezés nem változtat a páratlankör-clutteren. Legyen $e \in E$ egy él. Nyilvánvaló, hogy $G \backslash e$-ben a páratlan körök pontosan azok a páratlan körei G-nek, amik nem tartalmazzák e-t. Tehát $\mathcal{O}_G \backslash e = \mathcal{O}_{G \backslash e}$.

Most tekintsük G/e-t (föltesszük, hogy $e \notin \Sigma$, különben előtte átelőjelezünk). Ha ebben C egy páratlan kör, akkor vagy ez vagy $C \cup \{e\}$ páratlan köre G-nek. Fordítva, ha C egy páratlan köre G-nek, akkor $C - \{e\}$ egy páratlan élhamaz G/e-ben, ami vagy egy kör, vagy két diszjunkt kör uniója, de mindenképpen tartalmaz páratlan kört. A G/e páratlan körei tehát a $\{C - \{e\} : C$ páratlan köre G-nek$\}$ tartalmazásra nézve minimális elemei, azaz $\mathcal{O}_G / e = \mathcal{O}_{G/e}$. □

Az előző állításból következik, hogy a gyengén illetve erősen páros előjelezett gráfok osztálya zárt a minor képzésre, hiszen tudjuk, hogy az ideális illetve MFMC tulajdonsággal rendelkező clutterek osztályai zártak a minor képzésre. Tehát mindkét gráfosztály karakterizálható tiltott minorokkal.

Egy teljes n-pontú gráfot, aminek minden éle páratlan, odd-K_n-nek nevezünk. Azaz az odd-$K_n = (K_n, E(K_n))$-ként definiált előjelezett gráf.

4.2.1. Gyengén páros gráfok jellemzése

4.2.10. Tétel (Guenin [7]). *Egy előjelezett gráf pontosan akkor gyengén páros, ha nincsen odd-*K_5 *minorja.*

A tétel egyik felét már beláttuk, hiszen megmutattunk, hogy odd-K_5 nem gyengén páros, tehát gyengén páros gráf nem tartalmazhatja őt minorként. Az érdekes irányt egy későbbi részben bizonyítjuk, de megjegyezzük hozzá, hogy Geelen és Guenin [6] megmutatták, hogy abból, hogy egy előjelezett gráf nem tartalmaz odd-K_5 minort egy erősebb tulajdonság is következik.

4.2.11. Definíció. Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Egy $w \in \mathbb{Z}_+^E$ élsúlyozást *Euleri*-nek nevezünk, ha $w(\delta(v))$ páros minden $v \in V$-re.

4.2.12. Definíció. Egy G előjelezett gráfot *Euler-párosnak* nevezünk, ha a páratlan-kör clutterére a (2.1) és a (2.2) feladatoknak van egész optimális megoldása minden Euler-élsúlyozásra.

Nyilvánvaló, hogy minden Euler-páros gráf egyben gyengén páros is. Ugyanis legyen G egy Euler-páros előjelezett gráf. Ha w egy tetszőleges egész élsúlyozás, akkor $2w$ Euleri és így a páratlan-kör clutterre fölírt (2.1) feladatnak van egy x egész optimális megoldása a $2w$ súlyozásra nézve. De ez az x nyilván optimális a w súlyozásra is.

Tehát, ha egy előjelezett gráf Euler-páros, akkor nem tartalmazhat odd-K_5 minort. A következő tétel azt mondja ki, hogy ennek a fordítottja is igaz, vagyis az Euler- és a gyenge párosság ekvivalens tulajdonságok.

4.2.13. Tétel (Geelen és Guenin [6]). *Egy G előjelezett gráf Euler-páros $\Longleftrightarrow$ nem létezik odd-K_5 minorja.*

Amit a tétel előtt elmondtunk, azt a következőképpen lehet megfogalmazni:

4.2.14. Következmény. *Ha egy G előjelezett gráf gyengén páros, akkor Euler-páros is, speciálisan $\mathcal{O}_G$ rendelkezik az $\frac{1}{2}$-MFMC tulajdonsággal.*

4.2.2. Erősen páros gráfok jellemzése

Seymour általános, a bináris clutterekre vonatkozó tételéből (5.3.2. tétel) következik a következő jellemzés:

4.2.15. Tétel. *Egy előjelezett gráf erősen páros $\Longleftrightarrow$ nincsen odd-K_4 minorja.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy nem erősen páros G előjelezett gráfot. Legyen G' ennek egy olyan minorja, ami nem erősen páros, de bármelyik élét összehúzva vagy törölve már erősen páros gráfot kapunk (az üres gráfot erősen párosnak tekintjük, ezért ilyen nyilván van). Ekkor $\mathcal{O}_{G'}$ minimálisan nem MFMC a 4.2.9. állítás miatt. Tudjuk, hogy $\mathcal{O}_{G'}$ bináris clutter, így 5.3.2. tétel miatt $\mathcal{O}_{G'}$ izomorf $\mathcal{Q}_6$-tal. Vegyük észre, hogy $\mathcal{Q}_6$ csak egy másik elnevezése az $\mathcal{O}_{K_4}$-nek. És ezzel készen vagyunk, hiszen egy olyan előjelezett gráf melynek páratlan-kör cluttere izomorf $\mathcal{O}_{K_4}$-el csak az odd-K_4 lehet. □

Páratlan K_4-felosztásnak nevezünk egy olyan (előjelezett vagy előjelezetlen) gráfot, ami megkapható K_4-ből élek felosztásával és a K_4 minden háromszöge páratlan körbe megy át.

Könnyű meggondolni, hogy egy előjelezett gráfnak pontosan akkor van odd-K_4 minorja, ha részgráfként tartalmaz egy páratlan K_4-et.

4.2.3. Előjelezetlen gráfok jellemzése

Ahhoz, hogy a fenti eredményeket sima gráfokra értelmezhessük, vegyük észre a következőket.

A (V, E, E) előjelezett gráfnak van odd-K_4 minorja $\Longleftrightarrow$ a (V, E) irányítatlan gráfnak van páratlan K_4-felosztás részgráfja $\Longleftrightarrow$ a (V, E) irányítatlan gráf tartalmaz K_4-et páratlan minorként.

A bizonyítások nagyon egyszerűek, ha $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 1$ irányokban bizonyítjuk, ezért elhagyjuk ezeket. Így kapjuk:

4.2.16. Tétel. *Egy G irányítatlan gráfra ekvivalensek a következő állítások*

(i) *G erősen páros,*

(ii) *G-nek nincsen páratlan K_4-felosztás részgráfja,*

(iii) *G nem tartalmazza a K_4-et páratlan minorként.*

A gyengén páros esetben hasonlóan meg lehet gondolni, hogy egy (V, E, E) előjelezett gráf pontosan akkor tartalmaz odd-K_5 minort, ha (V, E) irányítatlan gráf tartalmaz K_5-öt páratlan minorként. És így kapjuk a következő jellemzést:

4.2.17. Tétel. *Egy irányítatlan gráf pontosan akkor gyengén páros, ha nem tartalmaz K_5-öt páratlan minorként.*

4.3. A Guenin-tétel bizonyítása

Ebben a részben a 4.2.10. tétel nemtriviális irányát bizonyítjuk. A bizonyítás alapjául Schrijver [16] bizonyítása szolgál, ami leegyszerűsíti a Guenin bizonyításának technikai, esetvizsgálós részeit.

A bizonyításhoz szükségünk lesz a következő, bináris mni clutterekről szóló állításokra. Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy $\mathcal{J}_t$ nem bináris clutter. Legyen most $\mathcal{C}$ egy mni bináris clutter és tekintsük a $\mathcal{C}$ és $b(\mathcal{C})$ minimális elemszámú éleit. Legyen $n = |V(\mathcal{C})|$, r a legkisebb $\mathcal{C}$-beli él mérete, s pedig a legkisebb $b(\mathcal{C})$-beliének. Legyen $\bar{A}$ (illetve $\bar{B}$) az a mátrix, melynek sorai a minimális elemszámú $\mathcal{C}$-beli (illetve $b(\mathcal{C})$-beli) élek karakterisztikus vektorai. Akkor a 3.1.6. tételből következik, hogy ezek pontosan az $M(\mathcal{C})$ és $M(b(\mathcal{C}))$ mátrixok magjai, azaz négyzetesek, minden sorukban és oszlopukban r (illetve s) darab 1-es van és soraik átrendezhetőek úgy, hogy $\bar{A}\bar{B}^T = \bar{B}^T\bar{A} = J + dI$, ahol d egy pozitív egész szám és $rs = n + d$.

Azaz $\mathcal{C}$ és $b(\mathcal{C})$ minimális elemszámú élei megindexelhetők úgy $C_1, \ldots, C_n$ illetve $B_1, \ldots, B_n$-nek, hogy minden $i, j = 1, \ldots, n$-re:[3]

$$|C_i \cap B_j| = 1 \quad \text{ha } i \neq j \tag{4.2}$$

$$|C_i \cap B_j| = d + 1 \text{ ha } i = j \tag{4.3}$$

Mivel $\mathcal{C}$ bináris és $d + 1 = |C_1 \cap B_1|$, ezért $d + 1$ páratlan és $\geqslant 3$.

Az a tény, hogy $\bar{B}^T\bar{A} = J + dI$ ekvivalens azzal, hogy

$$\text{minden } v \in V(\mathcal{C})\text{-re pontosan } d + 1 \text{ olyan } i \text{ van, amire } e \in C_i \cap B_i, \tag{4.4}$$

$$\text{különböző } e, f \in V(\mathcal{C})\text{-re pontosan egy } i \text{ van, amire } e \in C_i,\ f \in B_i. \tag{4.5}$$

Egy fontos megfigyelés a következő. Tetszőleges különböző $i, j = 1, \ldots, n$-re:

$$\text{ha } C \in E(\mathcal{C})\text{-re } C \subseteq C_i \cup C_j, \text{ akkor } C = C_i \text{ vagy } C = C_j \tag{4.6}$$

Ugyanis legyen C egy ilyen él. Akkor (lásd az 5.1.3. tételt) $C_i \triangle C_j \triangle C$ tartalmaz egy $\mathcal{C}$-beli élt, mondjuk C'-t. Ebből következik, hogy $C \cup C' \subseteq C_i \cup C_j$ és $C \cap C' \subseteq C_i \cap C_j$ (hiszen, ha $e \in C \cap C'$, akkor $e \notin C_i \triangle C_j$). Tehát $|C| + |C'| \leqslant |C_i| + |C_j|$, és így C, C' szintén minimális elemszámúak, azaz elemei a $\mathcal{C}$ magjának. Legyen B a C társa. Mivel $|C \cap B| \geqslant 3$, ezért $|C_i \cap B| \geqslant 2$ vagy $|C_j \cap B| \geqslant 2$. Következésképp vagy C_i, vagy C_j a B társa, azaz $C = C_i$ vagy $C = C_j$.

A Guenin-tétel bizonyításában kulcsszerepet játszik a következő lemma:

[3] A $\{C_1, \ldots, C_n\}$ éleket a $\mathcal{C}$ *magjának* nevezzük. A C_i és B_i-t egymás *társának* hívjuk.

4.3.1. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf, e egy éle G-nek x, y végpontokkal, és legyenek $S_0, S_1, S_2, S_3 \subseteq V$ diszjunkt ponthalmazok. Legyenek továbbá P_1, P_2, P_3 közös belsőpont nélküli xy-utak $G \backslash e$-ben. Ezen kívül teljesüljenek a következőek:*

(i) *$x, y \in S_0$, és S_i stabil ponthalmaz $G \backslash e$-ben ($i = 0, 1, 2, 3$-ra),*

(ii) *$V(P_i) \subseteq S_0 \cup S_1$, $i = 1, 2, 3$-ra, és*

(iii) *különböző $i, j \in \{1, 2, 3\}$-ra $G[S_i \cup S_j]$-ben létezik út $V(P_i)$-ből $V(P_j)$-be.*

Ekkor G tartalmazza a K_5-öt páratlan minorként, vagy másképpen (G, E)-nek van odd-K_5 minorja.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy nem igaz az állítás és legyen G egy ellenpélda, amire $|V| + |E|$ minimális. Különböző $i, j \in \{1, 2, 3\}$-ra legyen P_{ij} a $V(P_i)$-t $V(P_j)$-vel összekötő út $G[S_i \cup S_j]$-ben (föltehetjük, hogy $P_{ij} = P_{ji}$). A G minimalitása miatt $E = \{e\} \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_{12} \cup P_{23} \cup P_{31}$ és $V = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

G-ben nincsen 2 vagy kisebb fokú pont, ugyanis, ha v egy izolált pont, akkor elhagyásával triviálisan egy kisebb ellenpéldát kapunk. Különben v csak a 6 út valamelyikének egy belső pontja lehet, azaz a két szomszédja egy S_i halmazban van. De akkor a v-re illeszkedő két élt összehúzva: $G' = G/\delta(v)$ teljesíti a lemma feltételeit és páratlan minorja G-nek. Azaz G' egy kisebb ellenpélda lenne.

Ebből látjuk, hogy $S_0 = \{x, y\}$ (egy ezeken kívüli pont csak egy P_i útnak lehetne a belső pontja és így másodfokú lenne), amiből következik, hogy P_i-nek pontosan egy belső pontja lehet $i = 1, 2, 3$-ra; nevezzük ezt v_i-nek. Azaz az x szomszédjai v_1, v_2, v_3 és y, és y-nak a szomszédjai v_1, v_2, v_3 és x. Továbbá abból, hogy minden pont legalább harmadfokú az is következik, hogy

$$V(P_{ij}) = S_i \cup S_j. \tag{4.7}$$

Hiszen, ha $v \in (S_i \cup S_j) - V(P_{ij})$, akkor v legfeljebb másodfokú lehet, hiszen P_{ij}-n kívül csak egy olyan út van, amin egyáltalán szerepelhet. Ebből pedig következik, hogy $|S_1| = |S_2| = |S_3|$.

Ha $|S_1| = 1$, akkor G izomorf K_5-tel, tehát föltehetjük, hogy mindegyik $|S_i| > 1$. Különböző $i, j \in \{1, 2, 3\}$-ra legyen e_{ij} a P_{ij} útnak a v_i-re illeszkedő éle. Ekkor $\delta(\{x, y, v_1, v_2, v_3\}) = \{e_{12},\ e_{23},\ e_{31},\ e_{13},\ e_{32},\ e_{21}\}$, így $G' = G \backslash \{e_{13}, e_{32}, e_{21}\} / \{e_{12}, e_{23}, e_{31}\}$ egy páratlan minorja G-nek. Legyen $P'_{ij} = P_{ij} - \{e_{ij}, e_{ji}\}$ és v'_1, v'_2, v'_3 rendre az e_{31}, e_{12}, e_{23} élekből keletkezett pontok. Az S'_i-t definiáljuk úgy, mint az S_i-ből megmaradt „eredeti" pontok és a v'_i (formálisan $S'_i = S - V(\{e_{kl} : k, l = 1, 2, 3\}) \cup \{v'_i\}$). Ezekkel (és változatlan S_0-al) G' kielégíti a lemma feltételeit, ellentmondásban a G minimalitásával. □

Ezek után már be tudjuk bizonyítani a 4.2.10. tételt.

Bizonyítás (Guenin-tétel). Legyen $G = (V, E, \Sigma)$ egy olyan nem gyengén-páros gráf, aminek minden valódi minorja már gyengén páros. Megmutatjuk, hogy G-nek van odd-K_5 minorja. Valójában ebből már következik, hogy G tulajdonképpen egy K_5 az előjelezés pedig ekvivalens az odd-K_5-ével.

Legyen $\mathcal{C}$ a G páratlan-kör cluttere. Rögzítsünk egy $e \in E$ élt, a két végpontja legyen x és y. Legyenek $C_1, \ldots, C_n$ és $B_1, \ldots, B_n$ a $\mathcal{C}$ és a $b(\mathcal{C})$ magjának az élei megindexelve a (4.2)–(4.5)-nek megfelelően. Sőt tegyük fel, hogy az a $d + 1$ minimális méretű kör és páratlan-kör fedés, ami tartalmazza az e élt, a $C_1, \ldots, C_{d+1}$ és a $B_1, \ldots, B_{d+1}$. Ezekből csak az első hármat használjuk a 4.3.1. lemma alkalmazásához.

Először is (4.4) és (4.5) miatt

$$C_1 - \{e\}, C_2 - \{e\}, C_3 - \{e\}, B_1 - \{e\}, B_2 - \{e\}, B_3 - \{e\} \text{ diszjunktak, kivéve az azonos indexű } C_i \text{ és } B_i\text{-ket.} \tag{4.8}$$

Ugyanis legyen $i, j \in \{1, 2, 3\}$ különböző. Akkor $C_i \cap B_j = \{e\}$, mert $|C_i \cap B_j| = 1$. Továbbá $C_i \cap C_j = \{e\}$, különben legyen $f \in C_i \cap C_j$, $f \neq e$. Akkor $f \in C_i \cap C_j$ és $e \in B_i \cap B_j$ ellentmondva (4.5)-nek.

1. Észrevétel. *Különböző $i, j \in \{1, 2, 3\}$ a C_i és C_j köröknek nincsen közös pontja x és y-on kívül.*

Bizonyítás. Különben $(C_i \cup C_j) - \{e\}$ tartalmaz egy P utat x és y között, ami különbözik $C_i - \{e\}$ és $C_j - \{e\}$-től. $(C_i \cup C_j) - \{e\}$ nem tartalmazhat páratlan kört (4.6) miatt, tehát P és C_i azonos paritásúak. Ez viszont azt jelenti, hogy $P \cup \{e\}$ egy páratlan kör $C_i \cup C_j$-ben megintcsak ellentmondva a (4.6) megjegyzésnek. □

B_i-k minimális páratlan-kör fedések és így a Σ-val ekvivalens előjelezések. Tehát különböző $i, j \in \{1, 2, 3\}$-re $B_i \triangle B_j$ egy vágás G-ben, sőt $e \notin B_i \triangle B_j$. Azaz különböző $i, j \in \{1, 2, 3\}$-ra létezik olyan $U_{ij} \subseteq V$ ponthalmaz, amire $\delta(U_{ij}) = B_i \triangle B_j$ és $x, y \notin U_{ij}$. Vegyük észre, hogy

$$\delta(U_{12} \triangle U_{23} \triangle U_{31}) = \delta(U_{12}) \triangle \delta(U_{23}) \triangle \delta(U_{31}) = \emptyset. \tag{4.9}$$

És így, mivel G összefüggő és $U_{12} \triangle U_{23} \triangle U_{31}$ nem tartalmazhatja az összes pontot (például x és y-t semmiképpen), ezért $U_{12} \triangle U_{23} \triangle U_{31} = \emptyset$. Legyen $S_1 = U_{12} \cap U_{13}$, $S_2 = U_{12} \cap U_{23}$, $S_3 = U_{13} \cap U_{23}$ (ezekkel $U_{ij} = S_i \cup S_j$) és legyen $S_0 = V - (S_1 \cup S_2 \cup S_3)$.

2. Észrevétel. *Különböző $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$-ra a $B_i - \{e\} = \delta(S_0, S_i) \cup \delta(S_j, S_k)$, ahol $\delta(X, Y)$-al jelölöm most az olyan élek halmazát, amelyeknek az egyik végpontjuk X-ben a másik Y-ban van.*

Bizonyítás. Szimmetria miatt elég $i = 1$-re bizonyítani. Mivel $B_1 - \{e\}, B_2 - \{e\}, B_3 - \{e\}$ páronként diszjunktak, ezért $B_1 - \{e\} = (B_1 \triangle B_2) \cap (B_1 \triangle B_3)$. De $B_1 \triangle B_2 = \delta(U_{12})$ és $B_1 \triangle B_3 = \delta(U_{13})$, így a $B_1 - \{e\}$ élei pontosan azok az élek, amik mind $\delta(U_{12})$-ben, mind $\delta(U_{13})$-ban benne vannak. Mivel $U_{12} = S_1 \cup S_2$, ezért $\delta(U_{12}) = \delta(S_1, S_0) \dot\cup \delta(S_2, S_0) \dot\cup \delta(S_1, S_3) \dot\cup \delta(S_2, S_3)$.[4] Hasonlóan $\delta(U_{13}) = \delta(S_1, S_0) \dot\cup \delta(S_3, S_0) \dot\cup \delta(S_1, S_2) \dot\cup \delta(S_3, S_2)$. Tehát $B_1 - \{e\} = \delta(U_{12}) \cap \delta(U_{13}) = \delta(S_1, S_0) \dot\cup \delta(S_2, S_3)$. □

Minden $i \in \{1, 2, 3\}$-ra legyen $P_i = C_i - \{e\}$; ez egy xy-út. Tudjuk, hogy különböző $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$-ra $C_i \cap (B_j \cup B_k) = \{e\}$ (4.8). Az előző állításból így következik, hogy $V(P_i) \subseteq S_0 \cup S_i$. Továbbá, mivel $|C_i \cap B_i| > 1$ következik, hogy $P_i \cap V(S_i) \neq \emptyset$.

3. Észrevétel. *Különböző $i, j \in \{1, 2, 3\}$-ra létezik egy P_{ij} út $G[S_i \cup S_j]$-ben $V(P_i)$-ből $V(P_j)$-be.*

Bizonyítás. $S_i \cup S_j = U_{ij}$, tehát elég azt bebizonyítani, hogy $G[U_{ij}]$ összefüggő. Ha nem, akkor létezik egy olyan $X \subseteq U_{ij}$, hogy $\delta(X)$ nem üres valódi részhalmaza $\delta(U_{ij})$-nek (hiszen az egész G összefüggő). Akkor $B_i \triangle \delta(X)$ benne van $B_i \cup B_j$-ben, de különbözik B_i-tól és B_j-től. Mivel $B_i \triangle \delta(X)$ egy ekvivalens előjelezés, ezért tartalmaz $b(\mathcal{C})$-beli elemet, ellentmondásban a (4.6) állítással (a $b(\mathcal{C})$ clutterre alkalmazva). □

[4]itt $\dot\cup$ -val a diszjunkt uniót jelöltem

Legyen $B = B_1 \triangle B_2 \triangle B_3$, ez egy ekvivalens előjelezése G-nek. Mint látszik a 2. észrevételből $E - \{e\}$ minden éle legfeljebb egy B_i-ben van benne. Azaz (V, E, B) páratlan élei az e és az összes olyan él amelynek a végpontjai (S_0, S_1, S_2, S_3) különböző részeibe esnek. Legyen $G' = (V', E', \Sigma')$ az az előjelezett gráf, amit (V, E, B)-ből kapunk az $E - B$-beli élek összehúzásával; azaz $\Sigma' = E'$. Legyen $i = 1, 2, 3$-ra $P'_i = P_i \cap B$; különböző $i, j \in \{1, 2, 3\}$-ra legyen $P'_{ij} = P_{ij} \cap B$; és $l = 0, 1, 2, 3$-ra legyen S'_l az S_l-ből előálló ponthalmaz. Ezekre könnyen láthatóan teljesülnek a 4.3.1. lemma feltételei, tehát G'-nek és így G-nek is van odd-K_5 minorja.$\square$

4.4. Alkalmazások multifolyamokra

Most az előjelezett gráfokra vonatkozó eredményeket alkalmazzuk a többtermékes folyam problémára.

A probléma precíz megfogalmazása a következő. Adott egy $G_0 = (V, E_0)$ irányítatlan gráf és egy $M = \{\{s_1, t_1\}, \dots, \{s_k, t_k\}\}$ pontpárhalmaz, ahol $s_i, t_i \in V$, $i = 1, \dots, k$-ra. Az $\{s_i, t_i\}$ párokat *igényéleknek* nevezzük. Minden igényélhez adott egy nemnegatív egész d_i igény. Továbbá adott $c\colon E_0 \to \mathbb{Z}_+$ élkapacitás függvény. Jelölje $\mathcal{P}_i$ az $\{s_i, t_i\}$-utak halmazát G_0-ban és legyen $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i$.

Ezek után (G_0, M, c, d)-*multifolyamnak* vagy *többtermékes folyamnak* nevezünk egy olyan $y \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{P}}$-t, amire

(i) $y(\mathcal{P}_i) = d_i$, minden $1 \leqslant i \leqslant k$ és

(ii) $\sum_{P\colon e \in P \in \mathcal{P}} y_P \leqslant c_e$ minden $e \in E_0$-ra.

Két különböző problémát kapunk, ha valósértékű és ha egészértékű multifolyamot keresünk.

Egy szükséges feltétel a multifolyam létezéséhez (akár egészértékűt keresünk, akár nem) az úgynevezett *vágásfeltétel*: minden vágáson az átmenő élek összkapacitásának legalább akkorának kell lennie, mint a vágáson átmenő igényélek összigénye. Azaz, a (G_0, M, c, d)-multifolyam létezésének szükséges feltétele az, hogy minden $U \subseteq V$-ra teljesüljön:

$$d(I_U) \leqslant c(\delta(U)),$$

ahol I_U azon i indexek halmaza, melyekre s_i és t_i közül pontosan az egyik eleme U-nak.

A vágásfeltétel általában nem elégséges a multifolyam létezéséhez, speciális gráfokban viszont igen. Ilyen gráfosztályokról tudunk bizonyítani állításokat az előjelezett gráfok segítségével. Ehhez először fogalmazzuk át a problémát.

Legyen adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf (az eredeti G_0 gráfhoz hozzávesszük az igényéleket) és legyen $\Sigma \subseteq E$ (ezek az igényélek). Továbbá legyen adott egy $w\colon E \to \mathbb{Z}_+$ súlyfüggvény (ez az eredeti éleken a kapacitás, az igényéleken viszont az igény). Jelöljük $\mathcal{C}_1$-el azon G-beli körök halmazát, amik pontosan egy Σ-beli élt tartalmaznak (ezek felelnek meg a $\mathcal{P}$-beli utaknak). Ezekkel egy $y\colon \mathbb{R}_+^{\mathcal{C}_1}$-et (G, Σ, w)-multifolyamnak nevezünk, ha

(i) $\sum_{C\colon f \in C \in \mathcal{C}_1} y_C = w$ minden $f \in \Sigma$-ra,

(ii) $\sum_{C\colon e \in C \in \mathcal{C}_1} y_C \leqslant w$ minden $e \in E - \Sigma$-ra.

A vágásfeltétel a következőképpen fogalmazható meg ezekkel a jelölésekkel. Vegyük észre, hogy $d(I_U)$-nak itt a $w(\delta(U) \cap \Sigma)$ felel meg. Azaz minden $U \subseteq V$-re teljesülnie kell:

$$\begin{aligned} w(\delta(U) \cap \Sigma) &\leqslant w(\delta(U) - \Sigma), \quad \text{tehát} \\ w(\delta(U) \cap \Sigma) + w(\Sigma - \delta(U)) &\leqslant w(\delta(U) - \Sigma) + w(\Sigma - \delta(U)) \\ w(\Sigma) &\leqslant w(\Sigma \triangle \delta(U)) \end{aligned}$$

Most ha a (G, Σ)-t egy előjelezett gráfnak tekintjük, akkor a vágásfeltétel azt jelenti, hogy a Σ az összes vele ekvivalens előjelezésből a minimális w súlyú. Ha most a (G, Σ) gyengén páros, azaz a páratlan-kör cluttere $\mathcal{C}$ ideális, akkor χ_Σ[5] egész optimális megoldása a (2.1) feladatnak. Legyen most y egy optimális megoldása a (2.2) feladatnak, azaz y maximalizálja $\sum_{C \in \mathcal{C}} y_C$ -t a

$$\sum_{C:\, e \in C \in \mathcal{C}} y_C \leqslant w_e \quad \forall e \in E$$
$$y_C \geqslant 0 \quad \forall C \in \mathcal{C}$$

feltételek mellett.

Lineáris programozási dualitásból a két optimum érték megegyezik, azaz:

$$w(\Sigma) = \sum_{C \in \mathcal{C}} y_C \leqslant \sum_{f \in \Sigma} \left(\sum_{C:\, f \in C \in \mathcal{C}} y_C \right) \leqslant \sum_{f \in \Sigma} w_f = w(\Sigma)$$

Amiből következik, hogy minden olyan C, amire $y_C > 0$ pontosan egy élben metszi Σ-t, és így y egy (G, Σ, w)-multifolyamot ír le (vagyis az y $\mathcal{C}_1$-re vett megszorítása).

Tehát, ha tudjuk, hogy a többtermékes folyam feladatunkat leíró (G, Σ) előjelezett gráf gyengén páros, akkor minden w súlyozásra a vágásfeltétel elégséges a (tört) többtermékes folyam létezéséhez. Ha a (G, Σ) még ráadásul erősen páros is, azaz $\mathcal{C}$ clutter rendelkezik az MFMC tulajdonsággal, akkor a (2.2) feladatban is tudjuk garantálni az egész optimális megoldás létezését, azaz ilyenkor minden nemnegatív egész élkapacitásokra és igényekre az egész multifolyam létezéséhez létezéséhez is elégséges a vágásfeltétel. És hasonlóan, ha a (G, Σ) Euler-páros, akkor a vágásfeltétel egész multifolyamot garantál minden w Euler-élsúlyozásra, és ebből következően tetszőleges nemnegatív egész élsúlyozásra van félegész multifolyam (olyan y multifolyam, hogy $2y$ egész), ha teljesül a vágásfeltétel.

Ezeket a megállapításokat a következő két tételben foglaljuk össze:

4.4.1. Tétel. *Ha (G, Σ) előjelezett gráfnak nincsen odd-K_5 minorja, akkor a vágásfeltétel tetszőleges élkapacitásokra és igényekre szükséges és elégséges a multifolyam létezéséhez. Sőt, ha ezek egészek, akkor a multifolyam választható félegésznek is. Továbbá, ha a kapacitások és igények által adott élsúlyozás Euleri, akkor a multifolyam választható egésznek is.*

4.4.2. Tétel. *Ha (G, Σ) előjelezett gráfnak nincsen odd-K_4 minorja, akkor a vágásfeltétel tetszőleges élkapacitásokra és igényekre szükséges és elégséges a multifolyam létezéséhez. Sőt, ha ezek egészek, akkor a multifolyam választható egésznek.*

Vezessünk most le ezeknek az általános tételeknek a segítségével néhány ismert többtermékes folyamra vonatkozó tételt. A következőekben felteszem, hogy az igények és az élkapacitások mindig egészek.

Vegyük észre, hogy ha egy előjelezett gráf rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy létezik k pontja, amik lefogják a páratlan köreit, akkor minden minorja is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Ha odd-K_4-ből akárhogy elhagyunk egy pontot, akkor marad egy páratlan háromszög. Következésképp, ha G egy olyan előjelezett gráf, aminek minden páratlan köre egy ponton megy át, akkor nem tartalmazhat odd-K_4 minort, tehát erősen páros. Speciálisan $|\Sigma| = 1$ esetén így megkapjuk a Ford és Fulkerson híres maximális folyam – minimális vágás tételét.

[5] a Σ karakterisztikus vektora

Vagy egy kicsit általánosabban: egy olyan többtermékes folyam problémánál, amelynél az igényélek egy ponton mennek át, a vágásfeltétel szükséges és elégséges egész multifolyam létezéséhez.

Ha odd-K_5-ből akárhogy elhagyunk két pontot, marad egy páratlan háromszög. Ebből arra tudunk tehát következtetni, hogy ha G egy olyan előjelezett gráf, melynek van két olyan pontja, hogy minden páratlan kör vagy az egyiken, vagy a másikon átmegy, akkor G nem tartalmazhat odd-K_5 minort, tehát Euler-páros. Speciálisan ha $|\Sigma| = 2$, akkor a gráf nyilvánvalóan ilyen (ha $\Sigma = \{e, f\}$ és u az e egyik végpontja és v az f egyik végpontja, akkor minden páratlan kör átmegy vagy u-n, vagy v-n), amiből megkapjuk Hu [8] tételét: két igényél esetén a vágásfeltétel szükséges és elégséges félegész multifolyam létezéséhez. Sőt ha az élsúlyozás Euleri, akkor egész multifolyam is garantálható. Ezt is lehet egy kicsit általánosítani arra az esetre, ha minden Σ-beli él két kijelölt pont valamelyikére illeszkedik.

4.5. Alkalmazás a maximális vágás problémára

Legyen G egy tetszőleges irányítatlan gráf. Mint már megjegyeztük a fejezet bevezetőjében, a páratlan-kör clutter transzverzálisai pontosan azok az élhalmazok, melyek komplementerei páros gráfot feszítenek. Azaz egy tartalmazásra nézve maximális vágás komplementere, egy tartalmazásra nézve minimális páratlan-kör fedés, azaz éle $b(\mathcal{O}_G)$-nek.

Ha $\mathcal{O}_G$ ideális, azaz G gyengén páros, akkor a páratlan-kör fedés minimális elemszámát, sőt tetszőleges w nemnegatív élsúlyozásra a páratlan-kör fedés minimális súlyát a következő lineáris programozási feladat ((2.2) feladat átírása) megoldásával tudjuk meghatározni.

$$\begin{aligned} &\min w^T x \\ x(C) &\geqslant 1 \quad \text{minden } C \text{ páratlan körre} \\ x_e &\geqslant 1 \quad \text{minden } e \in E(G)\text{-re} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Így a maximális súlyú vágást a következő lineáris programozási feladat egész optimális megoldása adja meg:

$$\begin{aligned} &\max w^T x \\ x(C) &\leqslant |C| - 1 \quad \text{minden } C \text{ páratlan körre} \\ 0 \leqslant x_e &\leqslant 1 \quad \text{minden } e \in E(G)\text{-re} \end{aligned} \tag{4.11}$$

A (4.10) feladatra a szeparációs probléma polinom időben megoldható, tehát ilyenkor a maximális súlyú vágás megkeresésére polinomiális idejű algoritmus adható (az ellipszoid módszer segítségével). Azaz kapjuk a következő tételt:

4.5.1. Tétel. *Az olyan irányítatlan gráfokra, melyek nem tartalmaznak K_5-öt páratlan minorként, létezik algoritmus, ami megadja a maximális méretű, sőt tetszőleges nemnegatív élsúlyozásra a maximális súlyú vágást, polinomiális időben.*

5. fejezet

Bináris clutterek

Ebben a fejezetben bemutatunk néhány, a bináris clutterekre vonatkozó eredményt.

5.1. Bináris clutterek jellemzése

5.1.1. Definíció. Egy $\mathcal{C}$ cluttert *binárisnak* nevezünk, ha minden $A \in E(\mathcal{C})$ és $B \in E(b(\mathcal{C}))$-re $|A \cap B|$ páratlan.

A definícióból nyilvánvaló, hogy ha egy clutter bináris, akkor a blokkere is az. Egy bináris clutter minorja is mindig bináris, ami a következő lemmából rögtön leolvasható.

5.1.2. Lemma. *Ha $\mathcal{C}'$ minorja a $\mathcal{C}$ clutternek és $A' \in E(\mathcal{C}')$, $B' \in E(b(\mathcal{C}'))$, akkor léteznek $A \in E(\mathcal{C})$, $B \in E(b(\mathcal{C}))$ úgy, hogy $A \cap B = A' \cap B'$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{C}' = \mathcal{C}/V_1 \backslash V_2$. Mivel $A' \in E(\mathcal{C}')$, ezért $A' = A - V_1$ valamilyen $A \in E(\mathcal{C})$-re, amire $A \cap V_2 = \emptyset$. $b(\mathcal{C}') = b(\mathcal{C}) \backslash V_1 / V2$, tehát hasonlóan $B' = B - V_2$ egy olyan $B \in E(b(\mathcal{C}))$-re, amire $B \cap V_1 = \emptyset$. De ekkor $A \cap B = A' \cap B'$ ahogy megköveteltük. □

Tehát a bináris clutterek jellemezhetőek tiltott minorokkal. Vegyük észre, hogy a $\mathcal{J}_t$ $(t \geqslant 2)$ clutterek nem binárisak (tudjuk, hogy $b(\mathcal{J}_t) = \mathcal{J}_t$ és $\mathcal{J}_t$-ben vannak 2 méretű élek). Egy másik nem bináris clutter a $\mathcal{P}_4$, ami a következőképpen van definiálva: $V(\mathcal{P}_4) = \{1, 2, 3, 4\}$ és $E(\mathcal{P}_4) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$. Könnyen meggondolható, hogy $b(\mathcal{P}_4)$ élhalmaza a $\{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$. Ki fog derülni, hogy pontosan ezek a „tiltott minorok”.

A következő, Seymour-tól származó, bizonyításban néhány technikai részletet leegyszerűsítettünk, de néhol még így is elég körülményes maradt.

5.1.3. Tétel (Seymour [18]). *Egy $\mathcal{C}$ clutterre ekvivalensek a következő állítások:*

(a) *$\mathcal{C}$ bináris.*

(b) *Ha s páratlan és $A_1, \ldots, A_s \in E(\mathcal{C})$, akkor létezik $A \in E(\mathcal{C})$, $A \subseteq A_1 \triangle \ldots \triangle A_s$.*

(c) *Ha $A_1, A_2, A_3 \in E(\mathcal{C})$, akkor létezik $A \in E(\mathcal{C})$, $A \subseteq A_1 \triangle A_2 \triangle A_3$.*

(d) *$|A \cap B| \neq 2$ minden $A \in E(\mathcal{C})$ és $B \in E(b(\mathcal{C}))$-re.*

(e) *$\mathcal{C}$-nek nincsen $\mathcal{P}_4$-el vagy $\mathcal{J}_t$-vel izomorf minorja.*

Bizonyítás. Az (a) $\Longrightarrow$(b) $\Longrightarrow$(c) $\Longrightarrow$(d) $\Longrightarrow$(e) következtetések mind egyszerűek, sőt még a (b) $\Longrightarrow$(a) irány is egyszerű (lényegében ezt bizonyítottuk a 4.2.6. állítás második bizonyításában), az igazi nehézséget az (e) $\Longrightarrow$(a) irány okozza.

(a) $\Longrightarrow$(b). Legyen $B \in E(b(\mathcal{C}))$ tetszőleges. Mivel B az összes A_i-t páratlan sok elemben metszi és s páratlan, ezért B az $A_1\triangle \dots \triangle A_s$-et is páratlan méretű halmazban metszi, azaz a metszetük nem üres. Tehát $A_1\triangle \dots \triangle A_s$ a $b(\mathcal{C})$ egy transzverzálisa és így tartalmaz egy $b(b(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$-beli élet.

(b) $\Longrightarrow$(c). Világos.

(c) $\Longrightarrow$(d). Tegyük fel indirekt, hogy létezik $A \in E(\mathcal{C})$, $B \in E(b(\mathcal{C}))$, hogy $A \cap B = \{e_1, e_2\}$ ($e_1 \neq e_2$). Mivel B a $\mathcal{C}$ egy minimális transzverzálisa, ezért minden $e \in B$-re létezik egy $A_e \in E(\mathcal{C})$, amire $A_e \cap B = \{e\}$. De akkor $B \cap (A\triangle A_{e_1}\triangle A_{e_2}) = \emptyset$, azaz $A\triangle A_{e_1}\triangle A_{e_2}$ nem transzverzálisa $b(\mathcal{C})$-nek, ellentmondva annak, hogy tartalmaznia kell egy $\mathcal{C}$-beli élet.

(d) $\Longrightarrow$(e). Tegyünk fel, hogy $\mathcal{C}$-nek van egy $\mathcal{C}'$ minorja, ami izomorf $\mathcal{P}_4$-el vagy $\mathcal{J}_t$-vel. Mindkét esetben van $A' \in E(\mathcal{C}')$ és $B' \in E(b(\mathcal{C}'))$, amire $|A \cap B| = 2$. De akkor az 5.1.2. lemma miatt ez már a $\mathcal{C}$-re is teljesül.

(e) $\Longrightarrow$(a). Elegendő azt megmutatni, hogy ha $\mathcal{C}$ nem bináris, de minden valódi minorja már az, akkor $\mathcal{C}$-nek van $\mathcal{P}_4$-el vagy valamelyik $\mathcal{J}_t$-vel ($t \geqslant 2$) izomorf minorja. (Természetesen, ha igaz a tétel, akkor azt is tudjuk, hogy ez a minor a $\mathcal{C}$ maga). Tehát feltesszük, hogy $\mathcal{C}$ ilyen.

$$\text{Ha } A \in E(\mathcal{C}) \text{ és } B \in E(b(\mathcal{C})) \text{ és } |A \cap B| \text{ páros, akkor } A = B. \tag{5.1}$$

Ugyanis ha $x \in A - B$, akkor $A - \{x\}$ éle $\mathcal{C}/\{x\}$-nek és B éle $b(\mathcal{C}/\{x\})$, így $\mathcal{C}/\{x\}$ nem bináris ellentmondásban a feltevésünkkel. Tehát $A - B = \emptyset$ és hasonlóan $B - A = \emptyset$, azaz $A = B$.

Válasszunk tehát egy C-t úgy, hogy $C \in E(\mathcal{C})$, $C \in E(b(\mathcal{C}))$ és $|C|$ páros. Nyilvánvalóan $C \neq \emptyset$ és $C \neq V(\mathcal{C})$ (ugyanis ekkor a clutter ebből az egy élből állna és így bináris lenne). Ha $x \in C$, akkor létezik egy $B(x) \in E(b(\mathcal{C}))$, amire $B(x) \cap C = \{x\}$ (mivel C minimális transzverzálisa $b(\mathcal{C})$-nek). $B(x) - C \neq \emptyset$, mert $B(x) \not\subset C$ (és $|C| \neq 1$). Ha $y \in V(\mathcal{C}) - C$, akkor $C \in E(b(\mathcal{C})\setminus\{y\}) = E(b(\mathcal{C}/\{y\}))$. De $\mathcal{C}/\{y\}$ bináris, tehát $C \notin E(\mathcal{C}/\{y\})$, azaz létezik $A(y) \in E(\mathcal{C})$, $A(y) - C = \{y\}$. $A(y) \cap C \neq \emptyset$, mivel $A(y)$ a $\mathcal{C}$ éle és C a $b(\mathcal{C})$ éle (is).

Meg akarjuk mutatni, hogy léteznek olyan $A \in E(\mathcal{C})$, $B \in E(b(\mathcal{C}))$, hogy $|A \cap B| = 2$. Tegyük fel indirekt, hogy nincsen ilyen. Akkor $x \in C$ és $y \in V(\mathcal{C}) - C$-re $|A(y) \cap B(x)| \neq 0, 2$, így

$$x \in A(y) \text{ vagy } y \in B(x), \text{ de nem mindkettő.} \tag{5.2}$$

Válasszunk egy olyan $y_1 \in V(\mathcal{C}) - C$-t, amire $|A(y_1)|$ minimális. Legyen $x_1 \in A(y_1) \cap C$, akkor (5.2) miatt $y_1 \notin B(x_1)$. Legyen $y_2 \in B(x_1) - C$ tetszőleges (így $y_2 \neq y_1$). Megint (5.2) miatt $x_1 \notin A(y_2)$, y_1 választása miatt viszont $|A(y_2)| \geqslant |A(y_1)|$ és $x_1 \in A(y_1)$, tehát tudunk választani egy $x_2 \in (A(y_2) - A(y_1)) \cap C$-t. Azaz végeredményben vannak olyan $y_1, y_2 \in V(\mathcal{C}) - C$ és $x_1, x_2 \in C$ elemeink, hogy $y_1 \neq y_2$, $x_1 \neq x_2$ és különböző $i, j \in \{1, 2\}$-re $x_i \in C \cap (A(y_i) - A(y_j))$ és $y_i \in (B(x_j) - B(x_i)) - C$.

Legyen $Z = A(y_1)\triangle A(y_2)\triangle C$. Tetszőleges $B \in E(b(\mathcal{C}))$-re, vagy B megegyezik $A(y_1)$, $A(y_2)$ illetve C valamelyikével, vagy mindhárommal páratlan a metszete ((5.1) miatt) és ilyenkor $|B \cap Z|$ is páratlan, tehát $B \cap Z$ nem üres. Nyilvánvalóan $y_1, y_2 \in Z$ és $Z \subseteq C \cup \{y_1, y_2\}$, tehát vagy Z metsz minden $B \in E(b(\mathcal{C}))$-t, vagy $Z = \{y_1, y_2\}$.

1. eset. $Z = \{y_1, y_2\}$.

Ekkor $\{y_1, y_2, x_2\}$ metsz minden $b(\mathcal{C})$-beli élt, azaz létezik egy A éle $\mathcal{C}$-nek, $A \subseteq \{y_1, y_2, x_1\}$. $A \cap C \neq \emptyset$ így $x_2 \in A$. $|C| \neq 2$ és páros, tehát legalább 4. $A(y_1) \cup A(y_2) \supseteq C$ (mert már a szimmetrikus differenciájuk is tartalmazza), így $A(y_2) \cap C$ legalább kételemű (mert $|A(y_1) \cap C| \leqslant |A(y_2) \cap C|$). Mivel nem lehetséges, hogy $A \subset A(y_2)$, ezért $y_1 \in A$. De akkor, mivel $y_2 \notin B(x_2)$, ezért $B(x_2) \cap A = \{x_2, y_1\}$, ellentmondás.

2. eset. $Z \cap C \neq \emptyset$.

Ekkor, mint már megjegyeztük, Z egy transzverzálisa $b(\mathcal{C})$-nek, azaz létezik egy $A^\star \in E(\mathcal{C})$, $A^\star \subseteq Z$. Vegyük észre, hogy $x_1, x_2 \notin Z$. Így mivel $A^\star \cap B(x_i) \neq \emptyset$ és $y_i \notin B(x_i)$, ezért $y_1, y_2 \in A^\star$.

Ha $x \in A(y_1) \cap A(y_2)$, akkor $y_1, y_2 \notin B(x)$ (5.2) miatt, de $A^\star \cap B(x) \neq \emptyset$, tehát $x \in A^\star$. Azaz $A(y_1) \cap A(y_2) \subseteq A^\star$.

Ha $x \in C - (A(y_1) \cup A(y_2))$, akkor $y_1, y_2 \in B(x)$ (5.2) miatt, de $|A^\star \cap B(x)| \neq 2$, tehát $x \in A^\star$. Azaz $C - (A(y_1) \cup A(y_2)) \subseteq A^\star$ is teljesül. Ezzel megmutattuk, hogy $A^\star = Z$. Így $C = A^\star \triangle A(y_1) \triangle A(y_2)$, de $A^\star, A(y_1), A(y_2) \neq C$ és így (5.1) miatt $A^\star \cap C$, $A(y_1) \cap C$, $A(y_2) \cap C$ páratlan elemszámúak, ami ellentmondás, mivel $|C|$ páros.

Tehát megmutattuk, hogy léteznek olyan $A \in E(\mathcal{C})$, $B \in E(b(\mathcal{C}))$, hogy $|A \cap B| = 2$. De akkor $A = B$, azaz feltehetjük, hogy $|C| = 2$. Mondjuk legyen $C = \{x_0, x_1\}$. Ha $y \in V(\mathcal{C}) - C$, akkor, mivel $C \not\subset A(y)$ és $A(y) \cap C \neq \emptyset$, $|A(y) \cap C| = 1$.

Vezessük be a kényelem kedvéért a clutter *megszorításának* fogalmát a következőképpen. Egy $U \subseteq V(\mathcal{C})$-re legyen $\mathcal{C}|U = \mathcal{C} \backslash (V(\mathcal{C}) - U)$.

Ha léteznek olyan különböző $y_0, y_1 \in V(\mathcal{C}) - C$, hogy $\{x_0, y_0\}, \{x_1, y_1\} \in E(\mathcal{C})$, akkor $\mathcal{C}' = \mathcal{C}|\{x_0, x_1, y_0, y_1\}$ izomorf $\mathcal{P}_4$-el. Hiszen $\{x_0, x_1\}, \{x_0, y_0\}$ és $\{x_1, y_1\}$ ennek élei és más éle könnyen láthatóan nem lehet, mivel $\{x_0, x_1\}$ a $\mathcal{C}'$-nek is transzverzálisa, így ezt minden $\mathcal{C}'$-beli élnek metszenie kell.

Tehát most feltehetjük, hogy minden $y \in V(\mathcal{C}) - C$-re $\{x_0, y\}$ éle $\mathcal{C}$-nek. Legyen most B egy olyan éle $\mathcal{C}$-nek, amire $B \cap C = \{x_1\}$, ilyen létezik, hiszen C minimális transzverzálisa $\mathcal{C}$-nek. Legyenek a B elemei a $\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ $(t \geqslant 2)$. Tekintsük a $\mathcal{C}' = \mathcal{C}|\{x_0, \ldots, x_t\}$ minorját $\mathcal{C}$-nek. Ekkor $\mathcal{C}'$ izomorf $\mathcal{J}_t$-vel, hiszen $\{x_0, x_i\}$ éle $i = 2, \ldots, t$-re és éle a $\{x_1, \ldots, x_t\}$ is. És mint már megjegyeztük a $\mathcal{J}_t$ definíciójánál, a 3.1.2. példában, ebből már következik, hogy $\mathcal{C}'$ izomorf $\mathcal{J}_t$-vel. $\square$

5.2. Példák bináris clutterekre

A következő clutterek (és így természetesen a blokkereik is) binárisak.

5.2.1. Példa. Egy gráf st-vágásainak cluttere bináris.

5.2.2. Példa. Legyen G egy irányítatlan gráf és $T \subseteq V(G)$. A T-kötések cluttere bináris.

5.2.3. Példa. Egy előjelezett gráf páratlan köreinek cluttere bináris.

5.2.4. Példa. Legyen M egy V alaphalmazon definiált összefüggő matroid, és legyen a köreinek és vágásainak halmaza $C(M)$ illetve $D(M)$. Legyen Ω egy eleme V-nek. Definiáljuk a $\mathcal{C}$ cluttert a $V - \{\Omega\}$ alaphalmazok a következő élhalmazzal: $E(\mathcal{C}) = \{C - \{\Omega\} : C \in C(M), \Omega \in C\}$. Ennek blokkere: $E(b(\mathcal{C})) = \{D - \{\Omega\} : D \in D(M), \Omega \in D\}$

Lehman [9] megmutatta, hogy az így kapott $\mathcal{C}$ clutter pontosan akkor bináris, ha az M matroid bináris. Sőt minden bináris clutter megkapható ilyen módon bináris matroidból.

5.3. Ideális és MFMC bináris clutterek

$\mathcal{F}_7$-el jelöltük a 7 pontú projektív sík egyeneseinek clutterét. Erről könnyen ellenőrizhető, hogy $b(\mathcal{F}_7) = \mathcal{F}_7$ és így, mivel $\mathcal{F}_7$ minden éle 3 pontból áll, $\mathcal{F}_7$ bináris. Megjegyeztük, hogy $\mathcal{F}_7$ *mni*.

A 4. fejezetben megjegyeztük, hogy az $\mathcal{O}_{K_5}$ clutter *mni* és természetesen bináris, hiszen egy gráf páratlan köreinek cluttere. Ebből következik, hogy $b(\mathcal{O}_{K_5})$ is bináris és *mni*. Seymour egy híres sejtése azt mondja ki, hogy ez az összes bináris *mni* clutter.

5.3.1. Sejtés (Seymour [19]). *Egy bináris clutter pontosan akkor ideális, ha nem tartalmaz $\mathcal{F}_7$, $\mathcal{O}_{K_5}$ és $b(\mathcal{O}_{K_5})$ minort.*

Emlékezünk vissza, hogy a $\mathcal{Q}_6$ clutter nem MFMC (2.5.2. példa). $\mathcal{Q}_6$ úgy volt definiálva, mint a K_4 háromszögeinek clutterre, vagyis $\mathcal{Q}_6$ az $\mathcal{O}_{K_4}$ egy másik neve, és így bináris. Ez az egyetlen bináris minimálisan nem MFMC clutter a következő fontos eredmény szerint, amit itt bizonyítás nélkül közlünk:

5.3.2. Tétel (Seymour [19]). *Egy bináris clutter pontosan akkor rendelkezik az MFMC tulajdonsággal, ha nincsen $\mathcal{Q}_6$ minorja.*

Hivatkozások

[1] F. Barahona, The max-cut problem on graphs not contractible to K_s, *Oper. Res. Lett.* 2(3) (1983) 107–111.

[2] W. G. Bridges, H. J. Ryser, Combinatorial designs and related systems, *J. Algebra* 13 (1969) 432–446.

[3] G. Cornuéjols, *Combinatorial optimization*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2001, packing and covering.

[4] J. Edmonds, D. R. Fulkerson, Bottleneck extrema, *J. Combinatorial Theory* 8 (1970) 299–306.

[5] J. Edmonds, E. L. Johnson, Matching, Euler tours and the Chinese postman, *Math. Programming* 5 (1973) 88–124.

[6] J. Geelen, B. Guenin, Packing odd-circuits, preprint, *J. Combin. Theory B* to appear.

[7] B. Guenin, A characterization of weakly bipartite graphs, in *Integer programming and combinatorial optimization (Houston, TX, 1998)*, volume 1412 of *Lecture notes in computer science*, 9–22, Springer, Berlin, 1998.

[8] T. C. Hu, Multicommodity network flows, *Operations Research* 11 (1963) 344–360.

[9] A. Lehman, A solution of the Shannon switching game, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 12 (1964) 687–725.

[10] A. Lehman, On the width-length inequality, *Math. Programming* 17(3) (1979) 403–417.

[11] A. Lehman, The width-length inequality and degenerate projective planes, in *Polyhedral combinatorics (Morristown, NJ, 1989)*, 101–105, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[12] C. L. Lucchesi, D. H. Younger, A minimax theorem for directed graphs, *J. London Math. Soc. (2)* 17(3) (1978) 369–374.

[13] G. I. Orlova, Y. G. Dorfman, Finding the maximum cut in a graph, *Izv. Akad. Nauk SSSR Tehn. Kibernet.* 3 (1972) 155–159.

[14] M. Padberg, Lehman's forbidden minor characterization of ideal 0-1 matrices, *Discrete Math.* 111(1-3) (1993) 409–420, graph theory and combinatorics (Marseille-Luminy, 1990).

[15] A. Schrijver, Min-max results in combinatorial optimization, in *Mathematical programming: the state of the art (Bonn, 1982)*, 439–500, Springer, Berlin, 1983.

[16] A. Schrijver, A short proof of Guenin's characterization of weakly bipartite graphs, preprint, *Journal of Combinatorial Theory B,* URL `http://www.cwi.nl/~lex/`, to appear.

[17] A. Schrijver, *Combinatorial Optimization – Polyhedra and Efficiency*, chapter 75, (forthcoming book), 2002.

[18] P. D. Seymour, The forbidden minors of binary clutters, *J. London Math. Soc. (2)* 12(3) (1975/76) 356–360.

[19] P. D. Seymour, The matroids with the max-flow min-cut property, *J. Combinatorial Theory Ser. B* 23(2-3) (1977) 189–222.

[20] P. D. Seymour, On odd cuts and plane multicommodity flows, *Proc. London Math. Soc. (3)* 42(1) (1981) 178–192.

[21] K. Wagner, Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe, *Mathematische Annalen* 114 (1937) 570–590.

[22] D. R. Woodall, Menger and König systems, in *Theory and applications of graphs (Proc. Internat. Conf., Western Mich. Univ., Kalamazoo, Mich., 1976)*, 620–635, Springer, Berlin, 1978.