Stabil párosítások struktúrája és poliéderei

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Pap Júlia

Témavezető: Frank András egyetemi tanár

2005.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető

A stabil párosítás fogalmát Gale és Shapley vezette be [10]-ben, ám stabil párosítást kereső algoritmust már korábban, 1951 óta használtak az Egyesült Államokban kórházak és rezidensek összepárosítására. Gale és Shapley cikke felkeltette a kutatók érdeklődését, bár a témát eleinte főleg játékelméleszek és közgazdászok vizsgálták. Ebben a dolgozatban tisztán kombinatorikus szemszögből tekintjük a problémát. A dolgozat fő eredménye az 5.13. tétel illetve annak az 5.21. következménye, ami a stabil párosítások poliéderének Rothblum által adott leírásának TDI-ságát bizonyítja. Ezen kívül Gusfield és Irving 200 oldalas [12] könyvének és más cikkeknek számos eredményét tartalmazza, egyszerűsítve.

Köszönöm témavezetőmnek, Frank Andrásnak a sok segítségét és türelmét, Király Tamásnak és Fleiner Tamásnak a sok hasznos tanácsot, Király Tamásnak az 5.21. tétel bizonyításához az észrevételeit.

2. Alaptulajdonságok

Legyen $G = (U, V; E)$ egy tetszőleges páros gráf, és minden $v \in U \cup V$ pontra $<_v$ egy teljes rendezés a v-re illeszkedő élek halmazán, $D(v)$-n. Ezen rendezések halmazát jelöljük $\mathcal{O}$-val, a $(G, \mathcal{O})$ párt nevezzük páros preferenciarendszernek. Jelöljük $e \leqslant_v f$-fel, ha $e <_v f$ vagy $e = f$. Ha $e <_v f$, akkor azt mondjuk, hogy az e él jobb a v pontban, mint f. $e <_V f$-en azt értjük, hogy e-nek és f-nek van egy közös, V-beli csúcsa, aminél az e él jobb. Az e él dominálja az f élt a v csúcsnál, ha v közös végpontjuk, amire $e \leqslant_v f$. Ha az M élhalmaz egyik eleme sem dominálja az e élt, akkor e blokkolja M-et. Egy M párosítást **stabil párosítás**nak nevezünk, ha nincs olyan él, ami blokkolja M-et, vagyis M az összes élt dominálja. Speciálisan minden stabil párosítás tartalmazásra nézve maximális párosítás. Az ábrákban $e <_v f$-et úgy fogjuk jelölni, hogy az f éltől egy nyilat rajzolunk az e élhez.

2.1. Lemma: *Tetszőleges páros gráfban minden stabil párosítás ugyanazt a ponthalmazt fedi.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy van két stabil párosítás, M és N, amik nem ugyanazt a ponthalmazt fedik. Ekkor az $M \triangle N$ szimmetrikus differenciájukban van egy $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_j, v_{j+1}$ út, mondjuk $e_1 \in M$. Az e_1 élt N-ből csak az e_2 él tudja dominálni, ezért $e_2 <_{v_2} e_1$. Ha $e_i <_{v_i} e_{i-1}$, akkor e_i-t N és M közül az őt nem tartalmazó stabil párosítás csak az e_{i+1} éllel tudja dominálni, ezért $e_{i+1} <_{v_{i+1}} e_i$. Ezért $e_j <_{v_j} e_{j-1}$, de akkor az e_j élt az őt nem tartalmazó stabil párosítás nem dominálja, ami ellentmondás. ■

2.2. Tétel: (Gale, Shapley, [10]) *Minden páros gráfban bármely preferenciarendszerhez létezik stabil párosítás.*

Bizonyítás: Gale és Shapley egy algoritmust adtak, ami talál egy stabil párosítást. Legyen $G = (U, V; E)$ páros gráf, U a fiúk, V a lányok, E pedig a lehetséges házasságok halmaza. Minden u fiúhoz rendeljünk egy $L(u)$ listát, amin kezdetben az összes u-val összekötött lány szerepel, a $\leqslant_u$ szerinti növekvő sorrendben. Legyen M az aktuális párosítás, kezdetben $M = \emptyset$. Legyen $u \in U$ egy olyan fiú, aki M-ben nincs párosítva , és $L(u) \neq \emptyset$. Legyen $L(u)$-ban az első lány v. Ha v fedetlen M-ben, akkor legyen $M := M \cup \{(u, v)\}$. Ha $(u', v) \in M$, és $(u, v) <_v (u', v)$, akkor $M := M \setminus \{(u', v)\} \cup \{(u, v)\}$ (vagyis a v lány „elutasítja” az u' fiút), és $L(u') := L(u') \setminus \{v\}$. Ha pedig $(u, v) >_v (u', v)$, akkor $L(u) := L(u) \setminus \{v\}$, M változatlan (vagyis v elutasítja u-t). Ha már nincs párosítatlan fiú, akinek a listáján lenne lány, az algoritmus megáll, az output az aktuális M. Figyeljük meg, hogy ha egy lány az algoritmus során valamikor van párja M-ben, akkor utána mindig lesz, és számára egyre jobb társa lesz. Az algoritmus véget ér, mert minden lépésnél vagy M mérete nő, vagy a listák összhossza csökken, és M mérete nem változik. Az algoritmus stabil párosítást talál, mert ha $(u, v) \in E \setminus M$, akkor vagy v elutasította u-t, ekkor az v lánynak u-nál jobb társa van M-ben, vagy $L(u)$-ben az algoritmus végén még benne van l, ekkor u-nek lett v-nél jobb társa, vagyis az (u, v) él mindenképp dominálva van. ■

Be fogjuk látni, hogy a fenti Gale-Shapley algoritmus mindig ugyanazt a stabil párosítást adja, függetlenül az $u \in U$ választásától, méghozzá egy elég speciális stabil párosítást.

2.1. A stabil párosítások hálóstruktúrája

Legyen $G = (U, V; E)$ egy páros gráf, és $\mathcal{O}$ egy preferenciarendszer G-n. Legyen M és N két stabil párosítás. A 2.1. lemma miatt M és N uniójában csak közös élek és (páros hosszú) körök vannak. Legyen $v \in U \cup V$. Jelöljük $\max_v(M, N)$-nel a v-re illeszkedő M-beli és N-beli élek közül a $\leqslant_v$ rendezés szerinti nagyobbikat, $\min_v(M, N)$ pedig a kisebbiket (ha ugyanaz a két él, akkor mindkettő ez a közös él, ha v-t nem fedik a stabil párosítások, akkor legyen mindkettő $\emptyset$). Legyen $M \wedge N := \{\min_u(M, N) | u \in U\}$, és $M \vee N := \{\max_u(M, N) | u \in U\}$.

2.3. Lemma: *$M \vee N$ és $M \wedge N$ stabil párosítások.*

Bizonyítás: Legyen $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{2k}, e_{2k}, v_1$ egy kör $M \triangle N$-ben, ahol a páratlan indexű élek az M-beliek, a páros indexűek az N-beliek, a pontok közül a páratlan indexűek az U-beliek, a páros indexűek az V-beliek. Tegyük fel, hogy $e_{2k} >_{v_1} e_1$. Ekkor e_1-et N-ből csak e_2 tudja dominálni, vagyis $e_1 >_{v_2} e_2$, és indukcióval $e_i >_{v_{i+1}} e_{i+1}$. Emiatt a körből pont az M-beliek vannak $M \wedge N$-ben, és az N-beliek vannak $M \vee N$-ben. Ebből látszik, hogy mindkettő párosítás, és hogy $v \in V$-re $M \vee N$-ben az M és N-beli élek közül a $\leqslant_v$ rendezés szerinti kisebbik él van, $M \wedge N$-ben pedig a nagyobbik, fordítva, mint az U-beli csúcsoknál. Most tegyük fel, hogy van egy (u, v) él, ami bokkolja $M \wedge N$-et, ahol $u \in U$, $v \in V$. Ekkor u-nál se M, se N nem dominálja az (u, v) élt, mert akkor $M \wedge N$ is dominálná. De akkor mindkettő a v csúcsnál dominálja az (u, v) élt, ami miatt $M \wedge N$ is dominálja a v csúcsnál, ez ellentmondás. $M \vee N$ stabilitását ugyanígy be lehet látni, U és L felcserélésével. ■

Jelöljük $\mathcal{M}$-mel a stabil párosítások halmazát.

2.4. Tétel: (Conway) *$\mathcal{M}$ a $\vee$ és $\wedge$ műveletekkel disztributív hálót alkot, vagyis bármely $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{M}$-re teljesül, hogy:*

- $M_1 \vee M_1 = M_1 \wedge M_1 = M_1$ *(idempotencia)*,
- $M_1 \vee M_2 = M_2 \vee M_1, M_1 \wedge M_2 = M_2 \wedge M_1$ *(kommutativitás)*,
- $M_1 \vee (M_2 \vee M_3) = (M_1 \vee M_2) \vee M_3, M_1 \wedge (M_2 \wedge M_3) = (M_1 \wedge M_2) \wedge M_3$ *(asszociativitás)*,
- $(M_1 \vee M_2) \wedge M_1 = (M_1 \wedge M_2) \vee M_1 = M_1$ *(elnyelési tulajdonság)*,
- $(M_1 \vee M_2) \wedge M_3 = (M_1 \wedge M_3) \vee (M_1 \wedge M_3)$,
  $(M_1 \wedge M_2) \vee M_3 = (M_1 \vee M_3) \wedge (M_1 \vee M_3)$ *(disztributivitás)*.

Bizonyítás: Ezek a tulajdonságok könnyen következnek abból, hogy az egy csúcsra illeszkedő éleken a rendezés szerinti min és max műveletekre teljesülnek. ■

A $(\mathcal{M}, \vee, \wedge)$ hálóhoz tartozik egy részbenrendezés $\mathcal{M}$-en, jelöljük $\preceq$-vel, amire $M \preceq N \Leftrightarrow M \vee N = N$. Ez a stabil párosítások esetében azt jelenti, hogy $M \preceq N$ pontosan akkor, ha minden fiúnál az M-beli él a jobb, mint az N-beli. Ekkor azt mondjuk, hogy M dominálja N-et. Ekkor a fentiek alapján a lányoknál pedig az N-beli él a jobb.

Mivel $\mathcal{M}$ hálót alkot a fenti két művelettel, ezért a $\preceq$ részbenrendezés szerint van egy egyértelmű minimális és egy egyértelmű maximális elem. A minimális elemet jelöljük M_U-val, a maximálisat pedig M_V-vel. M_U-t nevezzük fiúoptimális stabil párosításnak, M_V-t pedig lányoptimális stabil párosításnak. A fentiekből következik, hogy M_U-ban minden fiú a számára legjobb párt kapja, akivel egyáltalán össze lehet párosítva stabil párosításban, M_V-ben viszont közülük a legrosszabbat, a lányoknak viszont pont fordítva, M_U-ban van a lehető legrosszabb párjuk, M_V-ben a lehető legjobb.

2.5. Állítás: (Gale, Shapley) *A Gale-Shapley algoritmus a fiúoptimális stabil párosítást találja meg, akármilyen sorrendben is választjuk közben a párosítatlan fiúkat.*

Bizonyítás: Legyen M az algoritmus egy végrehajtása által kapott stabil párosítás. Tegyük fel, hogy van egy M' stabil párosítás, aminél valamelyik fiúnak jobb partnere van, mint M-ben. Az ilyen fiúkat az algoritmus során elutasította az M'-beli partnerük. Legyen v az első lány, aki az M'-beli partnerét, u-et elutasítja, és legyen u', aki miatt elutasította. Tehát $(u, v) \in M'$, és $(u, v) >_v (u', v)$. Az v választása miatt u'-t nem utasította el az M'-beli partnere (ha van), vagyis az u' csúcsnál az (u', v) élnél jobb élek nem M'-beliek. De akkor az (u', v) él blokkolja M'-t, ami ellentmondás. ■

Persze ha az algoritmusban felcseréljük a fiúk és a lányok szerepét, akkor egy olyan algoritmust kapunk, ami a lányoptimális stabil párosítást találja meg.

2.2. Halmazrendszerrel való reprezentálás

Az alábbiak Gusfield és Irving [12] átfogogó könyvében találhatók. A Stone tétel alapján a $(\mathcal{M}, \vee, \wedge)$ disztributív háló izomorf egy metszet- és uniózárt halmazrenszerrel, vagyis egy halmazgyűrűvel, amin a két hálóművelet a metszet és az unió. Meg is tudunk adni egy ilyen halmazgyűrűt a következőképp. Legyen a halmazrenszer alaphalmaza a gráf élhalmaza, E. Minden M stabil párosításhoz rendeljük hozzá azon élek halmazát, amik az U-beli végpontjuknál dominálják az arra illeszkedő M-beli élt:

$$H(M) := \{e \in E : \exists m \in M \text{ és } u \in U, \text{ hogy } e \leqslant_u m\}.$$

Ekkor könnyű látni, hogy $H(M \vee N) = H(M) \cup H(N)$ és $H(M \wedge N) = H(M) \cap H(N)$, vagyis a $\mathcal{H} = \{H(M) : M \in \mathcal{M}\}$ halmazrendszer az $\cup$ és $\cap$ műveletekkel izomorf a $(\mathcal{M}, \vee, \wedge)$ hálóval. Az $\cap\mathcal{H}$ halmaz felel meg M_U-nak, $\cup\mathcal{H}$ pedig M_V-nek.

Az élek közt értelmezhetünk egy ekvivalenciarelációt úgy, hogy két élt ekvivalensnek mondunk, ha ugyanazokban a $\mathcal{H}$-beli halmazokban vannak benne. Az ekvivalenciaosztályokat a

$\mathcal{H}$ halmazrendszer atomjainak nevezzük. Jelöljük $\mathcal{A}$-val az atomok halmazát, kivéve $\cap\mathcal{H}$-t és $(\cup\mathcal{H})^c$-t. Egy hálóban vagy halmazrendszerben vagy részbenrendezett halmazban nevezzünk két elemet szomszédosnak, ha nincsen szigorúan köztük levő elem.

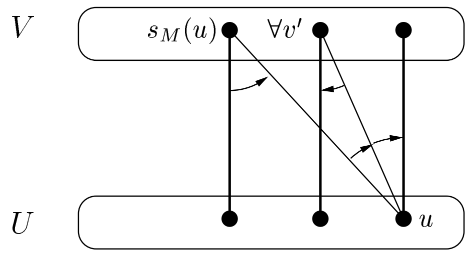
2.6. Állítás: *Egy élhalmaz pontosan akkor van $\mathcal{A}$-ban , ha előáll két szomszédos $\mathcal{H}$-beli halmaz különbségeként.*

Bizonyítás: Legyen $A \in \mathcal{A}$, és $H(A) := \cap\{H \in \mathcal{H} : A \subseteq H\}$ Elég lenne belátnunk, hogy $H(A)\backslash A \in \mathcal{H}$. Először lássuk be, hogy ez a függvény injektív. Ha $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ különbözők, akkor van olyan $H \in \mathcal{H}$, ami elválasztja őket, mondjuk $A_1 \subseteq H$, $A_2 \subseteq H^c$. Emiatt $H(A_1) \subseteq H$, vagyis nem tartalmazhatja A_2-t, tehát $H(A_1) \neq H(A_2)$. Most legyen $A' \subseteq H(A)$ A-tól különböző atom, ekkor $H(A') \subseteq H(A)$, és $H(A')$ nem tartalmazhatja A-t, mert akkor $H(A) \subseteq H(A')$ is lenne, de $H(A) \neq H(A')$. Emiatt $H(A) \setminus A = \cup\{H(A') : A' \subseteq H(A)\}$, ami $\mathcal{H}$-beli. ■

Legyen $A_1 \preceq A_2$, ha $H(A_1) \subseteq H(A_2)$. Ez azzal ekvivalens, hogy $A_1 \subseteq H(A_2)$, ami pedig azzal, hogy nincs olyan $H \in \mathcal{H}$, hogy $A_2 \subseteq H$, de $A_1 \cap H = \emptyset$. Egy részbenrendezett halmaz részhalmazát nevezzük zártnak, ha bármely eleménél kisebb elemek is benne vannak a részhalmazban.

2.7. Állítás: *A $H \mapsto \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq H\}$ megfeleltetés bijekció a $\mathcal{H}$ halmazgyűrű és az $(\mathcal{A}, \preceq)$ részbenrendezett halmaz zárt részhalmazai közt.*

Bizonyítás: Először lássuk be, hogy $\{A \in \mathcal{A} : A \subseteq H\}$ zárt. Mivel $A_1 \preceq A_2$ azzal ekvivalens, hogy nincs olyan $\mathcal{H}$-beli halmaz, ami A_2-t tartalmazza, de A_1-et nem, ezért ha $A \subseteq H$ és $A' \preceq A$, akkor $A' \subseteq H$, tehát tényleg zárt a halmaz. A függvény nyilván injektív, tehát már csak azt kell belátni, hogy szürjektív, vagyis ha $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ zárt halmaz, akkor $H = (\cup\{A \in \mathcal{A}'\}) \cup (\cap\mathcal{H}) \in \mathcal{H}$. Mivel $\mathcal{A}'$ zárt, ezért minden $A \in \mathcal{A}'$-re $H(A) \subseteq H$, ezért $H = \cup\{H(A) : A \in \mathcal{A}'\}$, ami $\mathcal{H}$-beli. ■



1. ábra. $s_M(u)$ definíciója

3. Rotációk

Az itt leírt eredmények szintén megtalálhatók Gusfield és Irving [12] könyvében, és Gusfield; Irving és Leather ilettve hármójuk közös cikkében jelentek meg.

3.1. Definíció, tuljadonságok

Legyen $M \in \mathcal{M}$ egy stabil párosítás, és $u \in U$ egy fedett pont. Jelöljük $s_M(u)$-val azt a V-beli v pontot (ha van), amire teljesül, hogy $<_v$ szerint az (u, v) él kisebb (vagyis jobb), mint a v-re illeszkedő M-beli él (ebből következik, hogy $<_u$ szerint az u-ra illeszkedő M-beli él kisebb, mint (u, v)), és ha $(v', u) <_u (v, u)$, akkor v'-t fedi M, és $<_{v'}$ szerint a v'-re illeszkedő M-beli él kisebb vagy egyenlő, mint (u, v').

3.1. Állítás: *Ha egy (u, v) él a $<_u$ rendezésben az $(u, s_M(u)$ és az u-t fedő M-beli él közt van valamely M-re, akkor nincs benne stabil párosításban.*

Bizonyítás: Azért nincs, mert két M-beli él is dominálja. ■

Az ilyen éleket nevezzük u-nál köztes éleknek.

Egy $\rho = (v_1, u_1, v_2, u_2, \dots v_k, u_k)$ kört nevezzünk **rotáció**nak, ha van olyan M stabil párosítás, amire $(v_i, u_i) \in M$ és $v_{i+1} = s_M(u_i)$ minden $i = 1, 2, \dots k$-ra (ahol $v_{k+1} = v_1$). Ha egy ρ rotációra és egy M stabil párosításra teljesülnek ezek, akkor azt mondjuk, hogy ρ eliminálható M-ben. Ekkor legyen $M/\rho := M \setminus \{(v_i, u_i) : i = 1, 2, ...k\} \cup \{(u_i, v_{i+1}) : i = 1, 2, ...k\}$, ezt M-ből ρ eliminálásával kapjuk. Az (u_i, v_{i+1}) éleket nevezzük ρ-n bekerülő éleknek, a (v_i, u_i) éleket pedig kikerülő éleknek, tehát a rotáció egy U-beli pontjánál a kikerülő él a jobbik, egy V-beli pontnál pedig a bekerülő.

3.2. Állítás: *M/ρ stabil párosítás, $M \prec M/\rho$ és M és M/ρ szomszédosak.*

Bizonyítás: Mivel egy alternáló körön cseréltünk, ezért M/ρ párosítás. A V-beli csúcsokra legalább olyan jó élek illeszkednek M/ρ-ban, mint M-ben, ezért elég megnézni, hogy M/ρ az olyan éleket dominálja-e, amiket M az U-beli végpontjukban dominál. De s_M definíciója miatt az ilyen élek közül azokat, amiket M/ρ nem dominál az U-beli végpontjukban, M a V-beli végpontjukban is dominálja, tehát ott M/ρ is, vagyis M/ρ stabil párosítás.

Nyilván $M \prec M/\rho$. Mivel köztes élek nincsenek stabil párosításban, ezért ha lenne a két stabil párosítás közt egy harmadik a $\preceq$ rendezésben, az csak $M \cup M/\rho$-beli éleket használhatna, de ebben csak egy kör van a különálló éleken kívül, ezért nincs harmadik párosítás benne, ami ugyanazt a ponthalmazt fedi. ∎

3.3. Állítás: *Ha $M \prec M'$ és a $v_1 \in V$ csúcsra illeszkedő M és M'-beli élek különböznek, akkor ha v_1-ből kiindulunk, és felváltva a soron következő pontot fedő M-beli él másik végpontjába (ha V-beli a pont), illetve a pont s_M-jébe (ha U-beli a pont) lépünk amíg vissza nem érünk egy korábban látogatott v_i pontba, akkor a séta v_i-ig menő részét elhagyva megkapunk egy ρ rotációt, amire $M/\rho \preceq M'$.*

Bizonyítás: Legyen u_i a v_i M-beli párja és $v_{i+1} = s_M(u_i)$. Ahhoz, hogy eljussunk egy rotációhoz, az kell, hogy az s_M minden u_i-ben definiálva legyen, mert ha nem akadunk el, akkor előbb-utóbb egy olyan ponthoz érünk, ahol már jártunk, és ekkor egy rotációt kapunk. Először lássuk be, hogy $s_M(u_1)$ értelmezve van. Legyen az u_1-re illeszkedő M'-beli él (u_1, v). Mivel $(u_1, v_1) \leqslant_{u_1} (u_1, v)$ és M stabil párosítás, ezért v-nél az M-beli él jobb, mint az (u_1, v) él. Mivel nincs olyan u_1 rendezésében (u_1, v)-nél jobb él, aminek másik végpontját nem fedik a stabil párosítások, ezért az ilyen tulajdonságú élek közül a legjobb lesz $s_M(u_1)$. Másrészt lássuk be, hogy az a tulajdonság, hogy egy u pontra illeszkedő M és M'-beli élek különböznek, öröklődik $s_M(u)$ M-beli párjára is. Legyen ez a pont u'. Ha $(u', s_M(u) \in M' \cap M$ lenne, akkor az $(u, s_M(u))$ élt M' nem dominálná. Tehát sosem akadunk el. Mivel minden olyan u pontra, aminél M és M' különbözik, az $(u, s_M(u))$ él legalább olyan jó az u pontnál, mint az M'-beli él, ezért $M/\rho \preceq M'$. ∎

3.4. Következmény: *Ha $M \prec M'$, akkor M-ből meg tudjuk kapni M'-t néhány rotáció eliminálásával.*

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{C} = \{M = M_1, M_2, \ldots, M_{k-1}, M_k = M'\}$ egy nem bővíthető M és M' közti lánc $\mathcal{M}$-ben. Ekkor $\mathcal{C}$-n két egymást követő elem szomszédos $\mathcal{M}$-ben, vagyis az előbbi állítás miatt minden $i = 1, 2, \ldots k-1$-re van olyan ρ_i rotáció, hogy $M_i \prec M_i/\rho_i \preceq M_{i+1}$, de mivel M_i és M_{i+1} szomszédosak, ezért $M_i/\rho_i = M_{i+1}$. Vagyis a $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{k-1}$ rotációkat sorban eliminálva M-ből M'-t kapjuk. ∎

Most hozzárendelünk a rotációkhoz egy-egy élhalmazt, és belátjuk, hogy ezek pont a $\mathcal{H}$ halmazrendszer atomjai. Legyen tehát egy $\rho = (v_1, u_1, v_2, u_2, \ldots v_k, u_k)$ rotációra $a(\rho) := \{(u_i, v) \in E : i = 1, \ldots k, (u_i, v_i) <_{u_i} (u_i, v) \leqslant_{u_i} (u_i, v_{i+1})\}$.

3.5. Állítás: *Ez egy bijekció a rotációk és $\mathcal{A}$ közt.*

Bizonyítás: Könnyen látszik, hogy ha ρ eliminálható egy M stabil párosításban, akkor $a(\rho) = H(M/\rho) \setminus H(M)$, ami $\mathcal{A}$-beli, mert M és M/ρ szomszédosak.

A $a(\rho)$ élhalmazból meg tudjuk kapni ρ-t: egy $u \in U$ pontra illeszkedő ρ-beli élek az $a(\rho)$-ban a $<_u$ szerint legnagyobb él és a legnagyobb olyan, ami a $a(\rho)$-beli élektől kisebb. Tehát a függvény injektív.

Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor a 2.6. állítás miatt vannak olyan szomszédos $M \preceq M'$ stabil párosítások, hogy $A = H(M') \setminus H(M)$. A 3.3. állítás miatt van olyan ρ rotáció, hogy $M/\rho = M'$, vagyis $a(\rho) = H(M') \setminus H(M) = A$, tehát a függvény szürjektív. ■

3.6. Következmény: *Eliminálások minden olyan sorozata, ami az M stabil párosításból M'-be jut, ugyanazokat a rotációkat tartalmazza.*

Bizonyítás: Pontosan azon rotációkat eliminálva jutunk M-ből M'-be, amikhez rendelt atomok $H(M') \setminus H(M)$-nek részhalmazai. ■

3.7. Következmény: *Ha M_U-ból kiindulva sorban eliminálunk rotációkat, amíg lehet, akkor M_V-t kapjuk meg és minden rotációt elimináltunk pontosan egyszer.*

A fentiek miatt M_U-ból minden M stabil párosítást meg tudunk kapni rotációk egy egyértelmű halmazának eliminálásával. Ha egy ρ rotáció benne van ebben a halmazban, akkor azt mondjuk, hogy ρ eliminálva van M-ben. Ez tehát azzal ekvivalens, hogy $a(\rho) \subseteq H(M)$

3.2. Részbenrendezés a rotációkon

Jelöljük R-rel a rotációk halmazát. Az $\mathcal{A}$-n levő $\preceq$ részbenrendezés megad egy relációt R-en: legyen $\rho \preceq \rho' \Leftrightarrow a(\rho) \preceq a(\rho')$. A 3.5. állítás miatt $(R, \preceq)$ is részbenrendezés, és a 2.7. állítás következménye a következő

3.8. Tétel: *Az $r : \mathcal{M} \to P(R)$, $r(M) = a^{-1}(A \in \mathcal{A} : A \subseteq H(M))$ leképezés bijekció $\mathcal{M}$ és R zárt részhalmazai között.*

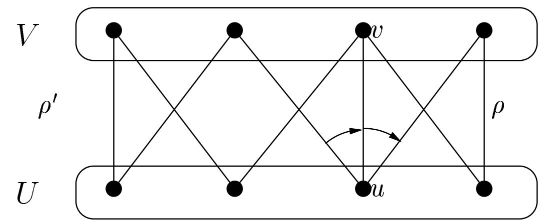
Könnyen látszik, hogy azok a rotációk vannak $r(M)$-ben, amiknek minden éle az U-beli csúcsában dominálja az azt fedő M-beli élt.

3.9. Állítás: *$\rho \preceq \rho'$ pontosan akkor, ha nincs olyan stabil párosítás, amiben ρ' eliminálva van, de ρ nincs.*

Bizonyítás: Láttuk, hogy $a(\rho) \preceq a(\rho')$ azzal ekvivalens, hogy nincs olyan $H \in \mathcal{H}$, hogy $a(\rho') \subseteq H$, de $a(\rho) \cap H = \emptyset$, ami a rotációkra lefordítva pont az állítást jelenti. ■

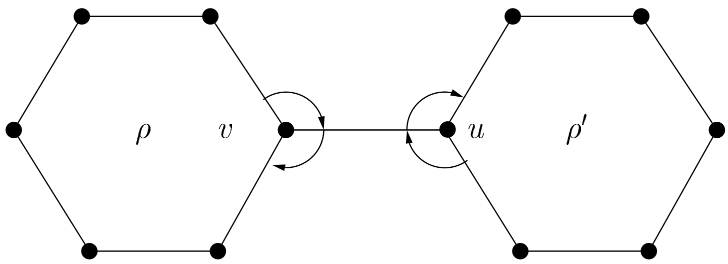
Most megadunk egy $D = (R, A)$ irányított gráfot a rotációkon, és be fogjuk látni, hogy a D tranzitív lezártja a $\prec$ részbenrendezés, vagyis egy ρ rotációból pontosan akkor lehet eljutni D-ben egy irányított úton egy ρ' rotációba, ha $\rho \preceq \rho'$. Két fajta élét definiáljuk D-nek:

Első fajta él: legyen $(\rho, \rho') \in A$, ha van olyan $(u, v) \in E$, ami mindkét rotáción rajta van, és ρ-n bekerülő, ρ'-n pedig kikerülő él.



2. ábra. első fajta él D-ben

Második fajta él: legyen $(\rho, \rho') \in A$, ha van olyan $(u, v) \in E$, ami $<_u$ szerint a két u-ra illeszkedő ρ'-beli él közt van, $<_v$ szerint a két v-re illeszkedő ρ-beli él közt van.



3. ábra. második fajta él D-ben

3.10. Tétel: *A D gráf tranzitív lezártja a $\preceq$ részbenrendezés.*

Bizonyítás: Először mutassuk meg, hogy ha $(\rho, \rho') \in A$, akkor $\rho \prec \rho'$. Ehhez a 3.9. állítás miatt azt kell belátni, hogy nincs olyan stabil párosítás, amiben ρ' eliminálva van, de ρ nincs. Ha ρ és ρ' közt első fajta él van, és egy M stabil párosításban ρ' eliminálva van, akkor $(u, v) \notin H(M)$, ami miatt M-ben ρ is eliminálva van. Ha ρ és ρ' közt második fajta él van, és egy M stabil párosításban ρ' eliminálva van, akkor M az (u, v) élt az u csúcsnál nem dominálja, tehát v-nél dominálja, vagyis ρ is eliminálva van M-ben, mert ρ az egyetlen olyan rotáció, aminek eliminálásakor v-nél az (u, v) éltől rosszabb él helyett egy jobb kerül a párosításba.

Most lássuk be, hogy ha $\rho \prec \rho'$, és ρ és ρ' szomszédosak, akkor megy él D-ben ρ-ból ρ'-be. Legyen S a $\preceq$ rendezés szerint a ρ'-nél kisebb rotációk halmaza. Ekkor $S \setminus \{\rho\}$, S és $S \cup \{\rho'\}$ is zárt halmazok. Legyen az $S \setminus \{\rho\}$-nak megfeleltetett stabil párosítás M (vagyis $M = r^{-1}(S \setminus \{\rho\})$). Ekkor $a(M/\rho) = S$ és $a(M/\rho/\rho') = S \cup \{\rho'\}$, vagyis ρ' M/ρ-ban eliminálható, de mivel $S \cup \{\rho'\} \setminus \{\rho\}$ nem zárt halmaz, ezért M-ben ρ' nem eliminálható. Próbáljunk rotációt keresni M-ben úgy, hogy egy olyan V-beli pontból indulunk ki, ami rajta van ρ'-n. Az ilyen pontoknál M és $M/\rho/\rho'$ különböznek, ezért a 3.3. állítás miatt nem akadunk el, találunk egy rotációt. Mivel M-ben ρ' nem eliminálható, ezért nem ρ'-t találjuk meg, vagyis van egy első olyan lépés, ahol nem a ρ' következő csúcsára lépünk. Ha ez egy V-beli csúcsnál történik, mondjuk v-nél és ρ' következő csúcsa u, akkor $(v, u) \notin M$, de $(v, u) \in M/\rho$, tehát ρ v-nél a (v, u) él helyett egy v-nél jobb élt hoz be, vagyis (u, v) közös éle ρ-nak és ρ'-nek, és v-nél a másik ρ-beli él jobb, mint a másik ρ'-beli, vagyis D-ben első fajta él megy ρ-ból ρ'-be. Ha pedig egy U-beli csúcsnál lépünk mást először, mondjuk u-nál, akkor $s_M(u) \neq s_{M/\rho}(u)$. Mivel egy $M \cap M/\rho$-beli élen léptünk u-ba, és egy eliminálás során a V-beli csúcsok jobb élt kapnak, ezért ez csak úgy lehet, hogy a ρ eliminálásakor $s_M(u)$ egy $(s_M(u), u)$-nál jobb élt kap, vagyis ekkor második fajta él lép ρ-ból ρ'-be. ∎

4. Algoritmusok

4.1. Minimális súlyú stabil párosítás keresése

Adott a G gráf élein egy c súlyozás, szeretnénk keresni egy minimális összsúlyú stabil párosítást. Láttuk, hogy a stabil párosítások egyértelműen megfelelnek a $\mathcal{H}$ halmazgyűrű tagjainak. Változtassuk meg $\mathcal{H}$-t úgy, hogy az üres halmaz és az alaphalmaz is benne legyen a halmazrendszerben, de a két háló izomorf legyen: legyen az új alaphalmaz $E' := E \setminus (\cap\mathcal{H}) \setminus (\cup\mathcal{H})^c$ és legyen $H'(M) := H(M) \setminus (\cap\mathcal{H})$, az új halmazrendszer E'-n pedig $\mathcal{H}' := \{H'(M) : M \in \mathcal{M}\}$.

Most megadunk E'-n egy olyan c' súlyozást, hogy egy M stabil párosításnak megfeleltetett $\mathcal{H}'$-beli halmaz c'-összsúlya ugyanannyi legyen, mint $c(M)$. Jelöljük egy E'-beli e él U-beli végpontjánál az e-nél eggyel jobb élt e^+-szal, ha van ilyen és ő is E'-beli. Legyen $c'(e) := c(e)$, ha e^+ nincs értelmezve és $c'(e) := c(e) - c(e^+)$, ha értelmezve van. Ekkor $c'(H(M)) = c(M)$. Tehát egy minimális súlyú stabil párosítás találásához elég tudnunk, hogy hogyan kell egy metszet- és uniózárt halmazrendszerbeli, minimális összsúlyú halmazt megtalálni. Ezt pedig vissza lehet vezetni egy folyamproblémára. Először készítsünk egy irányított gráfot, aminek a ponthalmaza E', és aminek a 0 befokú részhalmazai pont a $\mathcal{H}'$ halmazrendszer elemei.

4.1. Állítás: *Legyen D' az az irányított gráf, aminek ponthalmaza E', és egy (e_1, e_2) él akkor van benne, ha nincs olyan M stabil párosítás, hogy $e_2 \in H'(M)$, de $e_1 \notin H'(M)$, ekkor a D'-ben 0 befokú halmazok a $\mathcal{H}'$-beli halmazok.*

Bizonyítás: D' definíciója alpján világos, hogy egy $\mathcal{H}'$-beli halmazba nem lép be él. Tegyük fel, hogy az $F \subset E'$ halmazba nem lép él D'-ben. Ha F üres halmaz vagy E', akkor $\mathcal{H}'$-beli. Ha nem, akkor minden $f \in F$ és $e \in E' \setminus F$ párhoz létezik olyan $H(e, f) \in \mathcal{H}'$, hogy $f \in H(e, f)$, de $e \notin H(e, f)$. Így minden $f \in F$-re a $\cap\{H(e, f) : e \in E' \setminus F\}$ egy f-et tartalmazó $\mathcal{H}$-beli halmaz és része F-nek. Tehát ezek uniója, vagyis F is $\mathcal{H}$-beli. ∎

A D' gráfban a legkisebb súlyú 0 befokú halmazt a következőképp tudjuk megkeresni. Vegyünk a gráfhoz két új pontot, s-et és t-t. Jelöljük E^+-szal illetve E^--szal az E'-beli, pozitív illetve negatív c'-súlyú éleket. Minden $e \in E^+$-ra húzzunk egy élt s-ből e-be, aminek kapacitása legyen $c'(e)$ és minden $f \in E^-$-ra húzzunk egy élt f-ből t-be, aminek kapacitása legyen $-c'(f)$. Az így kapott gráfban egy folyamalgoritmussal a folyam mellett egy minimális vágást is kapunk, jelöljük H-val az E' vágáson kívüli részét. H-ba nem lép be él D'-ben, mert akkor a minimális vágás értéke végtelen lenne, de az $\{s\}$ vágás értéke véges. Emellett egy tetszőleges 0 befokú $F \subset E'$ halmazra az $s \cup F^c$ vágásból kilépő éleken a kapacitások összege az s-ből F-be lépő éleken és az $E' \setminus F$-ből t-be lépő éleken a kapacitások összege, vagyis $c'(F \cap E^+) - c'(E^- \setminus F) = c'(F \cap E^+) + c'(F \cap E^-) - c'(E^-) = c'(F) - c'(E^-)$, vagyis H a minimális súlyú 0 befokú halmaz.

4.2. A rotációk megkeresése

Először keressük meg az M_U fiúoptimális és az M_V lányoptimális stabil párosítást a 2.2. tétel bizonyításában leírt algoritmussal, ami $O(m)$ idejű, ahol m az élek száma. Ezután egy olyan $u \in U$ pontból kiindulva, aminél M_U és M_V különbözik, a 3.3. lemmában leírt módon keresünk egy M_U-ban eliminálható rotációt. Tároljuk ezt a rotációt és M_U helyébe vegyük azt a stabil párosítást, amit a rotáció eliminálásával kapunk M_U-ból. Ezt ismételjük, ekkor a 3.7. következmény miatt minden rotációt megtalálunk. Ezt az algoritmust lehet úgy implementálni, hogy $O(m)$ ideig fusson, körülbelül úgy, hogy minden csúcsnál, amire nem illeszkedik a talált rotáció, megjegyezzük, hogy hova léptünk, mert könnyen ellenőrizhető, hogy ez nem változik az eliminálás után. Az algoritmus részletei Gusfield és Irving [12] könyvében megtalálhatók.

Ezzel egyúttal megtaláltuk azokat az éleket, amik szerepelnek stabil párosításban, hiszen ezek pont a rotációkon szereplő élek. Ezen élek halmazát jelöljük E_{st}-vel.

A $D(G, \mathcal{O})$ gráfot megkereshetjük a következőképpen. Miközben a rotációkat keressük, minden rotáció éleit megjelöljük a rotáció sorszámával, és ha egy későbbi rotáción van egy megjelölt él, akkor behúzunk egy első fajta élt $D(G, \mathcal{O})$-ban a korábbi rotációból ebbe. A második fajta élekhez először minden lánynál minden rá illeszkedő rotáció sorszámát írjuk rá azokra az élekre, amik a rotáció két éle közt vannak (szigorúan). Ezután minden fiúnál ha egy ρ_i rotáció egy köztes élére j van írva, akkor $D(G, \mathcal{O})$-ba húzzuk be a (ρ_j, ρ_i) élt második fajta élként. Ez is $O(m)$ idejű.

4.3. Minimális súlyú stabil párosítás keresése rotációk segítségével

Ezt az algoritmus Irving, Leather és Gusfield [14] írták le. Láttuk, hogy a stabil párosítások egyértelműen megfelelnek a $D(G, \mathcal{O})$ gráf 0 befokú csúcshalmazainak. Ha adott egy c súlyfüggvény az éleken, akkor vegyük a következő súlyozást a rotációkon: legyen egy $\rho = (v_1, u_1, \ldots, v_k, u_k)$ rotáció súlya $c'(\rho) := -c(v_1u_1) + c(u_1v_2) - c(v_2u_2) + c(u_2v_3) - + \cdots + c(u_kv_1)$. Ekkor ha ρ eliminálható egy M párosításban, akkor $c(M/\rho) = c(M) + c'(\rho)$ és így, ha $r(M)$ az M-nek megfelelő rotációhalmaz, vagyis azon rotációk halmaza, amiket eliminálva M_U-ból M-et kapjuk, akkor $c(M) = c(M_U) + c'(r(M))$. Tehát a minimális súlyú stabil párosításnak a minimális súlyú 0 befokú halmaz felel meg. Ezt pedig ugyanúgy tudjuk megkeresni, mint a 4.1 alfejezet végén.

4.4. Minimális súlyú stabil párosítás kötelező és kizárt élekkel

A feladat az, hogy a páros gráfunkban adott az éleknek két részhalmaza, E_1 és E_2, és egy c súlyfüggvény az éleken és meg kell mondanunk, hogy van-e olyan stabil párosítás, ami E_1-et tartalmazza, E_2-től pedig diszjunkt, és ha van, akkor meg is kell adni egy minimális súlyút. Erre Dias, da Fonesca, de Figueiredo és Szwarcfiter [5] adtak egy algoritmust, itt kicsit más módszert adunk a feladat megoldására.

Most is a $D(G,\mathcal{O})$ gráfban próbálunk keresni egy megfelelő, minimális c'-súlyú 0 befokú csúcshalmazt. Vegyünk a gráfhoz egy s és egy t pontot, s-et kössük össze a pozitív c'-súlyú pontokkal, t-t a negatívakkal, az kapacitás legyen az s-ből kilépő éleken a végpont c'-súlya, a t-be lépő éleken a kezdőpont súlyának ellentettje, a többi élen pedig végtelen. Ezen a kapacitásos gráfon fogunk még változtatni, méghozzá éleket összehúzni, hogy a véges vágások az E_1-et tartalmazó, E_2-től diszjunkt stabil párosításoknak megfelelő rotációhalmazok legyenek.

Legyen $e_1 \in E_1$. Ha $e_1 \notin E_{st}$, akkor nincs keresett stabil párosítás. Ha $e_1 \in E_{st}$, akkor annak a rotációnak, amin e_1 bekerülő él (ha van), benne kell lenni ebben a 0 befokú halmazban, ezért húzzuk össze s-sel, annak a rotációnak, amiben e_1 kikerülő él (ha van), nem szabad benne lennie a halmazban, így ezt t-vel húzzuk össze. Legyen $e_2 \in E_2$. Ha $e_2 \notin E_{st}$, akkor e_2 nem ad új feltételt. Ha $e_2 \in E_{st}$, akkor annak a rotációnak, amiben e_2 belépő él, és amiben kilépő él, vagy mindkettőnek benne kell lenni a halmazban vagy egyiknek sem, ezért húzzuk össze a köztük menő (első fajta) élt. Az így kapott gráfban egy minimális vágás egy minimális súlyú E_1-et tartalmazó, E_2-től diszjunkt stabil párosításonak felel meg, ezt egy folyamalgoritmussal meg tudjuk keresni.

5. Poliéderes eredmények

5.1. Poliéderes leírások

Legyen $(G, \mathcal{O})$ egy páros preferenciarendszer. A $(G, \mathcal{O})$-ban levő összes stabil párosítás $\mathbb{R}^E$-beli incidenciavektorának konvex burkát, vagyis a stabil párosítások poliéderét jelöljük $P(G, \mathcal{O})$-val. Vande Vate [16] adott először lineáris leírást $P(G, \mathcal{O})$-ra, ám csak arra az esetre, amikor G teljes páros gráf:

5.1. Tétel: (Vande Vate) *Ha $(G, \mathcal{O})$ egy páros preferenciarendszer, ahol $G = (U; V, E)$ teljes páros gráf és $|U| = |V|$, akkor az*

(5.2.) $\qquad x \geqslant 0,$

(5.3.) $\qquad x(D(w)) = 1, \qquad$ *ha $w \in U \cup V$,*

(5.4.) $\qquad x(\psi(e)) \leqslant 1, \qquad$ *ha $e \in E$*

egyenlőtlenségrendszer $P(G, \mathcal{O})$-t írja le, ahol $\psi(e)$ az e él által dominált élek halmazát jelöli.

Rothblum [15] egy hasonló leírást adott, ami már tetszőleges gráfra működik:

5.5. Tétel: (Rothblum) *Legyen $(G, \mathcal{O})$ egy páros preferenciarendszer, ahol $G = (U, V; E)$, és jelöljük egy e élt domináló élek halmazát $\varphi(e)$-vel. Ekkor az*

(5.6.) $\qquad x \geqslant 0,$

(5.7.) $\qquad -x(D(w)) \geqslant -1, \qquad$ *ha $w \in U \cup V$,*

(5.8.) $\qquad x(\varphi(e)) \geqslant 1, \qquad$ *ha $e \in E$*

rendszer a $P(G, \mathcal{O})$ poliédert írja le.

Bizonyítás: Könnyű látni, hogy egy stabil párosítás incidenciavektora teljesíti ezeket az egyenlőtlenségeket. Legyen most x olyan vektor, ami teljesíti az egyenlőtlenségeket. Nevezzünk egy e élt pozitívnak, ha $x(e) > 0$. Vegyünk egy olyan $e = (u, v)$ élt (ahol $u \in U, v \in V$), ami u-nál a legjobb pozitív él. Ekkor az e-t domináló pozitív élek mind illeszkednek v-re, amiken az x összege ezért legfeljebb 1, másrészt legalább 1, vagyis pont 1, és emiatt e a v csúcsnál a legrosszabb pozitív él. Tehát, ha minden olyan U-beli ponthoz, amire illeszkedik pozitív él, hozzárendeljük azt a V-beli pontot, ami a legjobb pozitív él másik végpontja, akkor ez egy injektív függvény és minden képnél a szomszédos éleken 1 az összeg, de ez csak úgy lehet, hogy minden V-beli pont előáll képként, és minden $U \cup V$-beli pontnál az éleken az x összege 0 vagy 1. Jelöljük azon az élek halmazát, amik az U-beli végpontjuknál a legjobb pozitív élek, M-mel. M egy stabil párosítás, mert ha f egy olyan él, amit M nem dominál az U-beli végpontjánál, akkor a V-beli végpontjánál f-nél jobb az összes pozitív él, tehát a legkisebb is, ami a fentiek miatt

M-ben van. Legyen α a legkisebb x-érték M-ben. Ha $\alpha = 1$, akkor x az M stabil párosítás incidenciavektora, ekkor készen vagyunk. Ha $\alpha < 1$, akkor legyen $x'(e) = \frac{1}{1-\alpha}(x(e) - \alpha\chi_M)$. Lássuk be, hogy x' is teljesíti az egyenlőtlenségeket. Nyilván $x' \geqslant 0$. Ha M fedi a w pontot, akkor $x'(D(w)) = \frac{1}{1-\alpha}(x(D(w)) - \alpha) \geqslant 1$, ha M nem fedi w-t, akkor w-re nem illeszkedik pozitív él, tehát (5.7.)-t is teljesíti x'. Ha $e = (u,v) \in E$, akkor az nem lehet, hogy $\varphi(e)$-ben két M-beli él is van, mert ha v-nél egy M-beli él jobb, mint e, akkor v-nél az összes vele szomszédos pozitív él jobb, mint e, ezeken az összeg 1, ezért u-nál nem lehet e-től jobb pozitív él, (5.8.) miatt. Tehát $x'(\varphi(e)) \geqslant \frac{1}{1-\alpha}(x(\varphi(e)) - \alpha) \geqslant 1$, tehát (5.8.)-t is teljesíti x'. Emellett x előáll az x' és a χ_M konvex kombinációjaként és x'-ben kevesebb pozitív él van, mint x-ben, így ha ezt folytatjuk, előbb-utóbb elérünk egy stabil párosítás incidenciavektorához. ■

Fleiner Tamás [9]-ben a blokkoló poliéderek elméletét használva a stabil párosítások egy matroidokra való általánosításának poliéderére adott leírást, ami a stabil párosítások esetén így hangzik:

5.9. Tétel: (Fleiner) *Legyen $(G, \mathcal{O})$ egy páros preferenciarendszer és legyen $\mathcal{A} := \{A \subset E : |A \cap M| \leqslant 1 \forall M \in \mathcal{M}\}$ és $\mathcal{B} := \{B \subset E : |B \cap M| \geqslant 1 \forall M \in \mathcal{M}\}$, ekkor a*

$$x \geqslant 0, \tag{5.10.}$$

$$x(A) \leqslant 1, \quad \text{ha } A \in \mathcal{A}, \tag{5.11.}$$

$$x(B) \geqslant 1, \quad \text{ha } B \in \mathcal{B} \tag{5.12.}$$

rendszer $P(G, \mathcal{O})$-t írja le.

5.2. TDI-ság

Legyen A egy $m \times n$-es mátrix. Az $Ax \geqslant b$ lineáris egyenlőtlenségrendszert teljesen duálisan egészértékűnek (TDI-nak) nevezzük, ha minden olyan egész $c \in \mathbb{Z}^n$ célfüggvényre, amire $\{cx : x \in \mathbb{R}^n, Ax \geqslant b\}$ alulról korlátos, létezik egész duális optimális megoldás, vagyis olyan $y \in \mathbb{Z}^m$, amire $y \geqslant 0$, $yA = c$ és $yb = \min\{cx : x \in \mathbb{R}^n, Ax \geqslant b\}$.

Először belátjuk egy, a Rothbluméhoz hasonló egyenlőtlenségrendszerről, hogy TDI, amiből következni fog, hogy ez is a stabil párosítások poliéderét írja le, majd ebből levezetjük Rothblum leírásának TDI voltát.

5.13. Tétel: *A következő rendszer $x \in \mathbb{R}^{E_{st}}$ változóval teljesen duálisan egészértékű:*

$$\begin{aligned} x &\geqslant 0, \\ x(\varphi'(e)) &\geqslant 1, \quad \text{ha } e \in E \setminus E_{st}, \\ x(\varphi'(e)) &= 1, \quad \text{ha } e \in E_{st}, \end{aligned} \tag{5.14.}$$

itt $\varphi'(e)$ az e élt domináló E_{st}-beli élek halmazát jelöli.

Bizonyítás: Mivel a stabil párosítások incidenciavektorai elemei ennek a poliédernek, ezért elég azt megmutatni, hogy minden egész $c \in \mathbb{Z}^{E_{st}}$ célfüggvényhez van olyan $y \in \mathbb{Z}^E$ egészértékű duális megoldás, amire

$$y(e) \geqslant 0, \qquad \text{ha } e \in E \setminus E_{st}, \tag{5.15.}$$

$$y(\psi(e)) \leqslant c(e), \qquad \text{ha } e \in E_{st}, \tag{5.16.}$$

és $\sum_{e \in E} y(e) = \min\{cx | x \in P(G, \mathcal{O})\}$.

Láttuk, hogy a stabil párosítások egyértelműen megfelelnek a $D(G, \mathcal{O}) = (R, A)$ gráf 0 befokú ponthalmazainak, és ha egy $\rho = (v_1, u_1, \ldots, v_k, u_k)$ rotációnak a $c'(\rho) := -c(v_1u_1) + c(u_1v_2) - c(v_2u_2) + c(u_2v_3) - + \cdots + c(u_kv_1)$ súlyt adjuk, akkor minden M stabil párosításra $c(M) = c(M_U) + c'(r(M))$, ami miatt a minimális súlyú stabil párosításnak a minimális súlyú forrás halmaz felel meg. A $D(G, \mathcal{O})$ gráf forrás halmazainak $\mathcal{P}$ poliéderét a következő rendszerrel lehet leírni:

$$\begin{aligned} &x \in \mathbb{R}^R 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ &x(\rho) - x(\rho') \geqslant 0, \quad \text{ha } (\rho, \rho') \in A. \end{aligned} \tag{5.17.}$$

Mivel ennek a rendszernek a mátrixa teljesen unimoduláris (mert minden sorban legfeljebb egy 1-es és legfeljebb egy -1-es van), ezért a rendszer teljesen duálisan egészértékű. Tehát speciálisan a fenti $c' \in \mathbb{Z}^R$-re van olyan $z \in \mathbb{Z}^{R \cup A}$, amire

$$\begin{aligned} z_\rho &\geqslant 0 && \text{ha } \rho \in R, \\ z_{(\rho,\rho')} &\geqslant 0, && \text{ha } (\rho, \rho') \in A, \\ -z_\rho + z(\Delta^+(\rho)) - z(\Delta^-(\rho)) &\leqslant c'(\rho), && \text{ha } \rho \in R, \end{aligned} \tag{5.18.}$$

és $-\sum_{\rho \in R} z_\rho = \min\{c'x | x \in \mathcal{P}\} = c(M_{opt}) - c(M_U)$, ahol M_{opt} egy minimális súlyú stabil párosítás, és $\Delta^+(\rho)$ és $\Delta^-(\rho)$ a D gráfban a ρ pontból kimenő, illetve a pontba bemenő élek halmazát jelöli.

Legyen $\rho_1, \ldots, \rho_r$ egy topologikus sorrendje a D gráfnak, vagyis egy olyan sorrendje a rotációknak, amilyen sorrendben eliminálni lehet őket. Minden ρ_i rotáción válasszunk ki egy bekerülő e_0^i élt (vagyis ami az U-beli csúcsánál rosszabb, mint a másik ρ_i-beli él). Ezen kívül, ha $(\rho_i, \rho_j) \in A$ és második fajta él van köztük, akkor legyen e_{ij} egy olyan él, ami a V-beli végpontjánál a két arra illeszkedő ρ_i-beli él közt van, az U-beli végpontjánál pedig a két ρ_j-beli él közt, vagyis egy olyan él, ami miatt második fajta él van a két rotáció közt. Az egyszerűség kedvéért $z_{(\rho_i,\rho_j)}$-t jelöljük z_{ij}-vel, z_{ρ_i}-t pedig z_i-vel.

$0 \leqslant t \leqslant r$-re és $e \in E_{st}$-re legyen

$$c_t(e) := c(e) - \sum\{z_{li} \mid l \leqslant t < i,\ e \leqslant_V e_0^l,\ (\rho_l, \rho_i) \in A\}.$$

A következőkben rekurzív módon definiálni fogunk olyan $y_0, y_1, \ldots, y_r$ $\mathbb{Z}^E$-beli vektorokat úgy, hogy minden $0 \leqslant t \leqslant r$-re teljesüljenek az alábbiak:

(a) $y_t(e) \geqslant 0$, ha $e \in E \setminus E_{st}$

(b) $y_t(\psi(e)) \leqslant c_t(e)$, ha $e \in M_U \cup \rho_1 \cup \rho_2 \cup \dots \cup \rho_t$

(c) $\sum_{e \in E} y_t(e) = c(M_U) - \sum_{i=1}^{t} z_i$

(d) $\mathrm{supp}(y_t) \subseteq M_U \cup \rho_1 \cup \rho_2 \cup \dots \cup \rho_t \cup \{e_{ij} : i, j \leqslant t\}$

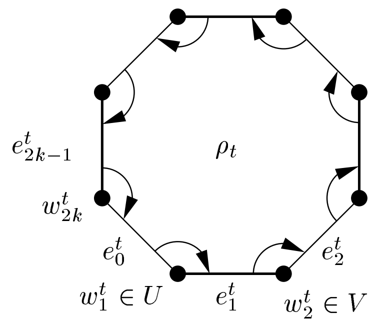
Tehát az y_t duális térbeli egész vektorok egyre több (5.16.)-beli egyenlőtlenséget teljesítenek, a célfüggvény értéke közelít az optimálishoz, és az e_0^i éleknél olyan többleteket biztosítunk magunknak, amit a későbbi y_k-knál "felhasználhatunk". Ha sikerül ilyen y_t-ket definiálni, akkor készen vagyunk, hiszen y_r-re már az összes (5.16.)-beli egyenlőtlenség teljesül, vagyis benne van a duális poliéderben a vektor, és a célfüggvény értéke pedig $\sum_{e \in E} y_r(e) = c(M_U) - \sum_{i=1}^{r} z_i = c(M_{opt})$.

Legyen

$$y_0(e) := \begin{cases} c(e) & \text{ha } e \in M_U, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor persze $\sum_{e \in E} y_0(e) = c(M_U)$, és minden M_U-beli élre teljesül (b) és a többi követelmény is.

Az y_t-t úgy kapjuk y_{t-1}-ből, hogy csak a ρ_t rotáció élein és a fenti e_{lt} éleken változtatunk ($l \leqslant t$-re). Számozzuk most a ρ_t rotáció csúcsait fordított sorrendben $w_1^t, w_2^t, \dots w_{2k}^t$-val, ahol $(w_{2k}^t, w_1^t) = e_0^t$, a (w_i^t, w_{i+1}^t) élt pedig jelöljük e_i^t-vel, ekkor tehát $e_i^t <_{w_i^t} e_{i-1}^t$ és w_i^t V-beli, ha i páros és U-beli, ha i páratlan. Minden e_{2i+1}^t él vagy szerepel korábbi rotáción vagy M_U-beli, ezért teljesül, hogy $y_{t-1}(\psi(e_{2i+1}^t)) \leqslant c_{t-1}(e_{2i+1}^t)$.



4. ábra. ρ_t (a vastag élek a kikerülő élek)

Használni fogjuk, hogy mivel a rotációkat egy topologikus sorrend szerint vesszük sorba, ezért ha egy e élnek y_{t-1}-ben nem 0 értéke van és illeszkedik ρ egy csúcsára, akkor, ha ez a csúcs U-beli, mondjuk w_{2i+1}^t, akkor $e \leqslant_{w_{2i+1}^t} e_{2i+1} <_{w_{2i+1}^t} e_{2i}$, ha pedig V-beli, mondjuk w_{2i}^t, akkor $e \geqslant_{w_{2i}^t} e_{2i-1} >_{w_{2i}^t} e_{2i}$.

Először definiálunk egy y_t'-t, ami teljesíti a feltételeket, kivéve, hogy (b)-t c_{t-1}-re teljesíti, az e_0^t élen pedig nem feltétlenül teljesíti.

y'_t-hez y_{t-1}-t csak a ρ_t élein változtatjuk. Legyen

$$y'_t(e^t_0) := -z_t,$$

$$y'_t(e^t_1) := y_{t-1}(e^t_1),$$

így $y'_t(\psi(e^t_1)) = y_{t-1}(\psi(e^t_1)) - z_t \leqslant c_{t-1}(e^t_1)$.

Figyeljük meg, hogy minden j-re $c(e^t_{2j}) - c(e^t_{2j-1}) = c_{t-1}(e^t_{2j}) - c_{t-1}(e^t_{2j-1})$. Ezután legyen

$$y'_t(e^t_2) := c(e^t_2) - c(e^t_1) = c_{t-1}(e^t_2) - c_{t-1}(e^t_1),$$

ekkor, mivel a $\psi(e^t_1)$ élhalmazban csak olyan éleknek nem 0 az y_{t-1} értéke, amik w_2-re illeszkednek, vagyis $\psi(e^t_2)$-ben is benne vannak, ezért

$$y'_t(\psi(e^t_2)) = y_{t-1}(\psi(e^t_1)) + c_{t-1}(e^t_2) - c_{t-1}(e^t_1) \leqslant c_{t-1}(e^t_2).$$

Legyen

$$y'_t(e^t_3) := y_{t-1}(e^t_3) - c(e^t_2) + c(e^t_1) = y_{t-1}(e^t_3) - y'_t(e^t_2).$$

Ekkor

$$y'_t(\psi(e^t_3)) = y_{t-1}(\psi(e^t_3)) + c(e^t_2) - c(e^t_1) - c(e^t_2) + c(e^t_1) \leqslant c_{t-1}(e^t_3).$$

Legyen

$$y'_t(e^t_4) := c(e^t_4) - c(e^t_3) + c(e^t_2) - c(e^t_1),$$

ekkor e^t_2-höz hasonlóan

$$y'_t(\psi(e^t_4)) = y_{t-1}(\psi(e^t_3))) - c(e^t_2) + c(e^t_1) + c_{t-1}(e^t_4) - c_{t-1}(e^t_3) + c(e^t_2) - c(e^t_1) \leqslant c_{t-1}(e^t_4).$$

A többi élre ezt folytatjuk: legyen minden $j = 0, 1, \ldots k-1$-re

$$y'_t(e^t_{2j+1}) := y_{t-1}(e^t_{2j+1}) + \sum_{i=1}^{2j}(-1)^{i+1}c(e^t_i),$$

$$y'_t(e^t_{2j}) := \sum_{i=1}^{2j}(-1)^{i}c(e^t_i).$$

Ekkor a $\psi(e_{2i+1}), (1 \leqslant i \leqslant k-1)$ élhalmazban csak az e_{2i+1} és az e_{2i} élen változtattuk meg y_t-t, és az egyikből levontunk, a másikhoz hozzáadtunk $c(e_{2i}) - c(e_{2i+1})$-t, ezért a (b) egyenlőtlenségek érvényben maradnak ezeken az éleken y'_t-re is. Hasonlóan a korábbi rotációkon szerepelt élekre is teljesül (b).

Mivel a w^t_{2j-1} csúcsnál az e^t_{2j-1} él legfeljebb olyan jó, mint azok az élek, amiknek eddig nem 0 értéket adtunk, a w^t_{2j+1}-nél pedig ugyanez igaz e^t_{2j+1}-re, amik miatt $y_{t-1}(\psi(e^t_{2j})) =$

$y_{t-1}(\psi(e^t_{2j-1}))$, amit felhasználva, $j = 1, 2, \dots k-1$-re:

$$\begin{aligned}
y'_t(\psi(e^t_{2j})) &= y'_t(e^t_{2j}) + y_{t-1}(\psi(e^t_{2j-1})) + y'_t(e^t_{2j-1}) - y_{t-1}(e^t_{2j-1}) = \\
&= \sum_{i=1}^{2j}(-1)^i c(e^t_i) + y_{t-1}(\psi(e^t_{2j-1})) + \sum_{i=1}^{2j-2}(-1)^{i+1}c(e^t_i) = \\
&= y_{t-1}(\psi(e^t_{2j-1})) - c_{t-1}(e^t_{2j-1}) + c_{t-1}(e^t_{2j}) \leqslant \\
&\leqslant c_{t-1}(e^t_{2j-1}) - c_{t-1}(e^t_{2j-1}) + c_{t-1}(e^t_{2j}) = c_{t-1}(e^t_{2j}),
\end{aligned}$$

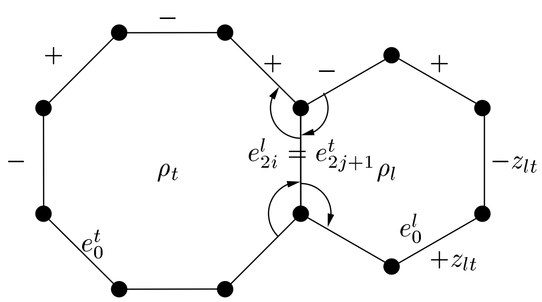
vagyis y'_t is teljesíti (b)-t $t-1$-re az (e^t_{2j}) éleken, ha $j \in \{1, 2, \dots k-1\}$.

Ezen kívül

$$\sum_{e\in E} y'_t(e) = \sum_{e\in E} y_{t-1}(e) - z_t = c(M_U) - \sum_{i=1}^{t} z_i.$$

A következő változtatásokat minden olyan l-re végrehajtva, amire $(\rho_l, \rho_t) \in A$, kapjuk y'_t-ből y_t-t.

Legyen $(\rho_l, \rho_t) \in A$. Ha első fajta él megy köztük, akkor van egy közös élük, ami ρ_l-ben páros indexű, ρ_t-ben pedig páratlan indexű, mondjuk $e^l_{2i} = e^t_{2j+1}$. Ekkor minden $0 \leqslant x \leqslant i-1$-re az e^l_{2x} élen növeljünk z_{lt}-vel, az e^l_{2x+1} élen csökkentsünk z_{lt}-vel, és minden $j+1 \leqslant y \leqslant k-1$-re az e^t_{2y} élen növeljünk z_{lt}-vel, és az e^t_{2y+1} élen csökkentsünk z_{lt}-vel.



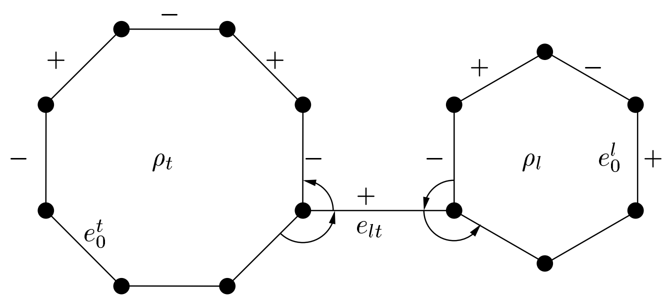
5. ábra. ha (ρ_l, ρ_t) első fajta él

Ha ρ_l-ből ρ_t-be második fajta él megy, akkor az e_{lt} él egyik végpontja ρ_l-en egy páros indexű pont, mondjuk w^l_{2i}, a másik pedig ρ_t-n egy páratlan indexű pont, mondjuk w^l_{2j+1}. Ilyenkor növeljünk z_{lt}-vel az e^l_{2x} élen $0 \leqslant x \leqslant i-1$-re, az e^t_{2y} élen $j+1 \leqslant y \leqslant k-1$-re és az e_{lt} élen, valamint csökkentsünk z_{lt}-vel az e^l_{2x+1} élen $0 \leqslant x \leqslant i-1$-re és az e^t_{2y+1} élen $j \leqslant y \leqslant k-1$-re.

Az e_{lt} éleken növeltünk z_{lt}-vel, ami nemnegatív, ezért az (a) feltétel teljesül.

Mivel ugyanannyi élen növeltünk z_{lt}-vel, mint ahányon csökkentettünk, ezért

$$\sum_{e\in E} y_t(e) = \sum_{e\in E} y'_t(e) = c(M_U) - \sum_{i=1}^{t} z_i.$$



6. ábra. ha (ρ_l, ρ_t) második fajta él

Mivel ha egy $e \in M_U \cup \rho_1 \cup \rho_2 \cup \dots \cup \rho_t \setminus \{e \in \rho_l \cup \rho_{l+1} \cup \dots \cup \rho_t : \exists v \in V, e \leqslant_v e_0^l\}$ élre $\psi(e)$-ben valamelyik élen növeltünk z_{lt}-vel, akkor egy másikon csökkentettünk is, ezért az egyenlőtlenségek ugyanakkora többlettel teljesülnek, mit eddig. Ha $e \in \{e \in \rho_l \cup \rho_{l+1} \cup \dots \cup \rho_t : \exists v \in V, e \leqslant_v e_0^l\}$, akkor $y_t'(e)$ nő z_{lt}-vel, vagyis teljesül (b).

Legyen $\alpha := \sum\{z_{lt} \mid l < t,\ e_0^t \leqslant_V e_0^l,\ (\rho_l, \rho_t) \in A\}$. Ekkor $c_t(e_0^t) = c_{t-1}(e_0^t) + \alpha - z(\Delta^+(\rho_t))$, így az e_0^t élre:

$$
\begin{aligned}
& y_t(\psi(e_0^t)) = y_t'(\psi(e_0^t)) - z(\Delta^-(\rho_t)) + \alpha = \\
& = y_t'(e_0^t) + y_{t-1}(\psi(e_{2k-1}^t)) + y_t'(e_{2k-1}^t) - y_{t-1}(e_{2k-1}^t) - z(\Delta^-(\rho_t)) + \alpha = \\
& = -z_t - z(\Delta^-(\rho_t)) + y_{t-1}(\psi(e_{2k-1}^t)) + \sum_{i=1}^{2k-2}(-1)^{i+1}c(e_i^t) + \alpha \leqslant \\
& \leqslant c'(\rho_t) - z(\Delta^+(\rho_t)) + c_{t-1}(e_{2k-1}^t) - c'(\rho_t) - c_{t-1}(e_{2k-1}^t) + c_{t-1}(e_0^t) + \alpha = \\
& = c_{t-1}(e_0^t) - z(\Delta^+(\rho_t)) + \alpha = c_t(e_0^t),
\end{aligned}
$$

vagyis y_t az e_0^t élen teljesíti a (b) feltételt, és mivel $\{e \in \rho_t : \exists v \in V, e <_v e_0^t\} = \emptyset$, ezért minden feltételt ellenőriztünk, tehát az állítást beláttuk. ■

Edmonds és Giles tétele alapján egy leírás TDI-ságából (ha a korlátozó vektor egész,) következik, hogy egész a poliéder, vagyis egyúttal a következőt is beláttuk:

5.19. Következmény: *Az alábbi rendszer a stabil párosítások poliéderét írja le az $\mathbb{R}^{E_{st}}$ térben:*

$$
\begin{aligned}
& x \geqslant 0, \\
& x(\varphi'(e)) \geqslant 1, \quad \textit{ha } e \in E \setminus E_{st}, \\
& x(\varphi'(e)) = 1, \quad \textit{ha } e \in E_{st}.
\end{aligned}
\tag{5.20.}
$$

Bizonyítás: Azt kell belátnunk, hogy a rendszer egész pontjai stabil párosítások incidenciavektorai. Legyen egy $w \in U \cup V$ pontnál a legrosszabb E_{st}-beli él e, ekkor $D(w) \cap E_{st} \subseteq \varphi'(e)$, ezért $x(\varphi'(e)) = 1$ miatt $D(w)$-ben az összeg legfeljebb 1, vagyis egy egész pont egy párosítás incidenciavektora. Másrészt minden $e \in E$-re $x(\varphi'(e)) \geqslant 1$, ezért a párosítás stabil. ■

5.21. Tétel: *A Rothblum által leírt*

$$x \geqslant 0, \tag{5.22.}$$

$$-x(D(w)) \geqslant -1, \qquad \text{ha } w \in U \cup V, \tag{5.23.}$$

$$x(\varphi(e)) \geqslant 1, \qquad \text{ha } e \in E \tag{5.24.}$$

rendszer teljesen duálisan egészértékű.

Bizonyítás: Az 5.13. tételbeli leírás TDI-ságára vezetjük vissza. Egy tetszőleges egész $c \in \mathbb{Z}^E$ súlyfüggvényhez kell keresni egész optimális duális megoldást, vagyis olyan $\pi \in \mathbb{Z}^{U \cup V}$-t és $y \in \mathbb{Z}^E$-t, amire

$$y(e) \geqslant 0, \tag{5.25.}$$

$$\pi(w) \geqslant 0, \tag{5.26.}$$

$$-\pi(u) - \pi(v) + y(\psi(e)) \leqslant c(e), \qquad \text{ha } e = (u,v) \in E, \tag{5.27.}$$

és $-\sum_{w \in U \cup V} \pi(w) + \sum_{e \in E} y(e) = c(M_{opt})$.

Legyen y_0 a c súlyfüggvény E_{st}-re való megszorításához egy egész duális optimális megoldása az 5.13. tételbeli rendszernek és legyen π_0 a nullvektor $U \cup V$-n. Ők tehát teljesítik az (5.25.)-beli egyenlőtlenségek közül az $e \in E \setminus E_{st}$-re vonatkozókat, (5.26.)-et és (5.27.)-et, ha $e \in E_{st}$.

Ha egy duális egész vektorhoz egy M stabil párosítás élein és az U-beli fedett csúcsokon hozzáadunk tetszőleges pozitív egész k-t, akkor olyan egész vektort kapunk, aminek célfüggvényértéke ugyanannyi, az (5.27.)-beli egyenlőtlenségek baloldalai pedig nem nőttek, mert nincs olyan e él, amire $\psi(e)$-ben két olyan él is van, amin növeltünk, mert az blokkolná M-et, ha pedig e olyan él, amire $\psi(e)$-ben növeltünk egy élen, akkor e U-beli végpontja fedett kell legyen, különben szintén blokkolná M-et. Ilyen változtatásokat végrehajtva (y_0, π_0)-on el tudjuk érni, hogy (5.25.) minden élre teljesüljön, a többi egyenlőtlenség se sérüljön. Jelöljük az így kapott vektort (y_1, π_1)-gyel.

Ha $e \in E \setminus E_{st}$, akkor a $-\chi_e$ (vagyis e-n -1, $E \setminus \{e\}$-n 0) célfüggvényre a primál poliéder optimuma 0, ezért ha veszünk egy racionális duális optimális megoldást és megszorozzuk a nevezők legkisebb közös többszörösével, akkor egy egész duális optimális megoldást kapunk, jelöljük ezt (y_e, π_e)-vel. Ha az e élen (5.27.) nem teljesül (y_1, π_1)-re, akkor adjuk hozzá (y_e, π_e) megfelelő többszörösét, akkor már teljesülni fog ez az egyenlőtlenség is, míg a célfüggvényérték nem változik és a többi egyenlőtlenség sem sérül. Ezt minden sértő élre végrehajtva egy egész optimális duális megoldást kapunk. ∎

6. Egy alkalmazás: Galvin tétele

Azt mondjuk, hogy egy gráf listaszínezhető n hosszú listákkal, ha bárhogy is rendelünk a csúcsaihoz n elemű halmazokat (a színek listáit), ki lehet úgy színezni a csúcsokat, hogy szomszédos csúcsok színei különbözők legyenek és minden csúcs színe a listájának eleme. Egy gráf listaszínezési száma a legkisebb olyan n, amilyen hosszú listákkal ki lehet színezni. A híres listaszínezési sejtés azt állítja, hogy minden gráf élgráfjának listaszínezési száma megegyezik a kromatikus számával. Galvin páros gráfok élgráfjaira oldotta meg ezt [11]-ben, a stabil párosítás létezését felhasználva.

6.1. Tétel: (Galvin) *Minden páros gráf élei listaszínezhetők a gráf maximális foka hosszú listákkal.*

Bizonyítás: Legyen a $G = (U, V)$ páros gráfban a maximális fokszám d. Ekkor Kőnig élszínezési tétele alapján ki lehet színezni az éleket d színnel, jelöljük a színeket $1, 2, \dots d$-vel. Vegyük azt a preferenciarendszert, hogy minden U-beli csúcsnál két él közül a kisebb számú legyen a jobb, a V-beli csúcsoknál pedig a nagyobb számú legyen a jobb. Ekkor ha e egy tetszőleges él, és k a száma, akkor e az U-beli végpontjánál sajátmagán kívül legfeljebb $k - 1$ él dominálja, a V-beli csúcsánál pedig legfeljebb $d - k$, így összesen sajátmagaval együtt $k - 1 + d - k + 1 = d$ él dominálja e-t. Ezért a tétel rögtön következik az alábbi lemmából:

6.2. Lemma: *Ha G páros gráf, $G, \mathcal{O}$ tetszőleges preferenciarendszer és minden élhez adott egy színlista, ami legalább annyi elemű, mint ahány él dominálja azt az élt, akkor van jó listaszínezés.*

Bizonyítás: A listákon előforduló színek száma szerinti indukcióval bizonyítunk. Ha ez a szám 1, akkor a feltétel miatt minden élt csak sajátmaga dominál, és a listájában benne van a szín, vagyis pontdiszjunkt élekből áll a gráf, amit ki lehet színezni azzal a színnel.

Tegyük fel, hogy a G gráfban előforduló színek számától kevesebb színre már tudjuk az állítást. Legyen a az egyik szín és legyen G_a azon élek alkotta részgráf, amiknek listáján szerepel az a szín, $\mathcal{O}_a$ pedig legyen az $\mathcal{O}$ megszorítása G_a-ra. Vegyünk $(G_a, \mathcal{O}_a)$-ban egy stabil párosítást, ami a 2.2. tétel miatt létezik. Színezzük a stabil párosítás éleit a-ra és hagyjuk el őket a gráfból, és a többi G_a-beli él listájából vegyük ki a-t. Az így keletkezett preferenciarendszerre és listákra teljesül a feltétel, mert ha egy élnek csökkent a listája, akkor legalább egy őt domináló élt kihagytunk a gráfból. Az előforduló színek száma is csökkent, így az indukció miatt a maradék gráfot ki lehet színezni, ami az a színű élekkel együtt G egy jó listaszínezését adja. ■ ■

7. Stabil párosítások tetszőleges gráfban

A stabil párosítás probléma értelmezhető tetszőleges gráfban is, ugyanúgy, mint páros gráfban. Adott tehát egy $G = (V, E)$ gráf, amiben párhuzamos élek is lehetnek, és minden v csúcsához egy $<_v$ rendezés $D(v)$-n, amik halmazát $\mathcal{O}$-val jelöljük. A $(G, \mathcal{O})$ párt preferenciarendszernek nevezzük.

A 2.1. lemma bizonyításában nem használtuk fel, hogy a gráf páros, így kimondhatjuk az alábbit:

7.1. Lemma: *Tetszőleges gráfban minden stabil párosítás ugyanazt a ponthalmazt fedi.* ■

Viszont a Gale-Shapley algoritmus már nem működik nem páros gráfban, sőt nem is feltétlenül van stabil párosítás, például egy háromszögben, ha a három él „körbeveri" egymást, akkor nincs. De igaz a Gale-Shapley tétel következő megfordítása:

7.2. Tétel: (Abeledo, Isaak) *Egy G gráfban pontosan akkor van bármilyen preferenciarendszerhez stabil párosítás, ha G páros gráf.*

Bizonyítás: A Gale-Shapley tétel miatt csak azt kell belátni, hogy ha G nem páros, akkor van olyan preferenciarendszer, amihez nincs stabil párosítás. Legyen G-ben $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{2k+1}, e_{2k+1}, v_1$ egy páratlan kör, és vegyünk egy olyan preferenciarendszert, amiben a $\leqslant_{v_i}$ rendezésben az e_i él a legkisebb, az e_{i-1} él pedig a második legkisebb (itt az indexek mod $2k+1$ értjük). Bármely M párosításnál e páratlan sok él közül van két egymást követő, mondjuk e_i és e_{i+1}, amik nincsenek M-ben. De akkor az e_i élt nem dominálja M-beli él, vagyis nincs stabil párosítás. ■

7.1. Stabil párosítást kereső algoritmus

Irving adott egy algoritmust [13]-ben, ami eldönti, hogy egy gráfban van-e stabil párosítás, és ha van, akkor talál egyet. Az algoritmus két fázisból áll. Az első fázisa éleket hagy el a gráfból úgy, hogy a stabil párosítások halmaza ne változzon, emellett néhány élt megirányít (oda-vissza éleket is megengedve) úgy, hogy bizonyos tulajdonságú legyen a kapott vegyes gráf. A második fázis e tulajdonságok megtartása mellett úgy redukálja a gráfot, hogy ne változzon, hogy van-e benne stabil párosítás.

Első fázis: Amíg van olyan $x \in V$, amiből nem lép ki irányított él, az x-nél legjobb $\{x, y\}$ élt irányítsuk meg x-ből y-ba és hagyjuk el az y-nál az $\{x, y\}$ élnél rosszabb éleket, a $<_v$ rendezések pedig legyenek az előző megszorításai.

7.3. Állítás: *Az így kapott preferenciarendszerben ugyanaz a stabil párosítások halmaza, mint az eredeti gráfban.*

Bizonyítás: Elég látni, hogy egy lépés alatt ugyanaz marad a stabil párosítások halmaza. Amikor egy $\{x, y\}$ élt megirányítunk, akkor x-nél $\{x, y\}$ a legjobb él, ezért az $\{x, y\}$-t domináló élek mind illeszkedek y-ra. Tehát minden stabil párosítás $\{x, y\}$-t y-nál dominálja, vagyis a kihagyott élek nincsenek benne stabil párosításban. Ugyanemiatt a kisebb gráfban minden stabil párosítás a kihagyott éleket is dominálja, tehát az előző gráfban is stabil párosítás. ■

Az első fázis során nem keletkezhet két olyan irányított él, amiknek ugyanaz a végpontja, mert a végpontnál a nagyobbikat töröltük volna, amikor a kisebbik irányítottá vált. Tehát a fázis végén az irányított élek pontdiszjunk (irányított) köröket és oda-vissza éleket alkotnak, amik minden nem izolált pontot lefednek, és minden pontnál a kimenő él a legjobb és a bemenő él a legrosszabb.

Ha a kapott gráf csak oda-vissza irányított élekből áll, akkor ez az egyetlen stabil párosítás az eredeti gráfban is. Ha pedig van egy nem egy pontú páratlan komponens, akkor nincs stabil párosítás, mert minden párosítás kihagy legalább egy pontot belőle, de az abba bemenő irányított élt csak abban a pontban tudná dominálni, vagyis ez blokkolja a párosítást.

Második fázis: Olyan lépéseket fogunk tenni, hogy megmaradjon az a tulajdonság, hogy minden nem izolált pontba egy él lép be és egy él lép ki belőle és az irányított élek a kezdőpontjuknál a legjobbak, a végpontjuknál pedig a legrosszabbak.

Rotációnak most egy olyan $(y_1, e_1, x_1, f_1, y_2, e_2, x_2, f_2, \ldots y_k, e_k, x_k, f_k)$ körsétát nevezünk, amiben az $e_i = (x_i, y_i)$ él irányított él x_i-ből y_i-be, az f_i él pedig az x_i pontnál a második legjobb él, és az x_i pontok különbözőek (emiatt az y_i pontok is, de az lehet, hogy $x_i = y_j$).

7.4. Állítás: *Ha van olyan csúcs, amire legalább két él illeszkedik, akkor van rotáció.*

Bizonyítás: Induljunk ki egy csúcsból, és lépjünk felváltva a legrosszabb és a második legjobb élen, addig amíg egy rotációt nem kapunk. Nem tudunk elakadni, mert ha egy csúcs foka egy, akkor a rá illeszkedő él oda-vissza irányított, ezért a szomszédja is lesőfokú. ■

A $(y_1, e_1, x_1, f_1, y_2, e_2, x_2, f_2, \ldots y_k, e_k, x_k, f_k)$ rotáció eliminálásán most azt értjük, hogy minden y_i pontnál kihagyjuk az f_{i-1}-nél rosszabb éleket, az f_{i-1} élt pedig megirányítjuk x_{i-1}-ből y_i-be. Sikertelen elimináción azt értjük, amikor ezt nem tudjuk megtenni, vagyis ha egy f_{i-1} élt töröltünk. Ez csak akkor lehet, ha az x_{i-1} pont egyúttal egy y_j pont is, és mivel f_{i-1} x_{i-1}-nél a második legjobb él, ezért f_{i-1}-t az e_{i-1} él miatt töröltük, vagyis $e_{i-1} = f_{j-1}$ és $y_{i-1} = x_{j-1}$. Mivel x_{j-1}-nél az $e_{i-1} = f_{j-1}$ él a legrosszabb és egyúttal a második legjobb, ezért $f_{i-2} = e_{j-1}$ és $x_{i-2} = y_{j-1}$. Így indukcióval azt kapjuk, hogy ha sikertelen az elimináció, akkor a rotáció egy olyan páratlan hosszú irányított körön halad végig kétszer fordított irányban, aminek a csúcsaira nem illeszkedik több él. Ebben az esetben nincs stabil párosítás. Ha az elimináció sikeres, akkor könnyen látható, hogy a fenti tulajdonságok érvényben maradnak a kapott gráfra.

7.5. Állítás: *Egy rotáció sikeres eliminálásával kapott preferenciarendszerben pontosan akkor van stabil párosítás, ha az eredetiben.*

Bizonyítás: Ha a redukált gráfban van stabil párosítás, akkor az az eredetiben is stabil párosítás, mert a redukált gráfban az f_{i-1} élt csak az y_i csúcsnál lehet dominálni, ezért az őt domináló él dominálja az y_i-nél kihagyott éleket is.

Ha az eredeti gráfban van stabil párosítás és nem használ törölt éleket, akkor ez stabil párosítás a redukált gráfban is. Ha az M stabil párosítás tartalmaz egy élt, amit az y_i pontnál töröltünk, akkor az f_{i-1} élt csak az e_{i-1} él tudja dominálni, vagyis $e_{i-1} \in M$. Emiatt az f_{i-2} élt csak az e_{i-2} él tudja dominálni, vagyis $e_{i-2} \in M$, és így indukcióval $e_j \in M$ minden $j = 1, 2, \dots k$-ra. Így a redukált gáfban az $M \setminus \{e_i : i = 1, \dots k\} \cup \{f_i : i = 1, \dots k\}$ egy stabil párosítás. ■

A fentiek alapján ha sorban keresünk és eliminálunk rotációkat, akkor előbb-utóbb vagy csak diszjunkt élek maradnak, amik egy stabil párosítást alkotnak az eredeti gráfban is, vagy egy sikertelen eliminációhoz érünk, amikor nincs stabil párosítás az eredeti gráfban sem.

7.6. Megjegyzés: Az itteni és a páros preferenciarendszereknél értelmezett rotációknak nem véletlenül ugyanaz az elnevezése. Egy páros gráfnál az első fázis a Gale-Shapley algoritmusra hasonlít, a végén az irányított élek halmaza a fiúoptimális és a lányoptimális stabil párosítás uniója lesz. A második pedig a rotációk eliminálására hasonlít, a vegyes gráfban a rotációk közt mindig ott lesznek a páros gráfoknál értelmezett rotációk, amik eliminálása ugyanazt jelenti, mint korábban. Emellett viszont lesznek más rotációk is, méghozzá amiket úgy definiálhatunk, hogy a korábbi definícióban az U-t és V-t felcseréljük (ez alapján páros preferenciarendszereknél megkülönböztethetnénk fiúrotációkat és lányrotációkat). Akárhogy is eliminálunk páros gráfoknál, az irányított élek mindig két stabil párosítás unióját alkotják, az egyiket az U-ból V-be irányított élek, a másikat a V-ből U-ba irányított élek.

7.2. A minimális súlyú stabil párosítás NP-teljes

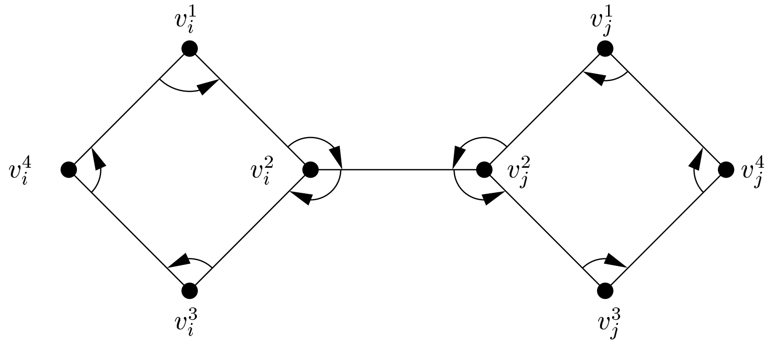
Feder [6]-ben bizonyítás nélkül kimondja, hogy a 2-SAT probléma polinomiálisan visszavezethető a stabil párosítás problémára, sőt úgy, hogy a 2-SAT-ot kielégítő, legtöbb 0-t tartalmazó megoldás keresése a minimális súlyú stabil párosításra vezet vissza. A legtöbb 0-t tartalmazó megoldás keresése pedig NP-teljes, mert erre visszavezethető a maximális stabil halmaz keresése. Tehát ebből következik az alábbi.

7.7. Tétel: *A minimális súlyú stabil párosítás keresése NP-teljes.*

Bizonyítás: Adott egy 2-SAT probléma, olyan preferenciarendszert fogunk megadni, amiben pontosan akkor van kicsi súlyú stabil párosítás valamilyen élsúlyozásra, ha a 2-SAT-nak van megoldása és ekkor a minimális súlyú stabil párosítás a legtöbb 0-t tartalmazó megoldásnak felel meg.

Legyenek a 2-SAT változói $x_1, x_2, \dots x_n$. Minden változónak feleltessünk meg egy négy pontú kört a készülő gráfban, az x_i változónak a $(v_i^1, e_i^1, v_i^2, e_i^2, v_i^3, e_i^3, v_i^4, e_i^4, v_i^1)$ kört. Legyen

$e_i^1 <_{v_i^2} e_i^2 <_{v_i^3} e_i^3 <_{v_i^4} e_i^4 <_{v_i^1} e_i^1$. Az x_i változó 1 értéke annak fog megfelelni, hogy a stabil párosításban benne vannak az e_i^1 és e_i^3 élek, az 0 pedig annak, hogy az e_i^2 és e_i^4 élek vannak benne. Ha $x_i \vee x_j$ egy klóz, akkor húzzuk be a gráfba a (v_i^2, v_j^2) élt, és ez $<_{v_i}$ szerint legyen az e_i^1 és e_i^2 élek között, $<_{v_j}$ szerint pedig az e_j^1 és e_j^2 élek között. Ha pedig egy klózban x_i negáltja van, akkor az új él végpontja v_i^1 legyen, és $<_{v_i^1}$ szerint e_i^1 és e_i^4 közt legyen. Egy csúcsnál különböző klózokhoz tartozó élek mindegy, milyen sorrendben vannak a csúcs rendezésében. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy ha egy stabil párosítás csak a változóknak megfeleltetett éleket tartalmaz, akkor ez megad egy megoldást a 2-SAT-ra, és fordítva. Most vegyük azt az élsúlyozást, hogy az e_i^1 éleknek 1 legyen a súlya, a klózokhoz rendelt éleknek $n+1$, a többi élnek pedig 0. Ekkor pontosan akkor van legfeljebb n súlyú stabil párosítás, ha van megoldása a 2-SAT-nak és ekkor a minimális súlyú stabil párosításnak a legtöbb 0-t tartalmazó megoldás felel meg.



7. ábra. az x_i és x_j változókhoz és az $x_i \vee x_j$ klózhoz konstruált élek

■

8. Egyéb általánosítások

Kedvcsinálónak megemlítjük néhány általánosítását a stabil párosításoknak.

8.1. Stabil b-párosítások

Mind páros, mind tetszőleges prefernciarendszerben értelmezhetjük a stabil párosítások egy általánosítását, ahol egy v pontnak nem csak egy párja lehet, hanem legfeljebb egy adott $b(v)$ nemnegatív egész kvóta. Tehát egy $(G, \mathcal{O})$ preferenciarendszerben egy M élhalmazt akkor nevezünk stabil b-párosításnak, ha egyrészt b-párosítás, vagyis minden v csúcsra legfeljebb $b(v)$ darab M-beli él illeszkedik, másrészt minden $e \in E \setminus M$ élnek van egy olyan v végpontja, amire illeszkedik $b(v)$ M-beli él és ezek mind jobbak v-nél mint e.

Páros preferenciarendszer stabil b-párosításainak tulajdonságairól olvashatunk Baïou és Balinski [1] cikkében, a poliéderének egy leírásáról pedig Fleiner Tamás [7] cikkében. Tetszőleges preferenciarendszerben Irving algoritmusának általánosítását találhatjuk Cechlárová és Fleiner Tamás [3]-ben.

8.2. Matroid-kernelek

A matroid-kernel foglmát Fleiner Tamás vezette be [8]-ben, ez a páros preferenciarendszerben levő stabil párosításoknak, sőt stabil b-párosításoknak is általánosítása.

Adott két matroid, $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ egy közös S alaphalmazon, és két súlyfüggvény, $c_1, c_2 : S \to \mathbb{R}$. S egy K részhalmazát $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernelnek nevezzük, ha K közös független halmaza $\mathcal{M}_1$-nek és $\mathcal{M}_2$-nek és minden $x \in S \setminus K$ elemhez van olyan $i \in \{1, 2\}$ és egy $C_x \subseteq K$, hogy $x \cup C_x$ egy kör M_i-ben és $c_i(y) \leqslant c_i(x)$ minden $y \in C_x$-re.

8.1. Tétel: (Fleiner) *Minden $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ matroidpárhoz és $c_1, c_2 : S \to \mathbb{R}$ súlyfüggvényhez van $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernel.*

Ha adott egy $(G = (U, V; E), \mathcal{O})$ páros preferenciarendszer és egy $b : U \cup V \to \mathbb{N}$ felső korlát a pontokon, akkor ha $\mathcal{M}_1$ az a partíciós matroid E-n, hogy az egy U-beli pontra illeszkedő élek vannak egy osztályban és b adja a felső korlátot, $\mathcal{M}_2$ pedig hasonlóan V-re, $c_1(e)$ illetve $c_2(e)$ pedig az e helyezése az U illetve V-beli végpontjánál, akkor az $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernelek pont a stabil b-párosításoknak felelnek meg.

8.3. Gráf-kernelek

A tetszőleges gráfban értelmezett stabil párosításnak is általánosítása a következő fogalom. Egy irányított gráfban egy ponthalmazt kernelnek nevezünk, ha egyrészt stabil, másrészt minden rajta kívül levő pontból vezet él a halmazba. Egy adott preferenciarendszerhez ha a gráf élgráfját megirányítjuk úgy, hogy a rosszabbik élből mutasson a jobbikba él, akkor az irányított gráf kerneljei pont a preferenciarendszer stabil párosításai lesznek. Így persze kernel nem feltétlenül létezik.

Boros és Gurvich [2] bizonyítottak egy tételt kernel létezéséről perfekt gráfok bizonyos irányításaiban, játékelméleti módszereket használva (Schrijver Combinatorial optimization című könyvében van egy rövidebb bizonyítás). Egy $D = (V, A)$ irányított gráfot egy $G = (V, E)$ egyszerű irányítatlan gráf szuperirányításának nevezünk, ha D minden éle G egy élének megirányítása (D-ben lehetnek oda-vissza élek is). Egy irányított gráfot nevezzünk normálisnak, ha minden feszített klikkjében van kernel (vagyis egy pont, amibe a klikk többi pontjából vezet él). Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfot kernel-megoldhatónak nevezünk, ha minden normális szuperirányításában van kernel.

8.2. Tétel: (Boros, Gurvich) *Minden perfekt gráf kernel-megoldható.*

Ennek a tételnek a megfordítása következik az erős perfekt gráf tételből, amit Berge sejtett és Chudnovsky, Robertson, Seymour és Thomas bizonyítottak be 2002-ben [4].

8.3. Tétel: (Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas) *Egy gráf pontosan akkor perfekt, ha nincs benne feszített részgráfként C_{2k+1} és $\overline{C_{2k+1}}$ $k \geqslant 2$-re.*

A C_{2k+1} gráf nem kernel-megoldható, mert ha körbe irányítjuk az éleket, az egy normális irányítás és nincs benne kernel. A komplementere, $\overline{C_{2k+1}}$ sem kernel-megoldható, mert ha egy körre rajzoljuk a pontokat úgy, hogy a körön szomszédosak közt ne fusson él, és azt az irányítást vesszük, hogy a körön másodszomszédos pontok közt menő éleket órajárás szerint irányítjuk, a többi élt pedig mindkét irányba, az normális irányítás, amiben nincs kernel. Emellett, ha egy gráf tartalmaz feszített részgráfként egy olyan gráfot, ami nem kernel-megoldható, akkor ő maga sem az, mert a részgráf egy normális, de kernel nélküli irányítását kiegészítve úgy, hogy a részgráfból kimenő éleket kifele irányítjuk, a többi élt pedig mindkét irányba, egy normális irányítást kapunk, amiben nincs kernel, mert ha lenne, akkor a részgráfba eső része abban kernel lenne. Tehát a fenti két tétel következménye az alábbi.

8.4. Tétel: *Egy gráf pontosan akkor kernel-megoldható, ha perfekt.*

Hivatkozások

[1] M. Baïou, M. Balinski: *Many-to-many matching: stable polyandrous polygamy (or polygamous polyandry).* Discrete Applied Mathematics, 101 (2000) 1-12

[2] E. Boros, V. Gurvich: *Perfect graphs are kernel solvable.* Discrete Math., 159(1-3): 35-55, 1996.

[3] K. Cechlárová, T. Fleiner: *On a generalization of the stable roommates problem.* EGRES Technical Report No. 2003-03.

[4] M. Chudnovsky, N. Robertson, P.D. Seymour, R. Thomas: *The strong perfect graph theorem.* Kézirat.

[5] V.M.F. Dias, G.D. da Fonesca, C.M.H. de Figeiredo, J.L. Szwarcfiter: *The stable marriage problem with restricted pairs.* Theoretical Computer Science, 306 (2003) 391-405.

[6] T. Feder: *A new fixed point approach for stable networks and stable marriages.* J. Comput. System Sci., 45(2): 233-284, 1992.

[7] T. Fleiner: *On the stable b-matching polytope.* EGRES Technical Report No. 2002-3.

[8] T. Fleiner: *A fixed-point approach to stable matchings and some applications.* Math. Oper. Res. 28(1): 103-126, 2003.

[9] T. Fleiner: *A matroid generalization of the stable matching polytope.* In Proc. IPCO VIII (B. Gerards, K. Aardal, eds.), Springer-Verlag Berlin 2001, 105-114.

[10] D. Gale, L.S. Shapley: *College admissions and stability of marriage.* Amer. Math. Monthly, 69(1): 9-15, 1962.

[11] F. Galvin: *The list chromatic index of a bipartite multigraph.* J. Combin. Theory Ser. B, 63(1): 153-158, 1995.

[12] D. Gusfield, R.W. Irving: *The stable marriage problem: structure and algorithms.* MIT Press, Cambridge, MA, 1989.

[13] R.W. Irving: *An efficient algorithm for the „stable roommates" problem.* J. Algorithms, 6(4): 577-595, 1985.

[14] R.W. Irving, P. Leather, D. Gusfield: *An efficient algorithm for the „optimal" stable marriage.* Journal of the A.C.M., 34: 532-543, 1987.

[15] U.G. Rothblum: *Characterization of stable matchings as extreme points of a polytope.* Math. Programming, 54(1, Ser. A): 57-67, 1992.

[16] J.H. Vande Vate: *Linear programming brings marital bliss.* Oper. Res. Lett., 8(3): 147-153, 1989.