Mit nyerhetünk, ha lottózva forszolunk?
Lottery Preparation

Patkós Balázs

Témavezető: Komjáth Péter egyetemi tanár

Bevezetés

Dolgozatomban Joel David Hamkins [5] *The Lottery Preparation* című cikkének felépítését (és tartalmát) fogom követni, azaz (egy bevezető fejezet után, melyben felsorolom a nagy számosságokkal és forszolással kapcsolatos alapvető definíciókat és főbb tételeket) az első két fejezetben a Woodin által kitalált "fast function" forszolás tulajdonságait mutatom be: a tételek többségét csak kimondva, a bizonyítottakat viszont alapos részletességgel tárgyalva. A második két fejezetben pedig Hamkins "találmányát", a "Lottery preparation"-t ismertetem, mely egy módszer arra, hogy hogyan lehet nagy számosságokat bizonyos tulajdonságokkal bíró generikus bővítések által elpusztíthatatlanná (indestructible) tenni, azaz biztosítani, hogy pl. egy mérhető számosság mérhető maradjon bármilyen olyan kényszerképzettel történő forszolás után, ami rendelkezik egy majdan pontosítandó tulajdonsággal.

De miért is érdekes mindez? A forszolás egy olyan technika, mellyel ZFC (és ha akarjuk ennél erősebb axiómarendszer) egy V modelljéből nyerhetünk V-nek egy olyan ZFC bővítését, amibe a forszolás során "azt teszünk bele (olyan objektumot), amit csak akarunk". Igy Gödel tétele alapján (egy formulahalmaz akkor és csak akkor konzisztens, ha van halmazmodellje) relatív konzisztencia bizonyítást nyerhetünk újabb és újabb axiómarendszerekre. A problémát persze mindig az okozza, hogy egy új (általunk elérni kívánt) objektum "beforszolása" milyen (általunk nem feltétlenül kívánt) változásokat hoz még az alapmodellhez képest a generikus bővítésben.

Most már csak az a kérdés, hogy kerülnek ide a nagy számosságok és azok megőrzése egy forszolás során? Kiderült ugyanis, hogy jónéhány "normális" állítás konzisztenciája következik bizonyos nagy számosságok létezésének konzisztenciájából, sőt akár ekvikonzisztenciát is sikerült bizonyítani. Ezekután talán valamelyest érthető, miért jó dolog az "elpusztíthatatlanság": ez garantálja nekünk, hogy egy "beforszolt" valami mellett még egy nagy számosságunk is legyen, esetleg így lehetővé téve egy újabb állítás (relatív) konzisztenciájának bizonyítását.

Ennyi bevezető után következzenek azok az alapvető definíciók és tételek, melyekre szükségünk lesz a későbbiekben, s melyek bizonyításai megtalálhatóak az alábbi helyek legalább egyikén: Kanamori [8], Jech [7], Kunen [10] könyvei, Baumgartner [1] cikke, illetve a forszolással kapcsolatos legalapvetőbb dolgok: Komjáth Péter [9] illetve Csirmaz László [2] honlapjáról letölthető jegyzetek.

1 Amit használni fogunk

a, Nagy számosságok

Mitől lesz egy számosság nagy? Első megközelítésben attól, hogy nem lehet nála kevesebb, nála kisebb halmazból összetenni. Ez a reguláris számosság definíciója, s tudjuk, hogy minden rákövetkező számosság ilyen. Van-e reguláris limeszszámosság? Ezeket nevezzük **gyengén elérhetetlen** számosságoknak.

Másrészt ha van kiválasztási axióma, akkor a végtelen számosságok az $\aleph$-ek. Az első $\aleph_0$, aztán $\aleph_1$, stb. Van-e olyan végtelen számosság, ami alatt ugyanannyi számosság van, mint ő maga, azaz olyan κ, amire $\kappa = \aleph_\kappa$? Ilyet könnyű gyártani: tekintsük ugyanis a $\kappa_0 = \aleph_0$, $\kappa_{n+1} = \aleph_{\kappa_n}$ sorozatot. Ennek limesze nyilván teljesíteni fogja az egyenletet. Viszont nem reguláris, hiszen kofinalitása ω, ő maga azonban jóval nagyobb. Nem nehéz látni, hogy azon reguláris számosságok, melyek teljesítik a $\kappa = \aleph_\kappa$ feltételt, pontosan a gyengén elérhetetlenek.

Ha a hatványhalmaz axiómára gondolunk, akkor természetesnek tűnik, a rákövetkező operációt (egy κ számosság akkor limesz, ha $\lambda < \kappa \Rightarrow \lambda^+ < \kappa$) kicserélni a hatványozásra: κ **erősen elérhetetlen** (EE), ha reguláris és $\lambda < \kappa$ esetén $2^\lambda < \kappa$. A regularitás nélkül ez utóbbit hívjuk **erős limesz** tulajdonságnak. Ilyen számosságokat is egyszerűen gyárthatunk: a $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$, $\beth_\beta = \sup\{\beth_\alpha | \alpha < \beta\}$ sorozatból pontosan a limeszindexűek lesznek erős limeszek.

Hogy nem véletlen volt a hatványhalmaz axióma említése, azt mutatja a következő

1.1 Tétel Ha κ EE, akkor $(V_\kappa, \in)$ ZFC modell

1.megjegyzés: a bizonyításban κ regularitását a pótlási axióma, az erős limesz tulajdonságot pedig a hatványhalmaz axióma belátásához használjuk.

2.megjegyzés: Gödel egy másik tétele (semmilyen "épeszű" axiómarendszerből nem vezethető le a saját konzisztenciája) miatt a tételből adódik, hogy ZFC-ből nem bizonyítható EE számossság létezése, így bármilyen nagy számosság hipotézis kifejezetten erősebb ZFC-nél, mivel az általánosított kontinuumhipotézis esetén (ami Gödel konstruálható halmazokból álló L modelljében fennáll) a gyenge és erős elérhetetlenség egybeesik. Ha ráadásul a legkisebb κ EE számosságra tekintjük V_κ-t, akkor az olyan ZFC modell lesz, melyben nincs EE számosság.

A nagy számosságok egyik megközelítése az volt, hogy legyen a számosság alatt annyi másik, mint amekkora maga a számosság. Ezt a gondolatmenetet követve könnyen továbbléphetünk a nagy számosságok hierarchiájában. Legyenek a még nagyobbak azok, akik alatt sok olyan van, akik alatt annyi van, mint ők maguk, aztán náluk is nagyobbak, akik alatt sok olyan van, hogy alattuk sok olyan van, akik alatt annyi számosság van, mint ők maguk, és így tovább. Precízen így szól a

Definíció: Egy $\kappa > \omega$ számosság $\beta + 1$**-Mahlo**,ha reguláris és a $\{\alpha < \kappa : \alpha\ \beta$ -Mahlo $\}$ halmaz stacionárius (azaz metsz minden kofinális zártat) κ-ban. β limesz esetben κ β-Mahlo, ha minden $\alpha < \beta$-ra α-Mahlo, és 0-Mahlo, ha erősen elérhetetlen.

Mielőtt újabb nagy számosságokat definiálnánk, két dologra hívnám fel a figyelmet: egyrészt (bár ez a definíciókból nem fog azonnal látszódni) az új tulajdonságok is teljesíteni fogják azt a feltételt, hogy az addigiakból "sok van alattuk". Másrészt innentől kezdve minden nagy számossági feltevésnek legalább két ekvivalens alakja lesz: egy kombinatorikai (valamilyen partíció reláció fennállása, vagy egy mérték/ultrafilter létezése) és egy "elemi beágyazásos" (valamilyen tulajdonságokkal bíró elemi beágyazás létezése lesz a feltétel). Ennek a kettősségnek az lesz a jelentősége, hogy amikor ezen nagy számosságok megőrzéséről, illetve elpusztíthatatlanságáról lesz szó, akkor mindig a nekünk éppen megfelelőt alkalmazhatjuk, sőt, a leggyakoribb az lesz, amikor egy bizonyításon belül mindkét definíciót használni fogjuk.

Ezekután a következő nagy számosság definíciónk a **gyengén kompaktság**: κ ilyen tulajdonságú, ha $\kappa \to (\kappa)^2_2$, azaz ha κ párjait bárhogyan is szinezzük két színnel, akkor van olyan κ számosságú részhalmaz, amelyből bármely párt véve a színük ugyanaz.

A gyengén kompaktságnak több ekvivalens definíciója van, ezek közül megemlítem a (talán) leggyakrabban használt kombinatorikait és az elemi beágyazással történőt :

- κ EE, és minden olyan κ magas fa (egy részben rendezett halmaz fa, ha minden elemére a nála kisebbek jólrendezett halmazt alkotnak), amelynek minden szintjén κ-nál kevesebb csúcs van, tartalmaz κ-ágat (κ nagyságú teljesen rendezett részhalmazt). Ez utóbbi tulajdonságot fa-tulajdonságnak is nevezik.

- ha N egy κ nagyságú tranzitív elemi része az $\{x : |TC(x)| < \kappa^+\}$ halmaznak (TC(x) a tranzitív lezárt, azaz $\{x\} \cup \bigcup x \cup \bigcup\bigcup x \cup ...)$, akkor van olyan $j : N \to M$ elemi beágyazás egy M tranzitív halmazba, ahol κ a legkisebb olyan rendszám, amire $j(\alpha) > \alpha$ (ilyen rendszám mindig van, ha j nem az identikus beágyazás, ezt hívjuk a j kritikus pontjának, jelben crit(j)).

Definíció: κ mérhető, ha van $\mu : P(\kappa) \to \{0;1\}$ mérték, amelyre
-$\mu(\{x\}) = 0; x \in \kappa$
-$\mu(\kappa) = 1$
-$\mu < \kappa$-additív. (Vagy másképpen van $< \kappa$-teljes nem főfilter ultrafilter κ-n)

megjegyzés: tekintsük V μ szerinti ultrahatványát, azaz az $f : \kappa \to V$ függvényeket lefaktorizálva azzal a relációval, hogy $f \sim g \leftrightarrow \mu(\{\alpha : f(\alpha) = g(\alpha)\}) = 1$ és bevezetve az $fEg \leftrightarrow \mu(\{\alpha : f(\alpha) \in g(\alpha)\}) = 1$ relációt. Ez (felhasználva a Los-lemmát) ZFC modell lesz, amire (gyors számítás után adódik, hogy) alkalmazható a Mostowski suvasztási lemma. Legyen a suvasztott modell $(M, \in)$. Jelöljük $[c_x]$-szel a $c_x(\alpha) = x, \alpha < \kappa$ függvény suvasztottját. Ekkor a $j : x \mapsto [c_x]$ egy $V \to M$ elemi beágyazás (megint a Los-lemma miatt). Ennél a beágyazásnál $\alpha < \kappa$-ra $j(\alpha) = [c_\alpha] = \alpha$, mivel $\{[f] : [f]E[c_\alpha]\} = \{[c_\beta] : \beta < \alpha\}$, hiszen $\{[f] : f(\gamma) \in c_\alpha(\gamma) = \alpha$ 1-mértékű γ -ra$\}$ $\mu < \kappa$-zártsága és $\alpha < \kappa$ miatt itt muszáj, hogy $f(\gamma)$ azonos $\beta < \alpha$ legyen egy 1-mértékű halmazon. Másrészt $[c_\alpha] \in [id_\kappa] \in [c_\kappa]$, hiszen $\alpha < \beta < \kappa$ esetén $\alpha = c_\alpha(\beta) < \beta = id(\beta) < \kappa = c_\kappa(\beta)$, tehát $\kappa =$crit(j).

Mellesleg tudjuk, hogy $(|j(\kappa)| \leq 2^\kappa)^V$, mivel $[c_\kappa]$ elemei olyan függvények osztályainak suvasztottjai, melyek minden helyen κ egy elemét veszik fel értékként, ilyenből pedig $\kappa^\kappa = 2^\kappa$ van. Ezekután megváltoztathatjuk az ultrafilterünket. Legyen $U = \{X \subset \kappa : \kappa \in j(X)\}$. Erre az U-ra $\kappa \in U$, hiszen $\kappa < j(\kappa)$. Ha $\alpha < \kappa$, akkor $j(\alpha) = \alpha$, így az elemiség miatt $j(\{\alpha\}) = \{\alpha\}$, amiben nincs benne κ. X és $\kappa \setminus X$ közül megint csak az elemiség miatt van U-ban pontosan az egyik. A $< \kappa$-teljesség is teljesül, mert $\gamma < \kappa$ esetén $j(\langle x_\alpha : \alpha < \gamma\rangle) = \langle j(x_\alpha) : \alpha < \gamma\rangle$ hiszen $j(\gamma) = \gamma$

azaz egy γ hosszú sorozat képe egy $j(\gamma) = \gamma$ hosszú sorozat az elemiség miatt. Igy $\kappa \in \bigcap j(X_\alpha) = j(\bigcap X_\alpha)$. Sőt, egy plusz tulajdonság is teljesül, az ún. **normalitás**, azaz ha $X \in U$, $f : X \to \kappa$ regresszív ($f(\alpha) < \alpha$ minden $0 \neq \alpha \in X$-re), akkor van $Y \in U$, amin f konstans. Ez azért teljesül most, mert az elemiség miatt egy ilyen f függvényre $j(f) : j(X) \to j(\kappa)$ is regresszív, s mivel $\kappa \in j(X)$ (hiszen X ettől U-beli), így tekinthetjük $\alpha = j(f)(\kappa)$-t. Erre persze $\kappa \in j(f)^{-1}(\alpha)$, amely halmaz az elemiség miatt $j(f^{-1}(\alpha))$, tehát U definíciója alapján $f^{-1}(\alpha)$ U-beli. Tehát azt kaptuk, hogy egyrészt a mérhetőség definíciójában az ultrafilterről feltehető, hogy normális, másrészt κ mérhetősége ekvivalens egy $j : V \to M$ elemi beágyazás létezésével, ahol M tranzitív ZFC osztály, és $\kappa = \text{crit}(j)$.

Amit nem számoltunk ki, de igaz, hogy $M^\kappa \subset M$, azaz M zárt a κ hosszú sorozatokra, sőt, ha egy normális ultrafilter ultrahatványáról van szó, akkor M-et egyszerűen meg tudjuk adni az $M = \{j(f)(\kappa) : f : \kappa \to V\}$ képlettel, rádásul M-nek ez a megadása jellemzi is az ultrahatvány elemi beágyazásokat.

Ezen felül érdemes megemlíteni azt az **1.2 Tételt**, mely szerint:

Ha $j : V \to M$ elemi beágyazás, U az imént definiált $\{X \subset \kappa : \kappa \in j(X)\}$ ultrafilter, i pedig a V U szerinti ultrahatványának N suvasztottjába való beágyazás, akkor van olyan $k : N \to M$ elemi beágyazás, amely "kommutatívvá teszi a három függvény diagrammját".

Bizonyítás: Tudjuk, hogy N elemei $[f]$ alakúak, ahol $[f]$ egy $f : \kappa \to V$ függvény ultrahatványbeli osztályának suvasztottja. Definiáljuk a k leképezést a $k([f]) = j(f)(\kappa)$ képlettel.

Először megmutatjuk, hogy ez nem függ az osztály reprezentánsától: ez azért teljesül, mert

$$[f] = [g] \leftrightarrow X = \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U \leftrightarrow \kappa \in j(X) \leftrightarrow M \models j(f)(\kappa) = j(g)(\kappa).$$

Itt az első ekvivalencia az ultrahatványbeli osztályok definícióján, a második U definícióján, a harmadik pedig j elemiségén és X definícióján múlik.

Az elemiség igazolása:

$$N \models \phi([f_1], ..., [f_n]) \leftrightarrow X = \{\alpha < \kappa : V \models \phi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \in U \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \kappa \in j(X) \leftrightarrow M \models \phi(j(f_1)(\kappa), ..., j(f_n)(\kappa)).$$

Most az első ekvivalencia a Los-lemmán, a második U definícióján, a harmadik pedig X definícióján és j elemiségén múlik.

Maradt még a "kommutativitás": ehhez ($[c_x]$-szel jelölve a konstans x, azaz a $c_x(\alpha) = x$ minden $\alpha < \kappa$ esetén, függvény osztályát, tehát amiket beágyazunk)

$$k([c_x]) = j(c_x)(\kappa) = c_{j(x)}(\kappa) = j(x).$$

Most az első egyenlőség k definíciója, a második j elemisége (a mindenütt x-et felvevő függvény képe a mindenütt $j(x)$-et felvevő függvény), a harmadik pedig $c_{j(x)}$ definíciója miatt áll fenn. Ezzel a bizonyítás kész.

Végezetül jegyezzük meg, hogy egy mérhető számosság alatt nagyon sok EE, α-Mahlo számosság van, pontosabban, ha U normális ultrafilter κ-n, akkor a κ-nál kisebb EE-k (Mahlo-k) halmaza U-beli. Ráadásul κ reguláris is (ha nem volna az, a $<\kappa$-teljesség miatt volna egyelemű eleme U-nak), így κ EE (Mahlo).

Jelöljük $[\lambda]^{<\kappa}$-val az $\{X \subset \lambda : |X| < \kappa\}$ halmazt. Egy $U \subset P([\lambda]^{<\kappa})$ ultrafilter **finom**, ha $\alpha < \lambda$ esetén $\{P \subset \lambda : \alpha \in P, |P| < \kappa\} \in U$. Egy ultrafilter **normális** ha $X \in U$ esetén minden olyan f függvényre, ami X-en van értelmezve és $f(P) \in P$, ha $\emptyset \neq P \in X$, van $\gamma < \lambda : \{P \in X : f(P) = \gamma\} \in U$.

Definíció: κ λ-szuperkompakt, ha van $P([\lambda]^{<\kappa})$-n finom, normális, κ-teljes ultrafilter. Ha az ultrafilter nem normális, de a többi tulajdonsággal rendelkezik, akkor κ λ erősen kompakt. κ szuperkompakt, ha minden $\lambda > \kappa$-ra λ-szuperkompakt, és erősen kompakt, ha minden $\lambda > \kappa$-ra λ erősen kompakt.

1.megjegyzés: a mérhetőségnél "ingyen" megkaptuk, hogy, ha van ultrafilter, akkor van normális is, itt most nem ilyen egyszerű a helyzet, mert Menas észrevételei szerint egyrészt ha κ mérhető és erősen kompaktak limesze, akkor erősen kompakt, másrészt az ilyenek közül a legkisebb nem szuperkompakt.

2.megjegyzés: most is lehet elemi beágyazós definíciót adni: κ λ-szuperkompakt, ha van $j : V \to M$ elemi, hogy $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$ és ${}^{\lambda}M \subset M$. Ultrafilterből az ultrahatvánnyal lehet megfelelő tulajdonságú beágyazást csinálni, a beágyazásból pedig az $U = \{X : j''\lambda = \{j(\alpha) : \alpha \in \lambda\} \in j(X)\}$ ultrafilter definiálható.

Definíció: κ γ-erős, ha van $j : V \to M$ elemi, hogy $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \gamma$ és $V_{\kappa+\gamma} \subset M$. κ erős, ha minden γ-ra γ-erős.

Definíció: κ óriási, ha van j elemi, hogy ${}^{j(\kappa)}M \subset M$ és κ a kritikus pont.

Ezzel ekvivalens, hogy van $\lambda > \kappa$, amire $[\lambda]^{\kappa} = \{X \subset \lambda : tp(X) = \kappa\}$ jelöléssel van normális, finom κ-teljes ultrafilter $P([\lambda]^{\kappa})$-n.

Megjegyzés: óriási számosság létezéséből már következik szuperkompakt számosság létezésének konzisztenciája, de ha van szuperkompakt számosság és óriási számosság is egy modellben, akkor az első óriási kisebb, mint az első szuperkompakt.

Zárjuk a fejezet ezen részét két "negatív" eredménnyel:

1.3 Tétel (Kunen) Nincs az identikuson kívűl más $V \to V$ elemi beágyazás.

1.4 Tétel Ha $V = L$, akkor nincs mérhető számosság.

b, Forszolás

Mint azt a bevezetésben említettem a forszolás relatív konzisztencia bizonyításokra alkalmas módszer. Ez annyit jelent, hogy Gödel tétele értelmében egy elmélet pontosan akkor konzisztens, ha van halmazmodellje, tehát ha adott egy modell, s abból kiindulva a forszolás gyárt egy másikat, amiben igaz az általunk kívánt állítás, akkor azt kaptuk, hogy ha az első modell elmélete konzisztens, akkor a mi állításunkkal is az. Gödel tétele és Cohen forszolási módszerének megszületése között azonban eltelt

30 év (tehát a tételnek nyilván voltak már alkalmazásai), mi lehet akkor a forszolás nagy újítása? Cohen előtt ugyanis csak "néhány" modell volt ismeretes (ezek is jórészt Gödelnek köszönhetően). A konstruálható halmazok L modellje, vagy a valamilyen objektumok (rendszámok, valós számok, stb.) segítségével definiálható halmazoké (és még néhány). Igy a modellmódszeres (relatív) konzisztencia bizonyítások ezek tanulmányozására szorítkozhattak. A forszolással azonban új perspektívák nyíltak meg: egy modellből kiindulva modellek özönét lehet gyártani, s ami még fontosabb, alább részletezendő módon befolyásolhatjuk azt, hogy mi legyen igaz az új modellben, vagy hogy mi ne. Tehát nem "találomra" készítünk új modelleket, és reménykedünk, hogy ott úgy viselkednek a dolgok, ahogyan azt mi szeretnénk, hanem úgy készítjük a modellt, hogy abban egyszerűen tudjuk igazolni az éppen szükséges állítás igazságát. Nézzük ezekután precízebben a módszert.

A forszolás alapszituációjában ZFC egy megszámlálható tranzitív modelljét tekintjük. Ebből (feltéve valamilyen halmazmodell létezését) a megszámlálhatóságot a leszálló Löwenheim-Skolem tétel adja, a tranzitivitással azonban baj van. Halmazmodell létezéséből nem feltétlen következik tranzitív halmazmodell létezése. Ennek kiküszöbölésére alkalmas a **tükrözési elv** és az a "megfigyelés", hogy egy levezetésben csak véges sok axiómát használunk fel, így elég ezek teljesülését megkövetelnünk. E gondolatmenetet részletesebben Komjáth Péter jegyzetéből (is) lehet megismerni.

Forszoláskor tehát egy ilyen V megszámlálható tranzitív modellt tekintünk alapmodellnek, amiről a Mostowski suvasztási lemma miatt feltehető, hogy rajta a reláció a valódi tartalmazás. V-ben egy P parciálisan rendezett halmaz **kényszerképzet**, ha van legnagyobb eleme, de nincs minimális eleme. (Nem követeljük meg az $x \leq y \leq x \Rightarrow x = y$ tulajdonságot, mert ez az iterált forszolásnál jól fog jönni, persze mindig ilyenre gondolunk, és igaziból lefaktorizálhatnánk az e szerinti ekvivalencia relációval.) P-ben p és q kompatibilis, ha van közös kiterjesztésük (mindkettőnél $\leq$ elem), inkompatibilis, ha nincs.

$D \subset P$ **sűrű**, ha minden $x \in P$-hez van $y \in D$: $y \leq x$. Egy $G \subset P$ $V-P$-**generikus**, ha filter (azaz metszetzárt: $p, q \in G \Rightarrow$ van $r \in G : r \leq p, q$; és felszálló: $p \in G, p \leq q \Rightarrow q \in G$) és P-nek minden V-beli sűrű részhalmazát metszi. Itt a V-beli kitétel nagyon fontos, általában ugyanis nem létezik generikus filter, sőt, V-ben szinte sosincs $V-P$-generikus, de minthogy V-ről feltettük, hogy megszámlálható, így sűrű részhalmazból is csak megszámlálható sok van, tehát az átlós eljárással tudunk készíteni egy $V-P$-generikus halmazt, ami persze nem V-beli, de a forszolás pont ezt fogja "hozzátenni" V-hez.

Precízen: rekurzióval definiáljuk V-ben a P-nevek V^P osztályát. Az üres halmaz név, τ név akkor és csak akkor, ha $\tau \subset \{\langle\sigma, p\rangle$, ahol σ név és $p \in P\}$. Legyen G $V-P$-generikus, ekkor (megint rekurzióval) egy τ név G szerinti interpretáltja (értéke) $val_G(\tau) = \tau^G = \{\sigma^G : \langle\sigma, p\rangle \in \tau, p \in G\}$. Ezekután $V[G] = \{\tau^G : \tau \in V^P\}$ lesz a generikus bővítés. Ekkor $V \subset V[G]$, mivel minden $x \in V$-re (megint csak rekurzióval) definiálhatjuk a kanonikus nevét: $\dot{x} = \{\langle\dot{y}, 1\rangle : y \in x\}$ ahol 1 P egy legnagyobb eleme. Adódik, hogy $\dot{x}^G = x$, és a $\dot{G} = \{\langle\dot{p}, p\rangle : p \in P\}$ definícióval $\dot{G}^G = G$, így $G \in V[G]$.

1.5 Tétel $V[G] \models \mathrm{ZFC}$

Ez a tétel azonban még nem volna elég ahhoz, hogy a forszolást jól tudjuk használni (és mellesleg a forszolás szót sem magyarázza meg). Amiért igazán hasznos ez, az a következő definíció és tétel:

Definíció: $p \in P$ forszol egy $\Phi(\tau)$ állítást, ha minden esetben, amikor $p \in G$, akkor $V[G] \models \Phi(\tau^G)$. Jelben: $p \Vdash \Phi(\tau)$.

1.megjegyzés: Φ argumentumában mindig **nevek** állnak, melyek interpretáltja G-től függően más és más lehet, mégis a forszoláshoz rendelkeznie kell p-nek a fenti tulajdonsággal.

2.megjegyzés: A definícióból azonnal adódik, hogy ha "lejjebb" megyünk a kényszerképzetben, akkor erősebb elemhez (más néven feltételhez) jutunk, azaz $q \leq p$ $p \Vdash \Phi$ esetén $q \Vdash \Phi$, hiszen ha $q \in G$ akkor G felszálló tulajdonsága miatt $p \in G$, ami ($p \Vdash \Phi$ miatt) implikálja, hogy $V[G]$-ben igaz Φ.

3.megjegyzés: Gyakran alkalmazott lemma az ún. **maximum elv**: ha $p \Vdash \exists\tau$ $(\Phi(\tau))$, akkor van τ, hogy $p \Vdash \Phi(\tau)$.

1.6 TÉTEL a, $V[G] \models \Phi(\tau^G)$ esetén van $p \in G : p \Vdash \Phi(\tau)$

b, a forszolás "reláció" definiálható V-ben (tehát pl. a $\{\tau : p \Vdash \Phi(\tau)\}$ halmaz V-beli)

Ez a tétel valami olyasmit mond ki, hogy már V-ben kontrollálni tudjuk, hogy mi lesz igaz $V[G]$-ben, azt leszámítva, hogy G ismerete is kéne ehhez. A forszolásos bizonyítások talán leggyakoribb mondata, hogy Φ igaz a bővítésben, tehát van $p \in G$, ami ezt forszolja (kikényszeríti azzal, hogy benne van G-ben).

De mi is ez a titokzatos generikus filter? Ennek megértéséhez szemléletes példa az $\mathrm{Add}(\omega, 1)$-gyel jelölt kényszerképzet, aminek elemei az $f : \omega \to \{0, 1\}$ parciális függvények, melyekre $\mathrm{dom}(f)$ véges, és $p \leq q$, ha p, mint függvény kiterjeszti q-t.

A G generikus filter uniója egy függvény lesz, mivel G-ben minden elem kompatibilis, ami itt azt jelenti, hogy ha $p, q \in G$ értelmezve van egy n rendszámon, akkor ott az értékük meg kell hogy egyezzen. Ráadásul az unió az egész ω-n értelmezve van, mivel azon elemek, amik egy konkrét n-re értelmezve vannak, sűrű halmazt alkotnak (hiszen ha p-nek már van értéke n-en, akkor ő maga jó nála $\leq$ elemnek, ha pedig nincs, akkor vegyük azt a parciális függvényt, ami megegyezik p-vel, csak még n-en mondjuk az 1-et veszi fel. Ez nyilván kisebb p-nél, ráadásul V-ben van, hiszen definiáltuk p-ből és n-ből, amik V-beliek), G metsz minden sűrűt, tehát tartalmaz olyan p-t, ami értelmezett n-en.

Ezenfelül G uniója muszáj, hogy új halmaz legyen, azaz olyan, ami nincs V-ben, hiszen tetszőleges V-beli végtelen 0-1 sorozatra sűrű azon elemek halmaza, amelyek valahol eltérnek az adott végtelen sorozattól. Ez azért van így, mert minden p értelmezési tartománya véges, tehát ha itt még meg is egyezne az adott sorozattal, egy olyan elemen, ahol még nincs értelmezve terjesszük ki úgy, hogy vegye fel pont a másik értéket. Mivel ezt az elemet p-ből és a V-beli végtelen sorozatból definiáltuk, így a kapott parciális függvény is V-beli lesz (és persze kisebb, mint p). G tehát elmetszi ezt a sűrű halmazt is, így $\cup G$ nem lehet a konkrét V-beli sorozat.

Ugyanígy eljárva kaphatjuk, hogy $\cup G$ nem lehet "szép, szimmetrikus", mindig tudnánk találni ugyanis egy ennek ellentmondó sűrű halmazt. Tehát G tulajdonképpen "jobb", mint a véletlen, mert egy véletlen sorozat lehet szép, csak kicsi a valószínűsége, $\cup G$ viszont biztos, hogy "igazi" véletlen.

Kényszerképzetek most következő tulajdonságai alapvető fontosságúak a forszolásos bizonyításoknál. Arról van ugyanis szó, hogy számosságok bizonyos tulajdonságai megváltozhatnak a generikus bővítésben az alapmodellbelihez képest. Egy rendszám attól számosság, hogy nincs bijekciója nála kisebb rendszámmal. A bővebb modellben azonban új függvények lehetnek, s így elképzelhető, hogy egy számosság elveszíti számosság voltát, "összeesik". Ugyanígy könnyen előfordulhat, hogy a számosság "megmarad" ugyan, de olyan új részhalmaza keletkezik, amely mutatja, hogy a számosság kofinalitása csökken (pl. egy rövid kofinális sorozatot tesz a forszolás a bővítésbe). S természetesen az is előfordulhat, hogy egy számosságnak (vagy tetszőleges halmaznak) nagyon sok új részhalmaza keletkezik (a forszolás legelső eredménye éppen a kontinuum hipotézis függetlenségének bizonyítása egyszerűen úgy, hogy ω-nak sok új részhalmazt csinálunk) a hatványfüggvényt megváltoztatva ezzel. Mivel mindhárom előbb említett tulajdonság alapvető a nagy számosságoknál, így mindenképpen fontos tudnunk, hogy milyen elégséges feltételei vannak egy kényszerképzetre nézve annak, hogy a vele való forszolás esetén ezek ne változzanak meg egy vagy több konkrét számosságnál. Jöjjenek tehát ezek az elégséges feltételek:

P **κ-zárt**, ha minden $\gamma < \kappa$ és olyan $\langle p_\alpha : \alpha < \gamma \rangle \in V$ sorozat esetén, amelyre $p_\alpha \leq p_\beta$ ha $\beta < \alpha$, van olyan $p \in P$, amire $p \leq p_\alpha$ minden $\alpha < \gamma$-ra. Szavakban: egy κ-nál rövidebb csökkenő sorozatnak van alsó korlátja.

Ez a forszolás szempontjából azt jelenti, hogy sok dolgot lehet egyszerre forszolni egy feltétellel. Az ugyanis mindig igaz, hogy véges sok dolgot tudunk egyszerre forszolni, mivel G metszetzárt és egy fenti megjegyzés értelmében a két (vagy több) forszoló feltétel közös kiterjesztése forszolja mindkét (vagy véges sok) állítást. Azzal, hogy hosszabb sorozatoknak is van közös alsó korlátja, tehát sok állítást egyszerre tudunk forszolni.

Ennek egy fontos alkalmazása a következő: legyen X egy régi halmaz, és $Y \subset X$, úgy hogy $|Y| < \kappa$. Ekkor van $\gamma < \kappa$ és $f : \gamma \to Y$ bijekció ($V[G]$-ben). Van p_0, ami forszolja, hogy micsoda $f(0)$. Egy r forszolja $f(1)$ értékét, közös kiterjesztésük p_1 mindkettőt. Egy újabb p_2 $f(2)$ értékét, stb, s mivel P κ-zárt, így limeszrendszámoknál (legalábbis κ-nál kisebb limeszeknél) is van közös kiterjesztés. Van tehát olyan p, ami forszolja $f(\alpha)$ értékét minden $\alpha < \gamma$-ra.

De ekkor p forszolja az egész f-et, így $Y = \{x \in X \text{ van } \alpha < \gamma : p \Vdash f(\dot{\alpha}) = \dot{x}\}$. Mivel a forszolás reláció V-beli, így Y-t V-ben definiáltuk. Azt kaptuk, hogy κ-zárt kényszerképzettel való forszolásnál régi halmaznak, nincs új κ-nál kisebb részhalmaza. Speciálisan minden $\leq \kappa$ számosság megmarad, hiszen ha összeesnének, akkor saját maguk egy "új" kicsi részhalmazai lennének.

Definiáljunk gyorsan még két, a κ-zártsághoz hasonló fogalmat: P κ **irányítottan zárt**, ha feltételek minden olyan halmazára, amely κ-nál kisebb, és bármely két halmazbelinek van közös kiterjesztése, akkor az egész halmaznak van alsó korlátja. Ez nyilván a κ-zártság egy erősítése.

P κ **stratégiailag zárt**, ha két játékos azt a $\gamma < \kappa$ hosszú játékot játssza, hogy felváltva mondanak P-ben egyre kisebb elemeket, a II-es mondja a páros és a limeszlépéseket, és II-nek van arra stratégiája, hogy végigmenjen a játék, azaz limeszlépéseknél is tudjon új elemet mondani. Ez bár gyengítése a κ-zártságnak, de az ilyen kényszerképzeteknek is megvan a fenti "új kis halmazokra" vonatkozó tulajdonságuk.

A másik fajta kényszerképzetek megismeréséhez szükségünk lesz az **antilánc** fogalmára: ezen páronként inkompatibilis feltételek halmazát értjük.

Egy P kényszerképzetről azt mondjuk, hogy tejesíti a κ **antilánc feltételt** (κ-cc), ha minden maximális antilánc κ-nál kisebb számosságú.

Az ilyen kényszerképzetek szemléletesen a következő tulajdonsággal bírnak: "egy dologról kevesebb, mint κ dolgot lehet forszolni". Egyazon p feltétel nyilván nem forszolhat egymásnak ellentmondó dolgokat, hiszen egy olyan generikus filter szerinti bővítésben, amiben p is benne van, igazak volnának az ellentmondó állítások. Inkompatibilis feltételek azonban forszolhatnak egyvalamiről különböző dolgokat. De egy κ-cc kényszerképzetben páronként inkompatibilis feltételből kevesebb van, mint κ, így forszolási lehetőségből is csak ennyi van.

Példa ennek egy alkalmazására: legyen κ reguláris, P κ-cc, és legyen X $V[G]$-beli korlátos halmaz κ-ban és p egy feltétel, ami ezt forszolja. Legyen $\beta =\sup\{\alpha$:van $q \leq p : q \Vdash \sup\dot{X} = \dot{\alpha}\}$. Mivel P κ-cc, ezért ez a halmaz κ-nál kisebb számosságú, így κ regularitása miatt korlátos κ-ban, s mivel nevekkel és a forszolási relációval van definiálva, ezért V-beli. Igy G s persze a pontos X ismerete nélkül tudunk egy korlátot mondani X-re.

Ugyanilyen "letakarásos" (a különböző lehetőségeket kicsi, κ-nál kisebb halmazokkal letakarjuk) bizonyítással kijön, hogy κ-cc forszolásnál κ és a nála nagyobb számosságok megmaradnak.

Fontos eszköz még az iterált forszolás. Első ránézésre persze az sem világos, hogy miért szükséges ennek külön említése, hiszen ha "két dolgot szeretnénk csinálni", akkor az első forszolás eredményeképpen kapott generikus bővítésben veszünk egy újabb kényszerképzetet, és azzal forszolunk most már $V[G]$ fölött. Ezzel két probléma van: az egyik, hogy végtelen sok forszolás esetén mit csináljunk, sokszor ugyanis az egyre bővülő modellek uniója nem lesz ZFC modell sem. A másik probléma, hogy a második forszolás esetleg elronthatja az első eredményét, éppen ezért szeretnénk a két lépést egy lépésbe, a két kényszerképzetet egybe sűríteni. Ami akkor egyszerű, ha a második forszolás kényszerképzete is alapmodellbeli, ekkor megfelel a két kényszerképzet direkt szorzata, mivel azonban ez speciális esete az általános esetnek, így az erre vonatkozó állításokat nem mondom ki.

Ha viszont a második kényszerképzet nem alapmodellbeli, akkor nem is lehet vele semmilyen műveletet végezni ott. Erre azonban elegendőnek bizonyul a kényszerképzet egy neve:

Definíció: Ha P kényszerképzet, akkor $\dot{Q}$ egy másik kényszerképzet P-neve, ha $\dot{Q} = \langle Q, \leq_Q, 1_Q \rangle$, ahol $Q, \leq_Q, 1_Q \in V^P$, $1_Q \in \mathrm{dom}Q$ és $1_P \Vdash 1_Q \in Q$ és $\leq_Q$ kényszerképzetként részbenrendezi Q-t úgy, hogy 1_Q egy legnagyobb elem.

Definíció: P V-beli kényszerképzet, $\dot{Q}$ pedig P-neve egy másiknak. $P * \dot{Q}$-val jelöljük ekkor azt a V-beli(!) kényszerképzetet, mely alaphalmaza a

$\{\langle p, \tau \rangle : p \in P, \tau \in \mathrm{dom}Q$ és $p \Vdash \tau \in Q\}$ halmaz,

a rendezés pedig:

$\langle p, \tau \rangle \leq_{p*\dot{Q}} \langle q, \sigma \rangle$ akkor és csak akkor, ha $p \leq_P q$ és $p \Vdash \tau \leq_Q \sigma$.

1.megjegyzés: A mesterkéltnek tűnő első definíció biztosítja, hogy minden $p \in P$ esetén $\langle p, 1_Q \rangle \in P * \dot{Q}$ (hiszen 1_P és így a nála kisebb p is forszolja, hogy $1_Q \in Q$), a második definícióból pedig adódik, hogy $\langle 1_P, 1_Q \rangle$ legnagyobb elem $P * \dot{Q}$-ban.

2.megjegyzés: Az iterált forszolásnál könnyen előfordulhat, hogy $\langle p, \tau \rangle \leq \langle q, \sigma \rangle \leq \langle p, \tau \rangle$, de $\langle p, \tau \rangle \neq \langle q, \sigma \rangle$, hiszen ha pl. $p = q$ és τ és σ két különböző név, melyek interpretáltja azonban megegyezik, ha $p = q \in G$, akkor ez a helyzet fennáll.

A kétlépéses iterációhoz kapcsolódó fő tétel a következő:

1.7 Tétel Legyen K $V - P * \dot{Q}$-generikus. Ekkor a $G = \{p \in P : \langle p, 1_Q \rangle \in K\}$ és $H = \{\tau^G : \tau \in \mathrm{dom}Q$ és $\exists q(\langle q, \tau \rangle \in K)\}$ jelölésekkel G $V - P$-generikus, H $V[G] - \dot{Q}^G$-generikus és $V[K] = V[G][H]$, mivel $K = G * H = \{\langle p, \tau \rangle \in P * \dot{Q} : p \in G$ és $\tau^G \in H\}$.

Ezzel a "két lépést egyszerre"-problémát leküzdöttük, sőt úgy nyertünk egy nagy kényszerképzetet, hogy megmaradt az a lehetőség, hogy a forszolást két egymás utáni bővítés eredményének tekinthessük (ami néha mégis célszerűbb).

Tudjuk tehát most már, hogy mit csináljunk, ha még egy forszolást akarunk egybegyúrni az eddigiekkel, az maradt még hátra, hogy a limeszesetet (végtelen sok forszolás "egybeuniózását") elintézzük.

Definíció: Legyen I ideál $\alpha + 1$-en (azért $\alpha + 1$-en, hogy lehessen akár az egész $P(\alpha)$ is). Ekkor α-hosszú iterált forszoláson I-beli tartókkal a következőt értjük:

egy $\langle P_\xi : \xi \leq \alpha \rangle$, $\langle \dot{Q}_\xi : \xi < \alpha \rangle$ sorozatpárt, amelyekre minden P_ξ egy V-beli kényszerképzet, P_ξ elemei ξ-hosszú sorozatok, $\eta < \xi$, $p \in P_\xi$ esetén p η-ra vett megszorítása P_η-beli. $\dot{Q}_\xi$ egy P_ξ-név egy kényszerképzetre. Ha $\langle \delta_\mu : \mu < \xi \rangle \in P_\xi$, akkor $\delta_\mu \in \mathrm{dom}Q_\mu$, és definiálva a tartót $\mathrm{supt}(\langle \delta_\mu : \mu < \xi \rangle) = \{\mu < \xi : \delta_\mu \neq 1_{Q_\mu}\}$ módon még a következőket kívánjuk meg:

-$P_0 = \{0\}$

-rákövetkező esetben $P_{\xi+1} = P_\xi * \dot{Q}_\xi$

-limeszesetben egy $p = \langle \delta_\mu : \mu < \eta \rangle \in P_\eta$ akkor és csak akkor, ha egyrészt minden $\xi < \eta$ esetén $p \restriction \xi \in P_\xi$, másrészt $\mathrm{supt}(p) \in I$.

A rendezés: $p, p' \in P_\eta : p \leq p'$ akkor és csak akkor, ha minden $\xi < \eta$ $(p \restriction \xi \leq p' \restriction \xi)$.

1.megjegyzés: $\beta+1$ rákövetkező esetben a $P*\dot{Q}$ definíciójában megismert módon tehát a kezdőszelet forszolja, hogy a β-adik kordináta Q_β-beli. η limeszesetben (minthogy a $\beta<\eta$-ra vett megszorítások P_β-beliek) minden kezdőszelet forszolja, hogy a következő koordináta "honnan való", az igazi limeszlépésnél azonban, ha a feltételeket úgy képzeljük el, mint egy egyre bővülő fát, ahol egy feltétel ősei a kezdőszeletei, akkor csak az ideál "válogat", hogy melyik ágat "veszi be" P_η-ba. (S mindezt teszi a tartó szerint.)

2.megjegyzés: Bár a tartók ideálját használó definíció a legáltalánosabb, konkrét esetekben azonban sokszor használatosak a következő fogalmak: η-nál direkt vagy inverz limeszt veszünk. Előbbi azt jelenti, hogy az η-ban korlátos tartójú sorozatokat vesszük be P_η-ba, az inverz limesz pedig azt, hogy minden sorozatot. Ezekkel a fogalmakkal a véges tartóval való forszolás azt jelenti, hogy minden limeszrendszámnál direkt limeszt veszünk, a megszámlálható tartós forszolás pedig azt, hogy ω kofinalitású limeszeknél inverz, egyébként direkt limesz van. Még egy fontos eset az Easton tartó: ez reguláris rendszámokra direkt, egyébként inverz limeszt jelent.

Az általános definícióban való gondolkodás azért sem szerencsés, mert míg a $P*\dot{Q}$ esetben olyan fontos tulajdonságok, mint a κ-cc-ség, vagy a κ-zártság átmennek (ha pl. P κ-zárt és $1_P \Vdash \dot{Q}$ $\dot{\kappa}$-zárt, akkor $P*\dot{Q}$ is κ-zárt, mert ha $\alpha<\kappa$ és $\langle\langle p_\beta,\tau_\beta\rangle : \beta<\alpha\rangle$ egy csökkenő sorozat, akkor P κ-zártsága miatt van a p_β-knak egy p közös kiterjesztésük, ami minden β-ra forszolja, hogy $\tau_{\beta+1}\le\tau_\beta$, mivel ezt már forszolja a p-nél nagyobb $p_{\beta+1}$ is, s persze $p\le 1_P$ miatt p forszolja, hogy $\dot{Q}$ $\dot{\kappa}$-zárt, így $p \Vdash \exists\tau : ((\beta<\alpha)\to(\tau\le\tau_\beta))$. A maximum-elv miatt ekkor van τ, amiről p forszolja, hogy közös alsó korlát, így erre a $\langle p,\tau\rangle$ közös kiterjesztése a $P*\dot{Q}$-beli sorozatnak), addig a végtelen iterált forszolásoknál semmi sem garantálja ezt általánosan, csak a konkrét ideálokra vannak idevágó tételek.

3.megjegyzés: A következő egyszerű állítás biztosítja, hogy a végtelen iterált forszolás generikus bővítése tartalmazza a közbülső kényszerképzetekkel való forszolást.

1.8 Állítás Ha G $V-P_\alpha$-generikus, akkor minden $\beta<\alpha$ esetén a $G'=\{p\in P_\beta : p*\langle 1_\beta,1_{\beta+1},...\rangle\in G\}$ $V-P_\beta$-generikus.

Bizonyítás: Legyen D sűrű P_β-ban. Ekkor $D^*=\{p\in P_\alpha : p\restriction\beta\in D\}$ sűrű P_α-ban, ugyanis tetszőleges $q\in P_\alpha$ esetén $q\restriction\beta\in P_\beta$. D sűrűsége miatt van $r\in D$: $r\le q\restriction\beta$. Mivel $q \Vdash q(\beta)\in Q_\beta$, így ezt r is forszolja, tehát $r*q(\beta)\in P_{\beta+1}$ és $r*q(\beta)\le_{\beta+1} q\restriction\beta+1$. Ez indukcióval végigmegy egészen α-ig, mivel limeszeseteknél $\mathrm{supt}(r*\langle q(\beta),q(\beta+1),...\rangle)\subset\mathrm{supt}(r)\cup\mathrm{supt}(q)$ és az ideál zárt a véges únióra. Tehát $r*\langle q(\beta),q(\beta+1),...\rangle\le q$ és D^*-beli, azaz D^* tényleg sűrű. Emiatt $G\cap D^*\neq 0$, legyen egy eleme t. G felszálló volta miatt $t\restriction\beta*\langle 1_\beta,1_{\beta+1},...\rangle\in G$ (a megfelelő koordináta 1-éről mindenki forszolja, hogy legnagyobb elem), tehát $t\restriction\beta\in D\cap G'$.

Láthattuk tehát, hogy a forszolásos bizonyítások egy jelentős részében az a "trükk", hogy ide-oda ugrálunk a generikus bővítés elemei és ezek alapmodellbeli nevei közt. Ha iterált forszolásos bizonyítással van dolgunk, akkor ezen ugráláshoz még nagyobb tér áll rendelkezésünkre, hiszen az iménti állítás szerint $V[G]$-ben, benne vannak a "közbülső" modellek is. Még nagyobb lesz a lehetőségek köre, ha legalább mérhető nagy számosságokkal kapcsolatosan forszolunk, ezek definíciójában ugyanis szerepelnek $j : V \to M$ elemi beágyazások, ahol M egy újabb (V-ből osztály-, "kintről" halmaz-) modellje ZFC-nek, s itt egy V-beli α-hosszú iteráció képe egy $j(\alpha)$-hosszú iteráció. Ha azt akarjuk bizonyítani, hogy κ, mondjuk, mérhetősége megmarad $V[G]$-ben, akkor egy lehetőség erre, hogy j-t kibővítsük $V[G] \to M'$-vé, ezzel megint növelve modelleink számát.

E kibővítés egy elégséges feltételével zárom a bevezető szakaszt:

1.9 Lemma (Silver) Legyen $j : V \to M$ elemi beágyazás, $P \in V$ kényszerképzet, G $V-P$-generikus filter. Ha még $H \subset M$ olyan $M-j(P)$-generikus, amely tartalmazza $j''G$-t, akkor j felemelhető $V[G] \to M[H]$ beágyazássá.

Bizonyítás: Minden $V[G]$-beli halmaz egy V^P-beli τ név interpretáltja. Definiáljuk a felemelést a következőképpen: $j(\tau^G) = j(\tau)^H$. Először is vegyük észre, hogy j jóldefiniált, azaz ha $\tau^G = \sigma^G$, akkor $j(\tau)^H = j(\sigma)^H$. (Ha τ P-név, akkor $j(\tau)$ $j(P)$-név, ugyanis τ minden eleme rendezett pár amelynek első koordinátája név, második egy P-beli elem. Ezek formulával definiálhatók, így τ név volta is, tehát ezt megőrzi egy j elemi beágyazás.) Ez amiatt van így, mert tekintsünk egy $p \in G$ feltételt, ami forszolja $\tau = \sigma$-t. Mivel a forszolási reláció V-ben definiált ezért az eredeti j elemisége miatt $j(p) \Vdash j(\tau) = j(\sigma)$. Igy $j"G \subset H$ miatt $j(p) \in H$, tehát $M[H] \models j(\tau)^H = j(\sigma)^H$.

Az új j kiterjesztése a réginek, mivel egy $x \in V$ halmaz $\dot{x}$ kanonikus nevére az eredeti j elemisége miatt $j(\dot{x})$ $j(x)$ kanonikus neve lesz M-ben, s így $j(\dot{x})^H = j(x)$.

Az új j elemiségének bizonyítása megegyezik a jóldefiniáltságéval: ha $V[G] \models \Phi(\tau)$, akkor van $p \in G$, ami ezt forszolja. Erre a p-re $j(G) \subset H$ miatt $p \in H$, és az eredeti j elemisége miatt $j(p) \Vdash \Phi(j(\tau))$, tehát $M[H] \models \Phi(j(\tau)^H)$.

megjegyzés: A fenti lemmát szinte az összes nagy számosság megmaradási bizonyításban használni fogjuk, de két különböző alapesetünk lesz.

Az egyszerűbb eset az lesz, ha a lemmabeli P kényszerképzet feltételei κ-nál kisebb "valamik" lesznek, pl. $\kappa \to \kappa$ parciális függvények, melyek értelmezési tartománya *korlátos* κ-ban. A példában bár $j(P)$ a $j(\kappa) \to j(\kappa)$ parciális függvényekből áll, melyek értelmezési tartománya korlátos $j(\kappa)$-ban, de az egyes p feltételek képe (lévén ők $\kappa > \delta$ sok rendezett pár uniója, és $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ miatt $j(\delta) = \delta$) ugyanaz a p feltétel, azaz $j(P) = P * P_{farok}$, $j''P = P$ s persze $j''G = G$. Ez utóbbi miatt bármilyen G_{farok} P_{farok}-generikusat véve a $G * G_{farok}$ teljesíteni fogja a lemma feltételeit.

Nehezebbek lesznek azok az esetek, amikor P feltételei pl. κ részhalmazai közül valamilyen tulajdonsággal rendelkezők (mondjuk egy mértékben lévők). Ekkor ugyanis nem feltétlen tudjuk biztosítani, hogy olyan $j(P)$-generikusat válasszunk (amelynek elemei $j(\kappa)$ (a mondott esetben $j(\kappa)$-nagyságú) részhalmazai), amely tartalmazza $j''G$-t. Ilyenkor a következőképpen próbálunk meg okoskodni: keresünk M-nek olyan bővítését, amelyben $j''G$ halmaz. Ha P eléggé zárt (mondjuk κ-irányítottan), akkor $j(P)$ is az elemiség miatt. Ha még G és így $j''G$ kisebb, mint amennyire $j(P)$ zárt (a példában $j(\kappa)$-nál), akkor a zártság definíciója miatt van $j(P)$-ben egy $j''G$ egészét közösen kiterjesztő ún. *mester*feltétel. Ha ezt tartalmazó $j(P)$-generikus H-t veszünk, akkor megint teljesülnek a lemma feltételei.

2 Fast Function forszolás

A most következő két fejezetben a Woodin által kitalált fast function forszolás néhány alaptulajdonságát ismertetem, majd rátérek néhány már a lottery preparation szempontjából is fontos állítás bizonyítására. A harmadik fejezetben az általánosított Laver-függvényekről lesz szó, melyek nem szükségesek ugyan fő célunkhoz, a nagy számosságok elpusztíthatatlanná tételéhez, de egy-két ilyen állítás bizonyításostul önmagában is érdekes.

Definíció: Jelöljük F_κ-val a következő kényszerképzetet: elemei $p : \kappa \to \kappa$ parciális függvények, melyekre $\mathrm{dom}(p) \subset \mathrm{EE}$ (az erősen elérhetetlen számosságok osztálya), és $\gamma \in \mathrm{dom}(p)$ esetén $p''\gamma \subset \gamma$ és $|p \restriction \gamma| < \gamma$. A rendezés a fordított tartalmazás. A generikus parciális függvényt hívjuk "fast function"-nek. Vegyük észre, hogy $\kappa \in \mathrm{EE}$ esetén $|F_\kappa| \leq \kappa$, mivel $|\{p : \mathrm{dom}(p) \subset \gamma < \kappa,\ \mathrm{ran}(p) \subset \delta < \kappa\}| \leq \delta^\gamma < \kappa$.

$F_{\lambda,\kappa}$-val jelöljük azt a változatot, ahol a feltételek értelmezési tartománya $[\lambda, \kappa)$-ból van.

Ez utóbbi $\leq \lambda$ irányítottan zárt: ha ugyanis a λ-s halmaz unióját vesszük, az jó lesz közös kiterjesztésnek. Csak abba kell belegondolni, hogy $\gamma > \lambda$ EE esetén λ darab γ-nál kisebb halmaz uniója még mindig kisebb γ-nál, így a $|p \restriction \gamma| < \gamma$ feltétel is teljesül.

2.1 Lemma A $p = \{\langle \gamma, \alpha \rangle\} \in F_\kappa$ feltétel alatt, ahol $\gamma \in \mathrm{EE}$, α rendszám, λ pedig a γ és α feletti első EE, a kényszerképzet a következő szorzatra bomlik: $F_\kappa \restriction p = F_\gamma \times F_{\lambda,\kappa}$.

Bizonyítás: Ha $q \leq p$ akkor $q \restriction \gamma \in F_\gamma$ nyilván. Ugyanakkor a $q''\alpha \subset \alpha$ megkötés miatt $\mathrm{dom}(q)$ diszjunkt (γ, λ)-tól. Igy a $q \mapsto \langle q \restriction \gamma, q \restriction [\lambda, \kappa) \rangle$ leképezés adja a kívánt izomorfizmust.

2.2 Tétel Az F_κ-val való forszolásnál megmaradnak a számosságok, a kofinalitások, és a kontinuum-függvény is változatlan marad. (Igy megmarad az EE tulajdonság is.)

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy γ reguláris V-ben, de $\mathrm{cf}(\gamma) = \delta < \gamma$ $V[f]$-ben. Mivel F_κ κ méretű, így κ^+-cc, ezért feltehető, hogy $\gamma \leq \kappa$. Két esetet különböztethetünk meg: ha $f''\delta \subset \delta$, akkor a generikus filterben csak olyan elemek vannak, amelyek felbomlanak egy F_δ és egy $F_{\delta,\kappa}$-beli részre, és így az egész forszolás felbomlik $F_\delta \times F_{\delta,\kappa}$ alakúra. De az első tag δ^+-cc, a második meg δ-zárt, így γ kofinalitása mégsem változhat. Ha $f(\beta) > \delta$ valamilyen $\beta < \delta$-ra, akkor a generikusság kompatibilitási feltétele miatt tetszőleges $p \in G$ értelmezési tartománya diszjunkt $(\beta, f(\beta))$-tól ($p''\alpha \subset \alpha$ miatt), így a forszolás megint szétesik, ezúttal $F_\beta \times F_{f(\beta),\kappa}$-ra. Az első forszolás megint túl kicsi, a második ($f(\beta) > \delta$ miatt) túl zárt.

A kontinuumfügvényre vonatkozó állítás bizonyítása hasonló: ugyanez a két eset, ugyanezek a faktorizálások, s mindkétszer az első forszolás csak kevés, a második már egyetlen új δ-s részhalmazt sem adhat az alapmodellhez.

2.3 Tétel Ha $2^\kappa = \kappa^+$, akkor κ mérhető marad F_κ-val való forszolás után is (ha az volt előtte), sőt minden mérték által indukált $j : V \to M$ elemi beágyazás felemelhető $j : V[f] \to M[j(f)]$-fé úgy, hogy $j(f)(\kappa)$ értéke tetszőleges $\alpha < j(\kappa)$ rendszám lehet.

Bizonyítás: Legyen $p = \{\langle\kappa, \alpha\rangle\} \in j(F_\kappa) = F_{j(\kappa)}$. A 2.1 Lemma szerint p alatt a forszolás $F_\kappa \times F_{\lambda,j(\kappa)}$-képpen faktorizálódik, ahol λ M-ben az első EE κ és α fölött. A második tényező $\leq \kappa$-zárt M-ben, de $M^\kappa \subset M$ (ez minden mértékből keletkezett beágyazásnál így van) miatt V-ben is. Mivel j mértékből ered, így $j(\kappa^+)$ elemei $\kappa \to \kappa^+$ függvények osztályai, így számuk legfeljebb $(\kappa^+)^\kappa$, tehát tekintettel $2^\kappa = \kappa^+$-ra $|j(\kappa^+)|^V = \kappa^+$. Az elemiség miatt $2^{j(\kappa)} = j(\kappa)^+$ M-ben, de legfeljebb ennyi sűrű részhalmaza van $F_{\lambda,j(\kappa)}$-nak M-ben, így most V-ben (!) ezeket fel lehet sorolni egy $\langle D_\beta, \beta < \kappa^+\rangle$ sorozatban. Most az átlós eljárással legyártunk egy $M - F_{\lambda,j(\kappa)}$-generikus filtert: $p_0 = p$, $p_{\beta+1} \leq p_\beta$ D_α-beli, β limesz esetén pedig a $\leq \kappa$-zártságot használjuk. Mivel ezt V-ben tettük, így a "szokásos" (1.9 Lemma) $\tau \in V^F : j(\tau^f) = j(\tau)^{j(f)}$ egy $j : V[f] \to M[j(f)]$ bővítés, ahol $j(f) = f \cup p \cup$ a most megkonstruált $M - F_{\lambda,j(\kappa)}$-generikus. Ez mutatja κ mérhetőségét $V[f]$-ben, és a konstrukcióból (hogy ti. p a generikusban van) következik, hogy $j(f)(\kappa) = \alpha$.

2.4 Tétel Egy fast function beforszolása megőrzi az erősen kompakt számosságokat, sőt minden erősen kompakt V-beli mérték kiterjeszthető erősen kompakt mértékké a generikus bővítésben.

Bizonyítás: Legyen $f : \kappa \to \kappa$ a V-generikus fast function, $\lambda \geq \kappa$ és μ_0 finom mérték $P([\lambda]^{<\kappa})$-n V-ben. Legyen $\theta \geq 2^{\lambda^{<\kappa}}$, és $j : V \to M$ egy $P(\theta^{<\kappa})$-n értelmezett finom V-beli η mérték generálta elemi beágyazás. Az erősen kompakt beágyazásokra vonatkozó fedési tulajdonság miatt létezik olyan $Y \in M$, hogy $j''\mu_0 \subset Y$ és $|Y|^M < j(\kappa)$. Esetleg $j(\mu_0)$-lal elmetszve $Y \subset j(\mu_0)$ feltehető, és így $\cap Y \in j(\mu_0)$ is. Bármely $s_0 \in \cap Y$-ra igaz, hogy $X \in \mu_0 \leftrightarrow s_0 \in j(X)$ ($X \subset P([\lambda]^{<\kappa})V$-ben), hiszen ha $X \in \mu_0$, akkor $j(X) \in j''\mu_o \subset Y$, így $s_0 \in j(X)$, a fordított irány μ_0 ultraságából és j elemiségéből következik. Rögzítsünk egy ilyen s_0-t, és legyen $s = [id]_\eta$, $\delta = |s|^M$, válasszunk tetszőleges $\gamma \geq \delta$-t. Mivel η finom, ezért $j''\theta \subset s \in j(P([\theta]^{<\kappa}))$ és $\theta \leq \delta < j(\kappa)$ (az első egyenlőtlenség $j''\theta \subset s, |s| = \delta$ miatt áll fenn, a második pedig azért, mert δ egy $j(P[\theta]^{<\kappa})$-beli halmaz számossága, ami az elemiség miatt kisebb $j(\kappa)$-nál).

Legyen p a $\{\langle\kappa, \gamma\rangle\}$ $j(F_\kappa)$-beli feltétel. Ekkor a 2.1 Lemma miatt alatta $j(F_\kappa)$ $F_\kappa \times F_{farok}$ alakba írható, ahol F_{farok} M-ben $\leq \gamma$-zárt. Ha a $V[f]$-F_{farok}-generikus f_{farok} segítségével $j(f)$-et az $f \cup p \cup f_{farok}$ képlettel definiáljuk, akkor ez persze $M - j(F_\kappa)$-generikus lesz ($V[f]$ bővebb modell, mint M), így ($V[f][f_{farok}]$-ban!) j felemelhető $V[f] \to M[j(f)]$-fé (1.9 Lemma), ahol a konstrukció miatt $j(f)(\kappa) = p(\kappa) = \gamma$.

j kiterjesztésével módunkban áll μ_0-t is kibővíteni: az $X \in \mu_0^* \leftrightarrow s_0 \in j(X)$ definíció nyilván μ_0 egy kiterjesztését definiálja, és finom is lesz, mert $j''\lambda \subset s_0$, ezért minden $\alpha < \lambda$-ra $s_0 \in j(X)$, ahol X azon halmazok halmaza, amik tartalmazzák λ-t. ($j''\lambda \subset s_0$ azért, mert $\alpha < \lambda$ esetén μ_0 finomsága miatt, ha X a fenti, akkor $X \in \mu_0$, tehát $j(X) \in j(\mu_0)$, így $\cap Y \in j(\mu_0)$ miatt $\cap Y \cap j(X) \in j(\mu_0)$, ami emiatt nem lehet üres, tehát tényleg $\alpha \in s_0$.)

Azt kell tehát még megmutatni, hogy μ_0^* $V[f]$-beli. Ehhez u legyen a $P([\lambda]^{<\kappa})^{V[f]}$ elemei szép neveinek (τ **szép**, ha $\langle\sigma, p_1\rangle, \langle\sigma, p_2\rangle \in \tau$ esetén p_1 és p_2 inkompatibilis) egy V-beli felsorolása. Ilyenből $2^{\lambda^{<\kappa}}$ van, mivel $|F_\kappa| = \kappa$ és $P([\lambda]^{<\kappa})$-nak ennyi eleme van. Emiatt és $2^{\lambda^{<\kappa}} < \theta$ miatt u $\langle \dot{X}_\alpha | \alpha < \theta\rangle$ alakba írható. $j(u) \in M$ és persze $j(u) \restriction s$ is. Legyen ennek egy felsorolása $\langle \dot{Y}_\beta | \beta \in s\rangle$. Mivel θ-erősen kompakt beágyazásunk van, így a θ-s sorozatok képe "szépen átmegy", tehát $\dot{Y}_{j(\alpha)} = j(\dot{X}_\alpha)$. Legyen $t = \{\beta \in s | s_0 \in (\dot{Y}_\beta)^{j(f)}\}$. Igy $t \subset s$ és $t \in M[j(f)]$, de s δ nagyságú és F_{farok} δ-zárt, emiatt $t \in M[f]$, ezzel persze $t \in V[f]$. Node,

$$(\dot{X}_\alpha)^f \in \mu_o^* \leftrightarrow s_0 \in j((\dot{X}_\alpha^f)) = j(\dot{X}_\alpha)^{j(f)} = (\dot{Y}_{j(\alpha)})^{j(f)} \leftrightarrow j(\alpha) \in t$$

(az első $\leftrightarrow$ μ_0^* definíciója, a két egyenlőség az elemiség és a fenti észrevétel, a második $\leftrightarrow$ pedig t definíciója miatt igaz). Tehát μ_0^* definiálható $V[f]$-ben t és $j \restriction \theta$ segítségével, tehát tényleg $V[f]$-beli.

Az eddig bizonyított állítások inkább csak a lehetőségét vetítik előre annak, hogy a fast function forszolás használható lesz valamire (merthogy megmaradnak a nagy számosságok), a most következő tétel azonban már valami lényegeset árul el: azt ugyanis, hogy a generikus bővítés egy elemi beágyazása "szinte tetszőlegesen megváltoztatható" úgy, hogy az alapmodellen ugyanaz marad. A "tetszőlegesen" itt most $j(f)(\kappa)$ értékére vonatkozik. A tétel kimondásához szükségünk lesz a következőre:

Definíció: Egy η $V[f]$-beli mértéket **sztenderdnek** mondunk, ha az általa indukált $j : V[f] \to M[j(f)]$ beágyazás κ kritikus pontja definiálható $M[j(f)]$-ben $s = [id]_\eta$-ból és $\mathrm{ran}(j \restriction V)$-beli paraméterekből.

2.5 Tétel (Fast Function Flexibility, FFF) Legyen $f : \kappa \to \kappa$ egy V feletti forszolással kapott fast function, és $j : V[f] \to M[j(f)]$ elemi beágyazás κ kritikus ponttal. Ekkor bármilyen $\alpha < j(\kappa)$-ra található egy másik $j^* : V[f] \to M[(j(f)]$ úgy, hogy

1. $j^*(f)(\kappa) = \alpha$,
2. $j^* \restriction V = j \restriction V$,
3. $M[j^*(f)] \subset M[j(f)]$,
4. Ha α kisebb, mint $\mathrm{dom}(j(f))$ κ utáni első EE torlódási pontja, akkor még $M[j^*(f)] = M[j(f)]$ is. Sőt, ebben az esetben ha j egy D V-beli halmazon lévő η sztenderd mérték szerinti ultrahatvány, akkor j^* egy ugyanazon a halmazon lévő $\eta^* \in V[f]$ szerinti ultrahatvány, ahol $\eta \cap V = \eta^* \cap V$ és $[id]_\eta = [id]_{\eta^*}$.

Bizonyítás: Rögzítsük j-t és α-t. Legyen κ^* az első κ-nál és α-nál is nagyobb EE számosság, γ pedig $\mathrm{dom}(j(f))$ első κ^*-nál nagyobb eleme. (Ekkor persze γ is EE, hiszen minden $\mathrm{dom} f$-beli, s így az elemiség miatt minden $\mathrm{dom}(j(f))$-beli is az.)

Vegyük észre, hogy γ nem limesze EE számosságoknak. Ehhez (tetszőleges $\beta < \kappa$ EE-re) tekintsük a $D_\beta = \{p \in j(F) : \beta \in \mathrm{dom}(p)\} \cup \{p \in j(F) : p$ megtiltja, hogy $\beta \in \mathrm{dom}(j(f))$ legyen $\}$. (Itt az utóbbi halmaz azt jelenti, hogy p-nek van β-nál kisebb elem az értelmezési tartományában, amelyre a p-nél felvett érték nagyobb, mint β.) Ez sűrű, hiszen egy olyan q, ami nincs a második halmazban kibővíthető a $\langle\beta, 0\rangle$ párral, ez ugyanis nem rontja el a számossági feltételeket, és $q''\beta \subset \beta$ teljesült azzal, hogy q nem volt a második halmazban. Azt kaptuk, hogy egy β csak azért nem lehet $\mathrm{dom} j(f)$-ben, mert egy generikusbeli letiltja őt. Ha most γ EE-k limesze volna, akkor mivel κ^* után ő az első $\mathrm{dom}(j(f))$-beli, ezért az összes (κ^*, β)-beli EE-t le kéne tiltani, amiből (mivel γ EE, így reguláris) γ sok van. De tiltás csak egy κ^*-nál kisebb EE ugrásával jöhet létre, amik mind csak γ alá ugorhatnak (hiszen különben γ-t is letiltanák), tehát az ugrások értékei korlátosak γ-ban, s ha γ EE-k limesze, akkor ezután még van egy β EE, amit, mivel nem tilt le semmi, D_β sűrűsége miatt $\mathrm{dom} j((f))$-beli lenne, ellentmondás.

A faktorizációs lemma miatt $f_{farok} = j(f) \restriction [\gamma, j(\kappa))$ $M - F_{\gamma, j(\kappa)}$-generikus. Tekintsük a $j \restriction V : V \to M$ beágyazást (V elemeit j valóban M-be képezi, mivel a forszolási relációval megfogható, hogy egy halmaz alapmodellbeli-e, így ennek át kell mennie az elemiség miatt), és a $p = \{\langle\kappa, \alpha\rangle, \langle\kappa^*, \beta\rangle\}$ feltételt, ahol $\beta < \gamma$ nagyobb minden γ alatti EE-nél. (Ennek a létezéséhez kellett az előző bekezdés.) Megint a faktorizációs lemma miatt p alatt a $j(F)$-fel való forszolás felbomlik $F \times F_{\gamma, j(\kappa)}$ alakúra (mivel κ után γ az első $\mathrm{dom}(j(f))$-beli). Legyen ezekután $j^*(f) = f \cup p \cup f_{farok}$, s így f_{farok} M-generikussága és az 1.9 Lemma miatt j^* felemelhető $V[f] \to M[j(f)]$ beágyazássá. $j^*(f)$ konstrukciója miatt $j^*(f)(\kappa) = p(\kappa) = \alpha$ és $j^* \restriction V = j \restriction V$. Mivel $j^*(f)$-et $j(f)$ segítségével konstruáltuk, így $M[j^*(f)] \subset M[j(f)]$. Ha α kisebb, mint $\mathrm{dom} j(f)$ első EE torlódási pontja, akkor ami hiányzik $j(f)$-ből (a κ és γ közé eső rész) egy $j(F)$-beli feltétel, mivel feltevésünk miatt a számossági feltételek ($|\mathrm{dom}(q \restriction \beta)| < \beta$) teljesülnek. A közbülső rész tehát M-beli, így $j(f)$ visszakapható M-ben $j^*(f)$-ből, tehát $M[j(f)] = M[j^*(f)]$.

Végül ez utóbbi esetben legyen j egy V-beli D halmazon értelmezett η mérték szerinti ultrahatvány. Legyen $s = [id]_\eta$. Ekkor $X \in \eta \leftrightarrow s \in j(X)$, hiszen az elemiség miatt $j(X)$ és $j(D \setminus X)$ közül pontosan az egyik tartalmazza s-et (s minden D-belihez egy D-belit rendel, így a Los-lemma miatt az ő ekvivalenciaosztálya egy $j(D)$-beli elem). Tetszőleges $X \subset D$-re az azonosan X függvény pontosan az X-hez tartozó helyeken tartalmazza id_η értékét, ezért megint csak a Los-lemma miatt, ha $X \in \eta$ akkor ez η-mm igaz tehát $s \in j(X)$.

Legyen a V_κ egy olyan V-beli felsorolása, amelyben tetszőleges $\xi < \kappa$ esetén V_ξ minden eleme kofinális sokszor fordul elő a első $\beth_\xi$ eleme között. Az eddigi eset gondolatmenetében szereplő β-t úgy választom meg, hogy $j(a)$ β-adik eleme a $j(f) \restriction [\kappa, \gamma) \in M$ feltétel legyen. Ezt megtehetem, mivel γ EE-sége miatt $\gamma = \beth_\gamma$, a feltétel pedig nyilván V_γ-ban van, ezért az a felsorolásra tett feltétel (mindenki korlátlanul sokszor fordul elő) miatt lehetséges β-t úgy választani, hogy nagyobb legyen minden γ-nál kisebb EE-nél és jó indexe is legyen a-nak.

Definiáljuk η^*-ot akövetkezőképpen: $X \in \eta^* \leftrightarrow s \in j^*(X)$, ahol j^* a tétel már bizonyított része szerinti módosított elemi beágyazás. A bevezető fejezetben tett megjegyzések (az 1.2 Tétel előttiek) szerint ahhoz, hogy j^* az η^* szerinti ultrahatvány, azt kell megmutatnunk, hogy $M[j^*(f)]$ minden eleme előáll $j^*(h)(s)$ alakban, ahol $h \in V[f]$.

Állítás $\{j^*(h)(s) | h \in V[f]\} = \mathbf{X}$ elemi része $M[j^*(f)]$-nek.

Tekintsük $V[f]$ η^* szerinti ultrahatványát (erről akarjuk belátni, hogy ez maga $M[j^*(f)]$). Ezt N-nel jelölve a $k : N \to M[j^*(f)]$ leképezés, amely a $k([g]) = j^*(g)(s)$ képlettel adunk meg elemi beágyazás. (Ennek bizonyítása "szóról szóra" megegyezik a bevezető fejezetben a mérhető számosságok kapcsán kimondott "kommutatívvá tesszük a diagrammot" 1.2 Tételével.) Ennek segítségével a Tarski-Vaught-kritérium könnyen igazolható: ha

$$M[j^*(f)] \models \exists x \Phi(x, j^*(h_1)(s), ..., j^*(h_n)(s)),$$

akkor az elemiség miatt

$$N \models \exists x \Phi(x, [h_1], ..., [h_n]).$$

azaz van N-beli $[g]$, hogy

$$N \models \Phi([g], [h_1], ...[h_n]).$$

Ekkor viszont $k([g]) = j^*(g)(s)$ adja az elemiség miatt a Tarski-Vaught-kritériumot.

Tehát $\mathbf{X}$ elemi rész, így mivel η sztenderd tehát κ definiálható s-ből és $\mathrm{ran}(j \restriction V)$-ből, ezért $\kappa \in \mathbf{X}$. De κ-ból és $j^*(f)$-ből definiálható β, ezért $\beta \in \mathbf{X}$, s mivel β-t a $j(f)$-ből "hiányzó rész" indexének választottuk $j(a)$-nál, ezért ez is $\mathbf{X}$-beli. Azaz az $\mathbf{X}$-beli $j^*(f)$-ből visszakaphatjuk $j(f)$-et, ami így szintén benne van $\mathbf{X}$-ben. Legyen tehát $x \in M[j^*(f)] = M[j(f)]$. Mivel j az η szerinti ultrahatvány, ezért $x = j(h)(s)$ valamilyen $V[f]$-beli h függvénnyel. Ennek (h-nak) persze van egy $\dot{h} \in V$ neve. Tehát

$$x = j(\dot{h}^f)(s) = j(\dot{h})^{j(f)}(s)$$

(a második egyenlőség az elemiség miatt). De az utolsó kifejezésben minden halmaz $\mathbf{X}$-beli, így x is, tehát j^* tényleg az η^* szerinti ultrahatvány. A tétel többi állítása abból következik, hogy $[id]_\eta = s = [id]_{\eta^*}$ illetve $j^* \restriction V = j \restriction V$.

A későbbiekben szükségünk lesz még a fast function forszolás egy újabb tulajdonságára, ehhez azonban definiálnunk kell az alábbi fogalmat:

Definíció: azt mondjuk, hogy egy $f : \kappa \to \kappa$ parciális függvény rendelkezik a **Menas-tulajdonsággal**, ha minden λ esetén van olyan μ mérték $P([\lambda]^{<\kappa})$-n mely szerinti $j : V \to M$ ultrahatvány beágyazásnál $j(f)(\kappa) \geq |[id]_\mu|^M$.

2.6 Tétel Minden erősen kompakt κ számossághoz definiált fast function rendelkezik a Menas-tulajdonsággal.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy a fast function forszolás megőrzi az erősen komptságot, így valamilyen μ mértéket találhatunk. Ha erre a μ-re és j ultrahatványára $\gamma = |[id]_\mu|^M$ kisebb, mint az f fast function értelmezési tartományának κ utáni első EE torlódási pontja, akkor alkalmazható az FFF tétel 4. pontja úgy, hogy α-t egy γ és az említett torlódási pont közötti tetszőleges rendszámnak választjuk. Persze ezt senki sem garantálja, így másképp kell okoskodnunk.

Legyen mindenesetre μ egy λ-erősen kompaktságot mutató mérték és $j : V[f] \to M[j(f)]$ az ő ultrahatvány beágyazása. Jelöljük s-sel $[id]_\mu$-t és γ-val az ő M-beli számosságát.

Mivel $s \in M[j(f)]$, és s γ nagyságú, és $j(F)_{\gamma^+,j(\kappa)}$ γ^+-stratégiailag zárt, ezért s-nek előbb kellett keletkeznie, azaz $s \in M[j(f) \restriction \gamma]$. γ persze EE (a λ κ-nál kisebb részhalmazai között egymértékű sokan vannak az EE nagyságúak, így a Los-lemma adja ezt), ezért $|j(F) \restriction \gamma| \leq \gamma$, s így van s-nek γ-nagyságú M-beli $\dot{s}$ neve is. Tegyük egy S^* halmazba az $\dot{s}$ névben előforduló összes rendszámot (minden olyan β-t, amire van p feltétel, hogy $p \Vdash \dot{\beta} \in \dot{s}$). Mivel $\dot{s}$ γ nagyságú, ezért s^* is az lesz, és mivel M-beli dolgokból definiáltuk, ezért M-beli is lesz. Mivel a finomság miatt az egy konkrét $\beta < \lambda$-t tartalmazó részhalmazok egymértékű sokan vannak (ez a finomság definíciója), ezért minden ilyen β-ra $j(\beta) \in [id]_\mu = s$, tehát $j''\lambda \subset s$. De s^* nyilván bővebb s-nél, ezért $j''\lambda \subset s^*$. Vegyük még ki κ-t s^*-ból (ha benne volt). Ettől még $j''\lambda \subset s^*$ továbbra is fennáll, hiszen $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, és emiatt így κ a legkisebb rendszám, ami nincs s^*-ban.

Legyen most $j^* : V[f] \to M[j^*(f)]$ az FFF tétel által biztosított beágyazás valamilyen γ-nál nagyobb α-ra. (Most persze nem alkalmazhatjuk a 4. pontot, hiszen γ lehet nagy is.) Definiáljuk μ^*-ot az $X \in \mu^* \leftrightarrow S^* \in j^*(X)$ képlettel. Az, hogy ez mérték, nyilvánvaló. Mivel az FFF tétel szerint $j \restriction V = j^* \restriction V$, ezért $j^{*\prime\prime}\lambda = j''\lambda \subset s^* \in j^*([\lambda]^{<\kappa})$. Igy ha $\beta < \lambda$, akkor a β-t tartalmazó részhalmazok "X-ére" $j^*(X)$ a $j^*(\beta)$-t tartalmazó részhalmazok halmaza, de s^* is ilyen, tehát $s^* \in j^*(X)$, azaz μ^* is finom.

Legyen most $j_0 : V[f] \to M'[j_0(f)]$ a μ^* szerinti beágyazás és $k : M'[j_0(f)] \to M[j^*(f)]$ pedig a $k([h]) = j^*(h)(s^*)$ képlettel adott elemi beágyazás, ami (mint az FFF tételben is) kommutatívvá teszi a három függvény diagrammját, és $M'[j_0(f)]$ k szerinti képe ($\mathbf{X} = \{j^*(h)(s^*) | h \in V[f]\}$) elemi rész $M[j^*(f)]$-ben. Mivel κ a legkisebb nem s^*-beli rendszám, ezért $\kappa \in \mathbf{X}$, s emiatt $\alpha = j^*(f)(\kappa)$ is $\mathbf{X}$-beli. Tehát van s_0 és α_0, melyekre $k(s_0) = s^*$ és $k(\alpha_0) = \alpha$. A kommutativitás miatt $[id]_{\mu^*} = s_0$ és $j_0(f)(\kappa) = \alpha_0$, és k elemisége miatt $\alpha_0 > |s_0|$, hiszen $\alpha > \gamma = |s^*|$. Ezzel beláttuk, hogy μ^* mutatja f Menas-tulajdonságát.

A Menas-tulajdonságnak persze megvan a megfelelője szuperkompakt illetve erős számosságok esetére. Az ezekhez kapcsolódó tételeket csak kimondom.

Definíció: Egy κ szuperkompakt számosság esetében az $f : \kappa \to \kappa$ rendelkezik a **szuperkompakt Menas-tulajdonsággal**, ha minden λ-ra van κ λ-szuperkompaktságát mutató beágyazás, melynél $j(f)(\kappa) > \lambda$.

2.7 Tétel Minden szuperkompakt számossághoz definiált fast function rendelkezik a szuperkompakt Menas-tulajdonsággal.

Definíció: Ha κ erős számosság, akkor az $f : \kappa \to \kappa$ parciális függvény rendelkezik az **erős Menas-tulajdonsággal**, ha minden λ-ra van κ λ-erősségét mutató beágyazás, melyre $j(f)(\kappa) > \beth_\lambda$.

2.8 Tétel Egy erős számossághoz definiált fast function rendelkezik az erős Menas-tulajdonsággal.

3 Általánosított Laver-függvények

Persze ha van általánosított, akkor van "sima" Laver-függvény is. Hogy ez mit is jelent pontosan? Nos valami olyan objektumot, ami "minden lehetséges értéket" felvesz. Ilyen típusú dologból a legegyszerűbb a káró-sorozat. Egy κ-s káró-sorozat egy olyan $f : \kappa \to P(\kappa)$ függvény, amely teljesíti az alábbi két feltételt:

-minden $\alpha < \kappa$ esetén $f(\alpha) \subset \alpha$

-minden $X \subset \kappa$ esetén $\{\alpha | X \cap \alpha = f(\alpha)\}$ stacionárius halmaz κ-ban.

Ilyen sorozatok létezéséről a következőket lehet tudni (többek közt): L-ben van ω_1-es káró-sorozat, minden mérhető κ-ra van κ-s káró-sorozat, és forszolni is egyszerű ilyen sorozatot: ha a feltételek a kezdőszeletek, a rendezés a fordított végbővítés, akkor a generikus filter uniója jó lesz káró-sorozatnak.

Láttuk, hogy nagy számosságoknak közük lehet ilyen objektumokhoz, Laver most következő tétele még egy adalék ehhez a témakörhöz (amit aztán folytatunk: már visszatérve a "fast function" forszoláshoz).

3.1 Tétel Legyen κ szuperkompakt számosság. Ekkor létezik olyan $f : \kappa \to V_\kappa$ függvény (a Laver-függvény), hogy minden olyan x halmazhoz és $\lambda \geq \kappa$ számossághoz, amelyekre $\lambda > |TC(x)|$, létezik U normális mérték $P([\lambda]^{<\kappa})$-n, hogy $j_U(f)(\kappa) = x$.

Bizonyítás: Tegyük fel indirekten, hogy a tétel állítása nem teljesül, és jelölje minden $f : \kappa \to V_\kappa$ függvényre λ_f azt a legkisebb κ-nál nagyobb egyenlő számosságot, amelyhez van x, amelyre egyrészt $|TC(x)| < \lambda_f$, másrészt nincs normális U mérték $P([\lambda_f]^{<\kappa})$-n, hogy $j_U(f)(\kappa) = x$ volna. Mivel f-ekből csak halmaznyi van, így λ_f-ekből is, tehát létezik ν mindnél nagyobb számosság, és $j : V \to M$ a κ ν-szuperkompaktságát mutató elemi beágyazás.

Jelölje $\phi(g, \delta)$ azt az állítást, hogy valamilyen α számossságra $g : \alpha \to V_\alpha$ függvény és δ a legkisebb legalább α számosság, amelyhez van x, hogy $|TC(x)| < \delta$ és nincs U normális mérték $P([\delta]^{<\alpha})$ -n, hogy $j_U(g)(\alpha) = x$. (Jelölje λ_g ezt a δ-t.) Mivel $M^\nu \subset M$, ezért M-ben $\phi(f, \lambda_f)$ minden $f : \kappa \to V_\kappa$-ra.

Legyen A azon $\alpha < \kappa$-k halmaza, melyekre $\phi(g, \lambda_g)$ igaz minden $g : \alpha \to V_\alpha$-ra. Az előző megállapítás miatt $\kappa \in j(A)$.

Most indukcióval definiálunk egy $f : \kappa \to V_\kappa$ függvényt. Ha $\alpha \in A$, akkor legyen $f(\alpha) = x_\alpha$, ahol x_α a tanú $\phi(f \restriction \alpha, \lambda_{f \restriction \alpha})$-ra, egyébként legyen $f(\alpha) = 0$.

Legyen $x = j(f)(\kappa)$. Mivel M-ben $\phi(f, \lambda_f)$ (hisz $\kappa \in j(A)$), ezért f konstrukciója miatt $x = j(f)(\kappa)$-nak ezt tanúsítania kell, s akkor ezt tanúsítja V-ben is. Definiáljuk a következő ultrafiltert: $U = \{X \in P([\lambda]^{<\kappa}) : j''\lambda \in j(X)\}$. Tudjuk (pl. Kanamori vagy Jech), hogy a k :$\mathrm{Ult}_U \to M$ $k([f]) = j(f)(j''\lambda)$ definícióval megadott beágyazással

$j = k \circ j_U$ és $k(\alpha) = \alpha, \alpha < \lambda$, emiatt $k(x) = x$. Tehát:

$$j_U(f)(\kappa) = k^{-1}(j(f)(\kappa)) = k^{-1}(x) = x$$

a fenti megjegyzések miatt, ami ellentmondás, hiszen x-et előállítottuk ultrahatvány szerinti képként.

De miért is jó mindez? Azt már eddig is láttuk (és a lottery preparation-nél is látni fogjuk), hogy az, hogy mi történhet κ-val, az elemi beágyazás kritikus pontjával M-ben, az sok információt közöl V-ről is. Példaként álljon itt a következő

3.2 Állítás Ha a mérhető κ-ig teljesül az általánosított kontinuum hipotézis (ÁKH), akkor κ-ra is.

Bizonyítás: Legyen j a normális mérték szerinti elemi beágyazás. Ekkor az elemiség miatt M-ben $j(\kappa)$-ig teljesül ÁKH, tehát κ-ra is. De M zárt a κ-s sorozatokra, részhalmazokra, így κ minden V-beli részhalmaza ott van M-ben is, tehát $\kappa^{+V} \geq \kappa^{+M} = |2^\kappa|^M = |2^\kappa|^V$.

Ezekután talán jobban érthető, hogy miért jó Laver fenti tétele: ez azt állítja, hogy van egy f függvény, amelynek egy megfelelő beágyazásnál vett képe szinte bármilyen értéket felvehet κ-nál, amiből talán le tudunk vonni különböző következtetéseket ennek a "bárminek" a V-beli tulajdonságaival kapcsolatban. Mivel ez az érték szinte minden lehet, ezért V minden elemét tudjuk hasonlóan kezelni, így valamilyen értelemben V "szép", "szimmetrikus".

A probléma az, hogy ez a bizonyítás nem mindenfajta κ nagy számosságra működik. A most következő definíció, és főleg az utána következő tételek azt mutatják, hogy egy fast function beforszolása után, hogyan lehet (általánosított) Laver-függvényeket megadni szinte tetszőleges nagy számosság esetében.

Definíció: V-ben az $l : \kappa \to V_\kappa$ parciális függvény **általánosított Laver függvény** egy $f : \kappa \to \kappa$ parciális függvény szerint, ha minden $j : V \to M$ $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ elemi beágyazásnál minden olyan z-re, amelyre $|TC^M(z)|^M < \lambda^+$, ahol $\lambda = j(f)(\kappa)$ van egy másik $j^* : V \to M$ (ugyanaz az M!) beágyazás, ahol $j^*(l)(\kappa) = z$ és $j^* \restriction ORD = j \restriction ORD$ (ORD a rendszámok osztálya).

3.3 Észrevétel Ha $V = HOD$ (az öröklődően rendszámdefiniálható halmazok osztálya) és κ legalább mérhető, akkor nincs általánosított Laver függvény κ-n.

Bizonyítás: Legyen $V = HOD$ és κ mérhető, $j : V \to M$ pedig tetszőleges κ kritikus pontú elemi beágyazás. Ha $j^* : V \to M$ egy másik ilyen, ami megegyezik j-vel a rendszámokon, akkor mivel minden halmaz rendszámdefiniálható, ezért $j^* = j$ mindenütt, így $j^*(l)(\kappa)$-t sem választhatjuk meg akárhogy.

3.4 Általánosított Laver függvény tétel Egy fast function forszolás után $V[f]$-ben van általánosított Laver függvény, azaz olyan $l : \kappa \to (V[f])_\kappa$ parciális függvény, amely rendelkezik a következő tulajdonsággal: bármely $j : V[f] \to M[j(f)]$ κ kritikus pontú beágyazásra és olyan z-re, amire $|TC^{M[j(f)]}(z)| < \lambda^+$ ($\lambda = j(f)(\kappa)$), van egy másik $j^* : V[f] \to M[j(f)]$ elemi úgy, hogy

1. $j^*(l)(\kappa) = z$

2. $M[j^*(f)] = M[j(f)]$

3. $j^* \restriction V = j \restriction V$ (ez persze több, mint hogy a rendszámokon megegyezzenek, hiszen a forszolás nem ad új rendszámokat V-hez)

4. Ha j egy V-beli halmazon értelmezett sztenderd η mérték szerinti elemi beágyazás, akkor j^* egy ugyanazon a halmazon értelmezett η^* szerinti beágyazás, ráadásul $\eta^* \cap V = \eta \cap V$ és $[id]_{\eta^*} = [id]_\eta$.

Bizonyítás: Már a tétel megfogalmazásából is látszik, hogy a FFF tételt kell majd alkalmaznunk. Legyen tehát $a = \langle a_\alpha | \alpha < \kappa \rangle$ V_κ egy V-beli olyan felsorolása, amely minden $\xi < \kappa$-ra V_ξ minden eleme kofinális sokszor szerepel a első $\beth_\xi$ eleme között. Legyen (most már $V[f]$-ben!) $l(\gamma) := a_{f(\gamma)}^{f\restriction\gamma}$ (már ha ennek van értelme, azaz ha $\gamma \in \mathrm{dom}(f)$ és $a_{f(\gamma)}$ egy F_γ-név).

Legyen még $j : V[f] \to M[j(f)]$ adott és $z \in M[j(f)]$ olyan, hogy $|TC^{M[j(f)]}(z)| < \lambda^+$, ahol $\lambda = j(f)(\kappa)$. Mivel $j(f)(\kappa) = \lambda$, ezért a definíciója utáni megjegyzés szerint $j(F)$ farka λ^+-stratégiailag zárt, ezért z-nek mindenesetre előbb kellett keletkeznie, azaz $z \in M[f]$, tehát $z = \dot{z}^f$ valamilyen $\dot{z} \in M$ névre. Mivel a V_κ egy felsorolása, ezért $j(a)$ $M_{j(\kappa)}$ egy felsorolása. Tehát $\dot{z}$ valamilyen α-ra $j(a)(\alpha)$ alakú, sőt, az a-ra tett kofinalitási feltétel miatt α-t tudjuk a λ és κ utáni első EE számosságnál kisebbnek választani (hiszen minden ξ EE számosságra $\xi = \beth_\xi$).

Most jöhet az FFF tétel: válasszunk egy a tétel által adott $j^* : V[f] \to M[j^*(f)] = M[j(f)]$ beágyazást $\alpha = j^*(f)(\kappa)$ tulajdonsággal. Mivel α-t sikerült az FFF tétel értelmében kicsinek választani, így mind a 4 pontot használhatjuk, s ezzel a mostani tétel 2., 3., 4. pontja világos. 1.-hez pedig:

$$j^*(l)(\kappa) = j^*(a)^f_{j^*(f)(\kappa)} = j(a)^f_\alpha = \dot{z}^f = z$$

Itt az első egyenlőség l definíciója miatt áll. A második azért igaz, mert a V-beli és ott j illetve j^* megegyezik, $j^*(f)(\kappa)$-t pedig α-nak válassztottuk. A harmadik egyenlőség oka, hogy az α-adik elem $j(a)$-ban $\dot{z}$, a negyedik pedig triviális. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Most pedig nézzük, mit ad a tétel konkrét nagy számosságok esetében:

3.5 Tétel Legyen V-ben κ mérhető számosság, melyre teljesül a $2^\kappa = \kappa^+$ egyenőség. Ekkor bármely $j : V \to M$ κ-n értelmezett mérték szerinti ultrahatvány beágyazásra, és bármely $z \in V[f]$, $|TC^{V[f]}(z)| < \kappa^+$ esetén (ahol f egy fast function), j felemelhető $V[f] \to M[j(f)]$ alakúvá úgy, hogy $j(l)(\kappa) = z$, ahol l egy $V[f]$-beli általánosított Laver függvény. A felemelés megtörténhet egy κ-n értelmezett normális mérték szerinti ultrahatvány beágyazásként.

Bizonyítás: Az előző fejezetben a fast function forszolás alaptulajdonságainál láttuk, hogy egy olyan mérhető számosság, amelynél teljesül ÁKH, mérhető marad a fast function forszolás után is, sőt ennek bizonyítása során kiszámoltuk, hogy ilyenkor az M-beli $j(\kappa)$ V-beli számossága kisebb κ^+-nál, így $j(f) : j(\kappa) \to j(\kappa)$ miatt $j(f)(\kappa)$

kisebb, mint $j(\kappa)$, ami kisebb, mint κ^+. Tehát az előző tételbeli λ^+ most κ^+. Ezzel a tétel nagy részét megkaptuk.

Annyi maradt hátra, hogy mitől lehet normális mérték szerinti a beágyazás, hiszen automatikusan az előző tétel csak "sima" mérték szerinti beágyazást ad. Ehhez azt kéne látni, hogy minden $M[j(f)]$-beli $j(h)(\kappa)$ alakban áll elő valamilyen $h \in V[f]$ függvényre. Viszont tudjuk, hogy mivel az eredeti j egy μ mérték szerinti beágyazás volt ezért minden M-beli $j(g)(\alpha)$ alakú, ahol $g \in V$ függvény, α pedig $[id]_\mu$. Mivel a $j(h)(\kappa)$ alakban előálló halmazok elemi részét képezik $M[j(f)]$-nek (egy ehhez hasonló állítást kiszámoltunk a 2.5 tétel bizonyításánál), ezért csak azt kell látnunk, hogy α előáll ilyen alakban. De $\alpha = [id]_\mu < j(\kappa)$ miatt $TC^{V[f]}(\alpha) < \kappa^+$, s így az általánosított Laver-függvény 3.4 tételének gondolatmenete alkalmazható egy α-t kódoló névvel, s az így kapott függvény adja α keresett alakú előállítását.

Definíció: Egy $V[G]$ generikus bővítés **gyenge** (mild), ha minden $V[G]$-beli κ-nál öröklődően kisebb (azaz a tranzitív lezártjának a mérete kisebb, mint κ) halmaz egy κ-nál kisebb méretű kényszerképzettel adódott V-hez.

megjegyzés: A fast function forszolás ilyen, mivel a farok-kényszerképzet $F_{\lambda,\kappa} \leq \lambda$-zárt.

3.6 Lemma Minden olyan gyenge generikus $V[G]$ bővítésben előforduló θ-erősen kompakt mérték, ahol $\theta^{<\kappa} = \theta$, izomorf egy sztenderd θ-erősen kompakt mértékkel, ami $P([\theta]^{<\kappa})^V$-n van értelmezve.

Bizonyítás: Legyen $j : V[G] \to M[j(G)]$ egy $P([\theta]^{<\kappa})^{V[G]}$-n értelmezett η finom mérték szeinti ultrahatvány. Mivel két mérték pontosan akkor izomorf, ha ugyanazt az elemi beágyazást indukálják (ld. pl. [Hamkins 97]), ezért elég megmutatni, hogy j egy $P([\theta]^{<\kappa})^V$-n értelmezett finom mérték szerinti beágyazás.

Legyen $s = [id]_\eta$. Ekkor $j''\theta \subset s$, hiszen a finomság szerint tetszőleges $\alpha < \theta$-ra az α-t tartalmazó részhalmazok η-beliek, azaz id kordinátái η-sokszor tartalmazzzák α-t, így j elemisége és a Los-lemma miatt tényleg $j(\alpha) \in s$.

Azt is tudjuk még, hogy $|s|^{M[j(G)]} < j(\kappa)$, hiszen id minden koordinátája egy κ-nál kisebb halmaz, tahát megint a Los-lemma és j elemisége miatt $s = [id]_\eta$ egy $j(\kappa)$-nál kisebb halmaz. Alkalmazhatjuk tehát $j(G)$ gyengeségét (a gyengeség formulával definiálható, így j elemisége megőrzi azt G-ről $j(G)$-re), s kapjuk, hogy $s \in M[G^*]$ valamilyen G^* P^*-generikusra, ahol P^* mérete egy $|s|$-nél nagyobb, $j(\kappa)$-nál kisebb γ.

Eszerint a kényszerképzet szerint s-nek tehát van egy γ-nál kisebb méretű $\dot{s}$ neve. Ekkor az $s^* = \{\alpha | \exists p \in P^* : p \Vdash \dot{\alpha} \in \dot{s}\}$ nyilvánvalóan egy M-beli ($M[G]$-ben) s-et tartalmazó halmaz, mely, mivel s^*-nak legfeljebb γ sok eleme van, s ezek első koordinátjáról csak γ sok dolgot lehet forszolni (lévén P^* γ méretű, s így triviálisan γ^+-cc), maga is γ nagyságú.

Tudjuk, hogy $j''\theta \subset s^*$, mivel ez már s-re is igaz és s^* bővebb s-nél. Ez a tulajdonság megmarad akkor is, ha s-ből elhagyjuk κ-t, hiszen $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ miatt nincs rendszám, aminek képe κ volna.

Mivel $\theta^{<\kappa} = \theta$, ezért η izomorf egy θ-n értelmezett mértékkel. Ha tekintjük az izomorfia j-képét, s itt $s = [id]_\eta$ "párját", akkor (tekintve, hogy $M[j(G)] = \{j(h)(s)|h \in V[G]\}$) adódik, hogy valamilyen $\delta < j(\theta)$-ra $M[j(G)] = \{j(h)(\delta)|h \in V[G]\}$. Végül s^*-hoz adjunk (ha szükséges) egy legnagyobb elemet úgy, hogy az valamilyen definiálható párzó függvénynél egy $\langle\beta,\delta\rangle$ pár őse legyen, ahol $\beta < j(\theta)$.

Legyen ezekután η^* az s^*-gal j-n keresztül indukált mérték, azaz $X \in \eta^* \leftrightarrow s^* \in j(X)$. Ez mérték, hiszen j elemisége miatt X és $P([\theta]^{<\kappa}) \setminus X$ közül pontosan az egyik tartalmazza s^*-ot. A felszállóság nyilvánvaló. A κ-teljesség azért teljesül, mert egy α-s sorozat j-képe egy $j(\alpha)$-s sorozat, de ha κ-nál kevesebb halmaz metszetének a képét nézzük, akkor $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ miatt ez ugyannakkora metszet lesz, mint az eredeti volt, tehát a metszet képe a pontonkénti képek metszete, ami nyilván tartalmazza s^*-ot, ha külön-külön minden kép tartalmazza. η^* finom is, mivel tetszőleges $\alpha < \theta$-ra $X_\alpha = \{x \in P([\theta]^{<\kappa})|\alpha \in X\}$ j-képe a $j(\alpha)$-ttartalmazó halmazok halmaza, de $j''\theta \subset s^*$ miatt s^* is ilyen, tehát $X \in \eta^*$. Sőt, $s^* \in M$ miatt η^* $P([\theta]^{<\kappa})$-ra koncentrált.

Állítás η izomorf η^*-gal

A bevezető fejezetben írtak szerint az η^* szerinti ultrahatványnál a képhalmaz $\mathbf{X} = \{j(h)(s^*)|h \in V[G]\}$ lesz, ami (a 2.5 FFF tétel számolása szerint) elemi része $M[j(G)]$-nek. az ultrahatványok mgegyezéséhez, s így (a bizonyítás elején tett megjegyzés értelmében) a mértékek izomorfiájához a fordított irányú tartalmazást kell belátni.

Az s^* legnagobb elemére tett feltevés szerint (és mert $\mathbf{X}$ elemi rész) $\delta \in \mathbf{X}$, s mivel $\mathrm{ran}(j) \subset \mathbf{X}$ ezért $\mathbf{X}$ elemi részsége és $M[j(G)]$ "δ-s előállítása" miatt tényleg $M[j(G)] \subset \mathbf{X}$, ahogy kívántuk.

A tétel bizonyításából csak annyi maradt, hogy belássuk η^* sztenderd. Ez azért van így, mert κ a legkisebb nem s^*-beli rendszám, hiszen $j''\theta \subset s^*$ miatt $\kappa \subset s^*$, s^*-ból pedig (ha eredetileg benne volt) kivettük κ-t.

3.7 Tétel Ha a 3.4 tétel j beágyazása olyan θ-erősen kompakt beágyazás, amelyre $\theta^{<\kappa} = \theta$, akkor a tételbeli j^* beágyazás is megválasztható θ-erősen kompaktként.

Bizonyítás: Mint láttuk, a fast function forszolás gyenge, így a j által generált mértékre alkalmazható az előző lemma. Az így kapott sztenderd V-beli halmazra koncentrált μ mérték esetén viszont alkalmazható e fejezet fő 3.4 tételének 3. és 4. pontja: olyan μ^* mértéket kapunk, melyre $\mu^* \cap V = \mu \cap V$ és $[id]_{\mu^*} = [id]_\mu$, illetve a beágyazásnál $j_{\mu^*} \restriction V = j_\mu \restriction V$.

Igen ám, de egy η mérték pontosan akkor θ-erősen kompakt, ha $[id]_\eta$ egy $j_\eta(\kappa)$-nál kisebb fedése $j_\eta''\theta$-nak. Itt a fedési tulajdonság biztosítja a finomságot (ahogy például az előző lemma bizonyításában), a $j_\eta(\kappa)$-nál kisebbség pedig azt, hogy θ-nak κ-nál kisebb részhalmazain van értelmezve a mérték.

μ-nek tehát megvannak e tulajdonságai, s a 3.4 tétel fent említett 3. és 4. pontja miatt μ^*-nak is rendelkeznie kell ezekkel, hiszen sem θ pontonkénti képe sem $[id]$ nem változik.

4 A lottóhúzás

Elérkeztünk tehát fő témánkhoz, a *Lottery Preparation*-höz. Ez lesz az a technika, aminek a segítségével különböző nagy számosságokat elpusztíthatatlanná tehetünk bizonyos típusú kényszerképzetekkel való forszolásra nézve. A most definiálandó fogalom az, ami miatt az egész procedúrát a lottózáshoz hasonlítjuk.

Definíció: Kényszerképzetek egy A halmazának **lottóösszegén** az

$$\times A = \{\langle Q, p\rangle | Q \in A \& p \in Q\} \cup \{1\}$$

alaphalmazú kényszerképzetet értjük, ahol 1 minden más feltételnél nagyobb, egyébként $\langle Q', p'\rangle \leq \langle Q, p\rangle$ akkor és csak akkor, ha $Q' = Q$ és $p' \leq p$.

1.megjegyzés: Az üreshalmaz lottóösszege a definíció alapján a triviális $\{1\}$ kényszerképzet.

2.megjegyzés: Egy lottóösszeggel való forszolás tényleg azt csinálja, ami a neve: mivel két feltétel csak úgy lehet kompatibilis, ha azonos Q-ból valók (vagy ha az egyik a legnagyobb elem), ezért a generikus filter (amiben definíció szerint minden elem kompatibilis) csak azonos Q-beli feltételekből állhat, azaz a generikus filter lottóhúzást rendez A kényszerképzetei közt, majd a győztessel forszol.

Egy κ számosság $f : \kappa \to \kappa$ parciális függvény szerinti lottery preparation-je egy κ-hosszú iteráció lesz, amelynél sok $\gamma < \kappa$ helyen bizonyos *megengedett* kényszerképzetek lottóösszegével forszolunk. Általában κ alatt nagyon sokféle "győztes" kényszerképzetünk lesz, ami lehetővé teszi majd számunkra, hogy az iteráció egy j elemi beágyazás szerinti képénél (κ mindig valamilyen nagy számosság lesz!) a κ helyen olyan "győztes" kényszerképzetet válasszunk bele a generikus filterbe, amilyen épp megfelelőnek látszik.

Tehát: a γ helyen egy Q kényszerképzet **megengedett**, ha minden $\delta < \gamma$ esetén $< \delta$ stratégiailag zárt. Vegyük észre, hogy ez $\gamma = \beta + 1$ esetekben, ahol β számosság nem ugyanaz, mint a $< \gamma$ stratégiailag zártság, mivel a mi definíciónkban a második játékosnak nem kell tudnia a β-adik lépésben is feltételt választania.

Ez a megengedettségi feltevés azért fontos, mert így a majdani faktorizálásnál a "farok" elég zárt lesz ahhoz, hogy ott már "ne történjen semmi".

Definínió: κ $f : \kappa \to \kappa$ parciális függvény szerinti **lottery preparation**-je az a κ hosszú iteráció, ahol direkt limesz van EE helyeken és inverz limesz egyébként. Egy γ helyen nemtriviális forszolás van, ha $\gamma \in \mathrm{dom}(f)$ és $f''\gamma \subset \gamma$. Ilyenkor Q_γ a V^{P_γ}-beli lottóösszege minden γ helyen megengedett $H(f(\gamma)^+)$-beli kényszerképzetnek, ahol $H(\alpha)$ azon halmazok halmaza, melyek tranzitív lezártjának számossága kisebb α-nál.

4.1 Faktorizációs Lemma Bármely $\gamma < \kappa$ esetén, amely zárt f-re nézve (azaz $f''\gamma \subset \gamma$), P_κ $P_\gamma * P_{\gamma,\kappa}$ alakban faktorizálható, ahol P_γ az $f \restriction \gamma$ parciális függvénnyel definiált lottery preparation, míg $P_{\gamma,\kappa}$ a V^{P_γ}-beli lottery preparation, amit az $f \restriction [\gamma, \kappa)$ parciális függvény segítségével definiálunk.

Bizonyítás: A különböző iterációk faktorizációs bizonyításai hosszadalmas, "számolós" rekurziós bizonyítások, melyek (egyik) nehézsége a tartók "összeegyeztetése", azaz annak belátása, hogy P_δ és $P_{\gamma+\beta}$ (ahol $\gamma+\beta=\delta$) "ugyanazon" feltételekből áll. A bizonyítást mellőzzük, hasonlók megtalálhatók pl. Baumgartner cikkében illetve Jech könyvében.

4.2 Lemma Ha csak γ fölött van nemtriviális lépés a lottery preparation-ben, akkor a kényszerképzet $\leq \gamma$ stratégiailag zárt.

Bizonyítás: Mivel minden $\alpha > \gamma$ lépésnél a kényszerképzet $\leq \gamma$ stratégiailag zárt, így van egy σ_α név egy győztes stratégiára. Ha van tehát egy részjátékállásunk, azaz egy $\langle p^\beta | \beta < \gamma' \rangle$ csökkenő sorozatunk valamilyen $\gamma' < \gamma$-ra, ahol $p^\beta = \langle \dot{p}^\beta_\alpha | \gamma < \alpha < \kappa \rangle$ (és persze elötte a sok 1-es), akkor alkalmazhatjuk a σ_α-kat koordinátánként, azaz tekintsük a $\dot{q}_\alpha = \sigma_\alpha(\langle \dot{p}^\beta_\alpha | \beta < \gamma' \rangle)$ neveket, és legyen $\sigma(\langle p^\beta | \beta < \gamma' \rangle) = \langle \dot{q}_\alpha | \gamma < \alpha < \kappa \rangle$. Mivel a σ_α-k megoldanak minden limeszlépést γ-ig, így (rekurzívan látható) σ is, tehát a bizonyítás kész.

megjegyzés: E két lemma következménye, hogy ha $P_\gamma * P_{\gamma,\kappa}$ alakban faktorizálunk, akkor $P_{\gamma,\kappa} < \gamma$ stratégiailag zárt V^P_γ-ban. Az is látható még, hogy ha egy $j : V \to M$ beágyazást szeretnénk felemelni, és Q κ-megengedett $j(P)$-nél, akkor ha egy olyan p feltételt nézünk, ami κ-nál Q-t választja, akkor p alatt $j(P) \restriction p = P * Q * P_{farok}$ alakban faktorizálhatunk, ahol P_{farok} csupa triviális lépésből áll $j(f)(\kappa)$-ig. Ha tehát f-et például egy *fast function*-nek választjuk, ahol $j(f)(\kappa)$ nagyon nagy lehet, akkor P_{farok} nagyon zárt lesz. Ez az észrevétel később még a hasznunkra válhat.

4.3 Tétel Egy κ lottery preparation-je megőrzi κ erősen elérhetetlenségét.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy κ szingulárissá válik $V[G]$-ben. Legyen $\gamma \in \mathrm{dom}(f)$ zárt f-re, és $\gamma > \delta = cf(\kappa)^{V[G]}$ (ha nincs ilyen γ, akkor dom$f$ korlátos κ-ban, így $|P| < \kappa$, tehát κ marad reguláris). A faktorizációs lemmánk szeint $P_\gamma * P_{\gamma,\kappa}$ alakban faktorizálhatunk. Mivel $|P_\gamma| < \kappa$, így itt κ kofinalitása nem változhat, $P_{\gamma,\kappa}$ viszont $\leq \delta$ stratégiailag zárt, így itt nincs új δ-s halmaz, tehát κ kofinalitás nem eshet le δ-ra, ellentmondás.

Hasonlóan P_κ-val forszolás után nem lehet $2^\delta \geq \kappa$ semmilyen $\delta < \kappa$-ra, mert előtte nem így volt, és a kicsi P_γ csak kevés új halmazt adhat, $P_{\gamma,\kappa}$ viszont a zártsága miatt egyáltalán nem ad új $x \subset \delta$-t.

4.4 Tétel Ha a κ mérhető számosságra $2^\kappa = \kappa^+$, akkor az ő lottery preparation-je után κ továbbra is mérhető marad.

Bizonyítás: A "fast function" forszolás mérhetőségmegőrző bizonyítását kopírozzuk. Azt mutatjuk meg, hogy bármely f parciális függvényhez definiált lottery preparation forszolás generikus bővítésben egy alapmodellbeli $j : V \to M$ beágyazás felemelhető $V[G]$-ben. Ehhez faktorizáljuk $M[G]$-ben (mivel V bővebb modell, mint M, ezért a $V - P$-generikus G $M - P$-generikus is!) $j(P)$-t $P * P_{farok}$ alakban, ahol P_{farok} a $j(f) \restriction [\kappa, j(\kappa))$ segítségével definiált lottery preparation. Egy olyan $p \in j(P)$ feltétel alatt, amely a κ-adik lépésnél a triviális kényszerképzetet választja $P_{farok} \leq \kappa$

stratégiailag zárt $M[G]$-ben (a 4.2 lemma miatt).

Vegyük észre, hogy $V[G]$-ben $M[G]^\kappa \subset M[G]$, hiszen ha $\langle x_\alpha | \alpha < \kappa\rangle = X \in V[G], X \subset M[G]$, akkor minden x_α-nak van egy M-beli $\dot{x}_\alpha$ neve. Az $\dot{X} = \langle\langle \dot{x}_\alpha, 1\rangle | \alpha < \kappa\rangle$ M-beli név, mivel $M^\kappa \subset M$. De $\dot{X}^G$ nyilvánvalóan X. Másrészt $j(\kappa)^+ = j(\kappa^+)$ (elemiség!) elemei a V-beli $\kappa \to \kappa^+$ függvények képei; ilyenből (a $2^\kappa = \kappa^+$ feltétel miatt) $\kappa^{+\kappa} = 2^{\kappa^2} = 2^\kappa = \kappa^+$ van, így $|j(\kappa^+)|^V = \kappa^+$. Tehát $V[G]$-ben egy κ^+-os sorozatban felsorolva P_{farok} összes sűrű részhalmazát diagonalizálhatunk limeszlépéseknél felhasználva a P_{farok}-hoz tartozó nyerő stratégiát. Azaz elkészíthetünk $V[G]$-ben egy $M[G]-P_{farok}$-generikus filtert, így a bevezető rész 1.9 lemmája szerint j tényleg felemelhető, s ezért κ mérhető marad.

Emlékeztetőül: egy $f : \kappa \to \kappa$ parciális függvényről azt mondjuk, hogy rendelkezik a **Menas tulajdonsággal**, ha minden λ-ra van olyan μ finom mérték $P([\lambda]^{<\kappa})$-n, mely szerinti $j : V \to M$ ultrahatvány beágyazásnál $j(f)(\kappa) \geq |[id]_\mu|^M$.

4.5 Tétel Ha egy erősen kompakt κ számosság lottery preparation-jét egy Menas tulajdonsággal rendelkező f parciális függvény szerint készítjük el, akkor κ a generikus bővítésben is erősen kompakt marad.

Bizonyítás: Megint a "fast function" forszolás idevonatkozó bizonyítása alapján járunk el, és megmutatjuk, hogy minden alapmodellbeli erősen kompaktsági mérték kiterjed a bővítésben. Legyen tehát $G \subset P$ V-generikus az f szerinti lottery preparation-nél, $\lambda \geq \kappa$ és μ_0 egy finom mérték $P([\lambda]^{<\kappa})$-n. Legyen még $\theta \geq 2^{\lambda^{<\kappa}}$, és válasszunk egy f Menas tulajdonságát tanusító η finom mérték szerinti $j : V \to M$ θ-erősen kompakt beágyazást.

Mint a "fast function"-os bizonyításnál most is az erősen kompakt beágyazások lefedési tulajdonsága miatt van olyan $Y \in M$, melyre $j''\mu_0 \subset Y$ és $|Y|^M < j(\kappa)$. Egy elmetszés árán feltehető, hogy $Y \subset j(\mu_0)$, s emiatt $\cap Y \in j(\mu_0)$ (hiszen μ_0 κ-teljessége miatt $j(\mu_0)$ $j(\kappa)$-teljes). Ekkor bármely $s_0 \in Y$-ra $X \in \mu_0 \leftrightarrow s_0 \in j(X)$ (ha $X \in P([\lambda]^{<\kappa})^V$), hiszen X és X komplementere közül az elemiség miatt pontosan az egyik tartalmazza s_0-t, márpedig $X \in \mu_0$ esetén $j(X) \in j''\mu_0 \subset Y$, s így s_0, ami Y minden elemének eleme ($s_0 \in \cap Y$), eleme speciálisan $j(X)$-nek is. Tudjuk, hogy $j''\lambda \subset s_0$, mivel a finomság miatt tetszőleges $\alpha < \lambda$ esetén λ α-t tartalmazó κ-nál kisebb részhalmazainak a halmaza μ_0-beli, így $j(\lambda)$ $j(\alpha)$-t tartalmazó reészhalmazainak halmaza $j(\mu_0)$-beli, tehát lefedi Y, s így $\cap Y$-nak tartalmaznia kell $j(\alpha)$-t.

Legyen most $s = [id]_\eta$ és $\delta = |s|^M$. Ekkor $j''\theta \subset s$ η finomsága miatt ($j(\alpha) \in s$ a Los-lemma miatt akkor és csak akkor, ha η majdnem minden $H \in [\theta]^{<\kappa}$-ra $\alpha \in H$, ez pedig pont a finomság). Emiatt $\theta \leq \delta$, $s \in j([\theta]^{<\kappa}) = [j(\theta)]^{<j(\kappa)}$ miatt pedig (id-nél minden érték θ egy κ-nál kisebb részhalmaza, így s $j(\theta)$ egy $j(\kappa)$-nál kisebb része) $\delta < j(\kappa)$.

Válasszunk $j(P)$-ben egy olyan feltételt, amely a κ-adik lépésnél a triviális kényszerképzetet "lottózza" (a trivi kényszerképzet bármennyire stratégiailag zárt és öröklődően véges, ezért megengedett a κ-adik lépésnél). A Menas tulajdonság miatt $j(f)(\kappa) > |[id]_\eta| = \delta$, így mivel nemtriviális forszolás csak $j(f)$-re zárt helyen lehet, a következő ilyen δ után van. Speciálisan tehát p alatt a forszolás $P * P_{farok}$ alakú, ahol P_{farok} δ stratégiailag zárt $M[G]$-ben.

Forszoljunk most úgy, hogy p benne van a $G_{farok} \subset P_{farok}$ $V[G]$-generikus filterben. Ekkor $V[G][G_{farok}]$-ban(!) a bevezető fejezet 1.9 lemmája szerint j kiterjed $V[G] \to M[j(G)]$-vé, ahol $j(G) = G * G_{farok}$. Definiáljuk μ_0^*-ot a következőképpen: $X \in V[G]$ esetén $X \in \mu_0^* \leftrightarrow s_0 \in j(X)$. j elemisége miatt vagy X vagy X komplementere tartalmazza s_0-t, így μ_0^* megmér minden halmazt. Mivel j ugyanaz marad V-n, ezért μ_0^* kiterjeszti μ_0-t, és $j''\lambda \subset s_0$ miatt μ_0^* finom lesz (ha X az α-t tartalmazó részhalmazok halmaza, akkor $j(X)$ a $j(\alpha)$-t tartalmazóké, de s_0 is ilyen, így benne van $j(X)$-ben). Azt kell tehát megmutatni, hogy μ_0^* $V[G]$-beli is (nemcsak $V[G][G_{farok}]$-beli).

Mivel $|P| = \kappa$, ezért $P([\lambda]^{<\kappa})^{V[G]}$-beli halmazok V-beli szép neveiből csak $2^{\lambda^{<\kappa}}$ van, ezért θ választása folytán felsorolhatjuk őket $u = \langle \dot{X}_\alpha | \alpha < \theta \rangle$ alakban. Az M-beli $j(u)$ s-re vett megszorítása ($j(u) \restriction s = \langle \dot{Y}_\beta | \beta \in s \rangle$) szintén M-beli (hiszen s is az és így $j(u) \restriction s$-t ilyenekből definiáltuk), ahol $\dot{Y}_{j(\alpha)} = j(\dot{X}_\alpha)$ (hiszen $\dot{X}_\alpha$ az u α-adik koordinátája, akkor az ő j-képe $j(u)$ $j(\alpha)$-adik koordinátája).

Legyen végül $t = \{\beta \in s | s_0 \in \dot{Y}_\beta^{j(G)}\}$. Ekkor persze $t \subset s$ és $t \in M[j(G)]$ (mivel M-beliekből és $j(G)$-ből definiáltuk). De s δ nagyságú, P_{farok} pedig δ stratégiailag zárt, ezért nem keletkezhet új része a forszolás második részében, ezért t $M[G]$-beli, s így $V[G]$-beli is.

$$\dot{X}_\alpha^G \in \mu_0^* \leftrightarrow s_0 \in j(\dot{X}_\alpha^G) = j(\dot{X}_\alpha)^{j(G)} = \dot{Y}_{j(\alpha)}^{j(G)} \leftrightarrow j(\alpha) \in t$$

(A két $\leftrightarrow$ μ_0^* illetve t definíciója miatt, az első egyenlőség j felemelésének a definíciója miatt, a második pedig az előző bekezdés utolsó megjegyzése miatt.) Azaz μ_0^* $V[G]$-ben definiálható t-ből és $j \restriction \theta$-ból, tehát ő is $V[G]$-beli.

A fejezet lezárásaként felsorolom azokat a tételeket, amiket Hamkins bebizonyít nagy számosságok megmaradásával kapcsolatban:

Tétel(ek)

- Egy κ lottery preparation-je megőrzi e számosság gyengén kompaktságát.

- Egy erős számosság erős Menas tulajdonsággal rendelkező parciális függvény szerinti lottery preparation-je után a számosság erős marad.

- Egy szuperkompakt számosság szuperkompakt Menas tulajdonsággal rendelkező parciális függvény szerinti lottery preparation-je során a számosság szuperkompakt marad.

- Van olyan feltétel, hogy ha ez benne van a generikus filterben, akkor a generikus bővítésben nem keletkezik új mérhető, Woodin, gyengén kompakt, erős, erősen kompakt, szuperkompakt számosság.

5 Elpusztíthatatlanság

Ebben a fejezetben tehát azokról a tételekről lesz szó, melyek a lottery preparation értelmét adják, azaz melyek kimondják, hogy egy κ nagy számosság lottery preparation-je után milyen kényszerképzetekkel való forszolások azok, amelyek biztos nem ölhetik meg κ nagy számosság tulajdonságát. Ilyen típusú eredményt először Laver [11] bizonyított szuperkompakt számosságokra, azóta pedig Gitiknek és Shelahnak [3] voltak ilyen tételei erős számosságokkal kapcsolatban. A lottery preparation nagy előnye, hogy "bármilyen" nagy számosság feltevésnél alkalmazható (még ha mi a bizonyításokat csak néhány esetben közöljük is).

A fejezet során $V[G]$ jelöli κ egy Menas tulajdonsággal rendelkező f parciális függvény szerinti lottery preparation-je utáni generikus bővítést. (f lehet például egy előzőleg fast function forszolással kapott parciális függvény.)

5.1 Tétel Ha κ erősen kompakt számosság, akkor lottery preparation-je után κ elpusztíthatatlanná válik az $\mathrm{Add}(\kappa,1)$ kényszerképzettől.

Bizonyítás: Legyen $g \subset \kappa$ $V[G]$-$\mathrm{Add}(\kappa,1)^{V[G]}$-generikus (ahol $V[G]$ a fenti megjegyzés szerinti.) Azt mutatjuk meg, hogy minden V-beli finom μ_0 mérték $P([\lambda]^{<\kappa})$-n kiterjed $V[G][g]$-ben. Legyen $\theta \geq 2^{\lambda^{<\kappa}}$ és $j : V \to M$ egy f Menas tulajdonságát mutató beágyazás, azaz egy olyan $P([\theta]^{<\kappa})$-n finom η mérték szerinti ultrahatvány, amelynél $j(f)(\kappa) > \delta = |s|$, ahol $s = [id]_\eta$.

Tekintsünk egy olyan $p \in j(P)$ feltételt (P a lottery preparation, tehát $P \in V$ és $G \subset P$), amely a κ-adik lépésnél $\mathrm{Add}(\kappa,1)^{M[G]}$-t választja (ami $M[G]$ zártsága miatt megegyezik $\mathrm{Add}(\kappa,1)^{V[G]}$-vel). p alatt a forszolás $P{*}\mathrm{Add}(\kappa,1) * P_{farok}$ alakú, ahol $P_{farok} \leq \delta$ stratégiailag zárt $M[G][g]$-ben, hiszen $j(f)(\kappa) > \delta$, tehát a lottery preparation következő nemtriviális lépése csak δ után lehet. Ha G_{farok} $V[G][g] - P_{farok}$-generikus, akkor a bevezető fejezet 1.9 lemmája miatt j ($V[G][g][G_{farok}]$-ban!) kiterjed $V[G] \to M[j(G)]$ beágyazássá, ahol persze $j(G) = G * g * G_{farok}$.

Nézzük most a $j(\mathrm{Add}(\kappa,1))^{V[G]}$ $=\mathrm{Add}(j(\kappa),1)^{M[j(G)]}$ kényszerképzetet. A $g \subset \kappa$ halmaz ennek egy feltétele, hiszen $\kappa < j(\kappa)$. Legyen ezért h egy g-t tartalmazó generikus filter. Megint az 1.9 lemmánk szerint j ($V[G][g][G_{farok}][h]$-ban) továbbemelhető $V[G][g] \to M[j(G)][j(g)]$ beágyazássá, ahol $j(g) = h$

Innentől a bizonyítás menete ismerős lesz korábbi tételeinkből: az erősen kompakt számosságok fedési tulajdonsága szerint van $Y \in M$ úgy, hogy $j''\mu_0 \subset Y \subset j(\mu_0)$ és $|Y|^M < j(\kappa)$. Ekkor bármely $s_0 \in \cap Y \in j(\mu_0)$-ra igaz, hogy $X \in \mu_0 \leftrightarrow s_0 \in j(X)$. Egy ilyen s_0-lal legyen μ_0^* az a $V[G][g]$-mérték, amelyet az $X \in \mu_0^* \leftrightarrow s_0 \in j(X)$ képlettel definiálunk, ahol j most már a felemelt beágyazás. Be kell látnunk, hogy $\mu_0^* \in V[G][g]$. Ehhez (szokás szerint) legyen $u = \langle \dot{X}_\alpha | \alpha < \theta \rangle$ $[\lambda]^{<\kappa}$ $V[G][g]$-beli részhalmazai neveinek egy felsorolása, t pedig a $\{\beta \in s | s_0 \in \dot{Y}_\beta^{j(G)*j(g)}\}$ halmaz, ahol $j(u) \restriction s = \langle \dot{Y}_\beta | \beta \in s \rangle$. Mivel $t \subset s$ és $P_{farok} \leq \delta$ stratégiailag zárt, ezért $t \in M[G][g]$, s ezért persze $t \in V[G][g]$.

$$\dot{X}_\alpha^{G*g} \in \mu_0^* \leftrightarrow s_0 \in j(\dot{X}_\alpha^{G*g}) = j(\dot{X}_\alpha)^{j(G)*j(g)} = \dot{Y}_{j(\alpha)}^{j(G)*j(g)} \leftrightarrow j(\alpha) \in t$$

(Az egyenlőségek és ekvivalenciák bizonyítása ugyanaz, mint a lottery preparation κ erősen kompaktságának megőrzéséről szóló 4.5 tételben.) Azaz μ_0^*-ot definiáltuk t és $j \upharpoonright \theta$ segítségével, melyek mindketten $V[G][g]$-beliek, így μ_0^* is.

5.2 Lemma Ha μ normális, finom mérték $P([\lambda]^{<\kappa})$-n, η finom mérték $P([\theta]^{<\kappa})$-n, ahol $\theta \geq \lambda$ és $\mathrm{cf}(\theta) \geq \kappa$, akkor a $\mu \times \eta$ szorzatmérték izomorf egy finom mértékkel $P([\theta]^{<\kappa})$-n, és a hozzátartozó θ-erősen kompakt $j : V \to M$ beágyazás zárt a λ-sorozatokra.

Bizonyítás: Legyen $j_\mu : V \to M_\mu$ a μ szerinti ultrahatvány, $k : M_\mu \to M$ pedig a $j_\mu(\eta)$ szerinti ultrahatvány. Könnyen számolhatóan $j = k \circ j_\mu$.

Mivel μ normális, finom mérték, ezért M_μ minden eleme $j_\mu(h)(j_\mu''\lambda)$ alakú valamilyen V-beli h függvénnyel, M elemei pedig $j_\mu(\eta)$ finomsága miatt $k(F)(s)$ alakúak, ahol $F \in M_\mu$ függvény, s pedig $[id]_{j_\mu(\eta)}$. Mivel $j = j_\mu \circ k$ ezért $k(j_\mu''\lambda) = j''\lambda$, tehát M minden eleme $j(h)((j''\lambda), s)$ alakú, ahol h V-beli függvény.

Legyen t $j(P([\theta]^{<\kappa}) = P([j(\theta)]^{<j(\kappa)})$ egy olyan eleme, melyet úgy kapunk, hogy s egy példányát M-ben $j''\lambda$ fölé helyezzük. Ezt megtehetjük, mert $j(\kappa) > \lambda$ (mivel már $j_\mu(\kappa) > \lambda$), és $\mathrm{cf}(\theta) \geq \kappa$ miatt, $\mathrm{cf}(j(\theta)) \geq j(\kappa)$, tehát "van hely" s-nek. t-ből viszont visszanyerhetjük $j''\lambda$-t és s-t is, így M elemei $j(h)(t)$ alakúak.

Ekkor viszont (a már többször látottak szerint) j az $X \in \eta^* \leftrightarrow t \in j(X)$ képlettel definiált mérték szerinti beágyazás, és mivel két mérték pontosan akkor izomorf, ha az általuk generált beágyazás megegyezik, így η^* és $\mu \times \eta$ izomorf.

Mivel η finom, ezért $j_\mu(\eta)$ is az, s ezért $k''j_\mu(\theta) \subset s$, de $j = k \circ j_\mu$ miatt ez azt jelenti, hogy $j''\theta \subset s \subset t$ (ez utóbbi t definíciója miatt), tehát η^* finom mérték $P([\theta]^{<\kappa})$-n, s így j tényleg θ-erősen kompakt beágyazás.

Azt kell még látnunk, hogy M zárt a λ-s sorozatokra. Egy λ-s sorozat M elemeinek előállítása miatt így néz ki: $\langle j(f_\alpha)(t) | \alpha < \lambda \rangle$. De ha $F(\sigma, \tau) = \langle f_\alpha(\sigma) | \alpha \in \tau \rangle$, akkor definíció szerint a sorozat $j(F)(t, j''\lambda)$ alakú, tehát tényleg M-beli.

Az iménti lemma segíteni fog abban, hogy egy most definiálandó újabb kényszerképzet-osztályra nézve be tudjuk látni κ elpusztíthatatlanságát.

Definíció: Legyen S egy κ-n értelmezett mértékben. Ekkor a **kofinális zárt kényszerképzet** (jelben Q_S) feltételei c korlátos zárt részhalmazai κ-nak, melyekre $c \cap$EE $\subset S$, a rendezés a végbővítés.

1.megjegyzés: Ha C a generikus filter uniója, akkor C kofinális zárt κ-ban, hiszen bármilyen feltételt tudunk végbővíteni bármilyen nagy $\alpha < \kappa$ után, hiszen nem EE rendszámot megkötés nélkül tehetünk a feltételekbe, zárt pedig azért lesz C, mert ha mondjuk β torlódási pontja C-nek akkor egy olyan generikusbeli feltétel, amely tartalmaz β-nál nagyobb rendszámot, az a végbővítés miatt már tartalmazza a β-nál kisebb C-belieket is, s mivel a feltételek zártak, ezért β-t is.

2.megjegyzés: Bármilyen $\beta < \kappa$ esetén azok a feltételek, amelyeknek van β-nál nagyobb eleme $\leq \beta$-zárt sűrű nyílt halmazt alkotnak. Ebből a sűrű nyíltat láttuk az előbb, a zártság azért igaz, mert egy csökkenő β-s sorozatnak vehetjük az unióját hozzáadva a szuprémumát, mivel a szuprémum nagyobb β-nál, és elértük egy β-s sorozattal, ezért nem reguláris, így nem is EE, tehát betehetjük a feltételbe. Emiatt Q_S megőriz minden számosságot és kofinalitást κ alatt, utána pedig azért, mert κ EE-sége miatt Q_S-nek csak κ darab feltétele van.

3.megjegyzés: Egy másik változat a **koherens kofinális kényszerképzet** (jelben Q^*_S), melyet mindig egy lottery preparation után alkalmazunk, s itt most annyi a plusz megkötés a feltételekre, hogy ha $\delta \in c$ egy EE torlódási pontja c-nek, akkor a lottery preparation δ-adik lépésnél $Q_{S\cap\delta}$-t választotta és $c \cap \delta$-t adta hozzá az alapmodellhez. A mostani generikus filter C uniója olyan kofinális zárt halmaz lesz, aminek minden $\delta < \kappa$ EE számossággal vett metszete szintén kofinális zárt δ-ban.

Definíció: Egy κ erősen kompakt számosság S részhalmaza **f-speciális**, ha bármilyen nagy θ-ra van olyan θ-erősen kompakt beágyazás, amely mutatja f Menas-tulajdonságát, s amely által a κ-n indukált normális mérték tartalmazza S-et.

A definícióból egyáltalán nem látszik, hogy van-e ilyen halmaz. Ezt mutatja az alábbi

5.3 Lemma Ha egy V^* alapmodellben $2^\kappa = \kappa^+$ és f-et egy fast function forszolással adtuk V^*-hoz, akkor minden V^*-beli olyan S halmaz, ami benne van egy κ-n értelmezett normális mértékben, f-speciális.

Bizonyítás: Legyen $V = V^*[f]$. Ekkor alkalmazva a 2.3 tételt (ezért kell a $2^\kappa = \kappa^+$ feltevés), kapjuk, hogy ha S V^*-ban benne van egy normális mértékben, akkor V-ben is.

Most alkalmazzuk az 5.2 lemmát: í gy a mértékünket egy θ-erősen kompakt mértékkel beszorozva egy olyan θ-erősen kompakt mértéket kapunk, amely szerinti j beágyazásnál $\kappa \in j(S)$. (A lemmát a $\lambda = \kappa$ szereposztással alkalmazzuk, $\kappa \in j(S)$ azért lesz igaz, mert az ottani jelöléssel $\kappa \in j_\mu(S)$, mivel $S \in \mu$, és $\mathrm{crit}(k) > \kappa$, így az elemiség miatt $\kappa = k(\kappa) \in k(j_\mu(S)) = j(S)$.)

Végül a 2.5 tétel szerint a 2.6 tétel bizonyításában látott módon úgy tudjuk megváltoztatni $j(f)$-et, hogy $j(f)(\kappa)$ már elég nagy legyen ahhoz, hogy mutassa f Menas-tulajdonságát. A változtatás $j(S)$-t nem érinti, mivel $S \in V^*$, tehát $\kappa \in j(S)$ marad, azaz S tényleg benne van az indukált normális mértékben.

Most már kimondhatjuk a következő

5.4 Tételt Egy κ erősen kompakt számosság lottery preparation-je után κ elpusztíthatatlanná válik S f-speciális halmaz esetén a Q_S kofinális zárt forszolásra és a Q^*_S koherens kofinális zárt forszolásra is.

Bizonyítás: Legyen $V[G]$ egy erősen kompakt κ számosság f szerint definiált lottery preparation-je utáni generikus bővítés, emellett $S \in V$ speciális, és C a generikus kofinális zárt halmaz, melyet a Q_S-sel való forszoláskor kaptunk. κ erősen kompaktságának megőrzéséhez azt mutatjuk meg, hogy minden V-beli erősen kompakt mérték kiterjed $V[G][C]$-ben.

Rögzítsünk tehát egy tetszőleges $\lambda \geq \kappa$ számosságot, válasszuk θ-t $2^{\lambda^{<\kappa}}$-nál nagyobbnak, és végül legyen η egy olyan θ-erősen kompakt mérték $P([\theta]^{<\kappa})$-n, amely mutatja S speciálisságát, azaz a hozzátartozó $j : V \to M$ elemi beágyazásnál $\kappa \in j(S)$ és $j(f)(\kappa) > \delta = |s|$, ahol $s = [id]_\eta$.

Legyen M-ben $p \in j(P)$ egy olyan feltétel, ami a κ-adik lottóhúzásnál Q_S-t választja, így a 4.1 faktorizációs lemma szerint p alatt $j(P)$ $P * Q_S * P_{farok}$ alakú. Legyen $G_{farok} \subset P_{farok}$ $V[G][C]$-generikus, ekkor $V[G][C][G_{farok}]$-ban az 1.9 lemma szerint $j : V[G] \to M[j(G)]$-vé emelhető, ahol $j(G) = G * C * G_{farok}$.

Mivel C definiálható $j(G)$-ből, ezért $C \in M[j(G)]$. Most felhasználva S speciálisságát $\kappa \in j(S)$, s így a $C^* = C \cup \kappa$ halmaz feltétel lesz $j(Q_S)$-ben, hiszen κ hozzávételével zárt, és bár κ EE M-ben, de $\kappa \in j(S)$ miatt szabad őt hozzávenni C-hez.

Ha a koherens kofinális zárt forszolást nézzük (ahol C most Q_S^*-generikus), C^* most is egy feltétel $j(Q_S^*)$-ben, mivel $C^* \cap \kappa = C$ és valóban C-t adtuk generikusan az alapmodellhez a κ-adik lottóhúzásnál.

Bármelyik esetben legyen $j(C)$ egy C^* alatti (C^*-ot tartalmazó) $V[G][C][G_{farok}] - j(Q_S)$ (vagy $j(Q_S^*)$)-generikus. Ekkor $V[G][C][G_{farok}][j(C)]$-ben megint az 1.9 lemma szerint továbbemelhetjük j-t $V[G][C] \to M[j(G)][j(C)]$-vé.

Legyen most μ_0 tetszőleges V-beli mérték $P([\lambda]^{<\kappa})$-n. Ekkor a j-re vonatkozó fedési tulajdonság alapján (ahogy a 2.4 és 4.5 tételekben is tettük) találhatunk olyan s_0-t, amivel $X \in \mu_0 \leftrightarrow s_0 \in j(X)$ bármilyen V-beli $X \subset P([\lambda]^{<\kappa})$-ra. A "szokásos" módon definiáljuk a μ_0^* mértéket az $X \in \mu_0^* \leftrightarrow s_0 \in j(X)$ képlettel most már $V[G][C]$-beli X-ekre, és a 4.5 tételbeli okoskodás a $P([\lambda]^{<\kappa})$ részhalmazai neveinek u felsorolásával mutatja, hogy $\mu_0^* \in V[G][C]$, tehát a tételt bebizonyítottuk.

megjegyzés: Ha S-t a κ-nál kisebb nem-mérhető számosságok halmazának választjuk, akkor a lottery preparation-ön Hamkins egy másik cikke [6] szerint végzett kis módosításokkal elérhetjük, hogy a forszolások során ne keletkezzenek és ne tűnjenek el mérhető számosságok, így a generikus C halmaz egy olyan kofinális zárt halmaz lesz, amelyik nem tartalmaz mérhető számosságot, ezzel lévén, hogy szuperkompakt számosság alatt a mérhetők stacionárius sokan vannak, olyan κ számosságot kapunk, ami erősen kompakt, de nem szuperkompakt.

Definíció: A **hosszú Prikry forszolás** (jelben Q_F, ahol F egy κ-teljes filter κ-n) kényszerképzetének feltételei $\langle s, A\rangle$ párok, ahol $s \in [\kappa]^{<\kappa}$ és $A \in F$.

A rendezés: $\langle s, A\rangle \leq \langle t, B\rangle$ pontosan akkor, ha s végbővíti t-t, $A \subset B$ és $s \setminus t \subset B$

1.megjegyzés: A forszolás egy olyan $g \subset \kappa$ halmazt ad az alapmodellhez, melynek minden F-beli halmaz tartalmazza valahonnantól kezdődő farkát . Ezen felül Q_F $< \kappa$-irányítottan zárt, mert az első koordinátában uniózhatunk, a másodikban metszhetünk. Igy κ-ig a kofinalitások, számosságok és hatványok nem változnak, sőt Q_F κ^+-cc, ezért a kofinalitások és számosságok κ után is megmaradnak.

2.megjegyzés: Az eredeti Prikry forszolásnál az s-ek $[\kappa]^{<\omega}$-ból voltak. Ez persze κ kofinalitását leejtette ω-ra, de be lehet látni, hogy κ-nak nem keletkeznek új korlátos halmazai, azaz κ alatt a hatványozás megmarad, tahát κ erős limesz számosság marad. Tehát ha van olyan modell, ahol egy mérhető κ-ra $2^\kappa > \kappa^+$, akkor van olyan modell, ahol egy κ erős limesz szinguláris számosságra $2^\kappa > \kappa^+$, azaz a Szinguláris Számosság

Sejtés nem teljesül.

Nevezzük z-t **elérhetőnek** egy $j : V \to M$ beágyazás által, ha $z \in M$.

5.5 Tétel Egy κ erősen kompakt számosság egy f fast function szerint elkészített lottery preparation-je után κ elpusztíthatatlan lesz minden olyan hosszú Prikry forszolás Q_F-re, ahol F elérhető egy erősen kompakt elemi beágyazás által.

Bizonyítás: Legyen $V[f][G]$ az a modell, melyet V-ből az f fast function hozzáadásával, majd κ az őszerinte elkészített lottery preparation-jével nyerünk. Legyen $g \subset Q_F$ $V[f][G]$-generikus egy κ-teljes F filter szerinti Q_F hosszú Prikry forszolásnál, ahol F elérhető $V[f][G]$ egy erősen kompakt beágyazásánál. Az 5.2 lemma szerint mértékszorzással tetszőleges nagy erősen kompaktsági mértékre elmondható ez (mármint hogy F elérhető általa). Legyen tehát η egy $2^{\lambda^{<\kappa}} \leq \theta$-erősen kompakt mérték, mely szerinti $j : V[f][G] \to M[j(f)][j(G)]$ beágyazással F elérhető.

Mivel a $j(F)$ fast function forszolás és a $j(G)$ lottery preparation κ utáni része is eléggé zárt, ezért $F \in M[f][G][g^*]$ (hiszen $F \in M[j(f)][j(G)]$, de a zártság miatt már az "elején" be kell kerülnie), ahol g^* generikus a lottery preparation κ-adik lépésénél (jelöljük R-rel az itteni, esetleg triviális, kényszerképzetet). Legyen $\delta = |s|$, ahol $s = [id]_\eta$.

A 3.6 lemma szerint egy gyenge bővítésben (ahol, minden κ-nál öröklődően kisebb halmaz egy κ-nál kisebb kényszerképzettel való forszolással hozzáadható) minden θ-erősen kompakt mérték izomorf egy sztenderd θ-erősen kompakt mértékkel, ami az alapmodellben van. A miáltalunk használt $V[f][G]$ gyenge, hiszen a fast function forszolás és a lottery preparation "hátsó része" túl zárt, így ott már nem keletkeznek kicsi halmazok. η-t tehát le lehet cserélni egy vele izomorf mértékre, amellyel feltehető (az alapmodellbelisége miatt), hogy $s \in M$.

Alkalmazhatjuk most a 2.5 FFF tételt $j \upharpoonright V[f]$-re, ekkor kapunk egy $j^* : V[f] \to M[j^*(f)] \subset M[j(f)]$ beágyazást, melyre $j^*(f)(\kappa) > \delta$.

Segédállítás $R * Q_F$ megengedett $j^*(P)$ κ-adik lépésénél.

Egyrészt mivel R megengedett a κ-adik lépésnél, ezért ennek definíciója miatt muszáj, hogy $H(j(f)(\kappa)^+)^{M[j(f)][G]}$-beli legyen, de megint f_{farok} zártsága miatt ő benne van $M[f][G]$-ben is.

Másrészt $F \in M[f][G][g^*]$ miatt Q_F is ott van. $R * Q_F$ megfelelően zárt, hiszen külön-külön azok, tehát $*$-juk is az, tehát valóban $R * Q_F$ megengedett.

A segédállításnak megfelelően válasszunk olyan $p \in j^*(P)$ feltételt, amely a κ-adik húzásnál $R * Q_F$-et válsztja. Ezalatt a feltétel alatt $j^*(P)$ $P * (R * Q_F) * P_{faok}$ alakú, ahol $P_{farok} \leq \delta$-stratégiailag zárt.

Egy $G^* \subset P^*$ $V[f][G][g]$-generikussal forszolva ($V[f][G][g][G^*]$-ban) j^* az 1.9 lemma alapján felemelhető $V[f][G] \to M[j^*(f)][j^*(G)]$-vé, ahol $j^*(G) = G * (g^* * g) * G^*$.

j^*-ot persze tovább szeretnénk emelni, hogy $V[f][G][g]$-ből képezzen, s így keletkezzen általa $V[f][G][g]$ $P([\lambda]^{<\kappa})$-ján mérték. Ehhez tekintsük $j^*(Q_F)$-et, és legyen F elemeinek egy felsorolása $\langle X_\alpha | \alpha < 2^\kappa \rangle$.

Segédállítás $j^*(F) \restriction s = \langle Y_\beta | \beta \in s \restriction j(2^\kappa)\rangle$ egy legfeljebb δ-nagyságú fedése $j^{*\prime\prime}F$-nek.

η finomsága miatt (a szokásos módon) $j''\theta \subset s$. Mivel az FFF tételben $j \restriction V = j^* \restriction V$, ezért $s \supset j''\theta = j^{*\prime\prime}\theta$, s így egy X_α ($\alpha < 2^\kappa \leq \theta$) j-képe, ami $Y_{j^*(\alpha)}$ valóban benne van $j^*(F) \restriction s$-ben. A nagyságról szóló rész triviális, hiszen $|s| = \delta$.

Mivel $j^*(F)$ $j^*(\kappa)$-teljes filter, és $\delta < j^*(\kappa)$, ezért az $Y = \bigcap\{Y_\beta | \beta \in s \restriction j(2^\kappa)\rangle$ halmaz $j^*(F)$-beli. A segédállítás miatt $Y \subset j^*(X)$ minden $X \in F$-re.

A $\langle g, Y\rangle$ feltétel $j^*(Q_F)$-ben, hiszen Y-ról most láttuk be, hogy $j^*(F)$-beli, g viszont Q_F-generikus, tehát κ részhalmaza, tehát tényleg $j^*(\kappa)^{<j^*(\kappa)}$-beli. Sőt, minden $\langle t, A\rangle \in g$-re

$$\langle g, Y\rangle \leq \langle t, j^*(A)\rangle = j^*(\langle t, A\rangle)$$

is igaz (az egyenőtlenség az előző bekezdés, az egyenlőség az elemiség miatt). Azaz $\langle g, Y\rangle$ közös kiterjesztése az egész Q_F-generikus filternek, ezért ha egy őt tartalmazó $j^*(Q_F)$ generikust veszünk $j^*(g)$nek, és az 1.9 lemma alapján $V[f][G][g][G^*_{farok}][j^*(g)]$-ben továbbemeljük j^*-ot $V[f][G][g] \to M[j^*(f)][j^*(G)][j^*(g)]$-vé, akkor tetszőleges V-beli $P([\lambda]^{<\kappa})$-n értelmezett μ_0 mértékhez a 4.6 tétel bizonyításának módszerével találhatunk s_0-t, amire $X \in \mu_0 \leftrightarrow s_0 \in j(X)$ ($X \in V$), s ezt a mértéket $X \in V[f][G][g]$-re $s_0 \in j^*(X)$-szel kiterjesztve a 4.6 tétel módszerével bizonyítható, hogy a kiterjesztés $V[f][G][g]$-beli, azaz κ tényleg (λ-)erősen kompakt maradt.

5.6 Tétel Egy fast function szerinti lottery preparation után egy κ szuperkompakt számosság elpusztíthatatlan lesz bármilyen $< \kappa$-irányítottan zárt forszolás által.

Bizonyítás: Legyen $g \subset Q$ $V[G]$-generikus valamilyen $< \kappa$-irányítottan zárt Q kényszerképzetre. Rögzítsük λ-t, és legyen $j : V \to M$ egy az f fast function szuperkompakt Menas-tulajdonságát mutató θ-szuperkompakt elemi beágyazás, azaz $j(f)(\kappa) > \theta$, ahol $\theta \geq 2^{\lambda^{<\kappa}}, |TC(Q)|$.

Mivel $Q < \kappa$-zárt, ezért a θ-ra tett feltétel miatt Q megengedett $j(P)$ κ-adik lépésénél, így tekinthetünk egy olyan $p \in j(P)$ feltételt, mely ott őt választja. p alatt $j(P)$ $P * Q * P_{farok}$ alakú, ahol $P_{farok} \leq \theta$-stratégiailag zárt $M[G][g]$-ben. Egy $G_{farok} \subset P_{farok}$ $V[G][g]$-generikusat beforszolva az 1.9 lemma szerint $V[G][g][G_{farok}]$-ban j $V[G] \to M[j(G)]$ alakúvá emelhető.

Segédállítás $j''g \in M[j(G)]$.

Soroljuk fel G-t $\langle X_\alpha | \alpha < \theta\rangle$ alakban. (Ehhez kell a θ nagyságára tett feltevés!) Ekkor, ha $j(G) = \langle Y_\beta | \beta < j(\theta)\rangle$, akkor $j''G = j(G) \restriction j''\theta$, hiszen $j(X_\alpha) = Y_{j(\alpha)}$. De $j''\theta \in M$, mivel j θ-szuperkompakt beágyazás, tehát $M^\theta \subset M$, így $j''G$-t $j(G)$-ből és az M-beli $j''\theta$-ból definiáltuk, tehát segédállításunk tényleg teljesül.

$j(\kappa) > \theta$, $j(Q) < j(\kappa)$-irányított zártsága és a segédállítás miatt van $q \in j(Q)$ "mesterfeltétel", azaz olyan, ami $j''g$ minden elemét kiterjeszti. Ezért ha q alatti $j(g)$-t veszünk generikusnak, akkor alkalmazható az 1.9 lemma és $V[G][g][G_{farok}][j(g)]$-ben $j : V[G][g] \to M[j(G)][j(g)]$ alakúvá emelhető a beágyazás.

Legyen μ a következőképp definiálva $P([\lambda]^{<\kappa})^{V[G][g]}$-n: $X \in \mu \leftrightarrow j''\lambda \in j(X)$. Ez

λ-szuperkompakt mérték, ami $V[G][g][G_{farok}][j(g)]$-ben van, de minthogy $G_{farok} * j(g)$ $\leq \theta$-irányítottan zárt $V[G][g]$-ben, ezért itt már nem keletkezhetett μ, tehát μ egy λ-szuperkompakt mérték $V[G][g]$-ben, ahogy az a bizonyításhoz kellett.

References

[1] J. E. Baumgartner, Iterated forcing, *Surveys in Set Theory (A. R. D. Mathias, ed.)* in London Math. Soc Lecture Note Ser. 87, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1983, 1-59.

[2] Csirmaz L., Forszolás, jegyzet, www.renyi.hu/˜ csirmaz

[3] M. Gitik és S. Shelah "On Certain Indestructibility of Strong Cardinals and a Question of Hajnal" *Arch. Math. Logic 28* 1989 35-42

[4] J. D. Hamkins "Canonical Seeds and Prikry Trees" *Journal of Symbolic Logic 62 no. 2*, 1997, 373-396

[5] J. D. Hamkins "The Lottery Preparation", *Annals of Pure and Applied Logic 101*, 2000, 103-146

[6] J. D. Hamkins "Gap Forcing", *Israel Journal of Mathematics 125*, 2001, 237-252

[7] T. Jech "Set Theory, The Third Millenium Edition, Revised and Expanded", Springer, Berlin-New York, 2002

[8] A. Kanamori "The Higher Infinite", Springer-Verlag, Berlin and New York, 1994

[9] Komjáth P. Forszolás, jegyzet, www.cs.elte.hu/˜kope

[10] K. Kunen "Set Theory, An Introduction to Independence Proofs" North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[11] R. Laver "Making the Supercompactness of κ Indestructible Under κ-directed Closed Forcing" *Israel Journal of Mathematics 29* 1978 385-388