Állandó szélességű halmazok geometriája

Naszódi Márton

Témavezető: Dr. Bezdek Károly

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2001

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Ha van három kör keresztmetszetű farönkünk és egy rajtuk keresztülfektetett deszkánk, a kapott eszköz alkalmas arra, hogy a piramis építéséhez köveket szállítsunk úgy, hogy miközben toljuk a lapot, a hátsó kifutó rönköt előrevisszük. Azért szeretjük ezeket a farönköket, mert nem "döcög" a jármű: a falap végig a földdel párhuzamosan, mindig ugyanolyan magasan halad. Lehetne-e *nem* körlap alapú farönkökkel dolgozni, kérdezhették a piramis építői szabadidejükben. Hogy megválaszolták-e akkor, nem tudjuk, a megoldást igen: lehetne. Tetszőleges síkbeli állandó szélességű konvex halmazt használhattak volna, a körön kívül ilyen például a Reuleaux-háromszög. Sőt, ha az egyiptomiak fahiánnyal küszködtek volna, ajánlhatnánk is nekik a Reuleaux-háromszöget, mivel ennek a legkisebb a területe az adott állandó szélességű halmazok között, így a farönk térfogata is a legkisebb, nem beszélve a tömegnyereségről.

Többdimenziós ókori egyiptomiakat ritkán látunk, mégis ezeket a halmazokat vizsgáljuk majd Euklidészi, és Minkowski geometriával ellátott terekben. Utóbbiakban már a *definíció* megadásakor bonyodalmakba ütközünk. Erről szól Eggleston tétele és konstrukciója, ami mutatja, hogy az állandó szélesség Minkowski terekben valóban lehet erősebb tulajdonság, mint a diametriális maximalitás. Egy saját bizonyítást adok arra a régi jól ismert állításra, hogy Euklidészi térben a két tulajdonság ugyanaz.
Az állandó szélesség additív tulajdonság, azaz halmazok Minkowski összegére öröklődik. Természetes kérdés, hogy ugyanez igaz-e a diametriális maximalitásra is. A kérdést megválaszoltam, nem igaz. Egyebek közt erről szól a 2. fejezet.

Ha már tudjuk, mik a diametriálisan maximális halmazok, megkérdezhető, hogy hogyan konstruálhatók. A 3. részben leírom Sallee általános, minden Minkowski térben működő eljárását, aminek segítségével aztán különböző egzisztencia tételek is beláthatók. Ugyanitt adok egy alsó becslést diametriálisan maximális halmazok beírt gömbjének sugarára.

Ha már tudunk valamit az ilyen halmazok létezéséről, megkérdezzük unicitásukat bizonyos körülmények között. Groemer egyértelműségi tételei és két saját eredmény a 4. fejezet tartalma.

Egy, a görgős alkalmazásnál talán meggyőzőbb magyarázata is elmondható annak, hogy miért tartjuk fontosnak az állandó szélességű halmazokat. Régóta ismeretes a *Hadwiger-probléma*. A kérdés az, hogy egy adott test hány kisebb hasonló példányával fedhető le. Tudjuk, hogy minden korlátos halmaz lefedhető egy ugyanakkora átmérőjű konvex állandó szélességű halmazzal. Így, ha adunk egy felső becslést állandó szélességű halmazok Hadwiger-számára , akkor kapunk egy felső becslést a Borsuk-problémára, azaz arra a kérdésre, hogy tetszőleges test hány nála kisebb átmérőjű testtel fedhető le. Mivel Boltjansky bizonyította, hogy egy test megvilágítási száma és Hadwiger száma megegyezik, így állandó szélességű halmazok megvilágítási számát tárgyaljuk majd. Ez az 5. fejezet témája.

2. Mik az állandó szélességű halmazok?

Ebben a fejezetben először bevezetjük az alapvető fogalmakat, majd adunk két hasznos eszközt, amiket a későbbiekben használunk. Az egyik eszköz egy nagyon egyszerű lemma kis általánosítása, amivel kötelezni tudjuk gömbök metszeteit arra, hogy tartalmazzanak bizonyos pontokat, a másik pedig az az előbbiből is megkapható állítás, hogy olyan egységgömbök metszete, amik páronként tartalmazzák egymás középpontját, legalább 1 szélességű.
Majd kimondjuk az állandó szélesség különböző definícióit Minkowski terekben, és megnézzük, hogy ezek a definíciók mennyire esnek egybe.
Végül megadunk egy konstrukciót, ami mutatja, hogy az állandó szélességűség és a diametriális maximalitás *nem* mindig esik egybe. Ezt a konstrukciót használjuk annak a meglepő állításnak a bizonyításához, hogy a diametriális maximalitás –az állandó szélességgel szemben– *nem* feltétlenül öröklődik halmazok összegére.

2.1. Definíciók, alaptulajdonságok

2.1.1. Definició. *Minkowski térnek nevezzük a véges dimenziós normált tereket.*

Egy ilyen teret úgy kaphatunk, hogy veszünk egy tetszőleges origóra szimmetrikus kompakt konvex halmazt $\mathbb{R}^n$-ben, aminek belseje nem üres (ez utóbbi helyett mondhatjuk, hogy minden origón átmenő egyenes egy az origót tartalmazó nem egypontú szakaszban metszi), és ezt tekintjük az egységgömbnek. Ebből egyértelműen adódik a vektortér struktúrával kompatibilis norma $\mathbb{R}^n$-en. Mindez fordítva is igaz, tetszőleges véges dimenziós normált valós vektortér egységgömbje ilyen. Azt is tudjuk, hogy *egy* vektortopológia van $\mathbb{R}^n$-en, azaz az n-dimenziós Minkowski terek egymással

homeomorfak, sőt tetszőleges lineáris izomorfizmus egyben homeomorfizmus is.
Néhány jelölés:
Egy $K \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazra $int(K), bd(K), cl(K)$ jelöli a halmaz belsejét, határát illetve lezártját, $conv(K), aff(K)$ a konvex illetve az affin burkát. Amennyiben $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, $Vol(K)$ illetve $relint(K)$ jelöli a térfogatát, illetve a relatív belső részét.

$d(.,.)$ jelöli a Minkowski metrika távolság függvényét. Ha $K \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, akkor $diam(K) := sup\{d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) | \mathbf{p}, \mathbf{q} \in K\}$ az átmérője. A továbbiakban $B(\mathbf{o}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | d(\mathbf{o}, \mathbf{x}) \leq 1\}$ a Minkowski tér origó középpontú egységgömbje, annak $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$-beli eltoltja $B(\mathbf{p}) := \mathbf{p} + B(\mathbf{o})$. Nagyon ritkán előfordul majd r sugarú, $\mathbf{p}$ középpontú gömb is: $B(\mathbf{p}, r) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | d(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \leq r\}$. Gyakran találkozunk majd több gömb metszetével, erre vezessük be a következő jelölést:
Ha $X \subseteq \mathbb{R}^n$, akkor
$$B(X) := \bigcap_{\mathbf{x} \in X} B(\mathbf{x})$$
és ritkán
$$B(X, r) := \bigcap_{\mathbf{x} \in X} B(\mathbf{x}, r)$$
amik valóban az előző jelölések kiterjesztései. Az r sugarú, $\mathbf{p}$ középpontú szféra $S(\mathbf{p}, r) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | d(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = r\}$, elhagyva r-et, $S(\mathbf{p}) := S(\mathbf{p}, 1)$.

Megemlítünk néhány trivialitást, amiket a későbbiekben hivatkozás nélkül használunk.

2.1.2. Állítás. *Legyenek $J, K \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmazok. Ekkor fennállnak a következők:*

- $J \subseteq K \Rightarrow B(J) \supseteq B(K)$
- $diam(K) \leq 1 \Leftrightarrow K \subseteq B(K)$
- *ha K kompakt és konvex, akkor* $B(K) = B(bd(K))$

Egy pillanatra el lehet tűnődni azon, vajon az $X, B(X), BB(X), \ldots$ sorozat stabilizálódik-e. A válasz a következő:

2.1.3. Megjegyzés. *Tetszőleges X halmazra igaz, hogy $BB(X) \supseteq X$, ez nyilvánvaló. Így tehát $BBB(X) \subseteq B(X)$. Ugyanakkor, ha az első tartalmazást a $B(X)$ halmazra írjuk fel, akkor azt kapjuk, hogy $B(X) \subseteq BBB(X)$. Tehát tetszőleges halmazra igaz, hogy $B(X) = BBB(X)$. Ezért az alábbiak lehetségesek:*

- *Ha $B(X) \neq X$, akkor két lehetőség van:*
  - *Ha $B(X) = BB(X)$, akkor a sorozat $X, B(X), B(X), \ldots$.*
    Például $X = S(\mathbf{o}, \frac{1}{2})$-re.
  - *Ha $B(X) \neq BB(X)$, akkor a sorozat: $X, B(X), BB(X), B(X), BB(X), \ldots$.*
    Például, ha X egy 2 hosszú szakasz.
- *Ha $B(X) = X$, akkor persze a sorozat $X, X, X, \ldots$.*
  Például $X = B(\mathbf{o}, \frac{1}{2})$-re.

2.2. Gömbök metszetei

Ebben az alfejezetben végig az n dimenziós Euklidészi térben, $\mathbb{E}^n$-ben vizsgálódunk. Nyilvánvaló, hogy ha adott két pont, $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ egy tetszőleges Minkowski térben, és egy $\mathbf{r}$ pont a kettő közötti szakaszon, akkor $B(\mathbf{r}) \supseteq B(\mathbf{p}) \cap B(\mathbf{q})$. Euklidészi térben ennél valamivel több is mondható, ha a két pont távolsága nem nagyobb, mint 1. Ilyenkor az összekötő szakasz helyett vehető körív is.

A következő lemma *G.T. Sallee*-tól való és a későbbiekben ezt is, az erősítését is többször használjuk.

2.2.1. Lemma (Sallee). *Legyen $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{E}^n$ egy $\mathbf{o} \in \mathbb{E}^n$ körüli $\rho \geq 1$ sugarú körvonal két pontja, és tegyük fel, hogy $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq 1$, és $\mathbf{r}$ egy pont a rövidebbik $\mathbf{pq}$ íven.*
Ekkor a következők igazak:

(i) $B(\mathbf{p}) \cap B(\mathbf{q}) \subseteq B(\mathbf{r})$

(ii) *Ha $\rho = 1$, akkor $B(\mathbf{p}) \cap B(\mathbf{q}) \cap S(\mathbf{r}) = \{\mathbf{o}\}$*

(iii) *Ha $\rho > 1$, akkor $B(\mathbf{p}) \cap B(\mathbf{q}) \subseteq int(B(\mathbf{r}))$*

Hangsúlyozzuk, hogy $B(\mathbf{p}), B(\mathbf{q})$ és a többi gömb mind $\mathbb{E}^n$-beli zárt gömbök.

Bizonyítás. **(i)** Indirekt tegyük fel, hogy $\exists \mathbf{s} \in (B(\mathbf{p}) \cap B(\mathbf{q})) \setminus B(\mathbf{r})$. Mivel $d(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \leq 1 < d(\mathbf{s}, \mathbf{r})$, így $\mathbf{s}$ a $[\mathbf{p}, \mathbf{r}]$ szakasz felezőmerőlegese által meghatározott $\mathbf{p}$-t tartalmazó nyílt féltérbe kell essen. Hasonlóan, $\mathbf{s}$ a $[\mathbf{q}, \mathbf{r}]$ szakasz felezőmerőlegese által meghatározott $\mathbf{q}$-t tartalmazó nyílt féltérbe esik feltevésünk szerint. De már a $\mathbf{pqr}$-síkra vetítve az ábrát is látszik, hogy a két nyílt féltérnek nincs olyan metszéspontja, aminek távolsága $\mathbf{p}$-től sem és $\mathbf{q}$-tól sem nagyobb 1-nél. Ez tehát ellentmond $\mathbf{s}$ létezésének.

(ii) Ha $\mathbf{s} \in B(\mathbf{p}) \cap B(\mathbf{q}) \cap S(\mathbf{r})$, akkor ugyanez az érvelés mutatja, hogy $\mathbf{s}$ benne kell legyen a fenti két –most mar zárt– féltér metszetében, ugyanakkor $\mathbf{r}$-től is 1 távol lenne, így nem lehet más, csak a középpont.

(iii) bizonyítása ugyanez.

$\square$

A fenti lemmában persze furcsa, hogy miért éppen két pont van egy körvonalon az n-dimenziós térben. Valóban, az (i) pontnak adható egy apró általánosítása, ami szintén hasznos lesz a későbbiekben. Ehhez a következő definíció szükséges:

2.2.2. Definició. *A szféra egy részhalmaza szférikusan konvex, ha egy nyílt félszférára esik és bármely két pontja közötti rövidebb főkörívet tartalmazza.*

A szférán minden X halmaznak, ami *nem* tartalmaz két átellenes pontot egyértelmű a szférikusan konvex burka, jele: $Sconv(X)$.

2.2.3. Lemma. *Adott m pont, $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m \in S(\mathbf{o}, \rho)$, ahol $1 \leq \rho$, páronként 1-nél nem nagyobb távolságra. Tegyük fel, hogy $\mathbf{r} \in Sconv(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)$.*
Ekkor $B(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m) \subseteq B(\mathbf{r})$.

Megjegyezzük, hogy a távolságfeltétel miatt valóban értelmes a pontok szférikus konvex burkáról beszélni.

Bizonyítás. Teljes indukcióval m-re vonatkozóan. Az $m = 2$ eset a lemma (i) pontja. Tegyük fel, hogy m-re tudjuk az állítást. Legyen adott $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{m+1}$ a lemmában szereplő elrendezés szerint, valamint $\mathbf{r} \in Sconv(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{m+1})$. Ekkor a gömbön az $\mathbf{r}$ pontot az $\mathbf{x}_{m+1}$ ponttal összekötő főkör valahol el kell messe $Sconv(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)$-et, egy ilyen metszéspont legyen $\mathbf{r}'$. Így $\mathbf{r}$ az $\mathbf{r}'\mathbf{x}_{m+1}$ íven van és könnyen igazolható, hogy $d(\mathbf{r}', \mathbf{x}_{m+1}) \leq 1$. Az indukciós feltevést használva kapjuk, hogy

$$B(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{m+1}) = B(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m) \cap B(\mathbf{x}_{m+1}) \subseteq B(\mathbf{r}') \cap B(\mathbf{x}_{m+1}) \subseteq B(\mathbf{r})$$

ami –összevetve a bal- és a jobboldalt– éppen az, amit bizonyítani akartunk. □

A következő tétel bizonyításához szükséges az alábbi állítás.

2.2.4. Állítás. *$X \subseteq \mathbb{E}^n$ az Euklidészi tér egy kompakt, szigorúan konvex részhalmaza. Tegyük fel, hogy H_1, H_2 egy párhuzamos hipersík pár, amelyek közrefogják X-et, és a távolságuk minimális. Az érintési pontok $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$. Ekkor a $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$ szakasz merőleges a két hipersíkra.*

Bizonyítás. Vegyünk a H_1 hipersíkra a $\mathbf{p}_1$-ben állított merőlegesen egy pontot messze a H_2-n is túl, és akörül egy gömböt, ami tartalmazza X-et, és aminek a határán van $\mathbf{p}_1$. A szigorú konvexitás miatt ilyen gömb van. Ugyanígy $\mathbf{p}_2$-höz is veszünk egy pontot a H_2 ottani normális egyenesén, és akörül egy gömböt, ami tartalmazza X-et, és a határán van $\mathbf{p}_2$. Feltehető, hogy a két gömb ugyanakkora. Tehát X a két gömb metszetében van és a két gömb metszetének egy támaszhipersík párja H_1 és H_2, az érintési pontok pedig $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$. De ha a két támaszhipersík *nem* a két középpontot összekötő egyenesre állított merőlegesek, akkor már a két gömb metszetének sem minimális távolságú támaszhipersík párja. Akkor viszont egy kisebb távolságú hipersíkpár is közre fogja az X halmazt, ami ellentmondás lenne. □

2.2.5. Tétel. *Adott $\mathbf{x}_1, .., \mathbf{x}_j \in \mathbb{E}^n$ páronként legfeljebb 1 távol egymástól. Ekkor*

$$\bigcap_{i=1}^{j} B(\mathbf{x}_i)$$

minimális szélessége legalább 1.

Bizonyítás. Vegyünk egy párhuzamos hipersíkpárt, ami megtámasztja ezen metszetet:

$$\bigcap_{i=1}^{j} B(\mathbf{x}_i)$$

és távolságuk minimális. Mivel ez a test szigorúan konvex, így pontosan egy-egy pontban érinti a két sík, ezek a pontok legyenek $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$. Másrészt, mivel a két sík minimális távolságú támaszsíkpár, ezért a távolságuk éppen $d(\mathbf{p},\mathbf{q})$, mert a $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ szakasz merőleges rájuk. Azt kell tehát belátni, hogy $d(\mathbf{p},\mathbf{q}) \geq 1$. Mivel $\mathbf{p}$ a határon van, ez azt jelenti, hogy a középpontok közül legalább egy pont 1 távol van $\mathbf{p}$-től. Feltehető, hogy a középpontok felsorolásában az ilyenek vannak elől, azaz $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k \in S(\mathbf{p})$. Jelölje $\mathbf{n}$ a $\mathbf{p}$-beli támaszhipersík belső normálvektorát $\mathbf{p}$-ben.

2.2.6. Állítás.

$$\mathbf{n} \in Sconv(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k)$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy indirekt bizonyítunk. Azaz van egy a $\mathbf{p}$-n átmenő hipersík, ami elválasztja $\mathbf{n}$-et $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$-tól. Ennek $\mathbf{p}$-beli normálvektora legyen $\mathbf{m}$. Azaz $\mathbf{p}$-t tekintve a koordinátarendszerünk origójának fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$(\mathbf{m},\mathbf{n}) > 0$$

és

$$(\mathbf{m},\mathbf{x}_i) < 0, \forall i = 1, ..., k$$

Vegyük észre ugyanakkor, hogy az $\mathbf{n}$ normálvektorú $\mathbf{p}$-n átmenő hipersík már

$$\bigcap_{i=1}^{k} B(\mathbf{x}_i)$$

-nek is támaszhipersíkja, ugyanis a teljes gömbmetszet felületének $\mathbf{p}$-beli kis környezetét csak az első k-pont határozza meg, a többi ugyanis közelebb van $\mathbf{p}$-hez mint 1, így egy elég kis környezetet tartalmaz a körülöttük levő egységgömb belseje.

Legyen most ε kis pozitív szám. $(-\varepsilon\mathbf{m},\mathbf{n}) < 0$, azaz

$$-\varepsilon\mathbf{m} \notin \bigcap_{i=1}^{k} B(\mathbf{x}_i),$$

mivel a jobboldalon álló test az $\mathbf{n}$ által meghatározott pozitív féltérben van. Másrészt $d(-\varepsilon\mathbf{m}, \mathbf{x}_i)^2 = (\mathbf{x}_i + \varepsilon\mathbf{m})^2 = 1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon(\mathbf{m}, \mathbf{x}_i)$ teljesül, és ez kisebb mint 1 minden $i = 1, ..., k$-ra, ha ε elég kicsi. Azaz mégis

$$-\varepsilon\mathbf{m} \in \bigcap_{i=1}^{k} B(\mathbf{x}_i),$$

ami egy ellentmondás. $\square$

Használva a 2.2.6 állítást és a 2.2.3 lemmát, kapjuk, hogy

$$\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_j\} \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} B(\mathbf{x}_i) \subseteq B(\mathbf{n})$$

azaz

$$\mathbf{n} \in \bigcap_{i=1}^{j} B(\mathbf{x}_i)$$

Ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{p}$-ből $\mathbf{q}$ irányába mutató egységvektor végpontja benne van a sok gömb metszetében, azaz $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \geq 1$. $\square$

Természetesen a tétel határátmenettel átvihető megszámlálható sok gömb metszetére is, ha középpontok továbbra is páronként 1-nél nem távolabb vannak. Persze tetszőlegesen sok zárt gömb metszete megkapható mint megszámlálható sok zárt gömb metszete –elég ugyanis a középpontok halmazából egy megszámlálható sűrű részhalmazt kiválasztani. Kimondható tehát az alábbi következmény.

2.2.7. Következmény. *$X \subseteq \mathbb{E}^n$ tetszőleges halmaz az Euklidészi térben, amire $diam(X) \leq 1$.*
Ekkor $B(X)$ minimális szélessége legalább 1.

2.3. Az állandó szélességű halmazok definíciói

Különböző tulajdonságokat adunk meg, amikkel egy Minkowski tér egy részhalmaza rendelkezhet, és megnézzük, hogy ezek mennyire esnek egybe. Mint látni fogjuk, Euklidészi térben ezek mind az állandó szélességű halmaz különböző definíciói.

2.3.1. Definició. *Egy Minkowski térben két párhuzamos hipersík távolsága d, ha a legnagyobb sugarú gömb, ami közéjük fér $\frac{d}{2}$ sugarú.*
Adott Minkowski térben állandó szélességűnek nevezünk egy korlátos konvex halmazt, ha bárhogyan veszünk egy párhuzamos támaszhipersíkpárt, a két hipersík távolsága mindig ugyanannyi.

2.3.2. Megjegyzés. *Két sík távolsága úgy is definiálható, hogy véve az egyik síkon egy pontot annak a köré írt gömbnek a sugara, amelyet érint a másik sík, a két sík távolsága. Ez nyilvánvaló módon nem függ a sík és a pont választásától, és azonos az előző definícióval, mivel ez a gömb egy érintési pont középpontú feles kicsinyítéssel átvihető egy a két sík közötti, azokat érintő, fele sugarú gömbbe.*

A továbbiakban, ha ezt másképpen nem jelezzük, az állandó szélesség mindig automatikusan 1 állandó szélességet jelent.
Régóta ismert volt –és majd látni is fogjuk–, hogy Euklideszi terekben ez egybeesik a következő fogalommal:

2.3.3. Definició. *Adott Minkowski térben diametriálisan maximálisnak nevezünk egy kompakt konvex halmazt, K-t, ha $\forall K \subsetneq K'$ halmazra $diam(K') > diam(K)$.*

A továbbiakban, ha ezt másképpen nem jelezzük, a diametriálisan maximális halmaz mindig automatikusan 1 átmérőjű diametriálisan maximális halmazt jelent.
Még egy ilyen tulajdonság:

2.3.4. Definició. *Az $X \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz rendelkezik a támasz metszet tulajdonsággal*[1]*, ha tetszőleges H_1, H_2 párhuzamos támaszhipersík párhoz és $B(\mathbf{o})$ tetszőleges ezekkel párhuzamos H támaszhipersíkjához bárhogyan választunk egy $\mathbf{p} \in H \cap B(\mathbf{o})$ pontot, létezik $\mathbf{x}_1 \in H_1 \cap X$ és $\mathbf{x}_2 \in H_2 \cap X$, hogy az $\overline{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}$ egyenes párhuzamos az $\overline{\mathbf{op}}$ egyenessel.*

A következő definícióban általánosítjuk a sík normálvektorát, hogy Minkowski térben is értelmes legyen, persze Euklideszi térben visszaadva a hagyományos definíciót.

[1] Ez angolul a *'support intersection property'*, ami éppen annyira értelmes, mint a magyar fordítása.

2.3.5. Definició. *Egy h egyenes a H hipersík normálisa egy $\mathbf{p} \in H$ pontban, ha $h \cap H = \{\mathbf{p}\}$, és van olyan gömb, melynek középpontja h-n van, és a H hipersík a gömb $\mathbf{p}$-beli támaszhipersíkja. Ha $X \subseteq \mathbb{R}^n$ egy konvex halmaz, és $\mathbf{p} \in bd(X)$, akkor egy $\mathbf{p}$-n átmenő h egyenest akkor nevezünk az X $\mathbf{p}$-beli normálisának, ha van X-nek $\mathbf{p}$-beli támaszhipersíkja, melynek h normálisa.*

Vizsgálható, hogy mit jelent az, ha egy test bármely két párhuzamos normálisa egybeesik. És még egy tulajdonság, amivel rendelkezhet egy Minkowski tér egy részhalmaza:

2.3.6. Definició. *$X \subseteq \mathbb{R}^n$, és tegyük fel, hogy $diam(X) = 1$. Ekkor X rendelkezik a gömbi metszet tulajdonsággal, ha $B(X) = X$. Ha $B(X, w) = X$, akkor azt mondjuk, hogy X rendelkezik a w-gömbi metszet tulajdonsággal, ahol $w > 0$ szám.*

2.3.7. Megjegyzés. *Ha $diam(X) = 1$, akkor a gömbi metszet tulajdonság ekvivalens azzal, hogy $B(X) \subseteq X$.*

Kezdjünk hozzá a felsorolt összesen öt tulajdonság összehasonlításához.

2.3.8. Állítás. *Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $diam(X) = 1$.
Ekkor X pontosan akkor diametriálisan maximális, ha rendelkezik a gömbi metszet tulajdonsággal.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $B(X) = X$. Ha $\mathbf{p} \notin X$, akkor $\mathbf{p} \notin B(X)$, azaz $diam(X \cup \{\mathbf{p}\}) > 1$. Márpedig X pontosan akkor diametriálisan maximális, ha $\mathbf{p} \notin X \Longrightarrow diam(X \cup \{\mathbf{p}\}) > 1$.
A másik irányhoz tegyük fel, hogy $\mathbf{p} \in B(X)$. Akkor viszont $diam(X \cup \{\mathbf{p}\}) = 1$, így a diametriális maximalitás miatt $\mathbf{p} \in X$. $\square$

2.3.9. Következmény. *Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $diam(X) = 1$.
Ekkor ha X állandó szélességű, akkor diametriálisan maximális.*

Bizonyítás. X diametriálisan maximális pontosan akkor, ha $\forall \mathbf{p} \in bd(X) \exists \mathbf{p}' \in X$ diametriálisan átellenes pont, azaz olyan pont, amelyre $d(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = 1$. Ez nyilvánvaló, ugyanis:
Ha $B(X) = X$, akkor a kompaktság miatt $\mathbf{p} \in B(X)$ csak úgy kerülhet a határra, hogy valamelyik $\mathbf{p}' \in X$ ponttól 1 távol van.
Másrészt, ha minden határponthoz van átellenes pont, akkor $dim(X) = n$,

különben egy relatív belső ponthoz *nem* lehetne átellenes pontot találni. $diam(X) = 1$ miatt $X \subseteq B(X)$, másrészt a diametriális átellenes pont miatt $bd(X) \subseteq bd(B(X))$. Márpedig egy n-dimenziós konvex halmaz határát egy másik határa nem tartalmazhatja.
Állandó szélességű halmaznál persze mindig megtalálható a diametriálisan átellenes pont, ugyanis vegyünk egy $\mathbf{p} \in bd(X)$ pontot. Ekkor véve egy $\mathbf{p}$-beli támaszhipersíkot, a párja az állandó szélesség definíciója miatt érinti $B(\mathbf{p})$-t. Tehát a szemközti hipersík érinti X-et is, $B(\mathbf{p})$-t is, de $X \subseteq B(\mathbf{p})$. Így van közös érintési pont is, az pedig éppen $\mathbf{p}$ egy diametriálisan átellenes pontja. □

Egy másik, hasonlóan egyszerű állítás a következő:

2.3.10. Állítás. *Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $diam(X) = 1$.
Ekkor X pontosan akkor állandó szélességű, ha $X_V := X + (-X) = B(\mathbf{o})$.*

Bizonyítás. Ha X állandó szélességű, akkor persze $-X$ is az, és az összegük 2 állandó szélességű, ugyanakkor $\mathbf{o}$-ra szimmetrikus. Elég tehát belátni, hogy tetszőleges középpontosan szimmetrikus 2 állandó szélességű test csak az egységgömb lehet. Márpedig a szimmetria miatt X_V tetszőleges $\mathbf{p}$ határpontját tekintve, az ottani támaszhipersík párja éppen a tükrözöttje lesz, és $-\mathbf{p}$-ben (is) érinti X_V-t. Egy ilyen origóra szimmetrikus, egymástól 2 távol lévő hipersíkpár viszont támaszhipersíkja $B(\mathbf{o})$-nak is, a párhuzamos hipersíkok távolságának definíciója miatt. Tehát X_V és $B(\mathbf{o})$ támaszhipersíkjai egybeesnek, de akkor a két kompakt konvex halmaz ugyanaz.
A másik irány: tetszőleges irányt kijelölve, azaz véve egy hipersíkot, X adott irányú szélessége, azaz a hipersíkkal párhuzamos támaszhipersíkok távolsága ugyanaz, mint $-X$ ugyanazon irányú szélessége. Így X_V tetszőleges irányú szélessége kétszerese X ugyanazon irányú szélességének. X_V feltevésünk szerint az egységgömb, így minden irányban a szélessége 2, ami X-re adja a kívánt 1 állandó szélességet. □

Az állandó szélesség egy másik jellemzése:

2.3.11. Tétel. *Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt konvex halmaz, $diam(X) = 1$.
Ekkor X pontosan akkor w állandó szélességű valamely $w \in \mathbb{R}^+$-ra, ha rendelkezik a támasz metszet tulajdonsággal.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy X w állandó szélességű, azaz $X_V := X + (-X) = B(\mathbf{o}, w)$. Legyenek H_1, H_2 és H párhuzamos hipersíkok, az első kettő X, a harmadik $B(\mathbf{o})$ támaszhipersíkja, és legyen $\mathbf{p} \in H \cap S(\mathbf{o})$. Így $w\mathbf{p} \in bd(X_V)$, azaz $w\mathbf{p} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, valamely $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ pontokra. Mivel H támaszhipersíkja $B(\mathbf{o})$-nak $\mathbf{p}$-ben , ezért wH támaszhipersíkja X_V-nek $w\mathbf{p}$-ben, de X_V H-val párhuzamos támaszhipersíkjának pontjai $\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2$ alakúak, ahol $\mathbf{h}_1 \in H_1, \mathbf{h}_2 \in H_2$, és az érintési pontok is érintési pontok különbségei. Így $\mathbf{x}_1 \in H_1$, $\mathbf{x}_2 \in H_2$, vagy fordítva. Azaz X rendelkezik a támasz metszet tulajdonsággal.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy X rendelkezik a támasz metszet tulajdonsággal. Legyen $\mathbf{p} \in S(\mathbf{o})$ és legyen az $\overline{\mathbf{op}}$ félegyenes X_V-vel alkotott metszéspontja $\mathbf{q}$. Ha H támaszhipersíkja $B(\mathbf{o})$-nak $\mathbf{p}$-ben, akkor $\exists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in bd(X)$, hogy az $\overline{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}$ egyenes párhuzamos $\overline{\mathbf{op}}$-vel, és van X-nek $\mathbf{x}_1$-ben és $\mathbf{x}_2$-ben H-val párhuzamos támasz hipersíkja. Így viszont $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in bd(X_V)$, azaz $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{q}$ vagy $-\mathbf{q}$,és rajta keresztül van X_V-nek H-val párhuzamos támaszhipersíkja. Azaz X_V és $B(\mathbf{o})$ két origóra szimmetrikus kompakt konvex halmaz, amelyekre igaz, hogy tetszőleges origóból induló félegyenes egy-egy pontban metszi a határukat $\mathbf{q}$-ban illetve $\mathbf{p}$-ben, és ha halad $\mathbf{p}$-n át $B(\mathbf{o})$-nak egy támaszhipersíkja, akkor azzal párhuzamosan halad $\mathbf{q}$-n át X_V-nek egy támaszhipersíkja. Nevezzük ezt a tulajdonságot úgy, hogy "nagyon hasonlítanak egymásra". Megmutatjuk, hogy ez azt jelenti, hogy $X_V = wB(\mathbf{o})$, valamely $w > 0$ számra.

Gyakran hasznos egy Minkowski teret úgy tekinteni, mint egy Euklidészi tér, ami el van látva egy második metrikával. Így használhatók olyan fogalmak, mint merőlegesség, szög, stb. Most is ezt tesszük.
Be kell tehát látnunk, hogy ha $\overline{\mathbf{op}_1\mathbf{q}_1}$ és $\overline{\mathbf{op}_2\mathbf{q}_2}$ két félegyenes, amik $S(\mathbf{o})$-t, illetve $bd(X_V)$-t $\mathbf{p}_1$-ben és $\mathbf{p}_2$-ben, illetve $\mathbf{q}_1$-ben és $\mathbf{q}_2$-ben metszik, akkor $\frac{d(\mathbf{o},\mathbf{p}_1)}{d(\mathbf{o},\mathbf{q}_1)} = \frac{d(\mathbf{o},\mathbf{p}_2)}{d(\mathbf{o},\mathbf{q}_2)}$. Ez valójában egy síkbeli állítás, hiszen az egész ábra elmetszhető az $\mathbf{o}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ síkkal, és elegendő ott bizonyítani. Ez pontosan: Legyen $A := aff\{\mathbf{o}, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2\}$, ami valójában egy sík. $\bar{B} := B(\mathbf{o}) \cap A$, $\bar{X} := X_V \cap A$. Ekkor az A sík ezen két konvex kompakt, origóra szimmetrikus halmaza is "nagyon hasonlít" egymásra, ugyanis $\bar{B}$ tetszőleges $\mathbf{p}$-beli támaszegyenese előáll mint $B(\mathbf{o})$ támaszhipersíkjának A-val vett metszete, és ha $\mathbf{q}$ ezen $\mathbf{p}$ párja, akkor a $\mathbf{q}$-beli párhuzamos támaszhipersík metszete az A síkkal adja a megfelelő támaszegyenest. Elegendő tehát a síkbeli esetet tárgyalni.

Rögzítsünk egy $\mathbf{ox}$ félegyenest, amihez majd mérjük az $\mathbf{o}$-ból induló félegyenesek szögét. Legyen $h(\theta)$ a θ szögű félegyenes. $\mathbf{p}(\theta) := h(\theta) \cap bd(\bar{B})$, $\mathbf{q}(\theta) := h(\theta) \cap bd(\bar{X})$, $f(\theta) := \|\mathbf{o} - \mathbf{p}(\theta)\|$, $g(\theta) := \|\mathbf{o} - \mathbf{q}(\theta)\|$, utóbbiak Euklideszi távolságok. $K := \sup f(\theta)$. Ekkor feltéve hogy $|\theta_1 - \theta_2| < \pi$

$$|f(\theta_1) - f(\theta_2)| \leq \|\mathbf{p}(\theta_1) - \mathbf{p}(\theta_2)\| = \frac{f(\theta_2)\sin|\theta_1 - \theta_2|}{|\sin(\sphericalangle(\mathbf{o}, \mathbf{p}(\theta_1), \mathbf{p}(\theta_2)))|} \leq$$

$$\leq \frac{K|\theta_1 - \theta_2|}{|\sin(\sphericalangle(\mathbf{o}, \mathbf{p}(\theta_1), \mathbf{p}(\theta_2)))|}$$

Ha elég kicsi $|\theta_1 - \theta_2|$, akkor $\sphericalangle(\mathbf{o}, \mathbf{p}(\theta_1), \mathbf{p}(\theta_2))$ lényegében a $\bar{B}$ $\mathbf{p}(\theta_1)$-beli érintőjének és a $\mathbf{p}(\theta_1)$-be húzott "sugarának" a szöge, így egy pozitív korlát fölött van. Létezik tehát egy $\delta > 0$, hogy ha $|\theta_1 - \theta_2| < \delta$, akkor $|\sin(\sphericalangle(\mathbf{o}, \mathbf{p}(\theta_1), \mathbf{p}(\theta_2)))| > \delta$. A fenti egyenlőtlenségbe beírva azt kapjuk, hogy az f függvény Lipschitz, tehát abszolút folytonos. Hasonlóan a g függvény is, és mivel $\mathbf{o} \in int(\bar{X})$, ezért g alulról korlátos egy pozitív számmal, így $\frac{f}{g}$ is abszolút folytonos. Azaz majdnem minden θ-ra létezik $f'(\theta), g'(\theta)$ és $\frac{f}{g}'(\theta)$.

Tudjuk, hogy egy irányszöggel paraméterezett görbére igaz: ha $r(\theta)$ a θ_0 helyen differenciálható, akkor az ottani helyvektor és az érintő szögére, μ-re igaz, hogy $\mathrm{ctg}\mu = \frac{r'}{r}(\theta_0)$. Ahol f és g deriválható, ott a $bd(\bar{B})$ és a $bd(\bar{X})$ görbéknek egyértelmű az érintője, mivel $\bar{B}$ és $\bar{X}$ "nagyon hasonlóak", ezek párhuzamosak. Tehát

$$\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g}$$

majdnem mindenütt, így $\frac{f}{g}$ deriváltja majdnem mindenütt 0, tehát valóban $\frac{f}{g}$ állandó. Ez az állandó a keresett w. $\square$

Még egy állítás hiányzik és teljes a kép Minkowski terekben.

2.3.12. Állítás. *$X \subseteq \mathbb{R}^n$. Ekkor*

- *Ha X bármely két párhuzamos normálisa egybeesik, akkor X rendelkezik a támasz metszet tulajdonsággal.*
- *Ha $B(\mathbf{o})$ sima, szigorúan konvex, akkor ez visszafele is igaz, azaz ekkor: Ha X rendelkezik a támasz metszet tulajdonsággal, akkor bármely két párhuzamos normálisa egybeesik.*

Bizonyítás. Ha adott $\mathbf{p} \in S(\mathbf{o})$ és H, a $B(\mathbf{o})$ $\mathbf{p}$-beli támaszhipersíkja, akkor, ha vesszük az X két H-val párhuzamos támaszhipersíkját, H_1-et és H_2-őt, akkor azokon akárhogy választva a két érintési pontot, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$-t, az $\mathbf{x}_1$-en átmenő, $\overline{\mathbf{op}}$ egyenessel párhuzamos egyenes normálisa lesz a H_1 hipersíknak a normális definíciója miatt. De ugyanígy az $\mathbf{x}_2$-n átmenő párhuzamos is normálisa a H_2 hipersíknak, a két párhuzamos egybeesése pedig azt jelenti, hogy az valójában az $\overline{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}$ egyenes.

A másik irány: Mivel $X + (-X) = B(\mathbf{o})$ szigorúan konvex, így X is az. Legyen h_1, h_2 az X két párhuzamos normálisa. Legyen $\mathbf{p} \in S(\mathbf{o})$ olyan, hogy $\overline{\mathbf{op}}$ párhuzamos ezekkel, és legyen H a $B(\mathbf{o})$ $\mathbf{p}$-beli támaszhipersíkja (Ez a simaság miatt egyértelmű). Mivel X rendelkezik a támasz metszet tulajdonsággal, ezért találhatók olyan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ pontok, amikben van X-nek H-val párhuzamos támaszhipersíkja és $\overline{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}$ párhuzamos $\overline{\mathbf{op}}$-vel, így h_1-gyel és h_2-vel is. Ha $h_1 \neq h_2$, akkor valamelyik nem azonos $\overline{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}$-vel, mondjuk h_1. De h_1 az X egy normálisa, azaz definíció szerint van X-nek olyan H_1 támaszhipersíkja, aminek h_1 normálisa, ugyanakkor $B(\mathbf{o})$ simasága miatt H_1 irányát h_1 egyértelműen megadja, az nem lehet más, mint H. Így viszont H_1 az X halmazt két pontban is érinti, $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ valamelyikében, és $bd(X)$ h_1-el alkotott metszéspontjában is. Ez ellent mond annak, hogy X szigorúan konvex. □

2.3.13. Megjegyzés. *Ha $B(\mathbf{o})$ nem szigorúan konvex, akkor magának $B(\mathbf{o})$-nak vannak nem egybeeső párhuzamos normálisai, holott $B(\mathbf{o})$ persze 2 állandó szélességű halmaz.*

Ezek a tételek *H.G. Eggleston*-tól származtak.
Az Euklidészi esetben minden felsorolt fogalom ekvivalens. Ezt mondja ki a következő állítás:

2.3.14. Állítás. *Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt konvex halmaz az n-dimenziós Euklideszi térben.*
Ekkor, ha X rendelkezik a gömbi metszet tulajdonsággal, akkor állandó szélességű.

Bizonyítás. Mivel X rendelkezik a gömbi metszet tulajdonsággal, ezért $diam(X) = 1$. Használva a 2.2.7 következményt kapjuk, hogy a minimális szélessége legalább 1. □

A fejezet főtétele, az eddigiek összefoglalása, és így szól:

2.3.15. Tétel. *Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt konvex halmaz. Lássuk el a következő számozással a tulajdonságokat:*
(1) X párhuzamos normálisai egybe esnek,
(2) X w állandó szélességű valamely $w > 0$ számra,
(3) $X + (-X) = B(\mathbf{o}, w)$, valamely $w > 0$ számra,
(4) X rendelkezik a támasz metszet tulajdonsággal,
(5) X rendelkezik a w-gömbi metszet tulajdonsággal, valamely $w > 0$ számra,
(6) X diametriálisan maximális,
Ekkor fennállnak az alábbi implikációk:

$$(1) \Rightarrow (2) \iff (3) \iff (4) \Rightarrow (5) \iff (6)$$

És amennyiben az egységgömb szigorúan konvex és sima, akkor

$$(1) \iff (2)$$

Euklidészi térben pedig ezek a tulajdonságok mind ekvivalensek.

2.4. Eggleston konstrukciója

Megadunk egy Minkowski teret és abban egy kompakt konvex halmazt, ami diametriálisan maximális, de *nem* állandó szélességű. Ráadásul az egységgömb sima, szigorúan konvex lesz, ez a konstrukció Egglestontól származik. Majd ezt felhasználva adunk egy példát arra, hogy két d- illetve w-diametriálisan maximális halmaz összege *nem* feltétlenül egy $(d + w)$-diametriálisan maximális halmaz.

A háromdimenziós Euklidészi térben vegyünk egy szabályos 1 élhosszúságú tetraédert, csúcsai $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$. $X := B(\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\})$. Az így kapott testet a négy gömb határának egy-egy része határolja. Ezen részek páronként ívekben metszik egymást, mely ívek az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ pontok közül pontosan kettőt tartalmaznak, így van hat ív. Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ pontokat tartalmazó ív legyen $\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, a $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ pontokat összekötő pedig $\gamma(\mathbf{c}, \mathbf{d})$. Legyen $\mathbf{p}$ a $\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ív $\mathbf{q}$ pedig a $\gamma(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ ív felezőpontja.

Legyen $\mathbf{x} \in bd(X)$-re $P(\mathbf{x})$ azon $\mathbf{y} \in bd(X)$ pontok halmaza, melyeken keresztül van egy olyan támaszsíkja X-nek, amely párhuzamos egy $\mathbf{x}$-beli támaszsíkkal, azaz az $\mathbf{x}$-szel "szemközti" pontok halmaza. $f(\mathbf{x}) := \sup\{\sphericalangle(\overline{\mathbf{pq}}, \overline{\mathbf{xy}}) : \mathbf{y} \in \mathbf{P}(\mathbf{x})\}$, azaz a legnagyobb hegyesszög (vagy derékszög), ami felléphet az $\overline{\mathbf{xy}}$ és a $\overline{\mathbf{pq}}$ egyenes között, mialatt $\mathbf{y}$ befutja $P(\mathbf{x})$-et. Belátjuk, hogy $\chi := \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in bd(X)\} > 0$. Tegyük fel, hogy nem így van, azaz van egy $\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n$ sorozat, ahol $\mathbf{x}_n \in bd(X), \mathbf{y}_n \in P(\mathbf{x}_n)$ és $\sphericalangle(\overline{\mathbf{x}_n\mathbf{y}_n}, \overline{\mathbf{pq}}) \longrightarrow 0$ midőn $n \longrightarrow \infty$, és ráadásul $\mathbf{y}_n$ még a $P(\mathbf{x}_n)$-beli pontok közül az, amelyikre ez a szög maximális. Ekkor $bd(X)$ kompaktsága miatt feltehető, hogy $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$ és $\mathbf{y}_n \longrightarrow \mathbf{y}$ valamely $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ pontokra. Azaz $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ szemközti pontok és $\overline{\mathbf{xy}}$ párhuzamos $\overline{\mathbf{pq}}$-val. De ha ránézünk az X-re látjuk, hogy $\overline{\mathbf{pq}}$-val párhuzamos összekötő egyenesű szemközti pár nincs $\overline{\mathbf{pq}}$-n kívül, azaz $\mathbf{x} = \mathbf{p}, \mathbf{y} = \mathbf{q}$ vagy fordítva. Viszont $\mathbf{p}$ közelében minden $\mathbf{x}$ pontnak van olyan $\mathbf{y}$ szemközti párja, amire az $\sphericalangle(\overline{\mathbf{xy}}, \overline{\mathbf{pq}})$ szög nagyobb egy előre megadható pozitív szögnél, hiszen vagy $\mathbf{c}$ vagy $\mathbf{d}$ megfelelő ilyen pár. A feltevés tehát valóban lehetetlen.

Nyilvánvaló, hogy X szigorú konvexitása maga után vonja $X_V := X + (-X)$ szigorú konvexitását. Belátjuk, hogy X_V sima is. Általában két szigorúan konvex alakzat összegének határpontjai egyértelműen állíthatók elő, mint két határpont összege, mivel tekintve az adott pontbeli érintősíkot, meg kell nézni, hogy az összeadandókat ezzel a síkkal párhuzamosan "ugyanerről az oldalról" hol érinti sík. Ezek az érintési pontok lesznek az összegbeli pontot kiadó tagok. Ez nyilvánvaló, hiszen egy hipersíkkal való érintkezési pont nem más, mint az adott normális irányra vett vetítés maximum pontja, ami persze összeg esetén a két maximumpont összege. Ez viszont azt jelenti ebben az esetben, hogy X_V csak úgy lehetne nem sima, ha lenne egy olyan $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ pár X-ben, melyeken keresztül két párhuzamos támaszhipersíkpár is fektethető. Ha megnézzük, hogy X egy-egy pontja milyen pontokkal van szemközt, látjuk, hogy ilyen nincs.

Megadjuk a Minkowski tér egységgömbjét: Minden $\eta > o$ számra legyen K_η olyan origóra szimmetrikus sima szigorúan konvex test, amire $X_V \subset K_\eta$, és K_η tartalmazza az X_V határát kivéve esetleg néhány olyan ponton, ami $(\mathbf{p} - \mathbf{q})$-tól vagy $(\mathbf{q} - \mathbf{p})$-től η-nál nincs távolabb, és K_η különbözzön X_V-től. Ez lehetséges, mert X_V sima, szigorúan konvex, szimmetrikus.

Ha η elég kicsi, akkor X minden határpontjához már a K_η egységgömbű Minkowski térben van diametriálisan átellenes pont, azaz olyan, amely 1 távol van tőle. Ez a $\chi > 0$ állításból következik, hiszen lesz az adott $\mathbf{x}$ ponthoz egy olyan $\mathbf{y}$ szemközti pont, amelyre az $\sphericalangle(\overline{\mathbf{xy}}, \overline{\mathbf{pq}})$ szög legalább χ, mivel szemközti, ezért a különbségük valóban X_V -nek a határán van, mivel a szög elég nagy, ezért nem is $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ -hoz közel. Azaz X abban a Minkowski térben, melynek egységgömbje K_η valóban diametriálisan maximális. Ugyanakkor viszont X_V *nem* az egységgömb, nem is annak nagyítottja, így X *nem* állandó szélességű.

A következő állítás önmagában is érdekes lehet, de még érdekesebbé teszi a bevezetőben megígért példa.

2.4.1. Állítás. *Tetszőleges egységgömb esetén minden sima konvex test pontosan akkor diametriálisan maximális, ha állandó szélességű.*

Bizonyítás. Az ekvivalencia egyik iránya minden Minkowski térben igaz, ezért elegendő a másikat belátni. Tegyük tehát fel, hogy $X \subset \mathbb{R}^n$ egy sima konvex test, ami diametriálisan maximális, $diam(X) = 1$. Belátandó, hogy állandó szélességű. Vegyünk tehát egy támasz hipersíkot, mely a $\mathbf{p}$ pontban támasztja meg X-et. A diametriális maximalitás miatt van egy $\mathbf{q}$ pont éppen 1 távol $\mathbf{p}$-től az X határán. Azaz az X halmaz benne van a $B(\mathbf{p}) \cap B(\mathbf{q})$ lencsehalmazban. Így tehát a $B(\mathbf{q})$ golyó $\mathbf{p}$-beli bármelyik érintő hipersíkja és a $B(\mathbf{p})$ golyó $\mathbf{q}$-beli, az előzővel párhuzamos érintő hipersíkja (ami létezik, mivel a lencsehalmaz szimmetrikus a középpontok közötti szakasz felezőpontjára) támaszhipersíkja X-nek is. De az X halmaz simasága miatt a $\mathbf{p}$-beli hipersík meg kell egyezzen az előre megadott támasz hipersíkkal. A $\mathbf{q}$-beli támaszhipersík tehát párhuzamos a $\mathbf{p}$-belivel, és a hipersíkok távolságának második definíciója szerint 1 távol van attól. $\square$

Lássuk a bevezetőben ígért példát!
Vegyük az Eggleston konstrukciójabeli Minkowski teret és abban az általa megadott X halmazt, ami diametriális maximalitása ellenére képes nem állandó szélességű lenni. Tekintsük egy $\varepsilon > 0$ számra az $X + B(\mathbf{o}, \varepsilon)$ halmazt. Az egységgömb simasága miatt ez is sima. Azaz, ha diametriálisan maximális lenne ($1 + 2\varepsilon$ átmérővel), akkor az előző állítás szerint $(1 + 2\varepsilon)$-állandó szélességű lenne. Ha viszont bármilyen kicsi ε lenne, amire $(1 + 2\varepsilon)$-állandó szélességű, akkor maga X állandó szélességű lenne, de nem az. Van tehát egy küszöb, ami alatt már minden ε-ra $X + B(\mathbf{o}, \varepsilon)$ *nem* $(1 + 2\varepsilon)$-diametriálisan maximális, holott X diametriálisan maximális, a gömb pedig még állandó szélességű is.

3. Diametriálisan maximális halmazok konstruálása

Kérdés, hogyan találjunk diametriálisan maximális halmazokat Minkowski térben.

3.1. A Sallee-konstrukció

Az első módszer mindjárt adódik az alábbi módon: Keressünk egy halmazt, X-et, aminek átmérője nem nagyobb 1-nél, és ha igaz, hogy $diam(B(X)) \leq 1$, akkor $X \subseteq B(X)$ és $B(X) \subseteq BB(X)$ miatt $B(X) = BB(X)$, azaz $B(X)$ egy diametriálisan maximális halmaz.
Egy másik módszer a következő, *Sallee*-tól származó konstrukció.

Adott egy Minkowski tér, egységgömbje $B(\mathbf{o})$, ennek $\mathbf{p}$-vel történő eltoltja $B(\mathbf{p})$. Tekintsük $\mathbb{R}^n$ egy jólrendezését: $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_\alpha, ... \;\; \alpha < \kappa$.
(κ lehet egy a kontinuumnál nagyobb rendszám is, persze kontinuum számosságú).

$$F_1 := B(\mathbf{x}_1)$$

$$F_\alpha := \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta<\alpha} F_\beta & , \text{ha } \mathbf{x}_\alpha \notin \bigcap\limits_{\beta<\alpha} F_\beta \\ B(\mathbf{x}_\alpha) \cap \bigcap\limits_{\beta<\alpha} F_\beta & , \text{ha } \mathbf{x}_\alpha \in \bigcap\limits_{\beta<\alpha} F_\beta \end{cases}$$

Adódik tehát egy $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq ...$ sorozat. Végül legyen

$$F := \bigcap_{\alpha<\kappa} F_\alpha.$$

3.1.1. Tétel. *A fenti konstrukcióval kapott F halmaz diametriálisan maximális.*

Bizonyítás. Egy nyilvánvaló állításból bizonyítható a tétel:

3.1.2. Állítás.

$$\mathbf{x}_\alpha \in F \Leftrightarrow \mathbf{x}_\alpha \in \bigcap_{\beta<\alpha} F_\beta.$$

Azaz akkor és csak akkor van valaki F-ben, ha akkor, amikor az eljárásban hozzá érkezünk, még nem esett ki.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy ha egy pont benne van a teljes metszetben, akkor az α-adik lépésnél is még benne kellett legyen.
Másrészt, ha benne van az α-adik lépésben, akkor később már csak olyan gömböket veszünk, amelyek középpontja $\mathbf{x}_\alpha$-tól nincs 1-nél távolabb. $\square$

Meg kell tehát mutatni, hogy $B(F) = F$. Ha $\mathbf{x}_\alpha \in F$, akkor $\mathbf{x}_\alpha$ az eddig "bevett" nála kisebb indexűektől nincs távolabb mint 1, a nagyobb indexű pontok meg csak akkor lesznek F-ben, ha benne vannak $B(\mathbf{x}_\alpha)$-ban is. így $\mathbf{x}_\alpha \in B(F)$. Másrészt, ha $\mathbf{x}_\alpha \notin F$, akkor ez az állítás szerint azért van, mert $\mathbf{x}_\alpha \notin F_\alpha$,azaz van egy nála kisebb indexű tőle több mint 1 távol, ami benne van F-ben. Így $\mathbf{x}_\alpha \notin B(F)$. $\square$

A tétel egyik rögtön adódó következménye:

3.1.3. Következmény. *Tetszőleges 1 átmérőjű halmaz belefoglalható egy 1 átmérőjű diametriálisan maximális halmazba tetszőleges Minkowski térben.*

Bizonyítás. Ha $\mathbb{R}^n$-et úgy rendezzük, hogy előbb soroljuk fel X pontjait, aztán $\mathbb{R}^n \backslash X$ pontjait, akkor a konstrukcióval –felhasználva a $diam(X) \leq 1$ feltételt– egy az X-et tartalmazó halmazhoz jutunk. $\square$

Érdemes kimondani speciálisan az Euklideszi esetre is a fenti a tételt:

3.1.4. Tétel. *Az Euklideszi térben minden 1 átmérőjű halmaz köré rajzolható egy 1 állandó szélességű halmaz.*

A 2.2.7 alatti következmény kicsit gyengébb formája is elegánsan levezethető a Sallee-konstrukcióból. Mivel adható a 2.2.7 alatti állítást nem használó bizonyítás is a diametriális maximalitás és az állandó szélességűség ekvivalenciájára Euklideszi térben, ezért valójában az erős alakra is bizonyítást ad a konstrukció.

3.1.5. Következmény. *$X \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz, amire $diam(X) \leq 1$. Ekkor $B(X)$ tartalmaz (1 átmérőjű) diametriálisan maximális halmazt.*

Bizonyítás. Ha $\mathbb{R}^n$-et úgy rendezzük, hogy előbb soroljuk fel X pontjait, aztán $\mathbb{R}^n \backslash X$ pontjait, akkor a konstrukcióval –felhasználva a $diam(X) \leq 1$ feltételt– $B(X)$ egy részhalmazát kapjuk. □

Ha valaki nem szereti az effajta játékokat a végtelennel, annak örömére adható a konstrukciónak egy szelídebb változata is. Ebben a változatban $\mathbb{R}^n$ egy megszámlálható sűrű részhalmazát vesszük és soroljuk fel mondjuk ω-ra rendezve, azaz $D := \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_j, ...\}$. Majd ugyanúgy definiáljuk F_k-t, minden k pozitív egész számra, ahogy az eredeti konstrukcióban. Most is igaz lesz, hogy a végül kapott

$$F := \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$$

halmaz diametriálisan maximális, de bizonyítása egy kevés technikát igényel.

3.1.6. Tétel. *Az így kapott F halmaz is diametriálisan maximális.*

Bizonyítás. Most is igaz az az állítás, miszerint

$$\mathbf{x}_k \in F \Leftrightarrow \mathbf{x}_k \in \bigcap_{i=1}^{k-1} F_i$$

Ennek bizonyítása szó szerint ugyanaz, mint fent. Most viszont ebből csak az jön ki, hogy $B(F) \cap D = F \cap D$, ami *nem* vonja maga után, hogy $B(F) = F$, még akkor sem, ha tudjuk, hogy mindkét halmaz kompakt, konvex. Ha még azt is bizonyítjuk legalább az egyikről (mondjuk F-ről), hogy nem üres a belseje, akkor ezek együtt már elegendőek. Akkor ugyanis $B(F)$ belseje sem lehet üres, mert ez egy konvex halmaz esetén azt jelentené, hogy egy hipersík tartalmazza, ami viszont ellentmond annak, hogy ugyanaz a D-vel alkotott metszete, mint a nem hipersíkba lapított F-nek. Így viszont már felírható, hogy $F = cl(F \cap D) = cl(B(F) \cap D) = B(F)$.
Tegyük tehát fel indirekt módon, hogy $dim(F) < n$. Persze $0 < dim(F)$. Van tehát egy valódi affin altér (H), amiben fekszik F, és itt a relatív belseje nem üres. Vegyünk ebben a relatív belsőben egy $\mathbf{p}$ pontot, és körülötte egy kis ε sugarú gömböt (a Minkowski metrika szerint), amire $\varepsilon B(\mathbf{p}) \cap H \subseteq relint(F)$. Ez azt jelenti, hogy F konstrukciójakor minden olyan $\mathbf{x}_i$, amit bevettünk legfeljebb $1 - \varepsilon$ távol lehetett $\mathbf{p}$-től, amiből következik, hogy az

egész $\varepsilon B(\mathbf{p}) \subseteq B(\mathbf{x}_i)$, minden "bevett" i-re. Így viszont $\varepsilon B(\mathbf{p}) \subseteq F$. Ez pedig ellentmond, annak, hogy $dim(F) < n$. $\square$

3.2. Diametriálisan maximális halmazok szimmetriákkal és előírt határral

Itt a konstrukció egy variánsát és egy alkalmazását tárgyaljuk. Először azt nézzük meg, hogyan lehet szimmetriákra invariáns diametriálisan maximális halmazt konstruálni, majd azt, hogy mikor lehet egy adott halmaz egy diametriálisan maximális halmaz határa.

3.2.1. Definició. *A Minkowski tér szimmetriájának nevezünk minden olyan $\mathbb{R}^n$-en ható lineáris automorfizmust, amelynél $B(\mathbf{o})$ képe önmaga.*

3.2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy G a Minkowski tér szimmetriáinak egy csoportja, amire nézve $X \subseteq \mathbb{R}^n$ invariáns, azaz $g(X) = X$ $(\forall g \in G)$. Tegyük még fel, hogy $diam(X) = 1$.*
Ekkor létezik olyan diametriálisan maximális halmaz, amely tartalmazza X-et és szintén invariáns G-re.

Bizonyítás. Feltehető, hogy X konvex. Az is feltehető, hogy nem üres a belseje, ugyanis ha az lenne, akkor véve egy relatív belső pontját valamint az akörüli kicsiny $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ gömböt: $X \cup \{B(g(\mathbf{x}), \varepsilon) : g \in G\}$ már egy szintén 1 átmérőjű G-invariáns halmaz.
Egy pont orbitját jelölje $[\mathbf{x}] := \{g(\mathbf{x}) : g \in G\}$. A nem nagy orbitok uniója X kivételével: $Y := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : diam([\mathbf{y}]) \leq 1\} \backslash X$. Egy új konstrukciót alkalmazunk, ami hasonlít Salle konstrukciójához. $D_0 := X$. Rendezzük jól Y orbitjait és egyesével transzfinit rekurzióval vegyük hozzá X-hez, amit lehet, azaz: $Y = \cup\{[\mathbf{y}_\alpha] : \alpha < \kappa\}$ rendezéssel

$$D_\alpha := \begin{cases} \bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta & ,\text{ha } d(\bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta, \mathbf{y}_\alpha) > 1 \\ [\mathbf{y}_\alpha] \cup \bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta & ,\text{ha } d(\bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta, \mathbf{y}_\alpha) \leq 1 \end{cases}$$

Itt $d(.,.)$ pont és halmaz távolságát jelenti: a kettő között megjelenő távolságok szuprémuma. Mivel minden $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta$ G-invariáns, ezért amikor eldöntöm, hogy $\mathbf{y}_\alpha$-t be lehet-e venni, akkor jogosan döntök az egész orbitjáról, azaz ha

$\mathbf{y}_\alpha$ távolabb van a halmaztól 1-nél, akkor az orbitjában az összes pont szintén távolabbi, ha közelebb van a halmazhoz, akkor az orbitjában az összes többi pont is közelebb van.
Így kapunk végül egy

$$D := \bigcup_{\alpha<\kappa} D_\alpha$$

halmazt, ami persze szintén G-invariáns, és még mindig 1-nél nem nagyobb átmérőjű. D konvex, mert ha egy szakasz két végpontját a konstrukció során hozzá tudtuk venni a halmazhoz, akkor az egész szakaszt is. Bizonyítjuk, hogy D diametriálisan maximális. Be kell látni, hogy $\mathbb{R}^n \setminus D$ pontjai D-től 1-nél távolabb vannak. Ez $(X \cup Y)\setminus D$-beli pontokra igaz D előállítása miatt. Legyen $\mathbf{p} \notin X \cup Y$. Vegyünk egy $\mathbf{x} \in int(D)$ pontot. Legyen az $[\mathbf{x}, \mathbf{p}] \cap (X \cup Y)$ halmaz $\mathbf{p}$-hez legközelebbi pontja $\mathbf{q}$. Mivel $X \cup Y$ zárt halmaz, ezért $\mathbf{q} \in X \cup Y$. Az is könnyen látszik, hogy $\mathbf{q}$ orbitjának átmérője 1. Azaz van egy $g_n \in G$ sorozat, amire

$$\lim_{n\to\infty} d(\mathbf{q}, g_n(\mathbf{q})) = 1.$$

Ha $\mathbf{q} \in D$, akkor $T := \{g_n(\mathbf{q}) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq D$, és mivel D átmérője 1, ezért $D \subseteq B(T)$. T választása miatt $\mathbf{q} \in bd(B(T))$. Másrészt $\mathbf{x} \in int(B(T))$, azaz az $[\mathbf{x}, \mathbf{p}]$ szakasz $\mathbf{q}$-ban kilép a konvex $B(T)$ halmazból, így $\mathbf{p}$ már nem lehet benne, ezért D-ben sem.
Ha $\mathbf{q} \notin D$, akkor –mivel D konvex és tartalmazza $\mathbf{x}$-et–, $\mathbf{p}$ sem lehet D-ben. $\square$

Másik témánk: mikor lehet egy halmaz egy diametriálisan maximális halmaz határa.

3.2.3. Definició. *Az $X \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz határképes, ha minden $\mathbf{x} \in X$ pontjához úgy található olyan $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ pont, amire: $X \subseteq B(\mathbf{x}')$ és $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 1$, hogy az $X' := \{\mathbf{x}' : \mathbf{x} \in X\}$ halmaz átmérője: $diam(X') \leq 1$*

3.2.4. Tétel. *Adott $X \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz a Minkowski térben, $diam(X) \leq 1$. Ekkor pontosan akkor létezik X-et a határán tartalmazó diametriálisan maximális halmaz, ha X határképes.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $X \subseteq bd(W)$, ahol W diametriálisan maximális halmaz. Akkor minden $\mathbf{x} \in X$ ponthoz van $\mathbf{x}' \in bd(W)$ diametriálisan átellenes, azaz 1 távol lévő pont. Ezek az $\mathbf{x}'$ pontok éppen jók, hiszen így $X' \subseteq bd(W)$ miatt $diam(X') \leq 1$.

Legyen most X határképes. Ekkor $diam(X \cup X') \leq 1$, mert külön-külön az átmérőjűk nem nagyobb, mint 1, és X' pontjai körüli egységgömbök tartalmazzák X-et. Azaz, ha a Sallee-konstrukcióban $X \cup X'$ -t soroljuk fel először, akkor a kapott diametriálisan maximális halmaz tartalmazza X-et és –mivel X'-t is–, ezért a határán. $\square$

Ez a feltétel valójában nem nagyon használható, hiszen szinte meg kell sejtsük a diametriálisan maximális halmazt ahhoz, hogy lássuk, hogy X a határára kerülhet, ha pedig éppen azt akarjuk bizonyítani, hogy X nem lehet a határán egy diametriálisan maximális halmaznak, azt kell belátnunk, hogy *nem* találunk ilyen $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$ leképezést. Ez sem könnyebb az eredeti feladatnál. Egy kicsit gyengítve a feltételt, már egy még nyilvánvalóbb, de használható állításhoz jutunk:

3.2.5. Állítás. *Ha $X \subseteq bd(W)$, ahol W diametriálisan maximális, akkor $X \subseteq bd(X_2)$, ahol*

$$X_2 := \bigcap_{X \subseteq B(\mathbf{p})} B(\mathbf{p})$$

Bizonyítás. Persze $X \subseteq X_2$, másrészt $diam(W) = 1$ miatt az $\mathbf{x} \in X$ pont egy diametriálisan átellenes pontja mutatja, hogy $\mathbf{x}$ a határon van. $\square$

Például ebből is belátható, az alábbi állítás:

3.2.6. Tétel. *Szigorúan konvex egységgömb esetén a diametriálisan maximális halmazok szigorúan konvexek.*

Bizonyítás. Azt kell tehát látni, hogy szakasz nem lehet a határ része. Ehhez elég, hogy az $X := [\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ szakaszra (,ahol persze $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq 1$) $X \nsubseteq bd(X_2)$. Vegyük mondjuk a felezőpontot. Az összes $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$-t tartalmazó egység sugarú golyó középpontja persze a szigorú konvexitás miatt közelebb van hozzá, mint 1. Sőt, ezen távolságok szuprémuma egy maximum (azaz felvétetik), mert az ilyen középpontok kompakt halmazt alkotnak, ami nem más, mint $B(\mathbf{p}) \cap B(\mathbf{q})$. Így tehát X_2-nek nem kerülhet a felezőpont a határára. $\square$

Euklidészi térben a szakasz helyett vehető elegendően nagy sugarú körív is, sőt, használva a 2.2.1 lemma (ii) pontjának általánosítását ugyanez a gondolatmenet mutatja, hogy

3.2.7. Állítás. *Ha* $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$ *az* $S(\mathbf{o}, r)$ *szféra pontjai, ahol* $1 < r$ *,és* $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \leq 1$ $(\forall 1 \leq i, j \leq k)$ *,és* $\mathbf{p} \in Sconv(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k)$, *akkor ez a* k *pont és még* $\mathbf{p}$ *együtt* nem *lehet egy állandó szélességű halmaz határán.*

3.3. Gömbök egy diametriálisan maximális halmazban

3.3.1. Tétel. *Tetszőleges* n*-dimenziós Minkowski térben egy diametriálisan maximális halmaz tartalmaz egy legalább* $\frac{1}{n+1}$ *sugarú gömböt.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy minden diametriálisan maximális halmaz előáll, mint véges gömbmetszetek fogyó limesze[1]: Vegyünk ugyanis az X diametriálisan maximális halmazban egy sűrű $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_k, ...$ sorozatot. Ekkor

$$X = \lim_{k \to \infty} B(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k) = \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k)$$

Szokásos kompaktsági okoskodás mutatja, hogy elég belátni, hogy ha adott véges sok pont páronként legfeljebb 1 távol egymástól, akkor a köréjük mint középpontok köré képzelt 1 sugarú gömbök metszete tartalmaz legalább $\frac{1}{n+1}$ sugarú gömböt. Adott tehát $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$, $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \leq 1$ minden $i \neq j$ párra. Ha belátjuk, hogy minden

$$\bigcap_{i=1}^{k} B(\mathbf{x}_i, 1 - \frac{1}{n+1})$$

nem üres, akkor készen vagyunk, a metszetben egy tetszőleges pont megfelel a gömb középpontjának. A Helly-tétel szerint elég belátni, hogy a metszetben szereplő tetszőleges $n+1$ gömb metszete nem üres. Márpedig $n+1$ páronként legfeljebb 1 távol lévő pont súlypontjának távolsága nem nagyobb, mint $\frac{n}{n+1}$ bármelyik ponttól, hiszen megfelelő számozással:

$$\left\| \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{x}_{n+1}}{n+1} \right\| \leq \frac{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| + ... + \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{n+1}\|}{n+1} \leq \frac{n}{n+1}$$

□

A diametriálisan maximális halmazok azzal a tulajdonsággal is bírnak, hogy a körülírt és a beírt gömbjük koncentrikus, pontosabban:

[1] A Hausdorff metrika szerint.

3.3.2. Tétel. *X diametriálisan maximális halmaz egy tetszőleges Minkowski térben, $0 < r, R < 1$.*
Ekkor

$$B(\mathbf{x}, r) \subseteq X \Longrightarrow X \subseteq B(\mathbf{x}, 1-r)$$

$$X \subseteq B(\mathbf{x}, R) \Longrightarrow B(\mathbf{x}, 1-R) \subseteq X$$

Bizonyítás. A következő lemma nyilvánvaló:

3.3.3. Lemma. *Tetszőleges Minkowski térben, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, 0 < r < 1$ esetén*

$$B(B(\mathbf{x}, r)) = B(\mathbf{x}, 1-r).$$

Így tehát $B(\mathbf{x}, r) \subseteq X$ esetén $X = B(X) \subseteq B(B(\mathbf{x}, r)) = B(\mathbf{x}, 1-r)$. A másik állítás hasonlóan bizonyítható. □

4. Unicitás

Tudjuk tehát, hogy mik az állandó szélességű halmazok, tudunk konstruálni ilyeneket. Felmerül a kérdés, hogy milyen feltételek mellett egyértelmű a létezésük. Ez egyből több kérdés is.

Első kérdés: *Van olyan Minkowski tér, amiben a gömb az egyetlen állandó szélességű illetve diametriálisan maximális test? Ha van, honnan látszik ez az egységgömbön?*
Második kérdés: *Milyen legyen egy* 1 *átmérőjű* X *halmaz ahhoz, hogy pontosan egy állandó szélességű illetve diametriálisan maximális halmaz tartalmazza?*

Az első kérdésre a válasz igen, ez Visy Balázs eredménye:

4.0.4. Állítás. *Az* l_∞ *térben, azaz amikor az egységgömb a kocka, a kocka az egyetlen diametriálisan maximális halmaz, így persze az egyetlen állandó szélességű is.*

Bizonyítás. Ha egy X halmazra $B(X) = X$, az azt jelenti, hogy X "tengelypárhuzamos" kockák metszete. Egy ilyen kocka viszont előáll, mint "tengelypárhuzamos" félterek metszete, azaz X maga is ilyen félterek metszete, tehát tengelypárhuzamos téglatest. De ha tényleg diametriálisan maximális akar lenni, akkor persze kocka. □

A kérdés második felére egy válasz egy saját eredmény:

4.0.5. Állítás. *Olyan Minkowski térben, ahol az egységgömb egy olyan politóp, melynek van olyan csúcsa, mely a tükörképével együtt az összes hiperlapot lefogja, azaz minden hiperlap tartalmazza a csúcsot vagy a tükörképét, a gömb az egyetlen állandó szélességű halmaz.*
Speciálisan tetszőleges kettőskúp gömbű Minkowski térre, még speciálisabban az l_1 *térre igaz, hogy csak a gömb állandó szélességű.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy egy állandó szélességű halmaz rendelkezik a támasz metszet tulajdonsággal –definíciója: 2.3.4. Vegyük tehát az egységgömb ezen $\mathbf{p}$ és $-\mathbf{p}$ pontját, amik a lapokat lefogják. Ekkor van az egységgömbnek olyan párhuzamos támaszhipersíkpárja, amelyet alkotó hipersíkok az egységgömböt csak $\mathbf{p}$-ben illetve $-\mathbf{p}$-ben metszik. Kell tehát legyen az állandó szélességű halmaznak, W-nek két pontja $\mathbf{q}, \mathbf{q}'$, melyekben van ezzel a hipersíkpárral párhuzamos támaszhipersíkpár, a $\mathbf{q} - \mathbf{q}'$ vektor pedig $\mathbf{p}$. De akkor:

$$W = B(W) \subseteq B(\mathbf{q}) \cap B(\mathbf{q}')$$

Ugyanakkor könnyen látható, hogy mivel $\mathbf{p}, -\mathbf{p}$ lefogják a hiperlapokat és $\mathbf{q} - \mathbf{q}' = \mathbf{p}$, ezért $B(\mathbf{q}) \cap B(\mathbf{q}') = B(1/2(\mathbf{q} + \mathbf{q}'), 1/2)$, ami már magában egy állandó szélességű halmaz. □

A második kérdést járja körül ez a fejezet.

4.1. Groemer tételei

Ebben az alfejezetben *H. Groemer* néhány unicitási eredményét ismertetjük. Mint azt már máshol is tettük, a Minkowski teret most úgy képzeljük, mint az Euklidészi tér ellátva egy második metrikával. Persze a "gömb", "távolság", "átmérő" kifejezések mindig erre a metrikára vonatkoznak, viszont beszélhetünk merőlegességről és térfogatról, amik Euklidészi fogalmakként értendők.

4.1.1. Definició. *Az $X \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaznak a $X \subseteq K$ halmaz szoros burka, ha $diam(K) = diam(X)$. Maximális burka, ha a szoros burkok között maximális térfogatú* [1]*, diametriális burka, ha olyan szoros burka, amely diametriálisan maximális.*

4.1.2. Tétel (Groemer). *$X \subseteq \mathbb{R}^n$ a Minkowski tér egy részhalmaza. Ekkor minden maximális burka egyben diametriálisan maximális is, és bármely két maximális burok eltolással egymásba vihető, sőt, ha $B(\mathbf{0})$ szigorúan konvex, akkor pontosan egy maximális térfogatú szoros burka van X-nek.*

[1] A Blaschke féle kiválasztási tétel és a térfogat Hausdorff metrika szerinti folytonossága miatt ez a szuprémum valóban felvététetik.

A tétel valamivel általánosabban is kimondható, ehhez vezessük be a következő definíciót:

4.1.3. Definició. *Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan halmaz, melyet tartalmaz egy $X \subseteq B := B(\mathbf{p}, r)$ gömb. Az $X \subseteq K$ halmaz az X-nek B-beli szoros burka, ha $diam(K) = diam(X)$ és $K \subseteq B$. X B-beli maximális burka K, ha a B-beli szoros burkok között maximális térfogatú* [2].

Most persze *nem* igaz, hogy egy ilyen B-beli maximális burok egyben diametriálisan maximális halmaz lenne, de ha B sugarára, r-re kikötést teszünk, akkor igen:

4.1.4. Tétel (Groemer). *$X \subseteq \mathbb{R}^n$ a Minkowski tér egy részhalmaza, $X \subseteq B := B(\mathbf{p}, r)$,ahol $r \leq d := diam(X)$.*
Ekkor X minden B-beli maximális burka egyben diametriálisan maximális halmaz is, és bármely két ilyen maximális burok eltolással egymásba vihető, sőt, ha $B(\mathbf{0})$ szigorúan konvex, akkor pontosan egy maximális térfogatú szoros burka van X-nek B-ben.

Ebből valóban következik az előbbi tétel, hiszen véve egy $\mathbf{p} \in X$ pontot $X \subseteq B := B(\mathbf{p}, diam(X))$, és persze X minden szoros burka is B-n belül van. Elég tehát a második tételt bizonyítani. Ehhez egy jelölés: a $\mathbf{p}$ pont és a K halmaz távolsága: $d(\mathbf{p}, K) := sup\{d(\mathbf{p}, \mathbf{x}) | \mathbf{x} \in K\}$.

Bizonyítás. Először indirekt tegyük fel, hogy $X \subseteq K \subseteq B$ az X halmaz egy B-beli maximális burka és *nem* diametriálisan maximális. Van tehát egy $\mathbf{a} \notin K$, amire

$$d(\mathbf{a}, K) \leq 1 \tag{4.1}$$

Persze $Vol(conv(K \cup \{\mathbf{a}\})) > Vol(K)$, így $\mathbf{a} \notin B$. Legyen $\mathbf{a}' := [\mathbf{p}, \mathbf{a}] \cap bd(B)$, a $[\mathbf{p}, \mathbf{a}]$ szakasz szférával alkotott metszéspontja. Tehát $\mathbf{a} \neq \mathbf{a}'$ és $d(\mathbf{p}, \mathbf{a}') = r$. De $r \leq d$, így van egy $\mathbf{q} \in S(\mathbf{a}', d)$ pont, amire $\mathbf{p} \in [\mathbf{a}', \mathbf{q}]$.
(A $\mathbf{pa}$ egyenesen tehát sorban a következő négy pont van: $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{p}, \mathbf{q}$.).
$\mathbf{q} \notin K$, mert $d(\mathbf{a}, \mathbf{q}) > d(\mathbf{a}', q) = d$, ami ellent mondana (4.1) -nek. Másrészt $d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = d(\mathbf{q}, \mathbf{a}') - d(\mathbf{p}, \mathbf{a}') = d - r \leq diam(B) - r = 2r - r = r$ miatt kapjuk, hogy $\mathbf{q} \in B$.
Végül belátjuk, hogy $d(\mathbf{q}, K) = d$: tetszőleges $\mathbf{x} \in K$ pontra $d(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \leq$

[2] Az egyszerű maximális burokhoz hasonlóan ez is létezik.

$d(\mathbf{q},\mathbf{p})+d(\mathbf{p},\mathbf{x}) \le d(\mathbf{q},\mathbf{p})+r = d(\mathbf{q},\mathbf{p})+d(\mathbf{a}',\mathbf{p}) = d(\mathbf{q},\mathbf{a}') = d$.
Tehát kijött, hogy $\mathbf{q} \notin K$, $\mathbf{q} \in B$, $d(\mathbf{q},K) \le d$. De akkor $conv(K \cup \{\mathbf{q}\})$ egy a K-nál nagyobb térfogatú szoros burka lenne X-nek B-ben, ami ellent mond K maximalitásának. Azaz tényleg, a B-beli maximális burok diametriálisan maximális.

Legyen most K_1 és K_2 az X két B-beli maximális burka. $K_0 := \frac{1}{2}K_1+\frac{1}{2}K_2$. Minthogy $X \subseteq K_0$ ezért $diam(X) \le diam(K_0) \le \frac{1}{2}diam(K_1)+\frac{1}{2}diam(K_2) = diam(K_0)$ azaz $diam(K_0) = diam(X)$, valamint persze $K_0 \subseteq B$, ezért K_0 is az X B-beli szoros burka. Így,

$$Vol(K_0) \le Vol(K_1), \quad Vol(K_0) \le Vol(K_2) \tag{4.2}$$

A Minkowski egyenlőtlenség szerint azonban,

$$Vol(K_0)^{1/n} \ge \frac{1}{2}Vol(K_1)^{1/n} + \frac{1}{2}Vol(K_2)^{1/n},$$

itt tehát egyenlőség áll fenn. Ismert viszont, hogy ez $Vol(K_1) = Vol(K_2) > 0$ esetén azt jelenti, hogy tényleg, K_1 és K_2 eltolással egymásba vihetők[3].

Tegyük most fel, hogy B szigorúan konvex. Legyenek $\mathbf{p},\mathbf{q} \in cl(X)$, olyanok hogy $d(\mathbf{p},\mathbf{q}) = diam(X)$, és az előbbiek szerint legyen $\mathbf{t}$ olyan, hogy $K_2 = K_1 + \mathbf{t}$. Ekkor $cl(X) \subseteq K_1$ és $cl(X) \subseteq K_2 = K_1 + \mathbf{t}$ miatt K_1 tartalmazza ezen négy pontot: $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{p}-\mathbf{t},\mathbf{q}-\mathbf{t}$. Mivel már a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ pont távolsága kiadja $diam(K_1)$-et, ezért, ha t nem nullvektor, akkor ez a négy pont nem kollineáris. Tehát egy valódi paralelogramma négy pontja, azaz az egységgömb szigorú konvexitása miatt:

$$d(\mathbf{p},\mathbf{q}) = diam(X) < \frac{1}{2}d(\mathbf{p},\mathbf{q}-\mathbf{t}) + \frac{1}{2}d(\mathbf{q},\mathbf{p}-\mathbf{t}).$$

Ez viszont lehetetlen, ugyanis $d(\mathbf{p},\mathbf{q}-\mathbf{t}) \le diam(K_1) = diam(X)$ és ugyanígy $d(\mathbf{q},\mathbf{p}-\mathbf{t}) \le diam(X)$. Azaz $\mathbf{t} = \mathbf{o}$ kell legyen. $\square$

Ha $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ a Minkowski tér két w_1 illetve w_2 állandó szélességű részhalmaza, akkor persze az összegük $w_1 + w_2$ állandó szélességű. Ezért egy olyan térben, ahol az állandó szélesség egybeesik a diametriális maximalitással, ha egy halmaznak a W_1 és a W_2 halmaz is diametriális burka, akkor persze a $\lambda W_1 + (1-\lambda)W_2$ halmaz is tartalmazni fogja, és szintén állandó

[3]Hadwiger: *Vorlesungen über Inhalt. Oberfleche und Isoperimetrie.*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg,1957, pp. 187-188

szélességű lesz ($\lambda \in [0,1]$). Azaz egy ilyen térben, ha egy halmaznak van két diametriális burka, akkor egyből kontinuum sok is van.

Az viszont *nem* igaz tetszőleges Minkowski térben, hogy két diametriálisan maximális halmaz (tetszőleges átmérőkkel) összege is diametriálisan maximális (az átmérők összegével). Az "1 vagy kontinuum" alternatíva viszont ekkor is igaz.

4.1.5. Tétel (Groemer). *$X \subseteq \mathbb{R}^n$ a Minkowski tér egy 1 átmérőjű részhalmaza.*
Ekkor vagy 1 vagy kontinuum sok diametriálisan maximális halmaz tartalmazza.

Bizonyítás. Két lehetőség van:

Ha $diam(B(X)) > 1$, akkor kontinuum sok diametriális burok van. Ugyanis legyenek $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in B(X)$ olyanok, hogy $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) > 1$. Ha $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset [\mathbf{p}, \mathbf{q}]$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$, akkor $diam(X \cup [\mathbf{x}, \mathbf{y}]) = 1$, így $X \cup [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ diametriális burka X diametriális burka is. Különböző $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ párokra pedig ezek a diametriális burkok is különbözőek lesznek, mert az egyenes két 1 hosszú szakasza nem lehet egy 1 átmérőjű halmaz része. Mivel az ilyen $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ párok száma kontinuum, így valóban legalább kontinuum sok diametriális burok van. Másrész összesen csak kontinuum sok konvex test van, hiszen egy konvex testet egyértelműen meghatároz egy az $\mathbb{R}^n$ megszámlálható sűrű részével vett metszete.

A másik lehetőség az, ha $diam(B(X) \leq 1)$. Ekkor $X \subseteq B(X)$ miatt $BB(X) \subseteq B(X)$, ugyanakkor $diam(B(X)) \leq 1$ miatt $B(X) \subseteq BB(X)$, azaz $B(X)$ egy diametriálisan maximális halmaz. Persze ha Y az X egy diametriális burka, akkor $X \subseteq Y$ miatt $Y = B(Y) \subseteq B(X)$, de két diametriálisan maximális halmaz között nem állhat fenn valódi tartalmazás. Azaz ilyenkor $B(X)$ az egyetlen diametriális burka az X halmaznak. □

Az egyértelmű diametriális burok egy hasonló jellemzése:

4.1.6. Tétel (Groemer). *$X \subseteq \mathbb{R}^n$ a Minkowski tér egy 1 átmérőjű részhalmaza.*
Ekkor pontosan akkor egyértelmű a diametriális burka, ha az összes X-et tartalmazó egység sugarú gömb metszete diametriálisan maximális.

Bizonyítás.

$$D := \bigcap_{B(\mathbf{x})\supseteq X} B(\mathbf{x})$$

Legyen C az X egy diametriális burka. Mivel $B(C) = C \supseteq X$, ezért $B(C) \supseteq D$, azaz $C \supseteq D$.
Ha D diametriálisan maximális, akkor erre a tartalmazásra hatva B-vel, kapjuk, hogy $C \subseteq D$. Azaz D az egyetlen diametriális burok.
Ha D nem diametriálisan maximális, akkor van egy $\mathbf{p} \notin D$, amire

$$d(\mathbf{p}, D) \leq 1. \tag{4.3}$$

Ez –D definíciója szerint– azt jelenti, hogy van egy $\mathbf{x}$ pont, amire $X \subseteq B(\mathbf{x})$, de $\mathbf{p} \notin B(\mathbf{x})$. De akkor 4.1.4 szerint X-nek van egy diametriális burka ezen a gömbön belül is, ami tehát nem tartalmazza $\mathbf{p}$-t. Ugyanakkor (4.3) miatt $D \cup \{\mathbf{p}\}$ -nek is vehető egy 1 átmérőjű diametriális burka. $\square$

Megemlítjük a következő tételt, ami mutatja, hogy szigorúan konvex norma esetén a konvex halmazoknak általában több diametriális burka van.

4.1.7. Tétel (Groemer). *Azon konvex halmazok, amelyeknek egyértelmű a diametriális burka zárt halmazt alkotnak a konvex halmazok Hausdoff metrikával ellátott terében. Ha $B(\mathbf{0})$ szigorúan konvex, akkor ez a halmaz ráadásul sehol sem sűrű.*

4.2. És egy unicitási állítás Euklidészi terekben

Némi előkészítés:
Legyen $W \subset \mathbb{E}^n$ az Euklideszi tér egy sima állandó szélességű halmaza. Ekkor a $\begin{array}{ccc} bd(W) & \to & bd(W) \\ \mathbf{t} & \mapsto & \mathbf{t}' \end{array}$ diametriális átellenes pont leképezés létezik, sőt kölcsönösen egyértelmű, sőt homeomorfizmus. Ez azért igaz, mert ha egy rögzített ponttól a határon tekintem az 1 távoli, határra eső pontokat, akkor persze azokban a pontokban a W egyértelmű érintő hipersíkja azonos lesz a rögzített pont körüli gömb érintő hipersíkjával, ugyanakkor párhuzamos kell legyen a rögzített pontbeli érintővel, mert az pedig ugyanígy a diametriálisan átellenes pont körüli egységgömb érintője. W a 3.2.6 tétel szerint szigorúan

konvex, ezért egy támaszhipersík egy pontban érinti. De egy adott támaszhipersíkkal párhuzamos támaszhipersíkja csak egy van egy konvex testnek, azaz ilyen diametriálisan átellenes pont csak egy lehet. A folytonosság oda-vissza nyilvánvaló.
A továbbiakban végig $'$ ezt a leképezést jelöli.

4.2.1. Tétel (Sallee). *$W \subset \mathbb{E}^n$ az Euklidészi tér egy sima állandó szélességű halmaza. Legyen $\mathbf{p} \notin W$, de olyan közel W-hez, hogy a következő teljesül:*
$W \cap B(\mathbf{p}) \neq \emptyset$ és
Minden $\mathbf{t} \in bd(W) \cap S(\mathbf{p})$ ponthoz a $\mathbf{t}' \in bd(W)$ diametriálisan átellenes pont $B(\mathbf{p})$-ben van.
Ekkor $(W \cap B(\mathbf{p})) \cup \{\mathbf{p}\}$ diametriális burka egyértelmű, nem más, mint

$$Z := B((W \cap B(\mathbf{p})) \cup \{\mathbf{p}\}).$$

Bizonyítás (N.M.). Először bizonyítsuk be az egyértelműséget, felhasználva, hogy Z tartalmazza $(W \cap B(\mathbf{p})) \cup \{\mathbf{p}\}$ -t, és állandó szélességű, azaz röviden, hogy Z jó. Tegyük fel, hogy Z' is jó. Akkor $Z' \supseteq (W \cap B(\mathbf{p})) \cup \{\mathbf{p}\}$. Így $Z' = B(Z') \subseteq B((W \cap B(\mathbf{p})) \cup \{\mathbf{p}\}) = Z$, de két diametriálisan maximális halmaz között valódi tartalmazás nem lehetséges.

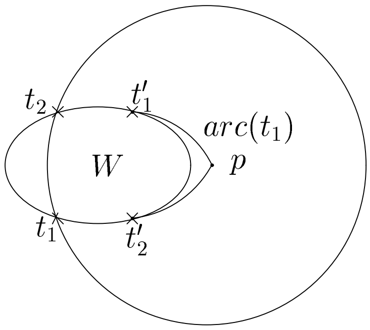
Lássuk most be, hogy Z valóban jó. $Z \supseteq (W \cap B(\mathbf{p})) \cup \{\mathbf{p}\}$ nyilvánvaló, mert $diam((W \cap B(\mathbf{p})) \cup \{\mathbf{p}\}) = 1$. Belátandó tehát, hogy Z diametriálisan maximális, azaz $B(Z) = Z$. Mivel $(W \cap B(\mathbf{p})) \cup \{\mathbf{p}\} \subseteq Z$, ezért $B((W \cap B(\mathbf{p})) \cup \{\mathbf{p}\}) \supseteq B(Z)$, azaz $B(Z) \subseteq Z$.
Bizonyítandó tehát, hogy $Z \subseteq B(Z)$, azaz

$$\forall \mathbf{s} \in Z : B(s) \supseteq Z.$$

Persze elég ezt megmutatni minden $\mathbf{s} \in bd(Z)$ pontra. Mostantól ez a bizonyítandó állítás.
Egy $\mathbf{t} \in bd(W) \cap S(\mathbf{p})$ pontra jelöljük $arc(\mathbf{t})$-vel a $\mathbf{t}'$-t $\mathbf{p}$-vel összekötő rövidebb körívet. A feltételek szerint $\mathbf{t}' \in B(\mathbf{p})$.

$$F := \{\mathbf{x} \in bd(W) \cap B(\mathbf{p}) : \mathbf{x}' \in B(\mathbf{p})\}$$

Három állítással bizonyítjuk a tételt:



4.1. ábra. F a képen a t_1-ből t_2'-be és a t_2-ből t_1'-be menő két ív unioja.

4.2.2. Állítás.

$$bd(Z) \supseteq (S(\mathbf{p}) \cap W) \cup F \cup \bigcup \{arc(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \in S(\mathbf{p}) \cap bd(W)\}$$

Bizonyítás. Z persze tartalmazza az első és a második részét az uniónak, a 2.2.1 lemma miatt pedig a harmadikat is. Ahhoz, hogy Z egy pontja a határán legyen, kell legyen egy pont $(W \cap B(\mathbf{p})) \cup \{\mathbf{p}\}$ -ben, ami 1 távol van tőle. Ez a pont $\mathbf{p}$ az első halmaz pontjaihoz, $\mathbf{t}'$ a $\mathbf{t}$ -hez a második halmazból, és $\mathbf{t}$ az $arc(\mathbf{t})$ pontjaihoz. □

4.2.3. Állítás.

$$\forall \mathbf{s} \in (S(\mathbf{p}) \cap W) \cup F \cup \bigcup \{arc(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \in S(\mathbf{p}) \cap bd(W)\} : B(\mathbf{s}) \supseteq Z$$

,azaz a bizonyítandó állítás igaz ezen halmaz pontjaira.

Bizonyítás. A tartalmazás fennáll az $\mathbf{s} \in (S(\mathbf{p}) \cap W) \cup F$ pontokra Z definíciója miatt, az íveken lévő pontokra pedig a 2.2.1 lemma miatt. □

4.2.4. Állítás. *$(S(\mathbf{p}) \cap W) \cup F \cup \bigcup \{arc(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \in S(\mathbf{p}) \cap bd(W)\}$ egy kompakt $n-1$ dimenziós topologikus sokaság.*

Bizonyítás. $B(\mathbf{p}) \cap W$ homeomorf egy n-dimenziós golyóval, mivel konvex kompakt test. $S(\mathbf{p})$ és $bd(W)$ transzverzálisan metsző hiperfelületek, mert a támaszhipersíkjaik tetszőleges metszéspontban különbözőek. Ez nyilvánvaló, különben lenne egy közös érintő hipersíkjuk, de akkor a közös érintési pontban a hipersíkra állított merőlegesen az érintési ponttól 1 távoli pont W-ben lenne, de az $\mathbf{p}$. A transzverzális metszés szabályai szerint ezért a metszetük egy $(n-2)$-dimenziós sima részsokaság $bd(W)$-ben, ami két részre osztja a $bd(W)$ sokaságot. A gömbön belüli és a kívüli részre. Így a képe a diametriálisan átellenes pont leképezésnél, $(S(\mathbf{p}) \cap bd(W))' =: V$ egy topologikus részsokaság, ami $B(\mathbf{p}) \cap bd(W)$-ben van a tétel feltételei miatt, és ami szintén két részre osztja $bd(W)$-t. Vegyük az $S(\mathbf{p}) \cap bd(W)$-t tartalmazó részt, és hajtsunk végre egy műtétet: távolítsuk el $bd(W)$ gömbön kívüli részét és ragasszuk a helyére az $S(\mathbf{p}) \cap W$ halmazt. Így tehát kapunk egy $n-1$ dimenziós sokaságot, melynek határa V. F definíciója miatt ez a sokaság $(S(\mathbf{p}) \cap W) \cup F$,mivel $F = B(\mathbf{p}) \cap (bd(W) \cap B(\mathbf{p}))'$. Ehhez a peremes sokasághoz vannak az ívek hozzáragasztva. Két dolgot kell megmutatni. Az egyik, hogy az ívek uniója is egy sokaság, aminek V a határa, a másik, hogy ez a sokaság nem metszi az előzőt csak V-ben. A második igaz, mert az íveknek nincs $bd(W)$-vel más közös pontjuk, mint a megfelelő $\mathbf{t}'$ végpontok, mivel bármelyik $\mathbf{t} \in bd(W)$ -hez egyértelmű a diametriálisan átellenes pont $bd(W)$-n. Az első állítás szintén igaz, mert megadhatjuk a nyílt ívek uniójának paraméterezését $V \times (0,1)$ -gyel, és V pontjai vannak ezen nyílt ívek uniójának egyik végén, $\mathbf{p}$ a másikon. A paraméterezés pedig valóban injektív, mivel tetszőleges $\mathbf{s} \in arc(\mathbf{t})$ pontra az ív középpontja a 2.2.1 lemma (ii) pontja miatt már egyértelműen meghatározott $\mathbf{t}', \mathbf{p}$ és $\mathbf{s}$ által. $\mathbf{s}$ tehát nem lehet más íven is. $\square$

Összetéve a három állítást, van egy $n-1$ dimenziós perem nélküli sokaságunk $bd(Z)$-ben, aminek minden $\mathbf{s}$ pontjára igaz, hogy $B(\mathbf{s}) \supseteq Z$. De $bd(Z)$ összefüggő perem nélküli sokaság, így nem tartalmazhat egy vele azonos dimenziós perem nélküli sokaságot, csak olyan módon, hogy egyenlőek. Azaz $B(\mathbf{s}) \supseteq Z$ minden $\mathbf{s} \in bd(Z)$ pontra. $\square$

5. Állandó szélességű halmazok egy alkalmazása

Ebben a fejezetben végig Euklidészi térben lakunk.
A *Boltjansky-Hadwiger probléma* a következő: Adott kompakt konvex test hány kisebb homotetikus példányával fedhető le. Tudjuk, hogy az n dimenziós Euklidészi térben ez minden kompakt konvex testre legfeljebb 2^n, és azt is, hogy ez a szám azonos a test megvilágítási számával.
A *Borsuk probléma* az előző egy gyengítése. Az a kérdés, hogy egy halmaz lefedéséhez legalább hány olyan konvex halmaz kell, amik átmérője kisebb, a halmaz átmérőjénél.
Mivel minden halmaz lefedhető egy azonos átmérőjű állandó szélességű halmazzal, ezért, ha adunk egy felső becslést az állandó szélességű halmazok megvilágítási számára, az ad egy felső becslést minden halmaz Borsuk számára. A következő eredmény *Oded Schramm* érdeme.

5.0.1. Definició. *$K \subset \mathbb{E}^n$ konvex test, $\mathbf{x} \in bd(K)$. Ekkor az $\mathbf{u} \in S(\mathbf{0})$ irány megvilágítja K-t az $\mathbf{x}$ pontban, ha az $\{\mathbf{x} + t\mathbf{u} : t > 0\}$ félegyenes metszi $int(K)$-t. Úgy is mondjuk: "$\mathbf{u}$ megvilágítja $\mathbf{x}$-et". A K megvilágításához szükséges legkevesebb irány a megvilágítási száma, $I(K)$.*

Tudjuk, hogy $I(K) \geq n+1$ tetszőleges K kompakt konvex halmazra, de nem ismert, hogy van-e állandó szélességű halmaz, ami $n+1$ iránnyal nem világítható meg. Az alábbi tétel *O. Schramm*-tól származik.

5.0.2. Tétel (Schramm). *$W \subset \mathbb{E}^n$ állandó szélességű halmaz.
Ekkor $I(W) < 5n\sqrt{n}(4 + \log(n))(\frac{3}{2})^{n/2}$*

Bizonyítás. K a továbbiakban mindig egy tetszőleges kompakt konvex halmazt jelöl. Először definiáljuk egy $A \subseteq S(\mathbf{0})$ halmaz polárisát így:

$$A^+ := \{\mathbf{u} \in S(\mathbf{0}) : \mathbf{uv} > 0 \text{ minden } \mathbf{v} \in A\text{-ra}\}.$$

Egy $\mathbf{x} \in bd(K)$ pontra a belső normálvektorok:

$$N_K(\mathbf{x}) := \{\mathbf{u} \in S(\mathbf{0}) \quad : \quad \mathbf{up} \geq \mathbf{ux} \ \text{ minden } \ \mathbf{p} \in K\text{-ra}\}.$$

Megjegyezzük, hogy $\mathbf{x} \in bd(K)$ pontra $N_K(\mathbf{x}) \neq \emptyset$.

5.0.3. Lemma. *$K \subseteq \mathbb{E}^n$ kompakt konvex halmaz, $\mathbf{x} \in bd(K)$, $\mathbf{u} \in S(\mathbf{0})$. Ekkor $\mathbf{u}$ megvilágítja $\mathbf{x}$-et $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{u} \in N_K(\mathbf{x})^+$.*

Bizonyítás. Ha $\mathbf{u}$ megvilágítja $\mathbf{x}$-et, akkor $\mathbf{x} + \delta\mathbf{u} \in int(X)$ egy $\delta > 0$ -ra, így persze $\mathbf{uv} > 0$ minden $\mathbf{v} \in N_K(\mathbf{x})$ irányra.
Ha $\mathbf{u}$ *nem* világítja meg $\mathbf{x}$ -et, akkor ha $-\mathbf{u}$ megvilágítja, akkor $-\mathbf{u} \in N_K(\mathbf{x})$, de nem lehet benne két átellenes pont egy nemüres halaz polárisában. Ha $-\mathbf{u}$ sem világítja meg, akkor az egész $\mathbf{u}$ irányú egyenes érinti K-t. Akkor viszont egy az egyenest tartalmazó érintősík normálvektora mutatja, hogy $\mathbf{u}$ *nem* tartózkodik $N_K(\mathbf{x})^+$-ban. □

Egy $A \subseteq S(\mathbf{0})$-ra
$$U_W(A) := \bigcup_{N_W(\mathbf{x}) \cap A \neq \emptyset} N_W(\mathbf{x}).$$

Először megbecsüljük felülről $U_W(A)$ átmérőjét, majd ennek alapján alulról $U_W(A)^+$ mértékét $S(\mathbf{0})$-on. Ez azért lesz hasznos, mert ha $U_W(A_1)^+, ..., U_W(A_M)^+$ fedik $S(\mathbf{0})$-t, akkor ha $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_M$ olyan irányok $S(\mathbf{0})$-ban, amik közül mindegyik $U_W(A_i)^+$ legalább egyet tartalmaz, akkor ezek –mint látni fogjuk– megvilágítják W-t. Így érdemes lesz kevés nagymértékű $U_W(A^)+$-szal lefedni $S(\mathbf{0})$-t.

5.0.4. Állítás. *$A \subseteq S(\mathbf{0})$, A nem üres. Ekkor $diam(U_W(A)) \leq 1 + diam(A)$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in U_W(A)$. Azaz van $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in bd(W)$, hogy $N_W(\mathbf{x}_1) \cap A, N_W(\mathbf{x}_2) \cap A$ nem üres. Legyen ennek megfelelően $\mathbf{u}_1 \in N_W(\mathbf{x}_1) \cap A, \mathbf{u}_2 \in N_W(\mathbf{x}_2) \cap A$. $\mathbf{u}_1$ illetve $\mathbf{u}_2$ belső normálvektorok $\mathbf{x}_1$-ben illetve $\mathbf{x}_2$-ben, ezért –felhasználva, hogy W 1 állandó szélességű– $\{\mathbf{p} \in \mathbb{E}^n : \mathbf{pu}_1 = \mathbf{xu}_1 + 1\}$ és $\{\mathbf{p} \in \mathbb{E}^n : \mathbf{pu}_2 = \mathbf{xu}_2 + 1\}$ is W támaszhipersíkjai. Ezeken az egyetlen $\mathbf{x}_1$-től illetve $\mathbf{x}_2$-től 1-nél nem távolabbi pontok $\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_1$ illetve $\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}_2$, amik tehát W pontjai. így

$$1 = diam(W) \geq \|(\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_1) - \mathbf{x}_2\|^2 = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2 + 2\mathbf{u}_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + 1$$

és

$$1 = diam(W) \geq \|(\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}_2) - \mathbf{x}_1\|^2 = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2 + 2\mathbf{u}_2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + 1$$

Összeadva és átrendezve kapjuk, hogy

$$(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \geq \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^2.$$

Mivel $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \leq \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|$,ezért $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \leq \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u_2}\|$. Azaz

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \leq diam(A).$$

Másrészt $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ $\mathbf{x}_1$ illetve $\mathbf{x}_2$-beli normálvektorok, így $\mathbf{x}_1 + \mathbf{v}_1$ is és $\mathbf{x}_2 + \mathbf{v}_2$ is $bd(W)$ pontjai. Ezt ugyanúgy láthatjuk be, mint az $\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_1$ illetve az $\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}_2$ pontra. Tehát

$$1 \geq \|(\mathbf{x}_1 + \mathbf{v}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{v}_2)\| \geq \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| - \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|$$

Vagyis

$$\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| \leq 1 + diam(A)$$

$\square$

Jelöljük μ-vel a standard valószínűségi mértéket $S(\mathbf{0})$-on.

$$g(n, d) := inf\{\mu(A^+) : A \subseteq S(\mathbf{0}), diam(A) \leq d\}.$$

Legyen $N(n, \varepsilon)$ az $S(\mathbf{0})$ lefedéséhez szükséges ε átmérőjű halmazok számának minimuma.

A bizonyítás lényege az alábbi állítás:

5.0.5. Állítás. *Legyen* $0 < \varepsilon < \sqrt{2} - 1$.
Ekkor

$$I(W) \leq 1 + \frac{\log N(n, \varepsilon)}{-\log(1 - g(n, 1 + \varepsilon))}$$

Bizonyítás. Látszik, hogy $0 < g(n, 1+\varepsilon) < 1$, mivel ha $\emptyset \neq A \subseteq S(\mathbf{0})$, akkor A^+ egy nyílt féltérben van, így $\mu(A^+) \leq \frac{1}{2}$, másrészt, ha $diam(A) = d < \sqrt{2}$, akkor A^+ tartalmazza az A tetszőleges pontja körüli $\sqrt{2} - d$ sugarú sapkát. A tört tehát értelmes.

Legyen az M egész szám, amire

$$M > \frac{logN(n,\varepsilon)}{-log(1-g(n,1+\varepsilon))}$$

Elég megmutatni, hogy M iránnyal már megvilágítható W. $N := N(n,\varepsilon)$ és legyen $A_1,...,A_N$ az $S(\mathbf{0})$ egy fedése ε átmérőjű halmazokkal. Az 5.0.4 állítás szerint $diam(U_W(A_i)) \leq 1+\varepsilon$,így

$$g(n,1+\varepsilon) \leq \mu(U_W(A_i)^+) \;\; i=1,...,N.$$

Vegyünk véletlenszerűen egyenletes eloszlás szerint függetlenül $\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_M \in S(\mathbf{0})$ irányokat. Válasszunk tetszőleges $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M$ számokat. Annak valószínűsége, hogy $\mathbf{u}_j$ benne van $U_W(A_i)^+$-ban $\mu(U_W(A_i)^+)$,ami legalább $g(n,1+\varepsilon)$. Ezért annak valószínűsége, hogy $U_W(A_i)^+$-ban egyik sincs benne legfeljebb $(1-g(n,1+\varepsilon))^M$. Azaz annak p valószínűsége, hogy legalább az egyik $U_W(A_i)^+$-ban nincs egy $\mathbf{u}_j$ sem

$$p \leq \sum_{i=1}^{N}(1-g(n,1+\varepsilon))^M < N(1-g(n,1+\varepsilon))^{\log N/-\log(1-g(n,1+\varepsilon))} = 1$$

Ezek szerint lehet úgy választani az M irányt, hogy mindegyik $U_W(A_i)^+$-ban legyen legalább egy. Legyen a $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_M$ ilyen M irány, és legyen $\mathbf{x} \in bd(W)$ tetszőleges.
Ekkor valamelyik irány megvilágítja $\mathbf{x}$-et, mert legalább az egyik A_i metszi $N_W(\mathbf{x})$-et, mert az nem üres. Így $N_W(\mathbf{x}) \subseteq U_W(A_i)$, azaz

$$N_W(\mathbf{x})^+ \supseteq U_W(A_i)^+.$$

De valamely k-ra $\mathbf{v}_k \in U_W(A_i)^+$. Azaz $\mathbf{v}_k \in N_W(\mathbf{x})^+$, ami az 5.0.3 állítás szerint azt jelenti, hogy $\mathbf{v}_k$ megvilágítja $\mathbf{x}$-et. $\square$

A tétel bizonyításához meg fogjuk becsülni $g(n,1+\varepsilon)$ -t alulról és $N(n,\varepsilon)$ -t felülről.

5.0.6. Lemma.

$$N(n,\varepsilon) \leq (1+4/\varepsilon)^n.$$

Bizonyítás. Legyen E az $S(\mathbf{0})$ egy maximális részhalmaza arra nézve, hogy $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| > \varepsilon/2$ minden $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ pontjára. A maximalitás miatt igaz, hogy az $\varepsilon/2$ sugarú E-beli középpontú gömbök fedik $S(\mathbf{0})$-t, azaz

$$N(n, \varepsilon) \leq |E|.$$

Ugyanakkor az $\mathbf{u} \in E$ középpontú $\varepsilon/4$ sugarú gömbök diszjunktak, és részei $B(\mathbf{0}, 1+\varepsilon/4)$-nek. A térfogatokat összevetve kapjuk, hogy

$$|E|(\varepsilon/4)^n \leq (1+\varepsilon/4)^n.$$

Azaz

$$|E| \leq (\frac{4}{\varepsilon} + 1)^n.$$

□

Megmutatjuk, hogy ha $S(\mathbf{0})$ egy A részhalmazát elég jól be tudjuk zárni egy féltérbe, akkor a polárisa és annak egy egyenesre vett tükörképe elég nagy. Ez fog segíteni $g(n, d)$ alsó becslésében.

5.0.7. Állítás. *Legyenek $d > 0$ és $A \subseteq S(\mathbf{0})$, A nem üres, $diam(A) \leq d$. Tegyük fel, hogy $\mathbf{u} \in S(\mathbf{0})$, $a > 0$ és A benne van a $\{\mathbf{p} \in \mathbb{E}^n | \mathbf{pu} \geq a\}$ féltérben.*
Ekkor

$$A^+ \cup TA^+ \supseteq D_0(\mathbf{u}, arctan(2a/d))$$

,ahol $T : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$ az $\mathbf{u}$ irányú egyenesre való tükrözés, azaz

$$T\mathbf{p} := 2(\mathbf{pu})\mathbf{u} - \mathbf{p}$$

és $D_0(\mathbf{u}, \psi)$ az $\mathbf{u}$ körüli nyílt szférikus sapka, azaz azon vektorok halmaza, amelyeknek az $\mathbf{u}$-val bezárt szöge kisebb ψ -nél.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{x} \in S(\mathbf{0}) \backslash A^+ \cup TA^+$,és legyen Θ az $\mathbf{x}$ és az $\mathbf{u}$ szöge, $0 \leq \Theta \leq \pi$. $\mathbf{x}$ írható

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}\cos\Theta + \mathbf{v}\sin\Theta \tag{5.1}$$

alakban, ahol $\mathbf{v}$ egy $\mathbf{u}$ -ra merőleges egységvektor.
Mivel $\mathbf{x} \notin A^+$, ezért van egy $\mathbf{y} \in A$, amire

$$0 \geq \mathbf{yx} = \mathbf{yu}\cos\Theta + \mathbf{yv}\sin\Theta \tag{5.2}$$

Mivel $T = T^{-1}$, és $\mathbf{x} \notin TA^+$, ezért $T\mathbf{x} \notin A^+$. Azaz van egy $\mathbf{z} \in A$ pont, amire

$$0 \geq \mathbf{z}T\mathbf{x} = \mathbf{zu}\cos\Theta - \mathbf{zv}\sin\Theta \tag{5.3}$$

Összeadva (5.2) -t és (5.3) -t, használva, hogy $\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\| \leq d$ és $0 \leq \sin\Theta$ adódik, hogy

$$0 \geq (\mathbf{yu}+\mathbf{zu})\cos\Theta + (\mathbf{y}-\mathbf{z})\mathbf{v}\sin\Theta \geq (\mathbf{yu}+\mathbf{zu})\cos\Theta - d\sin\Theta. \tag{5.4}$$

Tegyük fel, hogy $\Theta < \pi/2$. Akkor $\cos\Theta > 0$, azaz

$$tan\Theta \geq \frac{\mathbf{yu}+\mathbf{zu}}{d} \geq \frac{2a}{d}$$

Amihez felhasználtuk, hogy A a megadott féltérben van. Ha $\Theta > \pi/2$, akkor persze pláne igaz, hogy $\Theta \geq arctan(2a/d)$ □

5.0.8. Állítás.

$$g(n,d) \geq \frac{1}{\sqrt{8\pi n}}\left(3/2 + \frac{(2n+1)d^2-(2n+2)}{4n+4-2d^2n}\right)^{-(n-1)/2} \quad ha\ \ 0 \leq d \leq \sqrt{2}.$$

Bizonyítás. $A \subset S(\mathbf{0})$, nem üres, $diam(A) \leq d$. Jung tétele miatt van $\mathbb{E}^n$-ben egy $d\sqrt{n/(2n+2)}$ sugarú gömb, ami tartalmazza. Legyen $\mathbf{q}$ ennek középpontja. Írjuk fel $\mathbf{q}$-t ilyen alakban: $\mathbf{q} = t\mathbf{u}$, ahol $0 < t, \mathbf{u} \in S(\mathbf{0})$. Ekkor minden $\mathbf{x} \in A$ pontra

$$d^2\frac{n}{2n+2} \geq \|\mathbf{x}-\mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{x}-t\mathbf{u}\|^2 = 1 - 2t\mathbf{xu} + t^2. \tag{5.5}$$

Mivel $1 - 2t\mathbf{xu} + t^2 = 1 - (\mathbf{xu})^2 + (\mathbf{xu}-t)^2 \geq 1 - (\mathbf{xu})^2$,így (5.5) miatt

$$d^2\frac{n}{2n+2} \geq 1 - (\mathbf{xu})^2. \tag{5.6}$$

Ugyanakkor (5.5) szerint $0 \leq t$ és $d \leq \sqrt{2}$ miatt $\mathbf{xu} \geq 0$, azaz (5.6) -ból kapjuk:

$$\mathbf{xu} \geq \sqrt{1 - d^2\frac{2n}{n+2}}.$$

Legyen

$$a := \sqrt{1 - d^2\frac{n}{2n+2}} \tag{5.7}$$

Tehát A benne van a $\{\mathbf{p} \in \mathbb{E}^n : \mathbf{pu} \geq a\}$ féltérben. Az 5.0.7 állítás szerint

$$A \cup TA^+ \supseteq D_0(\mathbf{u}, arctan(2a/d)).$$

Mivel T ortogonális transzformáció, ezért $\mu(A^+) = \mu(TA^+)$, így

$$\mu(A^+) = \frac{1}{2}(\mu(A^+) + \mu(TA^+)) \geq \frac{1}{2}\mu(A^+ \cup TA^+)$$

$$\geq \frac{1}{2}\mu(D_0(\mathbf{u}, arctan\frac{2a}{d})) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{Vol_{n-1}D_0(\mathbf{u}, arctan(2a/d))}{Vol_{n-1}S(\mathbf{0})} =$$

$$= \frac{Vol_{n-1}D_0(\mathbf{u}, arctan(2a/d))}{2n\Omega_n}. \tag{5.8}$$

,ahol Ω_n az n-dimenziós egységgömb térfogata, Vol_{n-1} pedig $n-1$ dimenziós térfogat.
Legyen D' a $D_0(\mathbf{u}, arcta(2a/d))$ merőleges vetülete az $\mathbf{u}^\perp$ hipersíkra. Persze

$$Vol_{n-1}D_0(\mathbf{u}, arctan\frac{2a}{d}) \geq Vol_{n-1}D'. \tag{5.9}$$

Másrészt D' egy $n-1$ dimenziós golyó, sugara:

$$sin(arctan\frac{2a}{d}) = (1 + \frac{d^2}{4a^2})^{-1/2}$$

,azaz

$$Vol_{n-1}D' = \Omega_{n-1}(1 + \frac{d^2}{4a^2})^{-(n-1)/2}. \tag{5.10}$$

Ebből pedig (5.8) és (5.9) és (5.10) összerakásával kapjuk, hogy

$$\mu(A^+) \geq \frac{\Omega_{n-1}}{2n\Omega_n}(1 + \frac{d^2}{4a^2})^{-(n-1)/2}. \tag{5.11}$$

Márpedig

$$\frac{\Omega_{n-1}}{\Omega_n} = \frac{\pi^{(n-1)/2}/\Gamma((1+n)/2)}{\pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2)} = \frac{\Gamma(1+n/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma((1+n)/2)} \tag{5.12}$$

,ahol Γ a Gamma függvény. Mivel Γ log-konvex, ezért

$$\Gamma(1+n/2)\Gamma(n/2) \geq \Gamma((1+n)/2)^2$$

így

$$\frac{\Gamma(1+n/2)}{\Gamma((1+n)/2)} \geq \frac{\Gamma(1+n/2)}{\Gamma((1+n)/2)}\sqrt{\frac{\Gamma((1+n)/2)^2}{\Gamma(1+n/2\Gamma(n/2)}} = \sqrt{\frac{\Gamma(1+n/2)}{\Gamma(n/2)}} = \sqrt{\frac{n}{2}}. \tag{5.13}$$

Összerakva az (5.11) (5.12) és (5.13) egyenleteket kapjuk, hogy

$$\mu(A^+) \geq \frac{1}{2n}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{n}{2}}(1+\frac{d^2}{4a^2})^{-(n-1)/2} \tag{5.14}$$

,amibe behelyettesítve a-t, kapjuk, hogy

$$\mu(A^+) \geq \frac{1}{\sqrt{8\pi n}}(1+\frac{d^2}{4-2d^2n/(n+1)})^{-(n-1)/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6\pi n}}(\frac{3}{2}+\frac{(2n+2)d^2-2n-2}{4n+4-2d^2n})^{-(n-1)/2}.$$

□

Ha összetesszük az 5.0.6 lemmabeli felsőbecslését N-nek és az 5.0.8 állításbeli alsóbecslését g-nek, akkor 5.0.5 alapján megkapjuk $I(W)$ tételbeli felső becslését. □

6. Megoldatlan problémák

- A Minkowski terekben is igaz izodiametriális egyenlőtlenség szerint az adott átmérőjű halmazok között a gömb a legnagyobb térfogatú. Nem ismert ugyanakkor, hogy egy állandó szélességű illetve egy diametriálisan maximális halmaz térfogata mennyire kicsi lehet az egységgömb térfogatához képest. A 3.3.1 tétel persze ad egy triviális becslést. Térfogatról úgy beszélünk, hogy a Minkowski teret egy Euklidészi tér második metrikájának képzeljük.
  Blaschke és Lebesgue tétele szerint az Euklidészi síkon a Reuleaux-háromszög a legkisebb állandó szélességű halmaz.

- Nem tudjuk, honnan ismerhető fel az egységgömbről, hogy ő az egyetlen diametriálisan maximális illetve állandó szélességű halmaz.

- A síkon Reuleaux sokszögnek hívunk egy olyan alakzatot, melyet úgy kapunk, hogy veszünk egy zárt, páratlan csúcsszámú (esetleg önátmetsző) poligont, melynek minden szakasza 1 hosszú, majd minden csúcsából, mint középpontból egységköröket rajzounk. Ezek metszete a Reuleaux sokszög, ismert, hogy állandó szélességű. A legegyszerűbb példa a Reuleaux-háromszög, amikor a poligon egy egyenlőoldalú háromszög. Blaschke bizonyította, hogy az Euklidészi síkon a Reuleaux politópok sűrűn vannak az állandó szélességű halmazok között. Definiálható a Reuleaux-sokszögek analógiájára a *Reuleaux-politóp* is.

  6.0.1. Definició. *Véges sok, páronként egynél nem távolabb lévő* $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ *pontra* $B(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k)$ *egy Reuleaux-váz, ha minden középponttól legalább* n *középpont* 1 *távol van –azaz minden középpont csúcs–, és minden csúcs –azaz a határ minden olyan pontja, amihez van legalább* n *középpont, amik* n *távol vannak tőle– középpont is egyben.*

  Ez már a 3-dimenziós Euklidészi térben sem lesz feltétlenül állandó szélességű, például a szabályos 1 oldalhosszú tetraéder csúcsai köré írt egységbömbök metszete *nem* az. Ezért szól így a definíció:

6.0.2. Definició. *Reuleaux politóp az olyan konvex test, melyet úgy kapunk a Sallee konstrukció eredményeként, hogy az első k pont egy Reuleaux-váz csúcsai.*

A kérdés: Reuleaux-politópokkal vagy Reuleaux-rácsokkal közelíthető-e a Hausdorff metrikában minden állandó szélességű test? A kérdésre Euklidészi térben sem ismert a válasz.

- A felvetett problémák és a tárgyalt állítások általában megkérdezhetőek szférikus térben is. Ott is értelmes –mint általában metrikus terekben– a diametriális maximalitás, és az állandó szélességűség is definiálható.

Irodalomjegyzék

[Eggl] H.G. Eggleston, *Sets of Constant Width in Finite Dimensional Banach Spaces*, Israel J. Math., 3 (1968), 163-172

[Sal1] G.T. Sallee, *Reuleaux polytopes*, Mathematika 17, 315-328 (1970)

[Sal2] G.T. Sallee, *Preassigning the Boundry of Diametrically-Complete Sets*, Monatshefte für Mathematik 105, 217-227 (1988)

[Gro] H. Groemer, *On Complete Convex Bodies*, Geometriae Dedicata 20, 319-334 (1986)

[Sch] Oded Schramm, *Illuminating Sets of Constant Width*, Mathematika 35, 180-189 (1988)