Primitív éles permutációcsoportok

Birszki Bálint[1]

1999

[1]Témavezető: Pyber László

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Ez a dolgozat permutációcsoportokról szól.

A csoportelmélet talán a legrégibb modern matematikai elmélet, és ezen belül a permutációcsoportok elmélete a legősibb rész – első írásos említése 1832-ből származik: Évariste Galois a polinomegyenletek gyökjelekkel való megoldhatóságának problémájával kapcsolatos eredményeit foglalta össze a végzetes kimenetelű párbaját megelőző éjszakán Auguste Chevalier-nek írt levelében. A polinomegyenlet Galois-csoportja mai szemmel a felbontási test egy automorfizmuscsoportja, Galois eredeti felfogásában viszont a gyökök bizonyos permutációiból áll; ezen csoport absztrakt tulajdonságai adnak választ a fenti problémában felvetődő kérdésekre.

A széles matematikus közvélemény csak az 1840-es évek derekán értesült Galois munkásságáról; részben ennek hatására, részben Augustin Cauchynak Galois-tól független vizsgálatai nyomán kezdődött meg a csoportelmélet alapjainak lerakása. Érdekes módon a csoport axiomatikus definíciójához csak 1897-ben jutott el Weber. Az első eredmények olyan nagy nevekhez fűződnek, mint Cauchy, Lagrange, Jordan illetve Burnside és Frobenius; az elmélet első összefoglalása Camille Jordan 1870-ben megjelent műve, a *Traité des substitutions et des équations algébrique*.

A csoportelmélet kezdeti fejlődését az motiválta, hogy minden algebrai, geometriai, kombinatorikai stb. struktúra szimmetriáit egy csoport – az adott struktúra automorfizmuscsoportja (amely egy a struktúra alaphalmazán ható permutációcsoport) – írja le, és e csoport vizsgálatával sok minden tudható meg magáról a struktúráról is. Példaként gondoljunk Felix Klein „erlangeni program”-jára, amely csoportelméleti alapon osztályozta a különféle geometriákat. Később, Dickson, Burnside, Frobenius idejében már a csoportelmélet saját problémái kerültek előtérbe.

Az axiomatikus definíció elválasztotta a permutációcsoportok elméletét az absztrakt csoportelmélettől, de a két elmélet között fennmaradt az egyszerű tartalmazáson túlmutató szoros kölcsönhatás: a permutációcsoportokra alkalmazhatók az absztrakt eredmények, és a permutációreprezentációk segítségével bizonyíthatók absztrakt állítások.

A csoportelmélet igazi felvirágzása a XX. század második felére tehető, amikor is többszáz matematikus több évtizeden át végzett munkája nyomán 1980-ban elkészült a véges egyszerű csoportok klasszifikációja (CFSG, Classification of Finite Simple Groups). Ez egyben hatalmas előrelépést jelentett a permutációcsoportok elméletében is, ugyanis sok időközben belátott állítás a véges egyszerű csoportok vizsgálatára vezet vissza (absztrakt- illetve) permutációcsoportokkal kapcsolatos problémákat.

Dolgozatomban a szükséges legalapvetőbb tudnivalók összefoglalása után egy speciális problémában eddig elért eredményeimet foglalom össze. Közben egy nagyobb kitérőt téve példákkal illusztrálom az előző bekezdés állítását: a primitív permutációcsoportokról a klasszifikáció óta illetve következményeképpen kiderült tényeket, természetesen főleg azokat, amelyeket a későbbiekben felhasználok, ismertetem.

1. fejezet

Alapfogalmak

1.1. Definíciók

Tetszőleges Ω nemüres halmaznak egy $x : \Omega \to \Omega$ önmagára való bijekcióját Ω egy *permutációjának* nevezzük. Ω elemeit *pont*oknak is hívjuk. Megállapodás szerint az $\alpha \in \Omega$ pont képét az x permutációnál nem $x(\alpha)$, hanem αx vagy α^x jelöli, és ezzel a jelöléssel összhangban a permutációk jelen szakdolgozatban jobbról hatnak. Ω összes permutációinak halmaza, a leképezések kompozíciójával mint művelettel, csoportot alkot, ennek neve az Ω-n értelmezett *szimmetrikus csoport*, jelölése $Sym(\Omega)$. *Permutációcsoport*on valamely szimmetrikus csoport egy részcsoportját értjük; azt is mondjuk, hogy $G \leq Sym(\Omega)$ *hat* az Ω halmazon. Ω számossága a G permutációcsoport *fok*a. A továbbiakban felteszem, hogy Ω véges halmaz, sőt, sokszor azt is, hogy $\Omega = \mathbf{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ valamely n pozitív egészre, mely utóbbi esetre bevezetem az $S_n := Sym(\mathbf{n})$ jelölést – vagyis csak véges fokú permutációcsoportokkal foglalkozom.

Két permutációcsoport, $G_1 \leq Sym(\Omega_1)$ és $G_2 \leq Sym(\Omega_2)$ *permutációizomorf*, ha megadható egy $\varphi : G_1 \to G_2$ csoportizomorfizmus és egy $\lambda : \Omega_1 \to \Omega_2$ bijekció úgy, hogy minden $g \in G_1$ és $\alpha \in \Omega_1$ esetén

$$\lambda(\alpha^g) = \lambda(\alpha)^{\varphi(g)}.$$

Ez annyit jelent, hogy a G_1 és G_2 csoportok a λ-n keresztüli azonosítás után ugyanazokból a permutációkból állnak. Ha $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, akkor ez ekvivalens azzal, hogy G_1 és G_2 konjugáltak $Sym(\Omega)$-ban.

A $G \leq Sym(\Omega)$ permutációcsoport $g \in G$ elemei az $\alpha \in \Omega$ pontokat számos más pontba képezhetik. Egy adott α pont képeinek halmaza az α *G-orbit*ja (röviden orbitja):

$$\alpha^G := \{\alpha^g \mid g \in G\}.$$

Ezzel duális fogalom egy pont *G-stabilizátor*a (röviden stabilizátora), azon $g \in G$ permutációk halmaza, amelyek a pontot önmagába viszik:

$$G_\alpha := \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}.$$

1.1.1. Állítás. *Tegyük föl, hogy a G csoport hat az Ω halmazon, és legyen $\alpha \in \Omega$.*

(i) A G-orbitok Ω egy partícióját alkotják.

(ii) $G_\alpha \leq G$, továbbá $G_{\alpha^x} = G_\alpha^x$ minden $\alpha \in \Omega$-ra és $x \in G$-re.

(iii) $|\alpha^G| = |G : G_\alpha|$.

Ha adott egy $x \in Sym(\Omega)$ permutáció, akkor egy $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ pont-k-ast x egy *ciklus*ának nevezik, ha minden $i = 1, 2, \ldots, k-1$ esetén $\alpha_i x = \alpha_{i+1}$ és $\alpha_k x = \alpha_1$. Az egyetlen pontból álló ciklus egyetlen elemét x *fixpont*jának hívják – x az ilyen pontokat nem mozgatja, fixen hagyja. A fixpontok halmaza

$$\mathrm{fix}(x) := \{\alpha \in \Omega \mid \alpha^x = \alpha\},$$

ennek Ω-ra vonatkozó komplementere pedig x *tartó*ja:

$$\mathrm{supp}(x) := \{\alpha \in \Omega \mid \alpha^x \neq \alpha\}.$$

Ugyanezeket a fogalmakat értelmezhetjük tetszőleges $X \subseteq Sym(\Omega)$ részhalmazra is:

$$\mathrm{fix}(X) := \bigcap_{x \in X} \mathrm{fix}(x) = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha^x = \alpha \text{ minden } x \in X\text{-re}\}$$
$$\mathrm{supp}(X) := \bigcup_{x \in X} \mathrm{supp}(x) = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha^x \neq \alpha \text{ valamely } x \in X\text{-re}\}$$

Továbbá, ha X részcsoport, akkor orbitjainak halmazát jelölje $\mathrm{orb}(X)$.

Az Ω halmazon ható G csoport *tranzitív,* ha egyetlen orbitja van, azaz $\alpha^G = \Omega$ minden $\alpha \in \Omega$-ra. Ekvivalens megfogalmazásban, G tranzitív, ha minden $\alpha, \beta \in \Omega$ pontpárra létezik $x \in G$, melyre $\alpha^x = \beta$. G *szemireguláris,* ha minden $\alpha \in \Omega$-ra $G_\alpha = 1$, tehát ha G-nek (az egységelemen kívül) minden eleme fixpontmentes. G *reguláris,* ha tranzitív és szemireguláris.

Egy G absztrakt csoport *permutációreprezentáció*ján egy $\varphi : G \to Sym(\Omega)$ homomorfizmust értünk. Im φ egy Ω-n ható permutációcsoport; az $\alpha^g := \alpha^{\varphi(g)}$ jelölés bevezetése után azt is szokás mondani, hogy G hat Ω-n. Ha $\ker \varphi = 1$, azaz φ beágyazás, akkor a hatás *hűséges.* Mivel ez a legtöbb esetben nem fontos követelmény, ezért a továbbiakban csoportoknak halmazokon való hatásáról lesz szó.

G két permutációreprezentációja *permutációekvivalens,* ha lényegében ugyanazt a hatást valósítják meg lényegében ugyanazon a halmazon. Egy kicsit precízebben, a $\varphi_1 : G \to Sym(\Omega_1)$ és $\varphi_2 : G \to Sym(\Omega_2)$ ekvivalens permutációreprezentációk, ha valamely $\lambda : \Omega_1 \to \Omega_2$ bijekcióval minden $g \in G$-re és $\alpha \in \Omega_1$-re

$$\lambda(\alpha)^{\varphi_2(g)} = \lambda(\alpha^{\varphi_1(g)}).$$

Nem teljesen triviális példát szolgáltat permutációreprezentációkra a következő tétel:

1.1.1. Tétel. (Cayley) *Minden G absztrakt csoport izomorf egy permutációcsoporttal.*

BIZONYÍTÁS. Minden $g \in G$-re tekintsük a következő két leképezést:

$$\varrho(g) : G \to G,\ x^{\varrho(g)} := xg$$
$$\lambda(g) : G \to G,\ x^{\lambda(g)} := g^{-1}x$$

Ezek könnyen láthatóan permutációi G-nek, továbbá a

$$\varrho : G \to Sym(G),\ \varrho : g \mapsto \varrho(g)$$
$$\lambda : G \to Sym(G),\ \lambda : g \mapsto \lambda(g)$$

leképezések homomorfizmusok és magjaik triviálisak, tehát mindketten megadnak egy kívánt izomorfizmust. Igaz továbbá, hogy Im ϱ illetve Im λ reguláris permutációcsoportok. ϱ neve *jobboldali reguláris reprezentáció,* λ-é pedig *baloldali reguláris reprezentáció.* □

A fenti tétel egyik fontos tanulsága, hogy tranzitív permutációcsoportok absztrakt szerkezetéről semmi speciálisat nem lehet állítani.

További, még kevésbé triviális, de sokkal érdekesebb és fontosabb példa permutációreprezentációra a *(jobboldali) tranzitív reprezentáció.* Tekintsünk egy tetszőleges G csoportot és annak egy H részcsoportját. A halmaz, amelyen G hat

$$\Omega := (G : H) = \{Hx \mid x \in G\},$$

a H részcsoport jobboldali mellékosztályainak halmaza, és ezen egy $g \in G$ elem hatása legyen

$$\varrho_H(g) : Hx \mapsto Hxg.$$

$Hxg = Hx \Leftrightarrow g \in H^x$ miatt a stabilizátorok H konjugáltjai, továbbá a hatás magja (a stabilizátorok metszete)

$$\ker \varrho_H = \bigcap_{x \in G} H^x = \mathrm{core}_G H,$$

G-nek a H által tartalmazott legnagyobb normálosztója.

A tranzitív reprezentációnak a következő észrevétel adja a jelentőségét.

1.1.2. Állítás. *Ha a G csoportnak $\varrho : G \to Sym(\Omega)$ egy tranzitív permutációreprezentációja, akkor a $H = G_\alpha$ ($\alpha \in \Omega$) részcsoport szerinti ϱ_H permutációreprezentáció ekvivalens ϱ-val.*

Bizonyítás. $G_\alpha g = G_\alpha h \Leftrightarrow \alpha^g = \alpha^h$ és G (ϱ szerinti) tranzitivitása következtében bijekció van $H = G_\alpha$ jobboldali mellékosztályai és Ω elemei között:

$$\lambda : \Omega_H \to \Omega,\ \lambda : Hg \mapsto \alpha^g,$$

ami meg is adja a kívánt permutációekvivalenciát. □

Ez azt jelenti, hogy bármely csoportnak az összes különböző tranzitív hatását megkaphatjuk a fenti módon, másrészt hogy a hatás megadásához elegendő egyetlen stabilizátort megadni. A hatás reguláris, ha H normálosztó G-ben, és hűséges, ha $\mathrm{core}_G H = 1$.

Természetes módon értelmezhetjük Ω részhalmazainak képét minden $x \in G$ permutációnál: ha $\Gamma \subseteq \Omega$, akkor

$$\Gamma^x := \{\gamma^x \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

(Ez a fentiek értelmében egy hatását adja meg G-nek Ω hatványhalmazán.)

A pontstabilizátor fogalmát kétféleképpen is át lehet vinni részhalmazokra: $\Gamma \subseteq \Omega$ *pontonkénti stabilizátora*

$$G_{(\Gamma)} := \{x \in G \mid \gamma^x = \gamma \text{ minden } \gamma \in \Gamma\text{-ra }\},$$

illetve Γ *halmaz-stabilizátora*

$$G_{\{\Gamma\}} := \{x \in G \mid \Gamma^x = \Gamma\}.$$

A $\Gamma \subseteq \Omega$ részhalmaz *G-invariáns*, ha minden $x \in G$-re $\Gamma^x = \Gamma$. Ez azzal ekvivalens, hogy Γ néhány G-orbit uniója. Ekkor megszoríthatjuk G elemeinek hatását Γ-ra: $x \in G$ megszorítottját x^Γ jelöli. A $G \to Sym(\Gamma)$, $x \mapsto x^\Gamma$ leképezés valójában homomorfizmus, azaz permutációreprezentáció, melynek képe

$$G^\Gamma := \{x^\Gamma \mid x \in G\},$$

magja pedig $G_{(\Gamma)}$, tehát $G^\Gamma \simeq G/G_{(\Gamma)}$.

Legyen $G \leq Sym(\Omega)$ permutációcsoport. Az Ω-n értelmezett $\approx$ ekvivalenciareláció egy *G-kongruencia*, ha invariáns G-re nézve, azaz

$$\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha^x \approx \beta^x \text{ minden } x \in G \text{ esetén.}$$

Triviális G-kongruenciák az egyenlőség és a „minden mindennel ekvivalens" reláció; G-t *primitív*nek nevezzük, ha más G-kongruencia nem létezik. Figyeljük meg, hogy ha G nem tranzitív, akkor az az ekvivalenciareláció, amelynek osztályai a G orbitjai, egy nemtriviális G-kongruencia; tehát primitív csoport feltétlenül tranzitív. A tranzitív de nem primitív csoportok neve *imprimitív*.

Egy G-kongruencia osztályait *blokk*oknak (vagy *imprimitivitási tartomány*oknak) hívjuk, az osztályok halmazát pedig *blokkok rendszer*ének. G természetesen hat blokkoknak minden rendszerén, lévén az G-invariáns részhalmaza Ω hatványhalmazának a részhalmazokon értelmezett hatást tekintve. Legyen most G tranzitív. Ekkor a blokkok azonos méretűek, mivel megkaphatók egymás eltoltjaiként, sőt:

1.1.3. Állítás. *$\Delta \subseteq \Omega$ blokk $\Leftrightarrow$ minden $x \in G$-re vagy $\Delta^x = \Delta$, vagy $\Delta^x \cap \Delta = \emptyset$.*

Egy blokk mérete tehát osztója Ω méretének. Ha $\Delta \subseteq \Omega$ blokk, akkor $G_{\{\Delta\}}$ tranzitív Δ-n. Blokkok kereséséhez használható tények:

1.1.4. Állítás. *Legyen G tranzitív permutációcsoport Ω-n.*

(i) Ha $\Delta \subseteq \Omega$ egy blokk és $\alpha \in \Delta$, akkor Δ G_α-invariáns.

(ii) $\mathrm{fix}(G_\alpha) \subseteq \Omega$ blokk.

(iii) Egy $N \lhd G$ normálosztó orbitjai blokkok.

1.1.5. Állítás. *Ha G tranzitívan hat Ω-n és $\alpha \in \Omega$, akkor a $\Phi : H \mapsto \alpha^H$ leképezés rendezéstartó bijekciót létesít G-nek G_α-t tartalmazó részcsoportjai és az α-t tartalmazó blokkjai között. Φ inverze a $\Psi : \Delta \mapsto G_{\{\Delta\}}$ leképezés.*

1.1.6. Állítás. *Ha G tranzitívan hat a legalább kételemű Ω halmazon, akkor G primitív $\Leftrightarrow$ a stabilizátorok maximális részcsoportjai G-nek.*

Egy $G \leq Sym(\Omega)$ permutációcsoport *k-tranzitív,* ha tranzitív az

$$\Omega^{(k)} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \mid \alpha_i \in \Omega \ (i = 1, \dots, k) \text{ és } \alpha_i \neq \alpha_j \text{ ha } i \neq j\}$$

halmazon az

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_k)^g := (\alpha_1^g, \dots, \alpha_k^g)$$

hatásban; és *k-homogén,* ha tranzitív az

$$\Omega^{\{k\}} = \{\Gamma \subseteq \Omega \mid |\Gamma| = k\}$$

halmazon a részhalmazokon való, korábban már definiált hatásában. Magyarul: k-tranzitív, ha minden (különböző pontokból álló) rendezett k-ast minden rendezett k-asba, és k-homogén, ha minden rendezetlen k-ast minden rendezetlen k-asba el tud vinni. Ha ez egyértelműen tehető meg, ami azzal ekvivalens, hogy bármely k darab pont pontonkénti illetve halmaz-stabilizátora triviális, akkor a csoport *élesen* k-tranzitív illetve k-homogén. Természetesen az élesen 1-tranzitivitás azonos a regularitással.

Nyilván a k-tranzitivitás maga után vonja a $(k-1)$-tranzitivitást és a k-homogenitást. Továbbá:

1.1.7. Állítás. *G 2-homogén $\Rightarrow$ G primitív.*

1.1.8. Állítás. *G k-tranzitív $\Leftrightarrow$ G tranzitív és stabilizátora $(k-1)$-tranzitív.*

Ugyanez az állítás igaz marad, ha éles többszörös tranzitivitást írunk mindkét oldalon.

A teljes $\Omega \times \Omega$-n a fentihez hasonló módon definiált hatásban legalább két orbit van: a $\{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \Omega\}$ *diagonális orbit*, illetve maga $\Omega^{(2)}$. Ha G tranzitív (Ω-n), akkor $\Omega \times \Omega$-orbitjainak száma a G *rang*ja. Nyilván G pontosan akkor 2-tranzitív, ha a rangja 2.

Az S_n szimmetrikus csoportnak van egy nyilvánvaló hatása a $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ halmazon, ami kiterjeszthető a $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinomgyűrűre is. Az $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$ polinomot az indexek minden permutációja önmagába vagy az ellentettjébe viszi (az $(12) \in S_n$ transzpozíció megteszi az utóbbit), van tehát S_n-nek egy nemtriviális homomorfizmusa S_2-be, aminek a magja egy 2 indexű normálosztó S_n-ben – az (n-fokú) *alternáló csoport*, A_n.

1.1.9. Állítás. *A_n egyszerű, ha $n \geq 5$.*

1.1.10. Állítás. *S_n-nek egyetlen nemtriviális normálosztója A_n, hacsak $n \neq 4$ ($n = 4$ esetén a reguláris elemi abel részcsoport is normálosztó).*

1.1.11. Állítás. *A_n automorfizmuscsoportja S_n, hacsak $n \neq 6$ ($n = 6$ esetén $|\mathrm{Aut}\ A_n : S_n| = 2$).*

1.2. Csoporthatás-konstrukciók

Ebben a szakaszban azon módszereket részletezem, melyek segítségével sok kicsi permutációcsoportból egy nagyot lehet csinálni, illetve fordítva, egy nagy permutációcsoportot sok kicsire lehet bontani. Az előbbieknél külön kitérek a konstruált csoport elemei fixponthalmazának meghatározására; ennek okára is fény derül majd.

Csoporthatás indukálta csoporthatások

Vannak olyan esetek, amikor egy adott hatású csoportnak egy másik, ebből származtatható hatását vizsgáljuk. Például ha G hat Ω-n, akkor hat az előző szakaszban részletezett módokon az invariáns halmazain, blokkjain, a rendezett illetve rendezetlen pont-k-asokon is. Most csak az ezen hatások szerinti fixponthalmazokat határozom meg.

Ha $\Gamma \subseteq \Omega$ G-invariáns és $g \in G$, akkor

$$\mathrm{fix}(g^\Gamma) = \mathrm{fix}(g) \cap \Gamma.$$

Az Ω^k-n illetve $\Omega^{(k)}$-n indukált hatásban

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_k)g = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \Leftrightarrow \alpha_i \in \mathrm{fix}(g) \text{ minden } i = 1, \dots, k\text{-ra},$$

azaz minden koordinátában $\mathrm{fix}(g)$-beli pontok állnak, tehát

$$\mathrm{fix}_{\Omega^k}(g) = \mathrm{fix}_\Omega(g)^k \text{ illetve } \mathrm{fix}_{\Omega^{(k)}}(g) = \mathrm{fix}_\Omega(g)^k \cap \Omega^{(k)}.$$

Direkt szorzat unióhatása

Csoportok direkt szorzata a legelemibb csoportelméleti konstrukció. Ha a szorzat mindegyik tényezője hat egy halmazon, akkor a direkt szorzat természetesen hat ezen halmazok diszjunkt unióján illetve Descartes-szorzatán. Ezeket a hatásokat nevezzük unió- illetve szorzathatásnak.

Legyenek adottak a G_i $(i = 1, \dots, n)$ csoportok valamely Ω_i-n való hatásukkal együtt. Ha föltesszük, hogy az Ω_i halmazok páronként diszjunktak, akkor a $G := \times_{i=1}^n G_i$ csoport elemeinek hatása az $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ halmazon

$$\alpha(g_1, \dots, g_n) := \alpha g_i, \text{ ha } \alpha \in \Omega_i$$

összefüggéssel definiálható. Ez a hatás természetesen nem tranzitív, hiszen az $\Omega_i \subseteq \Omega$ halmazok G-invariánsak.

A fixpontokról: ha $\alpha \in \Omega$ fixen marad egy $g = (g_i) = (g_1, \dots, g_n) \in G$ elemnél, akkor $\alpha g_i = \alpha$ azon i-re, melyre $\alpha \in \Omega_i$, és persze g minden ilyen pontot fixen hagy. Vagyis

$$\mathrm{fix}(g) = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{fix}(g_i).$$

A konstrukció megfordításához tekintsünk egy *intranzitívan* és *hűségesen* ható G csoportot, és nevezzük Ω_i-nek az orbitjait, majd tekintsük a keletkező $G_i := G^{\Omega_i}$ csoportokat, melyek az egyes Ω_i halmazokon hatnak.

1.2.1. Állítás. *G permutációizomorf a G_i csoportok egy szubdirekt szorzatával annak unióhatásában.*

Bizonyítás. A

$$\varphi : G \to \times_{i=1}^n G_i,\ \varphi : g \mapsto (g^{\Omega_1}, \dots, g^{\Omega_n})$$

$$\lambda : \Omega \to \bigcup_{i=1}^n \Omega_i,\ \lambda : \alpha \mapsto \alpha$$

leképezések adják meg a permutációizomorfizmust (itt használom ki, hogy G hatása hűséges), és persze az egyes koordinátákra való vetítések epimorfizmusok az Ω_i csoportok definíciója miatt. □

Direkt szorzat szorzathatása

A G_i csoportok direkt szorzatának az Ω_i halmazok Descartes-szorzatán is definiálható hatása: a megfelelő koordináta a megfelelő koordinátán hat, azaz $g = (g_1, \dots, g_n) \in G$ hatása $\Omega := \times_{i=1}^n \Omega_i$-n:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)(g_1, \dots, g_n) := (\alpha_1 g_1, \dots, \alpha_n g_n).$$

Egy $\alpha \in \Omega$ pont akkor marad fixen egy $g \in G$ elemnél, ha minden egyes koordinátája fixen marad, vagyis ha minden $i = 1, \dots, n$-re $\alpha_i \in \mathrm{fix}(g_i)$. A fixpontok tehát

$$\mathrm{fix}(g) = \times_{i=1}^n \mathrm{fix}(g_i).$$

Könnyen látható, hogy a fenti két konstrukció „asszociatív" abban az értelemben, hogy a direkt szorzatot bármely módon „zárójelezve" azonos (permutációekvivalens) hatásokat kapunk.

Koszorúszorzat imprimitív hatása

A koszorúszorzat a permutációcsoportok elméletének mondhatni legfontosabb konstrukciója; mint látni fogjuk, mind az imprimitív, mind a primitív hatások vizsgálatához fontos segédeszköz.

Legyen adott két csoport, G és H, továbbá az utóbbinak egy hatása a Σ halmazon, és tekintsük a Σ-ból G-be képező függvények halmazát. A pontonkénti szorzással mint művelettel ez csoporttá tehető, amely izomorf G-nek $|\Sigma|$ tényezős direkt hatványával; jelöljük ezt a csoportot B-vel (neve *báziscsoport*). A G wr H koszorúszorzat $B \rtimes H$ szemidirekt szorzatként adódik, ahol H (a *tetőcsoport*) hatása B-n

$$(\pi^{-1} g \pi)(\sigma) = g(\sigma \pi^{-1}) \ (g \in B, \pi \in H, \sigma \in \Sigma).$$

Tehát H a hatásának megfelelően permutálja a koordinátákat.

A könnyebb olvashatóság kedvéért gyakran élni fogok a $\Sigma = \mathbf{n}$ feltevéssel, és a B csoportot azonosítom $\times_{i=1}^n G$-vel, továbbá bevezetem a $g_i := g(i)$, $g = (g_i) = (g_1, \dots, g_n)$ $(\in B)$ jelöléseket.

Ha G is hat valamely Δ halmazon, akkor definiálható G wr H hatása a $\Delta \times \Sigma$ halmazon:

$$g\pi : (\alpha, \sigma) \mapsto (\alpha^{g(\sigma)}, \sigma^\pi) \ (\alpha \in \Delta, \sigma \in \Sigma)$$

Annak belátása, hogy ez tényleg egy hatást ad meg, rutin számolási feladat.

Ha mind G, mind H tranzitív volt, akkor G wr H is tranzitív lesz, és könnyen látható, hogy ennek a megfordítása is igaz. Azonban sosem lesz primitív, hacsak Δ nem egyelemű, mivel az $\{\Delta \times \{\sigma\} \mid \sigma \in \Sigma\}$ nyilván egy blokkrendszer – a *kitüntetett blokkrendszer*. Ezért nevezik ezt a hatást imprimitív hatásnak.

Adott $g\pi \in G$ wr H fixpontjainak halmaza a fenti definíció értelmében

$$\mathrm{fix}(g\pi) = \{(\alpha, \sigma) \mid \sigma \in \mathrm{fix}(\pi),\ \alpha \in \mathrm{fix}(g(\sigma))\} = \bigcup_{\sigma \in \mathrm{fix}(\pi)} \mathrm{fix}(g(\sigma)) \times \{\sigma\}.$$

Megfordítva, ha $G \leq Sym(\Omega)$ imprimitív és Σ egy nemtriviális blokkrendszere, akkor G természetesen hat Σ-n, vagyis van egy $G^\Sigma \leq Sym(\Sigma)$ reprezentációja, másrészt bármely $\Delta \in \Sigma$ blokkon hat a $G_{\{\Delta\}}$ csoport.

1.2.2. Állítás. *G permutációizomorf a $G_{\{\Delta\}}$ wr G^Σ koszorúszorzat egy részcsoportjával annak imprimitív hatásában.*

Bizonyítás. G^Σ tranzitív Σ-n és $\Delta \in \Sigma$ stabilizátora $G_{\{\Delta\}}$, ezért a tranzitív reprezentációkról szóló állítás szerint $G_{\{\Delta\}}$ mellékosztályai és Σ elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Legyen tehát $\{x_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ egy (jobboldali) mellékosztályreprezentáns-rendszer. g^Σ ekkor a mellékosztályokon is hat:

$$g : G_{\{\Delta\}} x_\sigma \mapsto G_{\{\Delta\}} x_\sigma g = G_{\{\Delta\}} x_{\sigma g^\Sigma}.$$

Azonosítsuk Ω-t és $\Delta \times \Sigma$-t a következőképpen:

$$\lambda : \Omega \to \Delta \times \Sigma, \lambda : \alpha x_\sigma \mapsto (\alpha, \sigma).$$

Mivel $g \in G$ hatása Ω-n

$$g : \alpha x_\sigma \mapsto \alpha x_\sigma g = \alpha(x_\sigma g x_{\sigma g^\Sigma}^{-1}) x_{\sigma g^\Sigma},$$

ezért

$$\varphi(g) : (\alpha, \sigma) \mapsto (\alpha(x_\sigma g x_{\sigma g^\Sigma}^{-1}), \sigma g^\Sigma)$$

megadja a beágyazást, mivel $x_\sigma g x_{\sigma g^\Sigma}^{-1} \in G_{\{\Delta\}}$ a fentiek szerint, és persze $g^\Sigma \in G^\Sigma$, továbbá a műveletartás és ker φ trivialitása is ellenőrizhető. □

Az imprimitív csoportot tehát két kisebb csoportra lehet „szétvágni”. Ha azok is imprimitívek, akkor az eljárás folytatható, végeredményben a csoportot elő lehet állítani primitív csoportokból ismételt koszorúszorzatképzéssel. Két nagy probléma ezzel az előállítással kapcsolatban, hogy nem egyértelmű, illetve hogy csak nagyon keveset őriz meg az eredeti csoport szerkezetéből.

Koszorúszorzat szorzathatása

A direkt szorzat unió- illetve szorzathatásával analóg módon létezik a koszorúszorzat imprimitív- illetve szorzathatása. Számunkra az utóbbi az igazán fontos, ennek definíciója következik most.

Adott tehát az Δ-n ható G valamint a Σ-n ható H csoport. Az $\Omega = \Delta^\Sigma = \{\alpha : \Sigma \to \Delta\}$ halmazon $g\pi \in G$ wr H hatását az

$$(\alpha g \pi)(\sigma) := \alpha(\sigma\pi^{-1}) g(\sigma\pi^{-1})$$

összefüggés adja meg. (Ismét rövid számolással ellenőrizhető, hogy ez a hatás jóldefiniált.) Szemléletesen, a báziscsoport elemei a „koordináták” értékeit változtatják, H elemei pedig magukat a koordinátákat permutálják.

A következő tétel igazán figyelemreméltó.

1.2.1. Tétel. *Ha G primitív, de nem reguláris, és H tranzitív, akkor G wr H primitív a szorzathatásban.*

Bizonyítás. Az $\alpha \in \Delta$ pontot tekintve, az $\overline{\alpha} \in \Delta^\Sigma$, $\overline{\alpha}(\sigma) = \alpha$ pont stabilizátora G wr H-ban a G_α wr H részcsoport. Azt kell látnunk, hogy ez maximális részcsoportja G wr H-nak.

Legyen G_α wr $H < X \leq G$ wr H. $H \leq X$, tehát a részcsoportok moduláris tulajdonsága miatt $(X \cap B)H = X \cap BH = X$. Legyen $Y = X \cap B$, ekkor $X = YH$ és $Y \lhd X$, azaz $H \leq X \leq N(Y)$, Y H-invariáns. Legyenek továbbá $p_\sigma : B \to G$ és $i_\sigma : G \to B$ a koordinátánkénti vetítések illetve beágyazások.

H tranzitív, ezért a $p_\sigma(Y) \leq G$ részcsoportok mind egyenlőek, és mind tartalmazzák G_α-t, továbbá van olyan $\sigma \in \Sigma$, hogy ez a tartalmazás szigorú. G primitivitása miatt ekkor minden σ-ra $p_\sigma(Y) = G$. $Y \cap i_\sigma(G) \lhd Y$ és $p_\sigma(Y \cap i_\sigma(G)) = Y \cap i_\sigma(G)$ miatt $Y \cap i_\sigma(G) \lhd i_\sigma(G)$. G_α nem normálosztó G-ben, mivel G nem reguláris, ezért $Y \cap i_\sigma(G) = i_\sigma(G)$, azaz $Y \geq i_\sigma(G)$ minden $\sigma \in \Sigma$-ra, vagyis $Y \geq B$ és $X \geq BH$. □

A fenti konstrukciót szokás angolul *blow-up*nak, felfújásnak nevezni; általában a G wr H szorzathatású csoport minden (primitív) részcsoportját a G felfújásának nevezik.

A fixpontok meghatározása nem teljesen triviális. $\alpha g\pi = \alpha$ azzal ekvivalens, hogy $\alpha(\sigma\pi^{-1}) = \alpha(\sigma)g(\sigma\pi^{-1})^{-1}$, amiből indukcióval

$$\alpha(\sigma\pi^{-d}) = \alpha(\sigma)g(\sigma\pi^{-1})^{-1} \dots g(\sigma\pi^{-d})^{-1},$$

és ez $\sigma\pi^d = \sigma$ esetén azt jelenti, hogy $\gamma(\sigma) := g(\sigma)\dots g(\sigma\pi^{d-1})$ fixen hagyja $\alpha(\sigma)$-t. Ha tehát π minden orbitjából választunk egy $\sigma_i \in \Sigma$ reprezentánst, akkor az α fixpontot meg tudjuk választani a σ_i helyeken, a többi helyen pedig a feltétel szabja meg α értékét:

$$\mathrm{fix}(g\pi) = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha(\sigma_i) \in \mathrm{fix}(\gamma(\sigma_i)) \text{ és } \alpha(\sigma\pi^{-1}) = \alpha(\sigma)g(\sigma\pi^{-1})^{-1}\}.$$

1.3. A permutációkarakter

Az absztrakt csoportok másik fontos ábrázolási módja valamely vektortér invertálható lineáris leképezéseiként tekinteni őket: a G csoport egy *lineáris reprezentációján* egy $\varphi : G \to GL(V)$ homomorfizmust értünk, ahol V egy vektortér valamely F test felett. Legtöbbször $V = \mathbb{C}^n$, ahol n pozitív egész, neve a reprezentáció *foka*.

A lineáris reprezentációkkal egy hatalmas elmélet, a reprezentációelmélet foglalkozik; én itt csak a jelen szakdolgozat szempontjából fontos tényeket foglalom össze.

A $\varphi : G \to GL_n(\mathbb{C})$ reprezentációhoz tartozó *karakter* a

$$\chi : G \to \mathbb{C},\ \chi(g) = \mathrm{tr}\ \varphi(g)$$

leképezés. A reprezentáció foka leolvasható a karakterről, ugyanis $\chi(1) = \mathrm{tr}\ \varphi(\mathrm{id}_V) = n$. *Általánosított karakter*nek nevezzük két karakter (pontonkénti) különbségét.

Egy φ reprezentáció illetve a hozzá tartozó χ karakter *irreducibilis*, ha az $\mathrm{Im}\ \varphi \leq GL_n(\mathbb{C})$ lineáris csoportnak nincsen nemtriviális invariáns altere.

Karakterekre néhány példa:

(i) A triviális karakter: ez a $\varphi : G \to \mathbb{C}$, $\varphi(g) = 1$ reprezentációhoz tartozó karakter. $1_G(g) = 1$ minden $g \in G$-re.

(ii) A permutációkarakter: ha G hat az n elemű Ω halmazon, akkor legyen $\varphi : G \to \mathbb{C}^n$ az a reprezentáció, melyre minden $g \in G$-re $\varphi(g)$ a g hatása szerint permutálja a $\mathbb{C}^n$ vektortér egy rögzített bázisát. A mátrixokkal való felírásból könnyen látszik, hogy az ehhez tartozó karakter $\pi(g) = |\mathrm{fix}(g)|$ minden $g \in G$-re.

(iii) A reguláris karakter: ϱ_G a G csoport (jobboldali) reguláris reprezentációjához tartozó permutációkarakter.

$$\varrho_G(g) = \begin{cases} |G|, & \text{ha } g = 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

1.3.1. Állítás. *χ_1 és χ_2 két G-karakter $\Rightarrow$ $\chi_1 + \chi_2$ és $\chi_1\chi_2$ is G-karakter.*

Bizonyítás. Ha a két karakternek megfelelő reprezentációk $\varphi_1 : G \to V_1$ illetve $\varphi_2 : G \to V_2$, akkor a (kézenfekvő módon definiált) $\varphi_1 \times \varphi_2 : G \to GL(V_1 \times V_2)$ és $\varphi_1 \otimes \varphi_2 : G \to GL(V_1 \otimes V_2)$ reprezentációkhoz tartozó karakterek éppen $\chi_1 + \chi_2$ és $\chi_1\chi_2$. □

Természetesen ugyanez az állítás igaz, ha karakter helyett mindenütt általánosított karaktert mondunk.

Egy karakter nyilván konstans a csoport konjugáltosztályain, mivel

$$\chi(x^{-1}gx) = \mathrm{tr}\ \varphi(x^{-1}gx) = \mathrm{tr}\ \varphi(x)^{-1}\varphi(g)\varphi(x) = \mathrm{tr}\ \varphi(g) = \chi(g)$$

minden $x, g \in G$-re. A hasonló tulajdonsággal bíró $\psi : G \to \mathbb{C}$ leképezéseket *osztályfüggvény*eknek nevezzük. Az osztályfüggvények egy $\mathbb{C}$-vektorteret alkotnak, melynek dimenziója a G csoport konjugáltosztályainak száma.

Két osztályfüggvény „skalárszorzatát” a következőképpen definiáljuk:

$$[\psi_1, \psi_2] := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_1(g)\overline{\psi_2(g)}.$$

Ez valóban egy pozitív definit hermitikus sesquilineáris függvény, amint az közvetlenül látható.

1.3.2. Állítás. *Az irreducibilis karakterek az osztályfüggvények terének egy ortonormált bázisát alkotják a fent definiált skalárszorzatra nézve. Egy osztályfüggvény pontosan akkor karakter, ha az irreducibilis karakterekkel vett skalárszorzatai nemnegatív egész számok.*

Például, a ϱ_G reguláris karakterre $[\varrho_G, \psi] = \psi(1)$ ha ψ tetszőleges osztályfüggvény, speciálisan $\varrho_G = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G} \chi(1)\chi$. Az is következményként adódik, hogy abel-csoportnak minden irreducibilis karaktere lineáris.

1.3.3. Állítás. *Ha G egy permutációcsoport Ω-n, akkor*

$$[\pi, 1_G] = |\mathrm{orb}(G)|,$$

ahol π a permutációkarakter.

Bizonyítás. Azt kell bizonyítani, hogy $\sum_{g \in G} \pi(g) = |G|\,|\mathrm{orb}(G)|$. Az $\{(g, \alpha) \mid g \in G, \alpha \in \mathrm{fix}(g)\}$ halmaz számossága egyrészt egyenlő a baloldallal, ha csoportelemenként számoljuk össze, másrészt a stabilizátorok rendjeinek összegével, ha a pontokra összegzünk. Minden orbiton a stabilizátorok rendje azonos, indexük az orbit hossza, e kettő szorzata éppen $|G|$. □

1.3.4. Állítás. *Ha G tranzitív Ω-n, akkor tartalmaz fixpontmentes elemet.*

Bizonyítás. Az előző állítás szerint G elemeinek átlagosan 1 fixpontja van. Az egységelemnek ennél több is van, ezért lesz olyan elem is , aminek ennél kevesebb. □

1.3.5. Állítás. *Ha G egy tranzitív permutációcsoport Ω-n, akkor*

$$[\pi, \pi] = \mathrm{rk}(G).$$

Bizonyítás. A rang a G-orbitok száma $\Omega \times \Omega$-n, a fixpontok száma pedig, tudjuk, $|\mathrm{fix}_{\Omega\times\Omega}(g)| = |\mathrm{fix}_\Omega(g)|^2$. Használjuk az 1.3.3. Állítást. □

1.3.6. Állítás. *Ha a G csoport egy χ általánosított karaktere konstans az egységelemen kívül, azaz ha van olyan $c \in \mathbb{C}$, hogy minden $1 \neq g \in G$-re $\chi(g) = c$, akkor valamely $a, b \in \mathbb{Z}$ számokkal*

$$\chi = a\varrho_G + b1_G.$$

Bizonyítás. Egy $\chi = \mathrm{tr}\,\varphi$ karakter értékei algebrai egészek, ugyanis egy lineáris transzformáció nyoma a sajátértékeinek összege, és minden $g \in G$-re $\varphi(g)$ sajátértékei mind gyökei az $x^{|G|} - 1$ főpolinomnak (lévén $\varphi(g)^{|G|} = \mathrm{id}_V$), tehát algebrai egészek, és az algebrai egészek halmaza zárt az összeadásra.

A ϱ_G reguláris karakterrel skalárszorozva

$$[\chi, \varrho_G] = \frac{1}{|G|}\chi(1)|G|$$

az 1.3.2. Állítás szerint egész szám, azaz χ_1 egész. A triviális karakterrel skalárszorozva

$$[\chi, 1_G] = \frac{1}{|G|}\left(\chi(1) + (|G| - 1)c\right) \in \mathbb{Z}$$

amiből

$$c = \frac{|G|[\chi, 1_G] - \chi(1)}{|G| - 1} \in \mathbb{Q}$$

de c egy karakter értéke, tehát algebrai egész, ezért egész.

Legyen $b := c$; a $\chi - b1_G$ általánosított karakterre

$$[\chi - b1_G, 1_G] = \frac{\chi(1) - b}{|G|} =: a \in \mathbb{Z}$$

vagyis a $\chi - b1_G$ karakter az egységelemen kívül azonosan 0, az egységelemen felvett értéke pedig $\chi(1) - b = a|G|$, vagyis $\chi - b1_G$ megegyezik a reguláris karakter a-szorosával, ezzel a bizonyítás kész. □

2. fejezet

Éles permutációcsoportok

2.1. A definíció

H. Blichfeldt alábbi századeleji eredményét [5] M. Kiyota [14] fedezte föl újra 1979-ben.

2.1.1. Lemma. *Ha $G \leq S_n$ egy véges permutációcsoport, akkor*

$$|G| \,\Big|\, \prod_{l \in L(G)} (n - l) \;, \tag{2.1}$$

ahol $L(G) = \{|\mathrm{fix}(g)| \mid g \in G, g \neq 1\}$.

BIZONYÍTÁS. Az $L(G)$ halmaz a $\pi(g) = |\mathrm{fix}(g)|$ permutációkarakter $G \setminus \{1\}$-en felvett értékeit tartalmazza. Ha az

$$f_{L(G)}(x) := \prod_{l \in L(G)} (x - l)$$

polinomba behelyettesítjük π-t, akkor (az 1.3.1. állítás szerint) egy általánosított karaktert kapunk, amely az egységelemen kívül azonosan 0. Az 1.3.6. állítás alapján ebből következik, hogy $f_{L(G)}(\pi)$ a ϱ reguláris karakter (nyilván pozitív) egész számú többszöröse, illetve végeredményben

$$|G| = \varrho_G(1) \,\Big|\, f_{L(G)}(\pi(1)) = f_{L(G)}(n) = \prod_{l \in L(G)} (n - l)$$

□

2.1.1. Definíció. A G permutációcsoport *éles*, ha a (2.1) egyenletben az oszthatóság egyenlőséggel teljesül.

Mielőtt bármi érdemlegeset bebizonyítanék éles csoportokkal kapcsolatban, néhány példát adok illusztrációképpen.

2.2. Példák

A fenti definíció meglehetősen légbőlkapottnak tűnhet, ezért legelőször azt mutatom meg, hogy néhány régebbről ismert és vizsgált csoportosztály része az éles csoportok osztályának.

Egy-két egyszerű, de alapvető megállapítás következik.

2.2.1. Állítás. *Ha G éles, akkor G tranzitív $\Leftrightarrow 0 \in L(G)$.*

BIZONYÍTÁS. Ha G tranzitív, akkor van benne fixpontmentes elem. Megfordítva, ha G éles és $0 \in L(G)$, akkor tetszőleges G_α stabilizátorra $L(G_\alpha) \subseteq L(G) \setminus \{0\}$, továbbá (2.1) miatt fennáll $f_{L(G)}(n) = |G| = |G : G_\alpha| \cdot |G_\alpha| \leq |G : G_\alpha| f_{L(G_\alpha)}(n)$, így $n \leq |G : G_\alpha|$. □

2.2.2. Állítás. *Ha G tranzitív, akkor G éles $\Leftrightarrow G_\alpha$ éles.*

BIZONYÍTÁS. Legyen G tranzitív. A „csak akkor" irányhoz elég látnunk, hogy $L(G_\alpha) = L(G)\setminus\{0\}$. Minden $0 \neq l \in L(G)$ fixpontszámhoz van $g \in G$ úgy, hogy $|\mathrm{fix}(g)| = l$, és ezt az elemet G tranzitív volta miatt G_α-ba konjugálhatjuk, így ezt az irányt beláttuk.

A fenti két állítás alapján indukcióval az is belátható, hogy ha G éles, akkor G k-tranzitív $\Leftrightarrow$ $L(G) \supseteq \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Ha G tranzitív és G_α éles, akkor $|G| = n \cdot |G_\alpha| = n \cdot f_{L(G_\alpha)}(n)$, és a fentiek miatt ez egyenlő $f_{L(G)}(n)$-vel. □

2.2.3. Állítás. *Minden k pozitív egész számra az élesen k-tranzitív csoportok élesek.*

BIZONYÍTÁS. Ha G reguláris (élesen 1-tranzitív), akkor G éles, és mivel G élesen k-tranzitív $\Leftrightarrow$ G tranzitív és G_α élesen $(k-1)$-tranzitív, így az állítás k-ra vonatkozó teljes indukcióval és a 2.2.2. Állítás felhasználásával bizonyítható. □

Tehát az élesen tranzitív permutációcsoportok mind élesek. (Ez persze magyarázatot ad az elnevezésre is.) Az élesen tranzitív csoportok teljes listája ismert, a reguláris csoportoktól egészen S_n-ig és A_n-ig, melyek rendre élesen n- illetve élesen $(n-2)$-tranzitívak. Az élesen 2- illetve 3-tranzitív csoportok klasszifikációja megtalálható Huppert–Blackburn: *Finite groups III* című könyvében [11, Chapter XII,§3,§9]. Végül a közbülső esetekről szól az alábbi tétel:

2.2.1. Tétel. (Jordan, 1873) *Ha G egy n-fokú, élesen k-tranzitív permutációcsoport, ahol $n > k + 2 > 5$, akkor vagy $k = 4, n = 11, G = M_{11}$, vagy $k = 5, n = 12, G = M_{12}$.*

A fent bizonyított két állítás némiképp általánosítható, ha észrevesszük, hogy a 2.1.1. Definícióban illetve $f_{L(G)}(n)$-ben nem a fixponthalmaznak, hanem a tartónak a mérete a lényeges: $n - |\mathrm{fix}(g)| = |\mathrm{supp}(g)|$. Tehát a G összes eleme által fixen hagyott pontok nem számítanak az élesség szempontjából.

2.2.1. Definíció. A G permutációcsoport $*$-*tranzitív*, ha a tartóján tranzitív, és *élesen* $*$-*tranzitív*, ha minden tartóbeli pont stabilizátora triviális. A többszörös $*$-tranzitivitás illetve többszörös élesen $*$-tranzitivitás az 1.1.8. Állítás mintájára indukcióval definiálható.

Ezek után

2.2.4. Állítás. *Minden k pozitív egész számra az élesen k-$*$-tranzitív csoportok élesek.*

BIZONYÍTÁS. A 2.2.2. Állítás bizonyítása elmondható $*$-tranzitív G csoportokra is, ezért a 2.2.3. Állítás bizonyítása most is alkalmazható. □

2.2.2. Definíció. A $G \leq Sym(\Omega)$ permutációcsoportot *geometriai csoport*nak nevezzük, ha bármely $\Delta \subseteq \Omega$-ra $G_{(\Delta)}$ tranzitív a tartóján, $\mathrm{supp}(G_{(\Delta)})$-n.

2.2.5. Állítás. *G élesen k-$*$-tranzitív valamely k pozitív egész számra $\Leftrightarrow$ G geometriai.*

BIZONYÍTÁS. Egy csoport pontosan akkor geometriai, ha minden pontstabilizátora geometriai, ezért az „akkor" irány k szerinti indukcióval látható be. A „csak akkor" irányhoz tekintsünk egy általános $\Delta \subseteq \Omega$ részhalmazt és sorban stabilizáljuk az elemeit: amit kapunk az $*$-tranzitív vagy triviális, ami a bizonyítás végét jelenti. □

Az éles csoportok egy még nagyobb részosztályát tehát a geometriai csoportok alkotják, melyekről már teljes lista van: Zilber [22] az $|L(G)| \geq 7$ feltételnek eleget tevő geometriai csoportokat klasszifikálta, Maund [18] pedig a $2 \leq |L(G)| \leq 6$ esetet írta le.

Alábbiakban néhány konkrét példát mutatok geometriai csoportokra.

2.2.6. Állítás. *A $GL_n(q)$ lineáris csoport éles az $\mathbb{F}_q^n$ vektortéren értelmezett természetes hatásában.*

Bizonyítás. Néhány pont stabilizátora az általuk generált alteret hagyja fixen, egy azon kívüli pontot viszont bárhová el lehet vinni a lineáris függetlenség miatt, tehát $GL_n(q)$ geometriai, így éles. A fixpontszámok az alterek méretei, azaz $L(GL_n(q)) = \{1, q, q^2 \dots, q^{n-1}\}$. □

A 2.2.2. Állítás szerint az $AGL_n(q)$ affin csoport is éles (sőt geometriai), továbbá primitív. Egy nemtriviális eltolásnak nincs fixpontja, ezért $L(AGL_n(q)) = \{0, 1, q, \dots, q^{n-1}\}$.

2.2.7. Állítás. *Minden $n > 0$ egész számra és G reguláris csoportra $W(G, n) = G \operatorname{wr} S_n$ az imprimitív hatásában éles.*

Bizonyítás. $n = 1$-re az állítás triviális.

$W(G, n)$-ben egy pont stabilizátora nem mozdítja azt a kitüntetett blokkot, amelyben az adott pont fekszik, és G regularitása miatt pontonként is stabilizálja. Közben az összes többi kitüntetett blokkon tetszőlegesen hat, azaz fixpontjaitól eltekintve $W(G, n)_\alpha \simeq W(G, n-1)$, így az állítás teljes indukcióval bizonyítható.

Ugyanebből az indukcióból a fixpontszámokra $L(W(G, n)) = \{0, m, 2m, \dots, (n-1)m\}$ adódik, ahol $m = |G|$. □

2.2.8. Állítás. *Ha G abel és $n \geq 2$, akkor $W^*(G, n) := \{(g_i)\pi \in W(G, n) \mid g_1 g_2 \dots g_n = 1\} \leq W(G, n)$ éles.*

Bizonyítás. $|W^*(G, n)| = \frac{1}{|G|}|W(G, n)|$, mint az könnyen látható; az állítás következni fog, ha belátjuk, hogy $L(W^*(G, n)) = \{0, m, 2m, \dots, (n-2)m\}$.

$L(W^*(G, n)) \subseteq L(W(G, n)) \setminus \{(n-1)m\}$, mivel ha egy $g\pi$ elemnek ennyi fixpontja van, akkor π-nek legalább $n-1$, vagyis $\pi = 1$, továbbá $g = (g_i)$ legfeljebb egy helyen vehet föl nemtriviális értéket, de akkor a feltétel miatt mindenhol triviális, $g\pi = 1$. A többi fixpontszám viszont valóban előfordul: adott $0 \leq k \leq n-2$-re legyen $\pi \in S_n$ olyan, hogy $|\text{fix}(\pi)| = k$, ekkor $\pi \in W^*(G, n)$-nek pontosan km fixpontja van.

Ez a csoport is geometriai, amit az előző állításhoz hasonlóan lehet bizonyítani. □

A harmadik itt említhető csoportosztály a particionálható csoportok. Egy G csoport *partíció*ja részcsoportok egy olyan $\Pi = \{H_i \leq G \mid i \in I\}$ rendszere, melynek elemei páronként triviális metszetűek és uniójuk az egész G. G particionálható, ha van nemtriviális (nem egyelemű) partíciója. Ez ekvivalens egy nemtriviális *normális partíció* létezésével, azaz olyannal, amely minden részcsoporttal annak minden konjugáltját is tartalmazza: ugyanis partíció automorf képe is partíció (ezt úgy értve, hogy $\Pi^\sigma = \{H_i^\sigma\}$), és két partíció „közös finomítása" is partíció, vehetjük tehát egy partíciónak és az összes konjugáltjának a közös finomítását, az normális partíció lesz.

Iwahori és Kondo [13] 1965-ből származó, ideillő tétele ekvivalens átfogalmazásban így hangzik:

2.2.2. Tétel. *A G véges csoport partícionálható $\Leftrightarrow$ megadható G-nek egy olyan hűséges hatása, melyben $|L(G)| = 1$.*

Bizonyítás. Először tegyük föl, hogy adott G-nek egy ilyen hatása az Ω halmazon; tehát minden $1 \neq g \in G$-re $|\text{fix}(g)| = k$. $\Pi = \{G_{(\text{fix}(g))} \mid 1 \neq g \in G\}$ ekkor egy (normális) nemtriviális partíciója G-nek, mivel e részcsoportok nyilván lefedik G minden elemét, továbbá bármely kettőnek a metszete triviális, lévén a metszet elemei pontonként fixálják két különböző k-elemű halmaz unióját, vagyis k-nál több pontot, márpedig ezt jelen esetben csak az egységelem teszi meg.

Megfordítva, ha adott G-nek egy Π nemtriviális partíciója, amiről a tétel előtti megjegyzés szerint feltehetem, hogy normális, akkor definiálnom kell egy megfelelő hatást.

Legyen $\Pi' = \{H_1, \ldots, H_n\}$ egy reprezentánsrendszere a Π-beli részcsoportok konjugáltosztályainak. Jelölje m_i az $|N_G(H_i) : H_i|$ indexet, és legyen k az m_i számok legkisebb közös többszöröse, valamint $\alpha_i = \frac{k}{m_i}$. Minden $i = 1, \ldots, n$-re vegyük a H_i szerinti tranzitív reprezentációt α_i példányban. Egy $1 \neq g \in G$ elem fixpontszáma a H_i szerinti tranzitív reprezentációban 0, ha nincs benne H_i valamely konjugáltjában; ha benne van valamelyikben, akkor pontosan az egyikben (mivel ezek a részcsoportok triviális metszetűek, lévén a Π partíció elemei), tehát nincsen más fixpontja azokon kívül, amiket az egész részcsoport fixen hagy. Ezeknek száma $|N_G(H_i) : H_i| = m_i$. Minden $1 \neq g \in G$-re pontosan egy olyan $H_i \in \Pi'$ van, hogy az utóbbi eset teljesül, és így $\mathrm{fix}(g) = \alpha_i m_i = k$ lesz, vagyis $L(G) = \{k\}$. □

G élességéhez annak kell teljesülnie, hogy az alaphalmaznak $k + |G|$ darab pontja van. Rövid számolás mutatja, hogy $|\mathrm{fix}(1)| = k + l|G|$, ahol $k + l = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Nyilván nem feltétlenül $l = 1$, de az alábbi két konstrukcióban ez fennáll.

(i) Ha G Frobenius-csoport, akkor a Frobenius-mag és a Frobenius komplementumok egy normális partíciót adnak. $\Pi' = \{N, G_0\}$, ahol N a Frobenius-mag, G_0 pedig az egyik Frobenius-komplementum (vagy stabilizátor); ekkor $m_1 = |G_0|$, $m_2 = 1$, $k = |G_0|$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = |G_0|$. A hatás foka $\alpha_1|G : N| + \alpha_2|G : G_0| = |G_0| + |N| \cdot |G_0| = |G| + |G_0|$.

(ii) Ha G elemi abel-csoport, $G = Z_p^d$, amit mint az $\mathbb{F}_p^d$ vektorteret tekintünk, ennek nyilván vannak (normális, alterekből álló) partíciói. G irreducibilis (lineáris) karakterei a pontonkénti szorzással egy G^* csoportot alkotnak, amely izomorf G-vel. Legyen G^*-nak egy partíciója $\Pi = \{H_i \mid i = 1, \ldots, k\}$, ekkor a tetszőleges G csoportra teljesülő $\varrho_G = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G} \chi(1)\chi$ összefüggés miatt $\sum_{\chi \in H_i} \chi = \varrho_{G/G_i}$, ahol $G_i = \cap_{\chi \in H_i} \ker \chi$. Speciálisan, abban a hatásban, melynek permutációkaraktere $\pi = \sum_{i=1}^{k} \varrho_{G/G_i}$, $\pi = \varrho_G + (k-1) \cdot 1_G$, vagyis a hatás éles és $|L(G)| = 1$.

Éles csoportok meghatározásával foglalkozott Ito és Kiyota [12] valamint Brozovic [6]. Eredményeik az alábbi tételekben foglalhatók össze.

2.2.3. Tétel. *Legyen G éles csoport Ω-n, és $L(G) = \{l, l+1, \ldots, l+r-1\}$, ahol $r \geq 2$. Ekkor $|\mathrm{fix}(G)| = l$ és G élesen r-tranzitív $\Omega \setminus \mathrm{fix}(G)$-n.*

2.2.4. Tétel. *Legyen G éles csoport Ω-n, és $L(G) = \{l, l+2\}$. Ekkor teljesül az alábbiak valamelyike:*

(i) $|\mathrm{fix}(G)| = l$, G tranzitív 3-rangú $\Omega \setminus \mathrm{fix}(G)$-n, továbbá $G \simeq D_4$, S_4, $GL_2(3)$ vagy $PSL_2(7)$, ahol rendre $|\Omega \setminus \mathrm{fix}(G)| = 4, 6, 8, 14$;

(ii) $|\mathrm{fix}(G)| = l - 1$, G-nek két orbitja van $\Omega \setminus \mathrm{fix}(G)$-n, továbbá $G \simeq S_4$ vagy $PSL_2(7)$, ahol rendre $|\Omega \setminus \mathrm{fix}(G)| = 7, 15$.

Az (i) esetben S_4-nek két nemekvivalens 6-fokú éles reprezentációja is van.

2.2.5. Tétel. *Legyen G éles csoport Ω-n, és $L(G) = \{l, l+3\}$. Ekkor teljesül az alábbiak valamelyike:*

(i) $|\mathrm{fix}(G)| = l$, G tranzitív $\Omega \setminus \mathrm{fix}(G)$-n, továbbá $G \simeq (Z_3 \times Z_3) \rtimes Z_2$, $(Z_3 \times Z_3) \rtimes S_3$, $(Z_3 \times Z_3 \times Z_3) \rtimes S_4$, $Z_3 \times PSL_2(4)$ vagy $Z_3 \times PSL_2(7)$, ahol rendre $|\Omega \setminus \mathrm{fix}(G)| = 6, 9, 27, 15, 24$;

(ii) $|\mathrm{fix}(G)| = l - 2$, G-nek három orbitja van $\Omega \setminus \mathrm{fix}(G)$-n, és $G \simeq (Z_3 \times Z_3) \rtimes Z_2$, $|\Omega \setminus \mathrm{fix}(G)| = 8$.

Minden szemidirekt szorzat egyértelműen meghatározott, kivéve $(Z_3 \times Z_3) \rtimes S_3$-t, amelynek két nemekvivalens éles reprezentációja van; az egyik centruma triviális, a másik centrumának rendje 3.

2.2.6. Tétel. *Legyen G egy primitív éles permutációcsoport, melyre $|L(G)| = 2$ (természetesen $0 \in L(G)$). Ha G nem élesen 2-tranzitív, akkor a következő esetek lehetségesek:*

(i) G majdnem egyszerű;

(ii) $G \simeq ASO_3(q)$ az $\mathbb{F}_q^3$-on értelmezett természetes hatásában, ahol q páratlan prímhatvány.

Megjegyzendő, hogy $ASO_3(3) \simeq (Z_3 \times Z_3 \times Z_3) \rtimes S_4$ kétszer is szerepel a fenti listákban. Egyetlen további példát említenék még meg:

2.2.9. Állítás. *$\langle(12)(34), (1357)(2468)\rangle \leq S_8$ éles.*

Ez a csoport azért érdekes, mert p-csoport (a rendje $32 = 2^5$), és az általam ismert éles p-csoportok mind elemi abel-csoportok ennek az egynek a kivételével.

2.3. Konstrukciók

2.3.1. Állítás. *$G = \times_{i=1}^m G_i$ neméles az unióhatásban.*

Bizonyítás. Legyenek $L(G_i)$ elemei $\alpha_1^{(i)} < \ldots < \alpha_{d_i}^{(i)}$, ekkor (2.1) szerint $|G_i| \leq \prod_{j=1}^{d_i}(n_i - \alpha_j^{(i)})$, ahol persze $n_i = |\Omega_i|$. Válasszuk a $g_i \in G_i$ elemeket úgy, hogy

$$|\mathrm{fix}(g_i)| = \begin{cases} n_i, & 1 \leq i < k \\ \alpha_j^{(k)}, & i = k \\ \alpha_1^{(i)}, & k < i \end{cases} \qquad (k = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, d_k)$$

fennálljon. Ekkor a $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m) \in G$ elem fixpontszáma $\sum_{i=1}^{k-1} n_i + \alpha_j^{(k)} + \sum_{i=k+1}^m \alpha_1^{(i)}$. Ezek az értékek különbözőek, ugyanis ha két ilyen elemre $|\mathrm{fix}(g)| = |\mathrm{fix}(g')|$ és feltehetően $k' > k$, akkor láthatóan minden $i = 1, \ldots, m$-re $|\mathrm{fix}(g_i)| = |\mathrm{fix}(g_i')|$ teljesül, tehát az összeadandóknak is külön-külön egyenlőeknek kell lenniük.

Ezzel, ha G éles lenne,

$$\prod_{i=1}^m |G_i| = |G| \geq \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{d_k} \left((n_k - \alpha_j^{(k)}) + \sum_{i=k+1}^m (n_i - \alpha_1^{(i)}) \right) >$$
$$> \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{d_k} (n_k - \alpha_j^{(k)}) \geq \prod_{k=1}^m |G_k|,$$

ami ellentmondás; a szigorú egyenlőtlenség azért teljesül, mert $m \geq 2$ és $n_m - \alpha_1^{(m)} > 0$. □

2.3.2. Állítás. *$G = \times_{i=1}^m G_i$ éles a szorzathatásban $\Rightarrow$ G_i reguláris.*

Bizonyítás. Amiatt, hogy a direkt szorzat „zárójelezhető”, továbbá mert $G \times H$ pontosan akkor reguláris a szorzathatásban, ha G és H is reguláris, az állítást elegendő $m = 2$-re bebizonyítani.

Legyen tehát $G \times H$ éles. Érvényes a $|\mathrm{fix}((g,h))| = |\mathrm{fix}(g)|\,|\mathrm{fix}(h)|$ összefüggés. Ha G foka n és $L(G)$ elemei $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{r-1}$, $\alpha_r := n$, valamint H foka m és $L(H)$ elemei $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{s-1}$, $\beta_s := m$, akkor (2.1) és a feltétel alapján

$$|G| \leq \prod_{i=1}^{r-1}(n - \alpha_i),\ |H| \leq \prod_{j=1}^{s-1}(m - \beta_j) \text{ és } |G \times H| \geq \prod_{i,j}{}' (mn - \alpha_i\beta_j)$$

ahol a harmadik esetben csak a különböző értékű tényezőket szorozzuk össze.

Feltehetően $r \geq s$. Könnyen látható, hogy ekkor az $\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \ldots, \alpha_{s-1}\beta_{s-1}, \alpha_s m, \ldots, \alpha_{r-1}m$ szorzatok páronként különbözőek. Mivel $mn - \alpha_i\beta_j = n(m-\beta_j) + \beta_j(n-\alpha_i)$, a harmadik egyenlőtlenség így írható:

$$|G \times H| \geq \prod_{i=1}^{s-1}(n(m-\beta_i)+\beta_i(n-\alpha_i)) \cdot \prod_{i=s}^{r-1} m(n-\alpha_i) \geq$$
$$\geq n^{s-1}\prod_{i=1}^{s-1}(m-\beta_i)\cdot m^{r-s}\prod_{i=s}^{r-1}(n-\alpha_i) \geq m^{r-s}\prod_{j=1}^{s-1}(m-\beta_j)\prod_{i=1}^{r-1}(n-\alpha_i) \geq$$
$$\geq m^{r-s}|G||H|.$$

Ebből azonnal $r = s$, azaz

$$|G \times H| \geq n^{r-1}\prod_{j=1}^{s-1}(m-\beta_j) \geq |G|\,|H|\,,$$

és emiatt $r = 1$ és $\alpha_1 = 0$. Ugyanezt G és H szerepének felcserélésével végigjátszva (ezt szabad, mert most már tudom, hogy $s \geq r$) $s = 1$, $\beta_1 = 0$ is adódik, tehát G és H szemireguláris ak. Végül az élesség miatt $|G \times H| \geq (mn - \alpha_1\beta_1) = mn$, tehát G és H regulárisak. □

2.3.3. Állítás. *G wr H éles az imprimitív hatásban $\Rightarrow$ G reguláris, H szimmetrikus.*

Bizonyítás. Legyen G foka n, H foka m. Azt bizonyítom be, hogy ha $G^m \leq X \leq G$ wr H éles, akkor G reguláris, $H = S_m$ és $X = G$ wr H.

Legyenek $L(G)$ elemei $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{r-1}$, $\alpha_r := n$. A fenti 2.3.1. Állítás bizonyítása alkalmazható $B = G^m$-re, így $L(X)$-ben vannak az $(k-1)n + \alpha_j + (m-k)\alpha_1$ $(k = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, r-1)$ páronként különböző fixpontszámok. Ezzel

$$|G \text{ wr } H| \geq |X| \geq \prod_{k=1}^{m}\prod_{j=1}^{r-1}(mn-(k-1)n-\alpha_j-(m-k)\alpha_1) =$$
$$= \prod_{k=1}^{m}\prod_{j=1}^{r-1}((n-\alpha_j)+(m-k)(n-\alpha_1)) \geq m!\prod_{k=1}^{m}\prod_{j=1}^{r-1}(n-\alpha_j) \geq |H|\,|G|^m\,.$$

(Az utolsóelőtti becslésnél a $j = 1$ tényezőkből kiemeltem $(m-k+1)$-et, a többinél az $(m-k)(n-\alpha_1) \geq 0$ becslést alkalmaztam.) Azonnal adódik, hogy $H = S_m$, G éles és $X = G$ wr H. Ha $m \geq 2$ és $r - 1 \geq 2$, akkor a $k = 2$, $j = 2$ tényezőt szigorúan csökkentem a fenti becsléssel, így $r-1 = |L(G)| = 1$. Ha $\alpha_1 \neq 0$, akkor tekintek egy $\pi \in H = S_m$ elemet úgy, hogy $|\text{fix}(\pi)| = 0$; ekkor $|\text{fix}((1, \ldots, 1)\pi)| = 0$, és ez a fixpontszám nem szerepel a fenti szorzatban, pedig $(1, \ldots, 1)\pi \in X$, ez ellentmondás. Tehát $\alpha_1 = 0$, $|G| = n$, azaz G reguláris. □

2.3.4. Állítás. *$G^m \leq X \leq G$ wr S_m éles a szorzathatásban $\Rightarrow$ $G \leq S_n$ szemireguláris.*

Bizonyítás. A korábban elvégzett vizsgálat azt mutatta, hogy

$$|\text{fix}(g\pi)| = \prod_{\text{orb}(\pi)} |\text{fix}(\gamma(\sigma_i))|\,,$$

vagyis az elvileg lehetséges értékek $\prod_{i=1}^{\text{orb}(\pi)} |\text{fix}(\gamma_i)|$ ahol $\gamma_i \in G$ és $\pi \in S_m$.

Legyenek $(0 = \alpha_0 <)\ \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots \alpha_d < n$ a G-beli fixpontszámok, és tegyük föl, hogy $d \geq 1$, azaz G nem szemireguláris. Tekintsük a $g1 \in G^m$ elemek fixpontszámait: $|\text{fix}(g1)| = \prod_{i=1}^{m} |\text{fix}(g_i)|$, és itt minden tényező vagy 0 (ez nem érdekes), vagy α_i, vagy n, de nem mind n (mert az nem is számít). Biztosan szerepelnek és különböznek tehát a következők, a 2.3.1. Állítás analógiájára:

$\alpha_1^i\alpha_j n^{m-i-1}$ $(0 \le i \le m-1, 1 \le j \le d)$, melyeket felülről becsülve $\alpha_1^i\alpha_j n^{m-i-1} \le \alpha_d^{i+1}n^{m-i-1}$. Ezzel

$$\begin{aligned}|X| \ge \prod_{g\pi\in X}{}'(n^m - |\mathrm{fix}(g\pi)|) &\ge \prod_{g\in G^m}(n^m - |\mathrm{fix}(g1)|) \ge \\ \ge (n^m)(n^m-\alpha_d n^{m-1})^d(n^m-\alpha_d^2 n^{m-2})^d &\dots (n^m-\alpha_d^m)^d \\ = (n^m)n^{(m-1)+\dots+1}(n-\alpha_d)^d(n^2-\alpha_d^2)^d &\dots (n^m-\alpha_d^m)^d \\ \ge (n^m)n^{\frac{m(m-1)}{2}}(n-\alpha_d)^{md}(2\alpha_d)^d &\dots (m\alpha_d^{m-1})^d \\ = (n^m)n^{\frac{m(m-1)}{2}}(m!)^d(n-\alpha_d)^{md}\alpha_d^{d\frac{m(m-1)}{2}}&.\end{aligned}$$

Mivel $\alpha_d \le n-2$, és így $(n-\alpha_d)\alpha_d \ge n-1 \ge n-\alpha_i$, továbbá ha föltesszük, hogy $m \ge 3$, amikor is α_d kitevője legalább m, akkor

$$\prod_{g\pi\in X}{}'(n^m - |\mathrm{fix}(g\pi)|) \ge (n^m)(m!)^d n^{\frac{m(m-1)}{2}}\prod_{i=1}^d (n-\alpha_i)^m, \tag{2.2}$$

és itt n kitevője 1-nél nagyobb; másrészt

$$|X| \le |G \text{ wr } S_m| = |G|^m|S_m| \le (n^m)m!\prod_{i=1}^d(n-\alpha_i)^m.$$

Mindkét becslésben az n^m tényező pontosan akkor szerepel, ha $0 \in L(G)$. Tehát $m \ge 3$ esetén az állítás igaz.

$m = 2$ esetén a szorzat legalább

$$(n^2)(n^2-\alpha_1 n)\dots(n^2-\alpha_d n) = (n^2)n^d\prod_{i=1}^d(n-\alpha_i) > (n^2)\prod_{i=1}^d(n-\alpha_i)^2 \ge |G|^2,$$

és szerepel még az $n^2-\alpha_1^2 = (n-\alpha_1)(n+\alpha_1) > 2n$ faktor, így a szorzat nagyobb mint $2|G|^2 = |G \text{ wr } S_2|$, kész. □

3. fejezet

Primitív permutációcsoportok

3.1. Az O'Nan-Scott tétel

Az O'Nan-Scott tétel egyik ekvivalens alakjában a szimmetrikus csoport maximális részcsoportjai szerepelnek. Az első, triviális megállapítás ebben a témakörben a következő:

3.1.1. Állítás. *Legyen $G \leq S_n$ maximális részcsoport. Az alábbiak valamelyike teljesül:*

(i) G intranzitív, $G \simeq S_k \times S_{n-k}$ az unióhatással valamely $1 \leq k < \frac{n}{2}$-re;

(ii) G imprimitív, $G \simeq S_a \text{ wr } S_b$ az imprimitív hatással, ahol $ab = n$, $a > 1$, $b > 1$;

(iii) G primitív.

Az O'Nan-Scott-tétel sokak (Michael Aschbacher, Peter Cameron, Martin Liebeck, Cheryl Praeger, Jan Saxl és mások) által átdolgozott és javított változata a fenti harmadik esetet bontja tovább osztályokra. Így végeredményben a primitív permutációcsoportok klasszifikációját kapjuk.

A mondott klasszifikáció a csoport talpát használja segédeszközül. Egy G absztrakt csoport *talpa* a minimális normálosztói által generált részcsoport, ennek jele $\mathrm{Soc}\, G$. Ez nyilván karakterisztikus részcsoportja G-nek (azon felül, hogy normálosztó).

Két minimális normálosztó mindig centralizálja egymást: egyrészt $[N, K] \leq N \cap K$, mivel $n^{-1}k^{-1}nk = k^{-n}k = n^{-1}n^k$, másrészt $N \cap K$ normálosztó G-ben, ami N és/vagy K minimalitása miatt csak triviális lehet. Indukcióval ki lehet választani néhány minimális normálosztóját G-nek, hogy a talp azok direkt szorzata legyen.

Egy $N \lhd G$ minimális normálosztó nem tartalmaz nemtriviális karakterisztikus részcsoportot, tehát *karakterisztikusan egyszerű*. Ekkor $N \simeq \times_{i=1}^{k} T_i$, ahol a T_i csoportok izomorfak és egyszerűek, k pozitív egész. Ha N abel, akkor $T_i \simeq Z_p$ valamely p prímre és N elemi abel p-csoport.

3.1.2. Állítás. *Legyen G primitív permutációcsoport, és $N \lhd G$ minimális normálosztó. Ekkor az alábbiak valamelyike teljesül:*

(i) N reguláris elemi abel-csoport, $\mathrm{Soc}\, G = N$;

(ii) N reguláris nemabel, $C_G(N) \simeq N$ és $\mathrm{Soc}\, G = N \times C_G(N)$;

(iii) N nemabel, $C_G(N) = 1$ és $\mathrm{Soc}\, G = N$.

Bizonyítás. Normálosztó centralizátora is normálosztó, tehát $C := C_G(N) \lhd G$. Primitív csoport nemtriviális normálosztója tranzitív, tehát N tranzitív. Ekkor C szemireguláris; ha $C \neq 1$, akkor reguláris is, de akkor $N \leq C_G(C)$ miatt N is szemireguláris, tehát reguláris. Ha most $N \cap C \neq 1$, akkor ez egy nemtriviális normálosztó az N minimális normálosztóban, amiből végső soron $N \leq C$ következik. C reguláris normálosztó volt, ezért valódi része nem lehet tranzitív és így normálosztó sem, vagyis $N = C$, N abel. Ha $N \cap C = 1$, akkor $N \times C \leq \mathrm{Soc}\, G$, mivel C is minimális normálosztó a fentiek miatt. Végül ha $K \lhd G$ egy másik minimális normálosztó, akkor $[N, K] \leq N \cap K = 1$ miatt $K \leq C$, ezzel a bizonyítás kész. □

Megjegyzendő, hogy ugyanennek az állításnak a 2-tranzitív csoportokra vonatkozó, Burnside által a századelőn bizonyított analogonja sokkal nagyobb megszorítást jelent a 2-tranzitív csoportoknak mind absztrakt, mind permutációelméleti szerkezetére.

3.1.1. Tétel. (Burnside) *Legyen G 2-tranzitív csoport. Ekkor G-nek egyetlen minimális normálosztója van (ami így megegyezik a talppal), továbbá a következők egyike teljesül:*

(i) Soc G *reguláris elemi abel-csoport;*

(ii) Soc G *primitív nemabel egyszerű csoport.*

Most rátérek a primitív csoportok fentebb említett osztályainak leírására.

Affin csoportok. Itt S reguláris elemi abel, $S \simeq Z_p^d$. Reguláris csoport normalizátora, melyet a csoport *holomorf*jának is neveznek, stabilizátorként tartalmazza a csoport teljes automorfizmuscsoportját. Jelen esetben, mivel S felfogható egy $\mathbb{F}_p$ fölötti d dimenziós vektortérnek, automorfizmusai a nemelfajuló lineáris leképezések, azaz $GL_d(p)$ elemei. S elemei eltolásként hatnak ezen a vektortéren, így a normalizátor $AGL_d(p)$ a természetes hatásában. Az $X \leq AGL_d(p)$ csoport affin típusú primitív, ha tartalmazza az eltolások csoportját (azaz S-t), továbbá az origó stabilizátora, $X_0 = X \cap GL_d(p)$ irreducibilisen hat a vektortéren.

Majdnem egyszerű csoportok. Ha $S \simeq T$ egy nemabel egyszerű csoport, akkor szükségszerűen megegyezik X egyetlen minimális normálosztójával. Tehát a 3.1.2. Állítás (iii) esete forog fenn. X konjugálással hat S-en, mely hatásnak a magja $C_X(S)$, ami most triviális, vagyis X beágyazódik Aut S-be. Megbocsátható pongyolasággal írható $S \leq X \leq \mathrm{Aut}\ S$. Megköveteljük továbbá, hogy S nem reguláris, vagyis $X_0 \cap S \neq 1$.

Diagonális hatású csoportok. Legyen T egy véges egyszerű csoport, $A = \mathrm{Aut}\ T$, $k \geq 2$, és tekintsük a

$$W = \{\pi g \mid \pi \in S_k, g_i g_j^{-1} \in T \text{ minden } 1 \leq i,j \leq k\text{-ra}\} \leq A \text{ wr } S_k$$

csoportot. W talpa $S = \mathrm{Soc}\ W = T^k$, és $W \simeq T^k.(\mathrm{Out}\ T \times S_k)$. A hatást definiálandó megadom a stabilizátort:

$$W_0 = \{\pi g \mid \pi \in S_k, g_i = g_j \text{ minden } 1 \leq i,j \leq k\text{-ra}\}$$

Ekkor $W_0 \simeq A \times S_k$, és a hatás foka $n = |T|^{k-1}$.

Az $X \leq W$ részcsoport diagonális hatású primitív, ha $S \leq X$ és az X által az S koordinátáin létesített $P \leq S_k$ hatásra (vagyis $P = \{\pi \mid \pi g \in X\} \leq S_k$, és így $X \leq T^k.(\mathrm{Out}\ T \times P)$) vagy (i) P primitív, vagy (ii) $k = 2$ és $P = 1$ teljesül.

Az (i) esetben X egyetlen minimális normálosztója T^k, a (ii) esetben $X \simeq T^2$, két minimális normálosztója van és mindkettő hatása reguláris – ezek valójában $\varrho(T)$ és $\lambda(T)$, a jobb- illetve baloldali reguláris reprezentációi T-nek.

Szorzathatású csoportok. Legyen G egy m fokú, majdnem egyszerű vagy diagonális hatású primitív csoport, és tekintsük a $W = G$ wr S_k koszorúszorzatot annak szorzathatásában. W talpa $S = \mathrm{Soc}\ W = (\mathrm{Soc}\ G)^k \leq G^k$. Az $X \leq W$ részcsoport szorzathatású primitív, ha tartalmazza S-t, és tranzitívan hat annak (Soc G-vel izomorf) minimális normálosztóin.

Ekkor X-nek ugyanannyi minimális normálosztója van, mint G-nek, tehát legfeljebb kettő, és ha pontosan kettő (ez akkor áll fenn, ha G diagonális hatású és a fenti (ii) eset teljesül), akkor mindkettő reguláris.

Csavart koszorúhatású csoportok. Az O'Nan-Scott tétel első verziójából kimaradt a reguláris nemabel talp esete. Ilyenkor az X primitív csoport egy $T\mathrm{twr}_{\varphi}P$ csavart koszorúszorzat, amit most vázlatosan definiálok.

Legyen adva a T egyszerű csoport, a P csoport és annak egy $Q \leq P$ részcsoportja, melynek indexe $|P : Q| = k$, valamint egy $\varphi : Q \to \mathrm{Aut}\ T$ homomorfizmus, melyre $\mathrm{Im}\ \varphi \geq \mathrm{Inn}\ T$. A

$$B := \{f : P \to T \mid f(pq) = f(p)^{\varphi(q)} \text{ ha } p \in P, q \in Q\}$$

halmaz a függvények pontonkénti szorzásával csoporttá tehető, mely csoport izomorf T^k-val. Legyen P hatása B-n

$$f^p(x) = f(px)\ (p, x \in P),$$

ekkor $X = T\mathrm{twr}_{\varphi}P := B \rtimes P$ szemidirekt szorzat. X hatását úgy definiálom, hogy megadom a stabilizátort: legyen $X_0 = P$. A hatás foka $n = |T|^k$, B az egyetlen minimális normálosztója X-nek és a hatása reguláris.

X csavart koszorúhatású primitív csoport, ha primitív, azaz ha $P \leq X$ maximális részcsoport. Erre szükséges és elégséges feltételeket valamint egy általános konstrukciót R. Baddeley [4] adott.

Az O'Nan-Scott tétel így hangzik:

3.1.2. Tétel. (O'Nan-Scott) *Ha G egy primitív permutációcsoport, akkor permutációizomorf a fenti öt osztályba eső X csoportok valamelyikével.*

Annak oka, hogy a szorzathatású csoportokat csak majdnem egyszerű illetve diagonális típusú csoportokra értelmezik, abban rejlik, hogy affin illetve csavart koszorúhatású csoport minden felfújása is affin, illetve csavart koszorúhatású.

Az O'Nan-Scott tétel információt szolgáltat a primitív csoportok szerkezetéről és hatásáról, a (nemabel) egyszerű csoportok tulajdonságainak függvényében. Ha egy permutációcsoportokra vonatkozó kérdést vissza tudunk vezetni tranzitív illetve primitív csoportokra, akkor az O'Nan-Scott tétel az egyszerű csoportok vizsgálatára redukálja a problémát, amelyet így a Klasszifikáció alkalmazásával lehet megoldani. Számos régi kérdésben ilyen módszerrel értek el új eredményeket a közelmúltban.

3.2. A minimálfok

Adott G permutációcsoportban szeretnénk információt kapni a $g \in G$ elemek fixpontszámairól illetve tartóméretéről. A felső becslés triviális, ha G tranzitív, mert ekkor biztosan van fixpontmentes elem. Az alsó becslés viszont messzire vezet.

3.2.1. Definíció. A G permutációcsoport *minimálfoka* $\mu(G) := \min\{|\mathrm{supp}(g)| \mid 1 \neq g \in G\}$.

Az éles csoportok esetében a minimálfokot a következő becslésben lehet hasznosítani: mivel a 2.1.1. Definíció értelmében $|G| = \prod_{l \in L(G)}(n - l)$, itt $n \geq n - l \geq \mu(G)$, tehát

$$n^{|L(G)|} \geq |G| \geq \mu(G)^{|L(G)|} \tag{3.1}$$

(A felső becslés természetesen neméles csoportokra is teljesül.) Ez egy összefüggést ad az éles csoport mérete és a fixpontszám-halmaza mérete között. Ha a $\mu(G)$ minimálfok helyett az n fok valamely függvénye szerepelne az egyenlőtlenség jobb oldalán, akkor egy $|G|$-re vonatkozó becslésből $|L(G)|$-re vonatkozó becslést tudunk nyerni és viszont. Ehhez a minimálfokot a fok függvényében kell alulról becsülni.

Nyilván minden (nem túl kicsi) n-re $\mu(S_n) = 2$ és $\mu(A_n) = 3$. Ha G tranzitív, akkor ennél jobbat nem is tudunk mondani, amint azt a $W(Z_2, k)$ csoport példája mutatja. Ha viszont G primitív, akkor igen:

3.2.1. Állítás. *Ha $G \leq S_n$ primitív és $\mu(G) = 3$, akkor $G \geq A_n$, és ha $\mu(G) = 2$, akkor $G = S_n$.*

Ez természetesen még elég messze van a foktól való függéstől. A továbbiakhoz szükség van a következő definícióra.

3.2.2. Definíció. Az Ω-n ható G csoportnak $\Sigma \subseteq \Omega$ egy *bázisa*, ha $G_{(\Sigma)} = 1$. Jelölje $b(G)$ a legkisebb előforduló bázisméretet.

3.2.2. Állítás. *Fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:*

(i) $n^{b(G)} \geq n(n-1)\dots(n-b+1) \geq |G| \geq 2^{b(G)}$

(ii) Ha G tranzitív, akkor $n \leq b(G)\mu(G)$

Fentiek miatt a $b(G)$-re adott minden felső becslés ad egy alsó becslést a minimálfokra (és egy felső becslést G rendjére).

Babai László egy kombinatorikus átfogalmazást alkalmazva vezette le az alábbi eredményt [2]:

3.2.1. Tétel. (Babai, 1981) *Ha $G \leq S_n$ primitív, nem 2-tranzitív csoport, akkor $\mu(G) \geq \frac{1}{2}\sqrt{n}$.*

A klasszifikáció segítségével pontosítani lehet a konstanst, $\mu(G) \geq 2(\sqrt{n} - 1$ is teljesül minden primitív G-re.

Martin Liebeck és Jan Saxl az O'Nan-Scott tételt használva a kitevőt is növelni tudta [17]:

3.2.2. Tétel. (Liebeck–Saxl, 1991) *Minden $G \leq S_n$ primitív csoportra teljesül a következők valamelyike:*

(i) $\mu(G) \geq \frac{n}{3}$;

(ii) G felfújása egy olyan majdnem egyszerű primitív csoportnak, melynek talpa valamely alternáló csoport a k-részcsoportokon való hatásában valamely k-ra.

Ez a becslés lényegében helyesen mutatja a szituációt: a legtöbb primitív csoportnak minden eleme a pontoknak legalább konstans hányadát mozgatja. Számítógépes eszközökkel a konstans hányadot is növelni lehetett, habár ekkor további kivételek jelentek meg [10]:

3.2.3. Tétel. (Guralnick–Magaard, 1998) *Ismert kivételektől eltekintve minden $G \leq S_n$ primitív csoportra $\mu(G) \geq \frac{n}{2}$.*

A (javított) Babai-féle becslésből a következők vezethetők le:

$$n^{\frac{1}{2}|L(G)|} \leq |G| \leq n^{|L(G)|} \text{ illetve } \frac{\log|G|}{\log n} \leq |L(G)| \leq 2\frac{\log|G|}{\log n} \tag{3.2}$$

3.3. Primitív csoportok mérete

A minimálfok segítségével erős alsó becslés nyerhető a primitív éles csoportok rendjére illetve a fixpontszám-halmaz méretére. A primitív csoportok rendjére vonatkozó felső becsléseket alkalmazva lehet egyes esetekben a nemélességet megállapítani.

Az első, klasszikus becslés mintegy száz évvel az O'Nan-Scott tétel előttről származik.

3.3.1. Tétel. (Bochert, 1889) *Minden $G \leq S_n$ valódi (azaz A_n-et nem tartalmazó) primitív csoportra $b(G) \leq \frac{n}{2}$, és így $|G| \leq n(n-1)\dots(n - \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1)$.*

Ez a becslés még elég durva: $\log|G|$ főtagja $cn\log n$, amely aszimptotikusan nem ad jobb eredményt, mint a triviális $|G| \leq n!$ becslés. Helmut Wielandt [21] eredménye lényegesen jobb:

3.3.2. Tétel. (Wielandt, 1969) *Ha $G \leq S_n$ primitív, nem 2-tranzitív csoport, akkor $|G| \leq C^n$ valamely $C > 0$ konstanssal ($C = 24$ választható).*

Ezt a becslést Cheryl Praeger és Jan Saxl [19] javította tovább:

3.3.3. Tétel. (Praeger–Saxl, 1980) *Ha $G \leq S_n$ valódi (A_n-et nem tartalmazó) primitív csoport, akkor $|G| \leq 4^n$.*

Legfőbb előnye ennek a becslésnek, hogy egyszerű, és minden primitív csoportra érvényes. Azonban még ennél többet is lehet mondani, Babai László kombinatorikus módszere az alábbi eredményt adja:

3.3.4. Tétel. (Babai, 1981) *Legyen $G \leq S_n$ primitív, nem 2-tranzitív csoport. Ekkor $b(G) \leq 4\sqrt{n}\log n$, és így $|G| \leq \exp(4\sqrt{n}(\log n)^2)$.*

2-tranzitív csoportokra Pyber László javította meg Babai László egy másik eredményét (lásd [3] illetve [20]).

3.3.5. Tétel. (Pyber, 1993) *Ha $G \leq S_n$ valódi 2-tranzitív csoport, akkor $b(G) \leq 72(\log n)^2$, amiből $|G| \leq \exp(72(\log n)^3)$.*

Az utóbbi két becslést összefoglalva, található olyan $C > 0$ konstans, hogy minden G valódi primitív csoportra $|G| \leq \exp(C\sqrt{n}\log^2 n)$.

Martin Liebeck [15] az O'Nan-Scott tétel és a klasszifikáció alkalmazásával a következő, még erősebb becslést vezette le:

3.3.6. Tétel. (Liebeck, 1984) *Minden $G \leq S_n$ primitív permutációcsoportra teljesül a következők valamelyike:*

(i) $b(G) < \frac{9}{\log 2}\log n$;

(ii) G felfújása egy olyan majdnem egyszerű primitív csoportnak, melynek talpa valamely alternáló csoport a k-részcsoportokon való hatásában valamely k-ra.

Azonnal adódnak a $\mu(G) > \frac{\log 2}{9}\frac{n}{\log n}$ illetve $|G| \leq n^{\frac{9}{\log 2}\log n}$ becslések a fenti (ii) pontban szereplő csoportok kivételével minden primitív csoportra. Érdekes, hogy itt is ugyanazok a kivételek lépnek fel, mint a 3.2.2. Tételben. Ez a tény azt tükrözi, hogy az alternáló csoportok és a Lie-típusú egyszerű csoportok jól elkülönülnek az aszimptotikus tulajdonságaik tekintetében (a sporadikus csoportok véges számuk miatt ebben a megfontolásban nem játszanak szerepet).

4. fejezet

A főtétel

4.1. A tétel és bizonyítása

Az éles permutációcsoportok leírásához részeredményt szolgáltatna a primitív éles permutációcsoportok meghatározása. Ahhoz, hogy egy G csoport élességét el lehessen dönteni, szükség van a $L(G)$ fixpontszám-halmazra, ezért hasznos lenne a szóbajöhető halmazok családját korlátozni. A primitív permutációcsoportok rendjére vonatkozó felső becslések a már látott módon korlátot adnak a fixpontszám-halmaz méretére, ha a vizsgált csoport éles, így kézenfekvő, hogy legelőször ezt a méretet kellene felülről becsülni. A végső cél a konstans méret lenne, ami biztosan elérhetetlen, ha nem teszünk kivételt, hiszen $|L(AGL_d(q))| = d+1$, és d a hatás fokának, q^d-nek a logaritmusával arányos. Ez a növekedési ütem viszont elérhető:

4.1.1. Tétel. *Ha az $X \leq S_n$ primitív csoport éles, akkor $|L(X)| \leq C \log n$ valamely $C > 0$ konstanssal.*

A (3.2) egyenlőtlenségek, illetve a 3.3.6. Tételnek a primitív csoportok méretére vonatkozó következménye miatt elegendő a kivételes alternáló csoportokra bebizonyítani, hogy a korlát ott is fennáll.

4.1.1. Állítás. *Ha az $X \leq S_n$ primitív éles csoport felfújása egy olyan G majdnem egyszerű primitív csoportnak, melynek talpa egy alternáló csoport a k-részhalmazokon való hatásában valamely k-ra, akkor $|X| \leq n^{C \log n}$, és a C konstans választható $\frac{\log 16}{16 \log^2 \frac{5}{4}} \approx 3.49$-nak.*

Bizonyítás. Adott tehát a G wr S_m szorzathatású csoport, ahol $A_r \leq G \leq \mathrm{Aut}\ A_r$, és itt A_r a k-részhalmazokon hat $(1 \leq k < \frac{r}{2})$. Továbbá $X \leq G$ wr S_m és X tartalmazza a csoport talpát, A_r^m-et. X foka $n = \binom{r}{k}^m$. X méretére felső becslés:

$$|X| \leq |\mathrm{Aut}\ A_r|^m m! \leq (2r!)^m m!.$$

Az alsó becsléshez felhasználjuk a (2.2) egyenlőtlenséget. Bár a 2.3.4. Állítás feltétele az volt, hogy X tartalmazza a teljes G^m csoportot, valójában csak annyit használtunk ki, hogy ennek egy H^m részét tartalmazza, ahol $H \leq G$, és hogy az $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ ennek a H csoportnak a fixpontszámai; ezért, ezeket a feltételeket megkövetelve jelen helyzetben is hasznát vehetjük.

Legyenek tehát az A_r csoport k-részhalmazokon való hatásában a fixpontszámok $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_d$, és most $d \geq 1$, mivel a hatás nem reguláris, viszont tranzitív, tehát a 0 fixpontszám valóban előfordul. (2.2) értelmében

$$|X| \geq n^{\frac{m(m-1)}{2}} m!^d \prod_{i=0}^{d} (n - \alpha_i)^m.$$

Fennáll továbbá (2.1) miatt

$$|A_r| = \frac{r!}{2} \leq \prod_{i=0}^{d}(n-\alpha_i).$$

A fenti három becslés összevetésével

$$n^{\frac{m(m-1)}{2}} m!^d \prod_{i=0}^{d}(n-\alpha_i)^m \leq 2^m r!^m m! \leq 4^m m! \prod_{i=0}^{d}(n-\alpha_i)^m$$

$$n^{\frac{m(m-1)}{2}} m!^{d-1} \leq 4^m$$

Az $m \geq 3$ helyettesítéssel $n \leq 4$ adódik, azaz $r \leq 4$, amikor is A_r nem egyszerű (vagy abel). A $m = 2$ esetről az 5.1.1. Állítás bizonyításában kiderül, hogy nem éles. Feltehetjük tehát a továbbiakban, hogy $m = 1$, azaz nem is történik koszorúszorzás.

Az $A_r \leq X \leq \mathrm{Aut}\ A_r$ csoportot vizsgáljuk tovább. Az $r \geq 7$ feltevéssel megint csak véges sok esetet zárunk ki; viszont ekkor már igaz, hogy $\mathrm{Aut}\ A_r = S_r$, vagyis $X = A_r$ vagy S_r, $|X| \leq r!$, és $k < \frac{r}{2}$.

Most meghatározok néhány fixpontszámot. Legyen először $\pi = (12\ldots 2i+1) \in A_r$, ahol tehát $3 \leq 2i+1 \leq r$. A π által fixen hagyott k-részhalmaz vagy teljes egészében π fixpontjaiból áll, vagy tartalmazza az egész $2i+1$-ciklust és még néhány fixpontot. Ezzel

$$|\mathrm{fix}_{\binom{r}{k}}(\pi)| = \binom{r-2i-1}{k} + \binom{r-2i-1}{k-2i-1}$$

Ha $k < 2i+1$, akkor a második binomiális együttható eltűnik, és ha $r-2i-1 < k$, akkor az első is; $k < 2i+1 \leq r-k$ esetén tehát csak az első taggal kell számolni.

Másodszor legyen $\pi = (12)(3\ldots 2j) \in A_r$ $(4 \leq 2j \leq r)$. A helyzet hasonló, csak valamivel bonyolultabb, mint előbb,

$$|\mathrm{fix}_{\binom{r}{k}}(\pi)| = \binom{r-2j}{k} + \binom{r-2j}{k-2} + \binom{r-2j}{k-2j+2} + \binom{r-2j}{k-2j}$$

$k+2 < 2j$ esetén eltűnik az utolsó két tag, $r-k < 2j$ esetén az első kettő is, vagyis $k+2 < 2j \leq r-k$ esetén csak az első két tagot kell figyelembe venni.

A két esetben összesen $r-2k-1$ fixpontszám keletkezik: a megfelelő $2i+1$ illetve $2j$ alakú számok száma eggyel nő, ha r-et növelem, kettővel csökken, ha k-t növelem, a -1 konstans empirikusan határozható meg. Fennáll viszont az egyenlőség veszélye, tehát hogy

$$\binom{r-2i-1}{k} = \binom{r-2j}{k} + \binom{r-2j}{k-2} = \binom{r-2j+2}{k} - 2\binom{r-2j}{k-1}$$

(A második egyenlőség a Pascal-háromszögben érvényes $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ összefüggésből vezethető le.) Azonnal adódik, hogy ekkor $r-2j \leq r-2i-1 \leq r-2j+2$, amiből $2i+1 = 2j-1$. A fenti egyenlőségek ennek tükrében így festenek:

$$\binom{r-2j+1}{k} = \binom{r-2j}{k} + \binom{r-2j}{k-1} = \binom{r-2j}{k} + \binom{r-2j}{k-2},$$

tehát az $r-2j$-edik sorban két egymás melletti binomiális együttható egyenlő, ami csak akkor lehetséges, ha ezek pont a sor közepén állnak. Vagyis $(k-1)+(k-2) = r-2j \Leftrightarrow 2j = r-2k+3$ (és r páratlan). Tehát minden (r,k) esetén legfeljebb egy egybeesés lehetséges.

Van tehát legalább $r-2k-2$ darab különböző fixpontszámom, amik nem nagyobbak $\binom{r-2}{k}$-nál: csökkentve i-t illetve j-t a fixpontszámokra kapott kifejezések értéke nyilván növekszik, és

$$\binom{r-3}{k} \leq \binom{r-2}{k}, \binom{r-2}{k} - 2\binom{r-4}{k-1} \leq \binom{r-2}{k}$$

Egy később bizonyítandó állítás szerint $A_r \leq X \leq \mathrm{Aut}\, A_r$ neméles a 2-részhalmazokon való hatásában, vagyis feltehetően $k \leq 3$. Ennek figyelembevételével

$$\binom{r}{k} - |\mathrm{fix}_{\binom{r}{k}}(\pi)| \geq \binom{r}{k} - \binom{r-2}{k} = \binom{r-1}{k-1} + \binom{r-2}{k-1} \geq$$
$$\geq \binom{r-1}{2} + \binom{r-2}{2} = (r-2)^2$$

Kaptuk tehát, hogy

$$r! \geq |X| \geq (r-2)^{2(r-2k-2)}$$

Az $s = r-2$ jelöléssel ebből

$$(s+2)! \geq s^{2s-4k}$$
$$2\log(s+2) + s\log s - s + \frac{1}{2}\log s + 1 \geq (2s-4k)\log s$$
$$2\log(s+2) + (4k + \frac{1}{2})\log s + 1 \geq s\log s + s$$
$$(4k + \frac{5}{2})\log s + 2 \geq s\log s + s$$
$$4k + \frac{5}{2} \geq s + \frac{s-2}{\log s}$$

(Itt egy helyen alkalmaztam a $\log(s+2) \leq \log s + \frac{1}{2}$ egyenlőtlenséget, ami $s \geq 4$-re igaz.) Ha $s \geq 14$, akkor $\frac{s-2}{\log s} \geq \frac{9}{2}$; ebből

$$r \geq 16 \Rightarrow 4k \geq r (\geq 2k)$$

Az $r \leq 15$ feltételnek eleget tevő csoportok nem élesek, amint az egyszerű számítással ellenőrizhető; feltehető tehát, hogy $\frac{r}{4} \leq k \leq \frac{r}{2}$. Az ennek a feltételnek eleget tevő $\binom{r}{k}$ binomiális együtthatók alulról becsülhetők r-nek egy exponenciális függvényével: mivel ilyen k-kra $\binom{r}{k} \geq \binom{r}{\lceil \frac{r}{4} \rceil}$, azt kell csak látni, hogy r-et növelve $\binom{r}{\lceil \frac{r}{4} \rceil}$ egy (1-nél nagyobb) konstanssal szorzódik.

$$\binom{4a+1}{a+1} = \binom{4a}{a} \cdot \frac{4a+1}{a+1}$$
$$\binom{4a+b}{a+1} = \binom{4a+b-1}{a+1} \cdot \frac{4a+b}{3a+b} \; (b = 1,2,3)$$

$a \geq 3$ esetén $\frac{4a+b}{3a+b} = 1 + \frac{1}{3+\frac{b}{a}} \geq 1 + \frac{1}{4}$, tehát a konstans választható $\frac{5}{4}$-nek; $r = 16$-ra $\binom{16}{4} \geq \left(\frac{5}{4}\right)^{16}$, ezért minden $r \geq 16$-ra és $\frac{r}{4} \leq k \leq \frac{r}{2}$-re $\binom{r}{k} \geq \left(\frac{5}{4}\right)^r$.

Végül, elegendően nagy $C > 0$ konstanssal

$$C\log^2 n = C\log^2\binom{r}{k} \geq C\log^2\left(\left(\frac{5}{4}\right)^r\right) =$$
$$= C\log^2\left(\frac{5}{4}\right) \cdot r^2 \geq r\log r \geq \log|S_r| \geq \log|X|.$$

Ezt kellett bizonyítani. □

A konstans alsó becsléséhez vegyük figyelembe, hogy

$$|G| \leq n^{C\log n} \Leftrightarrow C \geq \frac{\log|G|}{\log^2 n}$$

amit ha az $AGL_d(q)$ csoportokra alkalmazunk, aszimptotikusan $C \geq \frac{1}{\log q}$ az eredmény, tehát kis q-ra érdemes a korlátot meghatározni. Az (S_3-mal permutációizomorf) $AGL_1(3)$ csoportra $C \geq 1.48$. Mivel $\frac{9}{\log 2} > 9 > 2 \cdot 3.49$, így végeredményben a 4.1.1. Tételbeli konstans választható $\frac{9}{\log 2}$-nek.

5. fejezet

További eredmények

5.1. Szorzathatású csoportok

5.1.1. Állítás. *Ha az $X \le S_N$ primitív csoport egy majdnem egyszerű primitív csoport felfújása és éles, akkor $|X| \le N^C$, és a C konstans választható $3 + \frac{\log 6}{\log 125} \approx 3.38$-nak.*

Bizonyítás. Legyen a majdnem egyszerű csoport G, hatásának foka n, talpa $S = \mathrm{Soc}\ G$ (ekkor S egyszerű és $G \le \mathrm{Aut}\ S$), és $S^m \le X \le G \text{ wr } S_m$. Nyilván $|X| \le |G|^m m!$ és $N = n^m$.

A felső becsléshez felhasználom Aschbacher és Guralnick alábbi eredményét (lásd [1]):

5.1.2. Állítás. *Ha S nemabel egyszerű csoport és $H < S$, akkor $|\mathrm{Out}\ S| < |S : H|$.*

Ha ezt $H = G_\alpha$-ra alkalmazom, akkor, lévén $G/S \le \mathrm{Out}\ S$, $|G : S| < n$, vagyis $|G| < n|S|$. Ezzel

$$|X| \le |G|^m m! \le |S|^m n^m m!$$

Az alsó becsléshez újból a (2.2) egyenlőtlenséget használom föl, az S egyszerű csoportra vonatkoztatva:

$$|X| \ge n^{\frac{m(m-1)}{2}} m!^d \prod_{i=0}^{d} (n - \alpha_i)^m$$

Természetesen $|S| \le \prod_{i=0}^{d} (n - \alpha_i)$. Az utolsó három egyenlőtlenség összevonásával

$$n^{\frac{m(m-1)}{2}} m!^d \prod_{i=0}^{d} (n - \alpha_i)^m \le \prod_{i=0}^{d} (n - \alpha_i)^m \cdot n^m m!$$

azaz

$$n^{\frac{m(m-3)}{2}} m!^{d-1} \le 1$$

Feltehetően $d \ge 1$ (S hatása nem reguláris), $m \ge 2$ és $n \ge 5$. $m \ge 4$ esetén fenn kell álljon $n^2 \cdot 24^{d-1} \le 1$, ami láthatóan sosem igaz; tehát $m = 2$ vagy $m = 3$.

Ha $m = 3$, akkor $6^{d-1} \le 1$ kell teljesüljön, amiből $d = 1$. (2.1) miatt ekkor $|S| \le n(n-1) < n^2$, $|G| < n|S| < n^3$ és $|X| < (n^3)^3 \cdot 6 \le N^C$ alkalmas $C > 0$ konstanssal.

Ha $m = 2$, akkor a (2.2) egyenlőtlenség helyett pontosabb becslést alkalmazunk. S fixpontszámai $0 = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$, ezért X-nek fixpontszámai lesznek $0, \alpha_1^2, \alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_1\alpha_d, \alpha_1 n, \ldots, \alpha_d n$.

$$n^2 \prod_{i=1}^{d} (n^2 - \alpha_1\alpha_i) \prod_{i=1}^{d} (n^2 - \alpha_i n) \le |X| \le 2|G|^2 \le 2|S|^2 n^2 \le 2n^2 \prod_{i=1}^{d} (n - \alpha_i)^2$$

Az $n^2-\alpha_i n = n(n-\alpha_i) \geq (n-\alpha_i)^2$ becsléssel ebből

$$\prod_{i=1}^{d}(n^2-\alpha_1\alpha_i) \leq 2$$

ami sosem teljesül, mivel $\alpha_i \leq \alpha_d \leq n-2$, és így $n^2-\alpha_1\alpha_i \geq n^2-(n-2)^2 = 4(n-1) \geq 16$. □

Ez az állítás azt aknázza ki, hogy egy majdnem egyszerű csoport talpának (a fokhoz képest) kicsi az indexe. A diagonális hatású csoportokban a talp fölött egy teljes szimmetrikus csoport is lehet, melynek rendje faktoriális, miközben a fok csak exponenciálisan nő; ezért a több esetben oly hasznos (2.2) ebben az esetben nem alkalmazható.

5.2. Diagonális hatású csoportok

Először meghatározandók a W csoportbeli πg elemek fixpontszámai. Ehhez össze kell számolni azon σa elemeket, amelyekre

$$W_0(\sigma a) = W_0(\sigma a)(\pi g) \Leftrightarrow W_0 \ni (\sigma a)(\pi g)(\sigma a)^{-1},$$

mivel ezek $|W_0| = |A| \cdot k!$-szor annyian vannak, mint a fixpontok. Persze $\sigma(a_i)\sigma^{-1} = (a_{i\sigma})$, ezzel

$$\begin{aligned}\sigma(a_i)\pi(g_i)\sigma^{-1}(a_{i\sigma}^{-1}) &= \sigma(a_i)\pi\sigma^{-1}(g_{i\sigma})(a_{i\sigma}^{-1}) = \\ = \sigma\pi\sigma^{-1}(a_{i\sigma\pi^{-1}})(g_{i\sigma})(a_{i\sigma}^{-1}) &= \sigma\pi\sigma^{-1}(a_{i\sigma\pi^{-1}}g_{i\sigma}a_{i\sigma}^{-1}) \in W_0.\end{aligned}$$

Itt $\sigma \in S_k$ a W_0 definíciója miatt tetszőleges, ezért $k!$ eltűnik a fenti szorzatból, és a feltétel

$$(a_{i\pi^{-1}}g_i a_i^{-1}) \in W_0$$

lesz, azaz minden $i, j \in \mathbf{k}$-ra

$$a_{i\pi^{-1}}g_i a_i^{-1} = a_{j\pi^{-1}}g_j a_j^{-1}.$$

Szorítkozzunk hirtelenjében π-nek csak egyetlen $\{i, i\pi, \ldots, i\pi^{d-1}\}$ orbitjára. A feltétel szerint

$$a_{i\pi^{-1}}g_i a_i^{-1} = a_i g_{i\pi} a_{i\pi}^{-1} \Leftrightarrow a_i^{-1}a_{i\pi^{-1}}g_i = g_{i\pi}a_{i\pi}^{-1}a_i,$$

ami $a_i^* := a_i^{-1}a_{i\pi^{-1}} (\in T)$ definíció után

$$a_i^* g_i = g_{i\pi} a_{i\pi}^*$$

alakot ölt. (Ezzel $a_i \in A$ értéke is érdektelenné vált, lévén nem szerepel a feltételben.) Ebből számítható $a_{i\pi^m}^*$ értéke a_i^* függvényében, speciálisan

$$a_i^* = a_{i\pi^d}^* = (g_{i\pi}\ldots g_{i\pi^d})^{-1}a_i^*(g_i \ldots g_{i\pi^{d-1}})$$

kell hogy teljesüljön. A $\gamma_i := g_i \ldots g_{i\pi^{d-1}}$ újabb definícióval ez

$$(g_i^{-1}\gamma_i g_i)^{-1}a_i^*\gamma_i = a_i^* \Leftrightarrow [g_i a_i^*, \gamma_i] = 1 \Leftrightarrow [a_i^* g_i, \gamma_{i\pi}] = 1.$$

Az is szükséges továbbá, hogy $a_{i\pi^{d-1}}^* \ldots a_i^* = 1$ legyen, azaz

$$\begin{aligned}(g_{i\pi}\ldots g_{i\pi^{d-1}})^{-1}a_i^*(g_i\ldots g_{i\pi^{d-2}})(g_{i\pi}\ldots g_{i\pi^{d-2}})^{-1}a_i^* \ldots (g_{i\pi}^{-1}a_i^* g_i)a_i^* = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (g_i g_{i\pi}\ldots g_{i\pi^{d-1}})^{-1}(g_i a_i^*)^d = 1 \Leftrightarrow (g_i a_i^*)^d = \gamma_i \Leftrightarrow (a_i^* g_i)^d = \gamma_{i\pi}.\end{aligned}$$

Látszik, hogy az előző feltétel ennek következménye. Tehát minden orbiton szükséges $(a_i^* g_i)^d = \gamma_{i\pi}$, ahol d az orbit hossza, i pedig egyik (bármelyik) eleme.

Namármost két különböző orbit között kell még (és ezzel figyelembe veszünk majd minden feltételt)

$$a_{i\pi^{-1}}g_i a_i^{-1} = a_{j\pi^{-1}}g_j a_j^{-1} \Leftrightarrow a_i a_i^* g_i a_i^{-1} = a_j a_j^* g_j a_j^{-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a_i^* g_i)^{a_i^{-1}a_j} = (a_j^* g_j).$$

Még egy definíció: $\delta_i := a_1^{-1}a_i (\in G)$ (i egy orbit reprezentánsa), amivel a feltétel $(a_1^* g_1)^{\delta_i} = (a_i^* g_i)$. Ezt kombinálva az előző bekezdéssel

$$(a_1^* g_1)^d = \gamma_{i\pi}^{\delta_i^{-1}}$$

az i által reprezentált orbitra. Találni kell tehát egy olyan $a_1^* \in G$-t, amire $(a_1^* g_1)^d \sim \gamma_{i\pi}$ egyszerre teljesülnek; ezután δ_i $(i \neq 1)$ szabadon választható $C_G(\gamma_{i\pi})$-ből.

Fenti a_1^* létezése (ami ekvivalens $\mathrm{fix}(\pi g) \neq \emptyset$-val) csak a G egyszerű csoport (illetve Aut G) szerkezetétől függ. Ha viszont π-nek van fixpontja, vagyis feltehetően $1\pi = 1$, akkor $a_1^* = 1$ lesz, és így, hacsak a $g_1^d \sim \gamma_{i\pi}$ követelmények teljesülnek, $|\mathrm{fix}(\pi g)| = \prod |C_G(g_1^d)|$ (d a ciklushosszakon fut végig, a kiszemelt fixpontot kihagyva). Speciálisan ha $\pi = (1)$ és a g_i-k konjugáltak, akkor $|\mathrm{fix}(1g)| = |C_G(g_1)|^{k-1}$.

Ezek után

5.2.1. Állítás. *Ha a $G \leq S_n$ diagonális hatású primitív csoport éles, akkor $|G| < n^C$ valamely $C > 0$ konstanssal.*

Bizonyítás. Az $G \leq T^k.(\mathrm{Out}\ T \times S_k)$ diagonális hatású csoportnak a foka $|T|^{k-1}$, rendje $|T|^{k-1}|\mathrm{Aut}\ T||P|$-nek osztója, ahol P egy k fokú primitív permutációcsoport.

Ha P nem tartalmazza A_k-t, akkor rendje legfeljebb $\exp(72\log^3 k)$ illetve $\exp(4\sqrt{k}\log^2 k)$ attól függően, hogy 2-tranzitív-e vagy sem. Található tehát olyan $D > 0$ szám, hogy $|P| < D^k = \exp(\log D \cdot k)$; ekkor, mivel $|T| \geq 60$, $D^k = 60^{k\log_{60} D} \leq |T|^{k\log_{60} D}$, és $|\mathrm{Aut}\ T| < |T|^2$, lesz $C > 0$ mellyel $|X| < |T|^{C(k-1)} = n^C$, vagyis X kicsi.

Ha P tartalmazza A_k-t és $k \geq 5$, akkor $\overline{G} = G/T^k \leq \mathrm{Out}\ T \times S_k$ vetületei $M \leq \mathrm{Out}\ T$ és $P \leq S_k$, így $\overline{G} \leq M \times P$ szubdirekt szorzat. Out T a Schreier-sejtés miatt feloldható, tehát nincsen A_k-val izomorf *section*je. Fennáll viszont $M/(M \cap \overline{G}) \simeq P/(P \cap \overline{G})$, ami az előző megjegyzés miatt csak akkor következhet be, ha $P \cap \overline{G} \geq A_k$. Tehát $G \geq T^k.A_k$. Vegyünk T-ből egy involúciót (ilyesmi létezik a Feit-Thompson tétel miatt), és nézzük a $\pi(g, g, \ldots, g) \in G$ elemek fixpontszámait, ahol $\pi = (23\ldots 2i) \in A_k$ páratlan hosszú ciklus illetve $i = 1$ esetén az identikus permutáció. Ezek a fixpontszámok $|C_T(g)|^{k-2i+1}$, mind különböznek, pozitívak és számuk $[\frac{k}{2}]$. Az elengedhetetlen 0-val együtt van tehát $\frac{k}{2}$-nél több különböző fixpontszámom. $\mu(G) > n^{\frac{1}{2}}$ és (2.1) miatt $|T|^{k-1}|\mathrm{Aut}\ T|k! \geq |G| > \mu(G)^{\frac{k}{2}} > n^{\frac{k}{4}} = |T|^{(k-1)\frac{k}{4}}$, azaz, mivel $|\mathrm{Aut}\ T| < |T|^2$, $|T|^{\frac{1}{4}k^2-\frac{5}{4}k-1} < k!$. Ez nyilván csak kis k értékekre teljesülhet, kis k-ra viszont, A_k egyszerű voltától függetlenül, $k!$ korlátozható $|T|$ egy konstans kitevőjű hatványával, és végeredményben $|G| < n^C$ teljesül. □

5.3. Majdnem egyszerű csoportok

M. Liebeck [15] cikkében található az alábbi redukciós állítás:

5.3.1. Állítás. *Legyen $G \leq S_n$ primitív majdnem egyszerű csoport. Ekkor a következők egyike teljesül:*

(i) Soc $G = A_m$, *amely vagy a k-elemű részhalmazokon* ($1 < k < \frac{m}{2}$, $n = \binom{m}{k}$), *vagy az a darab b-részhalmazból álló partíciókon* ($m = ab$, $a > 1$, $b > 1$, $n = \frac{m!}{b!^a a!}$) *hat;*

(ii) Soc G *egy klasszikus egyszerű csoport, amely a természetes modulusa altereinek, vagy,* $PSL_n(q)$ *esetén, komplementer dimenziójú altér-pároknak valamely orbitján hat;*

(iii) $|G| < n^9$.

A fenti (i) és (ii) pontokban szereplő csoportok élességét megvizsgálva a diagonális hatású esetben fennállóhoz hasonló felső becslést lehetne nyerni a primitív éles csoportok rendjére. Az eredmények e tekintetben korántsem teljesek, mivel csak az (i) pontbeli csoportokra vonatkoznak; ideillik még az előző fejezet 4.1.1. Állítása.

5.3.2. Állítás. *$A_m \leq G \leq \mathrm{Aut}\ A_m$ neméles a 2-elemű részhalmazokon való hatásában.*

Bizonyítás. A $\pi_i = (12\ldots 2i+1) \in A_m$ $(1 \leq i < \left[\frac{m-1}{2}\right])$ páratlan hosszú ciklusok pontosan azokat a 2-részhalmazokat hagyják fixen, melyeknek mindkét eleme fixpontjuk. Így $|\mathrm{fix}(\pi_i)| = \binom{m-2i-1}{2}$. Ezek nyilván különbözőek, tehát

$$\prod_{i=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \left[\binom{m}{2} - \binom{m-2i-1}{2}\right] = \prod_{i=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} (2i+1)(m-i-1) = \prod_{i=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} (2i+1) \prod_{i=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} (m-i-1)$$

osztja $f_{L(G)}(n)$-et. A $\left[\frac{m}{2}\right]$ és $m-2$ közötti páratlan számok mindkét szorzatban szerepelnek tényezőként.

A Csebisev által 1850-ben bizonyított „Bertrand-posztulátum" szerint minden $N > 3$-ra létezik egy p prím az $(N, 2N-3]$ intervallumban. Ezt $N = \left[\frac{m-1}{2}\right]$-re alkalmazva kapjuk a keresett prímszámot, hacsak $\left[\frac{m-1}{2}\right] > 3$ azaz $m \geq 9$. Az $m = 5, 6, 7, 8$ esetek közvetlen számolással ellenőrizhetők. □

5.3.3. Állítás. *$A_m \leq G \leq \mathrm{Aut}\ A_m$ nem éles az a darab b-részhalmazból álló partíciókon való hatásában.*

Bizonyítás. A hatás az $a = 2$, $b = 2$ esetben S_3-mal, az $a = 2$, $b = 3$ esetben $PSL_2(9)$-cel permutációekvivalens, tehát ezek a hatások 2-tranzitívak. Az $a = 3$, $b = 2$ eset közvetlen számolással ellenőrizhető. A továbbiakban tehát $m \geq 8$ feltehető.

$b = 2$ esetén tekintsük a $\pi = (12\ldots a)(a+1\ldots 2a) \in A_m$ permutációt. π két ciklusából egy-egy pontot véve, a kapott 2-részhalmaz π hatványai szerinti képei egy π által fixen hagyott partíciót adnak, és könnyen látható, hogy páratlan a esetén minden fixen hagyott partíció így kapható meg. Ha a páros, akkor π a $\{\{i, \frac{a}{2}+i\}, \{a+i, \frac{3a}{2}+i\} \mid 1 \leq i < \frac{a}{2}\}$ partíciót is fixen hagyja és más partíciót nem. Tehát

$$|fix(\pi)| = \begin{cases} a, & a \text{ páratlan} \\ a+1, & a \text{ páros} \end{cases}$$

Speciálisan $|\mathrm{fix}(\pi)|$ mindig páratlan.

A hatás foka

$$n = \frac{(ab)!}{b!^a a!} = \frac{1}{b!^a a!} \prod_{i=1}^{a} \frac{(ib)!}{((i-1)b)!} = \frac{1}{a!} \prod_{i=1}^{a} \frac{(ib)!}{b!((i-1)b)!} =$$
$$= \prod_{i=1}^{a} \frac{1}{i} \binom{ib}{b} = \prod_{i=1}^{a} \binom{ib-1}{b-1} \tag{5.1}$$

jelen esetben $n = \prod_{i=1}^{a}(2i-1)$. Ebben szorzótényezőként szerepel $f := |\mathrm{fix}(\pi)|$, ezért $n - f = f(X-1)$, ahol X bizonyos páratlan számok szorzata. Belátom, hogy $X-1$-et osztja egy m-nél nagyobb prím, amiből a neméelesség már következik.

Ehhez elég látni, hogy $X-1$ relatív prím n-hez és nem 2-hatvány. Utóbbi teljesül, ha 3 és 5 osztja X-et (lévén 2-hatvány sosem kongruens -1-gyel modulo 15), kis n-ekre pedig explicite kiszámolható. Ha f nem prím, akkor prímosztói mind szerepelnek X tényezői között, ilyenkor tehát minden $2a$-nál kisebb prím osztja X-et, és kész vagyunk. Ha f prím és a páros, akkor

$\frac{n}{2} = a < a+1 \leq 2a = n$ egy olyan prím aminek a négyzete is osztja $f_{L(G)}(n)$-et, ami megintcsak bizonyítja a nemélességet. Végül ha $f = p$ prím és a páratlan, akkor $X \equiv (p-1)!$ modulo p. A Wilson-tétel értelmében $(p-1)! \equiv -1$ modulo p, amiből $X - 1 \equiv -2$, tehát $X - 1$ nem osztható p-vel, és nyilván a többi $2a$-nál kisebb páratlan prímmel sem.

Legyen most $b \geq 3$. A $\pi = (123) \in A_m$ permutáció által fixen hagyott partíciókban az 1,2,3 pontok azonos osztályba kell essenek: egyébként három különböző osztályba esnének és további pontokat kellene mozgatni a partíció fixen hagyásához. Az ilyen partíciókat tehát úgy kapom, hogy az $\{1,2,3\}$ halmazt $b-3$ ponttal kiegészítem, és a többi pontból $a-1$ darab b-részhalmazt formálok. Így (5.3) szerint $|\mathrm{fix}(\pi)| = \binom{ab-3}{b-3}\prod_{i=1}^{a-1}\binom{ib-1}{b-1}$. Minden $\frac{ab}{2} < p \leq ab-3$ prímszám osztja $|\mathrm{fix}(\pi)|$-t és n-et, és ilyen prímszám a fent említett Csebisev-tétel alapján létezik. $\square$

5.4. Kétszeresen tranzitív csoportok

A már említett, kétszeresen tranzitív csoportok szerkezetére vonatkozó Burnside-tételnek és a véges egyszerű csoportok osztályozásának következményeként 1981 óta ismert a véges 2-tranzitív csoportok (permutációizomorfizmus-osztályainak) listája, amint az Peter Cameron [7] cikkében megtalálható. Nevezetesen, a nem affin típusú 2-tranzitív csoportok az alábbiak:

fok	minimális normálosztó	maximális tranzitivitás	megjegyzés
n	A_n	n	$n \geq 5$
$\frac{q^d-1}{q-1}$	$PSL_d(q)$	2	$d \geq 3$
$q+1$	$PSL_2(q)$	3	$q \geq 5$
q^3+1	$PSU_3(q^2)$	2	$q \geq 3$
q^2+1	$Sz(q) = {}^2B_2(q)$	2	$q = 2^{2k+1} \geq 8$
q^3+1	$Ree(q) = {}^2G_2(q)$	2	$q = 3^{2k+1} \geq 27$
$2^{2d-1}+2^{d-1}$	$Sp_{2d}(2)$	2	$d \geq 3$
$2^{2d-1}-2^{d-1}$	$Sp_{2d}(2)$	2	$d \geq 3$
11	$PSL_2(11)$	2	
11	M_{11}	4	
12	M_{11}	3	
12	M_{12}	5	
15	A_7	2	
22	M_{22}	3	
23	M_{23}	4	
24	M_{24}	5	
28	$PSL_2(8)$	2	
176	HS	2	
276	Co_3	2	

Az utolsó tizenegy kivételes példa élességének ellenőrzésére az *ATLAS of finite groups* [8] alkalmazható: a fenti majdnem egyszerű csoportok 2-tranzitív hatásának permutációkaraktere az 1.3.3. és az 1.3.5. Állítás szerint a triviális karakternek és egy ettől különböző irreducibilis karakternek az összege – találni kell tehát egy, a megadott foknál eggyel kisebb fokú, -1-nél nem kisebb egész értékű karaktert a csoport karaktertáblájában. Segíti ennek megtalálását, hogy a hatásbeli stabilizátor maximális részcsoportja a csoportnak, és mint ilyen, szintén szerepel az *ATLAS*-ban. Az egyszerű számítások azt mutatják, hogy a fenti csoportok közül pontosan M_{11} (11 ponton), M_{12} (12 ponton) és A_7 (15 ponton) élesek.

Ismeretes, hogy a Suzuki-csoportok 2-tranzitív hatásában két pont stabilizátora szemiregulárisan, nemregulárisan hat a többi ponton (lásd például [11]), amiből következik, hogy a Suzuki-csoportok nemélesek.

A többi végtelen sorozatra vonatkozóan jelenleg még nincsenek konkrét eredményeim.

Irodalomjegyzék

[1] M. Aschbacher és R. M. Guralnick: On Abelian quotients of primitive groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **107** (1989), 89–95.

[2] Babai L.: On the order of uniprimitive permutation groups, *Annals of Math.* **113** (1981), 553–568.

[3] Babai L.: On the order of doubly transitive permutation groups, *Invent. Math.* **65** (1982), 473–484.

[4] R. W. Baddeley: Primitive permutation groups with a regular non-abelian normal subgroup, *Proc. London Math. Soc.* **67** (1993) 547–595.

[5] H. W. Blichfeldt: A theorem concerning the invariants of linear homogeneous groups with some applications to substitution groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **5** (1904), 461–466.

[6] D. P. Brozovic: On primitive sharp permutation groups, *Commun. Algebra* **24** (1996), 3979–3994.

[7] P. J. Cameron: Finite permutation groups and finite simple groups, *Bull. London Math. Soc.* **13** (1981), 1–22.

[8] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker és R. A. Wilson: *An ATLAS of finite groups,* Oxford University Press, 1985.

[9] J. D. Dixon és B. Mortimer: *Permutation groups* (Graduate Texts in Mathematics 163), Springer, 1996.

[10] R. Guralnick és K. Magaard: On the minimal degree of a primitive permutation group, *J. Algebra* **207** (1998), 127–145.

[11] B. Huppert és N. Blackburn: *Finite groups III,* Springer, 1982.

[12] T. Ito és M. Kiyota: Sharp permutation groups, *J. Math. Soc. Japan* **33** (1981), 435–444.

[13] N. Iwahori és T. Kondo: A criterion for the existence of a non-trivial partition of a finite group with applications to finite reflection groups, *J. Math. Soc. Japan* **17** (1965), 207–215.

[14] M. Kiyota: An inequality for finite permutation groups, *J. Comb. Theory* **27** (1979), 119.

[15] M. W. Liebeck: On minimal degrees and base sizes of primitive permutation groups, *Arch. Math.* **43** (1984), 11–15.

[16] M. W. Liebeck, C. E. Praeger és J. Saxl: On the O'Nan-Scott theorem for finite primitive permutation groups, *J. Austral. Math. Soc.* **44** (1988), 389–396.

[17] M. W. Liebeck és J. Saxl: Minimal degrees of primitive permutation groups with an application to monodromy groups of covers of Riemann surfaces, *Proc. London Math. Soc.* **63** (1991), 266–314.

[18] T. Maund: Bases for permutation groups, Oxford University (1989).

[19] C. E. Praeger és J. Saxl: On the order of primitive permutation groups, *Bull. London Math. Soc.* **12** (1980), 303–307.

[20] Pyber L.: The orders of doubly transitive permutation groups, elementary estimates, *J. Combin. Theory* **62** (1993), 361–366.

[21] H. Wielandt:*Permutation groups through invariant relations and invariant functions,* Lecture notes, Columbus, Ohio State University, 1969.

[22] B. Zilber: Finite homogeneous geometries, *Proc. 6th Easter Model Theory Conference,* Berlin, 1988.