CSOPORTMENNYISÉGEK ASZIMPTOTIKUS KAPCSOLATA

PODOSKI KÁROLY

TÉMAVEZETŐ: PYBER LÁSZLÓ az MTA DOKTORA

Tartalomjegyzék

Kivonat

A dolgozat az alábbi fontos csoportmennyiségek egymással való nagyságrendi kapcsolatát vizsgálja:

- A konjugáltosztályok méreteinek szuprémuma bfc(G)
- Kommutátor részcsoport mérete $|G'|$
- Centrum indexe $|G : Z(G)|$
- Második centrum indexe $|G : Z_2(G)|$
- Abel-féle részcsoportfedések elemszámainak a minimuma $a(G)$
- Páronként fel nem cserélhető elemek halmazai számosságainak szuprémuma $n(G)$

Számos esetben sikerül éles becslést adnunk, más esetekben a mennyiségek között pedig nincs, vagy csak bizonyos feltételek mellett van kapcsolat. Amellett, hogy áttekintjük az eddigi eredményeket ebben a témában először véges majd végtelen csoportokra, több eddig nyitott kérdésre is választ adunk.

1. fejezet

ELŐSZÓ

„Midőn ezt írtam, tiszta volt az ég.
Zöld ág virított a föld ormain.”
(Vörösmarty Mihály: Előszó)

Bizonyos fontos csoportelméleti mennyiségek (lásd előző oldal) azt fejezik ki, hogy „a csoport milyen messze van az Abelségtől”, először ezek közül mutatjuk be a legfontosabbakat, valamint alapvető tulajdonságaikat. Természetes kérdés, miután mindegyik mennyiség hasonló dolgot fejez ki, hogy milyen kapcsolatok vannak közöttük. Az aszimptotikus csoportelmélet egy részterülete a köztük lévő nagyságrendi kapcsolatokat vizsgálja. Ez a részterület az 1900-as évek elején indult fejlődésnek, és a mai napig a csoportelmélet egy dinamikusan fejlődő ága, és még ma is sok nyitott kérdést tartalmaz. Először az 2. fejezetben különböző fontos csoportokra (egyszerű, direkt szorzat, extra-speciális, mátrix) meghatározzuk ezeket a mennyiségeket. A konkrét példákon kapott eredmények jó kiindulási pontokat adnak a köztük lévő, esetleg nem lévő, kapcsolatok feltérképezéséhez. A terület fejlődésével párhuzamosan a 3. fejezetben a végességi összefüggéseket tekintjük át, vagyis azt, hogy melyik mennyiség véges voltából következik valamelyik másik mennyiség végessége. A 4. fejezetben mennyiségeink összefüggése esetén vizsgáljuk a köztük lévő kapcsolatot, ekkor, mint látni fogjuk, elegendő lesz véges csoportokkal foglalkoznunk. A kombinatorikus halmazelmélet, partíciókalkulus, kifejlődésével (elsősorban Erdős Pál és Richard Rado [4] munkássága) vizsgálni kezdték a végtelen esetet, az ehhez kapcsolódó eredményeket az utolsó fejezetben tárgyaljuk. A dolgozat új eredményeket is tartalmaz. A legfontosabb az $a(G)$ és a $|G : Z(G)|$ közti kapcsolat vizsgálata, vagyis a $|G : Z(G)|$ becslése felülről az $a(G)$ mennyiség függvényében. Egy a csoporthoz kapcsolódó gráf, a felcserélhetőségi gráf, vizsgálata során Erdős Pál indította el ezt a problémakört.

Ha $a(G) = n$ véges, az első eredmény 1954-ből való B. H. Neumann-tól, aki bebizonyította, hogy $|G : Z(G)| \leq c^{2^n}$ valamilyen c konstanssal, M. J. Tomkinson [20] lényegében $n^{\log_2 n}$-re javította ezt a becslést, és azt sejtette, hogy ez a korlát $(n-1)^2$-ig csökkenthető. Szegedy Balázzsal közösen találtunk csoportokat (lásd [14]) melyek azt mutatják, hogy az $n^{\log_2 n}$ becslés nem javítható.

Ha $a(G) = \kappa$ végtelen számosság, V. Faber, R. Laver, R. McKenzie [5] találták az első korlátot 1978-ban megmutatva, hogy $|G : Z(G)| \leq 2^{2^{2^\kappa}}$. Továbbá azt kérdezték, vajon javítható-e ez a becslés, és találtak olyan G csoportot, amelyre $|G : Z(G)| = 2^\kappa$. Tomkinson [19] 2^{2^κ}-ra javította a felső korlátot 1985-ben. Végül 1999 végén sikerült megadnom a végső választ erre a kérdésre (lásd [13]), mely szerint $|G : Z(G)| \leq 2^\kappa$.

A második centrum indexének felső becslésében is több új eredményt sikerült Szegedy Balázzsal elérnünk, többek között a kommutátor részcsoport méretének függvényében (lásd [14]). 1961-ben I. D. Macdonald megmutatta, hogy minden véges csoportban $|G : Z_2(G)| \leq |G'|^{c \log_2^2 |G'|}$. Ezt sikerült a $|G : Z_2(G)| \leq |G'|^{c \log_2 |G'|}$ becslésre javítanunk, és megmutattuk, hogy ez a becslés a c konstanstól eltekintve már nem javítható. Továbbá, ha $|G'| = \kappa$ végtelen számosság bebizonyítottuk, hogy $|G : Z_2(G)| \leq 2^\kappa$ és egy példa mutatja, hogy ez a becslés éles.

A szakdolgozat új eredményeit a Tétel, Állítás, Lemma után zárójelben következő 2000 évszám jelzi.

Ezúttal is szeretnék köszönetet mondani Pyber Lászlónak, a szakdolgozat elkészítéséhez nyújtott sok, hasznos segítségért.

2. fejezet

FONTOS CSOPORTOSZTÁLYOK

2.1. Jelölések és definíciók.

Legyen G csoport, akkor

- $g \in G$ **centralizátora** $C_G(g)$, és
$$H \subset G\text{-re} \;\; C_G(H) = \{x \in G \mid xh = hx \;\; \forall h \in H\text{-ra}\}$$
$$g \;\; \textsf{konjugáltosztálya} \;\; Cl_G(g) = \{x^{-1}gx \mid x \in G\},$$
- bfc$(G) = \sup\{|Cl_G(g) \mid g \in G\}$
- $a, b \in G$ **kommutátora** $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$, az $A, B \subset G$ **kommutátor részcsoportja** $[A, B] = \langle [a, b] \mid a \in A, b \in B\rangle$ és $G' = [G, G]$,
- $Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \;\; \forall g \in G\text{-re}\}$ a G **centruma**, $Z_2(G)$ a G **második centruma**, vagyis $Z_2(G) \leq G$ és $Z_2(G)/Z(G) = Z(G/Z(G))$,
- $G = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ **Abel-fedés**, ha A_γ Abel részcsoport $\forall\gamma \in \Gamma$-ra,
- $a(G) = \min\{|\Gamma| \mid G = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \text{ Abel-fedés}\}$,
- $H \subset G$ **nem-felcserélhető**, ha $a, b \in H$ és $[a, b] = 1$ esetén $a = b$,
- $n(G) = \sup\{|H| \mid H \subset G \text{ nem-felcserélhető}\}$,
- $\{G_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ csoportok **komplett direkt szorzata** a $\prod_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ csoport, melynek alaphalmaza G_γ csoportok Descartes-szorzata a (g_γ) vektorok, $g_\gamma \in G_\gamma$ a csoportműveleteket koordinátánként végezzük $(g_\gamma)(h_\gamma) = (g_\gamma h_\gamma)$ és $(g_\gamma)^{-1} = (g_\gamma^{-1})$ az egységelem az (1_γ),
- $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ **diszkrét direkt szorzatnak** nevezzük a komplett direkt szorzat azon részcsoportját, melynek (g_γ) elemeire $g_\gamma = 1_\gamma$ véges sok kivételtől eltekintve,
- $Zn_{\gamma\in\Gamma}G_\gamma$ **centrális szorzatot** a következő módon definiáljuk, ha

  $Z(G_1) \cong Z(G_\gamma))$ és adottak az $f_\gamma \colon Z(G_\gamma) \to Z(G_1)$ izomorfizmusok $\forall\gamma \in \Gamma$-ra , akkor
$$Zn_{\gamma\in\Gamma}G_\gamma = (\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma)/N, \text{ ahol}$$
$$N = \{(g_\gamma) \mid g_\gamma \in Z(G_\gamma) \text{ és } \prod_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(g_\gamma) = 1_1\}.$$

Megjegyzés. A számosságok halmazai jól rendezettek, és számosságok bármely halmazának a szuprémuma is számosság, ezért értelmes az $a(G)$ és az $n(G)$ definíciója.

A továbbiakban elsősorban a bfc(G), $|G'|$, $|G : Z(G)|$, $|G : Z_2(G)|$, $a(G)$, $n(G)$ mennyiségeket, és ezeknek egymáshoz való viszonyát vizsgáljuk, kezdjük ebben a fejezetben a nyilvánvaló egyenlőtlenségekkel, és kiszámoljuk konkrét csoportokra őket.

2.2. Alapvető összefüggések, példák

A későbbiekben szükségünk lesz a következő jól ismert tényekre:

- Ha $A, B \leq G$ akkor $|G : A \cap B| \leq |G : A||G : B|$
- $|G| = |C_G(g)||Cl_G(g)|$
- Ha $H \subset G$ akkor $C_G(H) = \bigcap_{h \in H} C_G(h)$
- Ha $|G| = n$, akkor létezik T generátorrendszere G-nek, amelyre $|T| \leq \log_2 n$
- Ha $H, K \leq G$ akkor $|HK : H| = |K : H \cap K|$

2.1 Állítás

$$bfc(G) \leq |G'| \tag{2.1}$$
$$|G : Z_2(G)| \leq |G : Z(G)| \tag{2.2}$$
$$n(G) \leq a(G) \leq |G : Z(G)| - 1 \tag{2.3}$$
$$bfc(G) \leq \frac{1}{2}|G : Z(G)| \tag{2.4}$$

Bizonyítás. $g^{-1}Cl_G(g) \subset G'$ $\forall g \in G$-re (2.1), $Z(G) \leq Z_2(G)$ (2.2), továbbá ha H nem felcserélhető és $A \leq G$ Abel részcsoport akkor $|H \cap A| = 1$ ezért, ha $G = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ Abel-fedés akkor $|H| \leq |\Gamma|$, és tekintsünk egy $\{1, g_\gamma \mid \gamma \leq |G : Z(G)| - 1\}$ $Z(G)$ szerinti mellékosztály reprezentáns rendszert G-ben, akkor $G = \bigcup_\gamma \langle g_\gamma Z(G) \rangle$ egy Abel-fedés (2.3). Ha $g \in G \setminus Z(G)$, akkor $\langle Z(G), g \rangle \leq C_G(g)$ ezért $|C_G(g) : Z(G)| \geq 2$ azaz $|Cl_G(g)| = |G : C_G(g)| = \frac{|G:Z(G)|}{|C_G(g):Z(G)|} \leq \frac{1}{2}|G : Z(G)|$ (2.4). □

Megjegyzés. Az előző állításban mindenhol állhatnak egyenlőségek, mint ezt látni fogjuk a következő példákban:

- bfc$(G) = |G'| = 2$, ha G extra-speciális 2-csoport (és ha G k darab ilyen csoport direkt szorzata, akkor bfc$(G) = |G'| = 2^k$);
- $Z_2(G) = Z(G) = 1$, ha pl. G egyszerű;
- $n(G) = a(G) = |G : Z(G)| - 1$, és bfc$(G) = \frac{1}{2}|G : Z(G)| = 2^{m-1}$ pl. ha $G = T_m$ a szabad m elem által generált 4 exponensű, 2-nilpotens csoport, amelyben négyzet elemek centrálisak. (lásd [12])

$$T_m = \langle x_1, x_2, \dots x_m \mid x_i^4 = [x_i, x_j^2] = [x_i, x_j]^2 = [[x_i, x_j], x_k] = 1 \text{ ahol } 1 \leq i, j, k \leq m \rangle$$

A konkrét példák vizsgálatához a következő jól használható becslést sikerült találnom:

2.2 Állítás (2000) *Legyen $A \leq G$ Abel részcsoport, és $(t_i)_{i\in I}$ az A baloldali mellékosztály reprezentáns rendszere, akkor*

$$a(G) \leq \sum_{i\in I} |A : C_A(t_i)|$$

Bizonyítás. Legyen (s_{ij}) a $C_A(t_i)$ baloldali mellékosztàly reprezentáns rendszere A-ban

$$G = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j} t_i s_{ij} C_A(t_i)$$

Ha $a, b \in C_A(t_i)$ akkor $[a, b] = [a, t_i] = [b, t_i] = [a, s_{ij}] = [b, s_{ij}] = 1$ ezért $[t_i s_{ij} a, t_i s_{ij} b] = 1$ vagyis az $\langle t_i s_{ij} C_A(t_i)\rangle$ csoportok G egy Abel-fedését adják. $\square$

Megjegyzés. Pyber László (lásd [15]) megmutatta, hogy $a(G) \leq n(G)|G : A|$. Figyelembe véve, hogy $|A : C_A(t_i)| \leq |G : C_G(t_i)| \leq \mathrm{bfc}(G)$ kapjuk, hogy $a(G) \leq \mathrm{bfc}(G)|G : A|$.

A következőkben fontos csoportosztályokra tekintjük át a vizsgált mennyiségeket, ezáltal információkat kapunk arról is (mind véges, mind végtelen esetben is), hogy mely mennyiségek között érdemes, és melyek között nem, kapcsolatot keresni.

2.2.1. Véges egyszerű csoportok

Egy G csoportot *egyszerű* csoportnak nevezünk, ha nincs valódi normálosztója. Az egyszerű csoportok leírása, osztályozása a kutatásoknak ma is nagyon fontos területe. A véges egyszerű csoportok vizsgálatánál két fontos eredményt jól fogunk tudni használni. Az első az egyszerű csoportok klasszifikációjának fontos következménye, a másik egy új eléggé meglepő eredmény, melyre M. Muzychuk egy szép egyszerű bizonyítást adott.

2.3 Tétel *Minden véges egyszerű csoport generálható 2 elemmel.*

2.4 Tétel (M. Muzychuk) *Legyen G véges csoport $A \leq G$ Abel részcsoport és $|G : A| = n$, ekkor létezik olyan B Abel normálosztója G-nek, hogy $|G : B| \leq n^2$.*

Bizonyítás. Tekintsük a G csoport $L(G)$ részcsoporthálóján értelmezett következő φ függvényt:

$$\varphi\colon L(G) \to \mathbb{Z}^+, \text{ ahol } \varphi(H) = |H||C_G(H)| \quad H \leq G$$

Először megmutatjuk, hogy φ szupermoduláris jellegű: $\varphi(H)\varphi(K) \leq \varphi(\langle H, K\rangle)\varphi(H \cap K)$. Ez néhány nyilvánvaló egyenlőtlenségből következik.

$$|H||K| = |HK||H \cap K| \leq |\langle H, K\rangle||H \cap K|,$$
$$|C_G(H)||C_G(K)| = |C_G(H) \cap C_G(K)||C_G(H)C_G(K)| \leq |C_G(\langle H, K\rangle)||C_G(H \cap K)|.$$

Legyen $m = \max\{\varphi(H) \mid H \leq G\}$ (φ véges függvény), és legyen $\mathcal{M} = \{H \leq G \mid \varphi(H) = m\}$. A φ függvény szupermodularitása miatt, ha $H, K \in \mathcal{M}$, akkor $\langle H, K\rangle \in \mathcal{M}$, $H \cap K \in \mathcal{M}$, valamint figyelembe véve, hogy $H \leq C_G(C_G(H))$ azt kapjuk, hogy $C_G(H) \in \mathcal{M}$.

Mivel $\mathcal{M}$ véges háló, ezért $N = \langle \bigcup \mathcal{M} \rangle \in \mathcal{M}$, és $C_G(N) \in \mathcal{M}$. Figyelembe véve, hogy a φ függvény invariáns a konjugálásra nézve azaz $\varphi(x^{-1}Hx) = \varphi(H)$, az N normálosztó G-ben. Következésképpen mivel $C_G(N) \leq N$ ezért $B = C_G(N) = Z(N)$ Abel normálosztó G-ben. Ekkor $|A|^2 \leq |A||C_G(A)| = \varphi(A) \leq \varphi(N) = |N||Z(N)|$. Innen

$$|G : B| = |G : Z(N)| \leq |G : Z(N)||G : N| \leq |G : A|^2 = n^2$$

$\square$

Megjegyzés. Annak ellenére, hogy ebben a G csoportban találtunk n^2 indexű Abel normálosztót, a $|G : Z(G)|$-re csak $n^{\log_2 n}$ nagyságrendű becslés adható, mint azt a 4.8–4.10 Tételek mutatják.

- Az előző tételt végtelen csoportokra is be tudjuk bizonyítani, ha φ függvényt módosítjuk, hogy $\varphi(H) = |G : H||G : C_G(H)|$ (ez szubmoduláris jellegű)
- A B Abel normálosztó nem feltétlenül része A-nak, ugyanis legyen

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \mathsf{I} & \mathsf{X} \\ 0 & \mathsf{I} \end{pmatrix} \;\middle|\; \text{ahol } \mathsf{I} \text{ az } n \times n \text{ egységmátrix, az } \mathsf{X}\ \ n \times n\text{-es } \mathbb{F}_p \text{ feletti mátrix} \right\}$$

  és legyen $G = A \ltimes Z_p^{2n}$, ahol A természetes módon hat a $2n$ dimenziós $\mathbb{F}_p$ vektortéren, ekkor A nem tartalmazza Abel normálosztóját a G csoportnak.
- Ha az $A \leq G$ Abel részcsoportra $|G : A| = \kappa$, akkor csak 2^κ indexű B Abel normálosztó garantálható, mint azt a 2.13 Állítás mutatja.

Most már kimondhatjuk az egyszerű csoportokra vonatkozó állításunkat:

2.5 Állítás *Legyen G nem Abel véges egyszerű csoport, ekkor*

$$|G|^{\frac{1}{2}} \leq bfc(G) \leq 4n^2(G), \quad G = G', \quad |G : Z(G)| = |G : Z_2(G)| = |G| \tag{2.5}$$

$$|G| \leq (a(G) - 1)^2, \quad |G| \leq 27n^3(G) \tag{2.6}$$

Bizonyítás. Az első tétel szerint $G = \langle x, y \rangle$. Legyen $|C_G(x)| \leq |C_G(y)|$, akkor $1 = Z(G) = C_G(x) \cap C_G(y)$ ezért $|G| = |G : C_G(x) \cap C_G(y)| \leq |G : C_G(x)||G : C_G(y)| \leq |G : C_G(x)|^2 = |Cl_G(x)|^2 \leq (\mathrm{bfc}(G))^2$. Pyber László [15] megmutatta, hogy minden véges csoportra $\mathrm{bfc}(G) \leq 4n^2(G)$ (2.5). Tekintsük a G csoport egy $a(G)$ darab Abel részcsoporttal való fedését, ekkor a fedésből kiválasztható egy $A \leq G$ Abel részcsoport, melyre $|G : A| \leq a(G) - 1$, erre az előző tételt alkalmazva ($B = 1$) kapjuk, hogy $|G : B| \leq (a(G) - 1)^2$, az utolsó E. A. Bertram [1] eredménye. $\square$

2.2.2. Véges csoportok direkt szorzata

Számunkra a véges csoportok végtelen diszkrét direkt szorzata lesz érdekes:

2.6 Állítás *Legyen $G = \bigoplus_{\gamma<\lambda} G_\gamma$ $\lambda \geq \omega$, ahol mindegyik G_γ nem Abel véges csoport, akkor*

$$|G| = \lambda, \quad bfc(G) = \omega, \quad |G'| = |G : Z(G)| = \lambda \tag{2.7}$$

$$a(G) = \min\{\kappa \mid \lambda \leq 2^\kappa\} \tag{2.8}$$

$$n(G) = \omega \tag{2.9}$$

Bizonyítás. Legyen $g \in G$ és $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ azok a koordináták, melyekre $g_{\gamma_i} \neq 1$. Mivel a konjugálás kordinátánként történik, ezért $|Cl_G(g)| = \prod_{i=1}^n |Cl_G(g_{\gamma_i})|$, tehát $2^n \leq |Cl_G(g)| < \omega$, ahol n tetszőlegesen nagy természetes szám, így bfc$(G) = \omega$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $G' = \bigoplus_{\gamma<\lambda} G'_\gamma$, és $Z(G) = \bigoplus_{\gamma<\lambda} Z(G_\gamma)$, továbbá $G'_\gamma > 1$ és $|G_\gamma : Z(G_\gamma)| > 1$ $\forall\gamma < \lambda$ esetén, innen adódik a (2.7). A (2.8)-t az 5. fejezetben bizonyítjuk (5.3 Állítás). Hátra van még a (2.9) bizonyítása. Először is megmutatjuk, hogy $n(G) \geq \omega$, ez a bizonyítás egyszerűbb része. Mivel G_γ nem Abel, ezért $\exists a_\gamma, b_\gamma$, hogy $[a_\gamma, b_\gamma] \neq 1$. Legyenek a $g^{(n)}$ elemek a következők: $g^{(n)}_\gamma = a_\gamma$, ha $\gamma < n$; $g^{(n)}_n = b_n$; $g^{(n)}_\gamma = 1$, ha $\gamma > n$. Ekkor $H = \{g^{(n)} \mid n < \omega\}$ halmaz nem-felcserélhető, tehát $n(G) \geq |H| = \omega$. Most jön a nehezebb rész, annak belátása, hogy $n(G) \leq \omega$. Tegyük fel, hogy $n(G) > \omega$. Ekkor $\exists H \subset G$ nem-felcserélhető halmaz, melyre $|H| = \omega^+$. Definiáljuk a $t\colon H \to \mathcal{P}(\lambda)$ leképezést $t(h) := \{\gamma < \lambda \mid g_\gamma \neq 1\}$, ezt nevezzük a $h \in H$ elem tartójának. Mivel G diszkrét direkt szorzat $|t(h)| < \omega$ $\forall h \in H$-ra, és $H = \bigcup_{i<\omega}\{h \in H \mid t(h) = i\}$. Mivel $|H| = \omega^+$, ezért $\exists k < \omega$, hogy a $H_k = \{h \in H \mid t(h) = k\}$ halmaz számossága $|H_k| = \omega^+$. A nem-felcserélhetőség miatt $t(g) \cap t(h) \neq \emptyset$ $\forall g, h \in H$ esetén. Tekintsük a Γ teljes gráfot, melynek csúcsai a H_k elemei, és egy (g, h) él színe r, ha $|t(g) \cap t(h)| = r$ $(1 \leq r \leq k)$. A klasszikus végtelen Ramsey-tétel (5.1) szerint $\exists r$ és $\Gamma_r \subset \Gamma$ teljes részgráf melyben minden él színe r, csúcshalmaza K_r, hogy $|K_r| \geq \omega$. Világos, hogy tetszőleges $g, h \in K_r$ esetén $|t(g)| = |t(h)| = k$, és $|t(g) \cap t(h)| = r$. Legyen $g \in K_r$ rögzített. Mivel $t(g)$-nek csak véges sok r elemű részhalmaza van, és $|K_r| \geq \omega$ ezért $\exists T_r \subset t(g)$ és $\hat{K} \subset K_r$ végtelen halmaz, hogy $|T_r| = r$ továbbá $\forall h \in \hat{K}$-re $T_r = t(g) \cap t(h)$. Viszont minden $h, h' \in \hat{K}$ esetén $|t(h) \cap t(h')| = r$ ezért $|t(h) \cap t(h')| = T_r$. Mivel $\prod_{\gamma \in T_r} G_\gamma$ véges, és $\hat{K}$ végtelen, ezért $\exists h, h' \in \hat{K}$, hogy $h \restriction_{T_r} = h' \restriction_{T_r}$. Tehát h, h' megegyeznek a tartóik közös részén, következésképpen h, h' felcserélhetőek, ami ellentmondás. (*Pilisszentlászló, 1999. okt.*) □

2.7 Állítás *Legyenek $\kappa \leq \lambda$ tetszőleges végtelen számosságok, ekkor választhatunk olyan $\{G_\gamma \mid \gamma < \lambda\}$ véges nem Abel csoportokat, hogy a $G = \bigoplus_{\gamma<\lambda} G_\gamma$ csoportra $|G : Z_2(G)| = \kappa$.*

Bizonyítás. Mivel $Z_2(G) = \bigoplus_{\gamma<\lambda} Z_2(G_\gamma)$, ezért legyen G_γ véges nem kommutatív egyszerű csoport, ha $\gamma < \kappa$, és legyen G_γ 2-nilpotens (pl. kvaterniócsoport), ha $\gamma \geq \kappa$. □

2.2.3. Extra-speciális csoportok

Egy G csoportot *extra-speciális* csoportnak ([16]) nevezzük, ha $G' = Z(G)$ prímrendű ciklikus. A továbbiakban legyen $\langle c\rangle = C = G' = Z(G)$. Ha $x, g \in G$, akkor $[x, g^p] = [x, g]^p = 1$, tehát $g^p \in C$, következésképpen $V = G/C$ elemi Abel p-csoport, és V tekinthető egy vektortérnek $\mathbb{F}_p$ fölött. Világos, hogy ha $x, y \in G$ az $[x, y]$ csak az $u = xC$, $v = yC$ mellékosztályoktól függ, a továbbiakban $[x, y] = c^{f(u,v)}$. Ekkor az $f\colon V \times V \to \mathbb{F}_p$ egy jól definiált függvény, és minthogy $[xx_1, y] = [x, y][x_1, y]$ és $[x, y]^{-1} = [y, x]$ ezért f egy szimplektikus bilineáris függvény. Ha $f(u, v) = 0$ $\forall v$ esetén, akkor $[x, y] = 1$ $\forall y \in G$-re, tehát $u = xC = C = 0_V$ azaz f nem-elfajuló.

Ha G véges, akkor V is véges és létezik $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$ felbontása 2 dimenziós alterek (hiperbolikus párok) ortogonális összegére, ahol $\{u_i, v_i\}$ a V_i bázisa, és $f(u_i, v_i) = 1$, és $f(u_i, v_j) = 0$, ha $i \neq j$, továbbá $f(u_i, u_j) = 0 = f(v_i, v_j)$ $\forall i, j$-re. Megfordítva, ha $u_i = x_iC$ és $v_i = y_iC$, akkor $G_i = \langle x_i, y_i\rangle$ egy p^3 rendű nem Abel csoport. Világos, hogy $C < G_i < G$ és $G = G_1G_2 \ldots G_n$, ahol $G/C = \bigoplus_{i=1}^{n} G_i/C$ és $[G_i, G_j] = 1$ továbbá $C = Z(G_i) = Z(G)$ tehát $G = Zn_{i\leq n} G_i$ és $|G| = p^{2n+1}$.

Ha G csoport végtelen, akkor a V $\mathbb{F}_p$-vektortér is végtelen, és nem biztos, hogy létezik a V-nek a fenti felbontása, azonban ha mégis $V = \bigoplus_{\gamma<\lambda} V_\gamma$ az előzőhöz hasonlóan, akkor $G = Zn_{\gamma<\lambda} G_i$, ahol mindegyik G_γ p^3 rendű nem Abel csoport.

A G csoport maximális Abel részcsoportjai és a V vektortér maximális önmerőleges alterei kölcsönösen egyértelműen megfelelnek egymásnak.

2.8 Állítás *Legyen $G = Zn_{i\leq n} G_i$ extra-speciális 2-csoport, ahol mindegyik G_i $1 \leq i \leq n$ izomorf a kvaternió csoporttal, akkor*

$$|G| = 2^{2n+1}, \quad G' = Z(G) \simeq Z_2, \quad \textit{és} \quad G \quad 2-\textit{nilpotens} \tag{2.10}$$

$$\textit{bfc}(G) = |G'| = 2, \quad |G : Z(G)| = 2^{2n}, \quad |G : Z_2(G)| = 1 \tag{2.11}$$

$$\textit{Ha} \quad A \leq G \quad \textit{maximális Abel részcsoport, akkor} \quad |A| = 2^{n+1} \tag{2.12}$$

$$2^n + 1 \leq a(G) \leq 2^{n+1} - 1 \tag{2.13}$$

$$n(G) = 2n + 1 \tag{2.14}$$

Bizonyítás. (2.12) Mivel f nem-elfajuló bilineáris függvény, ezért ha $B \leq V$ altér, akkor $\dim V = \dim B + \dim B^\perp$. Következésképpen, ha B maximális önmerőleges altér ($B = B^\perp$), akkor $\dim B = \dim B^\perp = n$. Tehát az $A \leq G$ maximális Abel részcsoportra $\dim_{\mathbb{F}_p}(A/Z(G)) = n$ vagyis $A = 2^{n+1}$.

(2.13) Tekintsük a G egy Abel fedését $G = \cup_{i=1}^{k} A_i$ nyilván $G \setminus Z(G) = \cup_{i=1}^{k}(A_i \setminus Z(G))$, tehát $2^{2n+1} - 2 = |G \setminus Z(G)| \leq \sum_{i=1}^{k} |A_i \setminus Z(G)| \leq k(2^{n+1} - 2)$ ezért $2^n + 1 \leq k$. Másfelől, alkalmazzuk a 2.2 Állítást, figyelembe véve, hogy ha A maximális Abel részcsoport, akkor $x \in G \setminus A$ esetén $|A : C_A(x)| = 2$, kapjuk, hogy $a(G) \leq \sum_{i=1}^{2^n} |A : C_A(t_i)| = 1 + (2^n - 1)2 = 2^{n+1} - 1$.

(2.14) Mivel G véges extra-speciális csoport, ezért $G = G_1G_2 \ldots G_n$, ahol $G_i = \langle x_i, y_i\rangle$ és $[x_i, y_i] \neq 1$. Legyenek $p_0 = 1$, $p_i = x_1x_2 \ldots x_i$ $(1 \leq i \leq n)$ ekkor a $H = \{p_0y_1, p_ny_n, p_n, p_iy_i, p_iy_{i+1} \ (1 \leq i \leq n-1)\}$ nem-felcserélhető, $|H| = 2n+1$ így $n(G) \geq 2n+1$.

Másfelől, ha $H \subset G$ nem-felcserélhető, akkor $L = \{hC \mid h \in H\} \subset V$ elemeire, ha $u \neq v \in L$ akkor $f(u,v) = 1$. Tekintsük az $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ maximális független (mint vektorok) halmazt L-ben ($k \leq 2n$). Ha $v \in L \setminus M$, akkor $v = \sum_{i=1}^{k} a_i m_i$, ahol $a_i = 0, 1$. Ha $S = \sum_{i=1}^{k} a_i$, akkor $1 = f(v, m_i) = S + a_i$, ha $i = 1, 2, \ldots, k$. Mivel $v \neq 0$, ezért $a_i = 1$ ($1 \leq i \leq k$), azaz $v = \sum_{i=1}^{k} m_i$, ami azt jelenti, hogy $|L \setminus M| \leq 1$, azaz $|H| = |L| \leq 2n + 1$.

□

2.9 Állítás *Legyen $G = Zn_{\gamma<\lambda} G_i$ extra-speciális 2-csoport, ahol mindegyik G_γ $1 \leq \gamma \leq \lambda$ izomorf a kvaternió csoporttal, akkor*

$$|G| = \lambda, \quad G' = Z(G) \simeq Z_2, \quad \textit{és} \quad G \quad 2-\textit{nilpotens} \tag{2.15}$$

$$\textit{bfc(G)} = |G'| = 2, \quad |G : Z(G)| = \lambda, \quad |G : Z_2(G)| = 1 \tag{2.16}$$

$$a(G) = \min\{\kappa \mid \lambda \leq 2^\kappa\} \tag{2.17}$$

$$n(G) = \omega \tag{2.18}$$

Bizonyítás. A (2.15), (2.16) triviális. A (2.17) V. Faber, R. Laver és R. McKenzie [5] eredményéből következik (lásd 5.3 Állítás), a (2.18) pedig analóg módon megy, mint a (2.9) bizonyítása, felhasználva, hogy a centrális szorzat a diszkrét direkt szorzat faktora. □

Most nézzünk egy olyan extra-speciális csoportot amely nem centrális szorzat:
Legyen $G = \prod_{\gamma<\lambda} G_\gamma$,ahol minden G_γ izomorf a kvaternió csoporttal, ekkor $Z(G) = \prod_{\gamma<\lambda} Z(G_\gamma) \simeq \prod_{\gamma<\lambda} Z_{2,\gamma}$ komplett direkt szorzat tekinthető egy $\mathbb{F}_2$ vektortérnek. Ebben a $\{g \in Z(G) \mid \exists \gamma < \lambda \;\; g_\gamma \neq 1_\gamma, \;\; g_\delta = 1_\delta, \; \textit{ha} \; \delta \neq \gamma\}$ (ez Z(G) egységelemének a projekciói az egyes koordinátákra) halmaz független vektorokból áll, ezt kibővíthetjük $Z(G)$ egy $B = \{b_\gamma \mid \gamma \leq 2^\lambda\}$ bázisává (Zorn lemma), így $Z(G) = \bigoplus_{\gamma \leq 2^\lambda} \langle b_\gamma \rangle \simeq \bigoplus_{2^\lambda} Z_2$. Álljon N azon $Z(G)$-beli vektorokból amelyek mindegyike páros sok B-beli elem szorzata. Világos, hogy $N < Z(G)$, $|Z(G) : N| = 2$, $N \lhd G$. Az $S = G/N$ csoportra kimondhatjuk a következő állítást:

2.10 Állítás (2000) *Az előbb definiált S csoport extra-speciális 2-csoport, $Zn_{\gamma<\lambda} G_\gamma < S$*

$$|S| = 2^\lambda, \quad \mathrm{bfc}(S) = |S'| = |Z(S)| = 2, \quad |S : Z_2(S)| = 1 \tag{2.19}$$

$$|S : Z(S)| = 2^\lambda \quad a(S) \geq n(S) \geq \lambda \tag{2.20}$$

Bizonyítás. Ha $G_\gamma = \langle i_\gamma, j_\gamma \rangle$, akkor legyen $H = \{s^{(\gamma)} \mid \gamma < \lambda\}$, ahol

$$s_\delta^{(\gamma)} := \begin{cases} i_\delta, & \text{ha } \delta < \gamma \\ j_\gamma, & \text{ha } \delta = \gamma \\ 1_\delta, & \text{ha } \delta > \gamma \end{cases}$$

Ekkor H nem-felcserélhető, így $n(S) \geq \lambda$. □

1987-ben S. Shelah és J. Stepräns [18] mutatott „kicsi” maximális Abel részcsoporttal rendelkező extra-speciális csoportokat:

2.11 Állítás (S. Shelah, J. Stepräns [18]) *Létezik λ végtelen számosságoknak egy olyan $\mathcal{C}$ osztálya (amely minden reguláris számosságot tartalmaz) , hogy minden $\lambda \in \mathcal{C}$ számossághoz lehet konstruálni 2^λ nem izomorf extra-speciális p-csoportot, amelyek nem tartalmaznak λ számosságú Abel részcsoportot.*

Megjegyzés. Ha $S_h = \{g_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ egy fenti típusú extra-speciális csoport, akkor ha $\lambda = (2^\kappa)^+$ legyen $s\colon [\lambda]^2 \to 2$

$$s(\{\alpha,\beta\}) := \begin{cases} 0, & \text{ha } [g_\alpha, g_\beta] = 1 \\ 1, & \text{ha } [g_\alpha, g_\beta] \neq 1 \end{cases}$$

Az (5.2) Tétel (Erdős, Rado) szerint $(2^\kappa)^+ \longrightarrow ((2^\kappa)^+, \kappa^+)^2$ és egy S_h csoportban nincs $(2^\kappa)^+$ nagyságú Abel részcsoport, ezért $\exists H \subset S_h$ amelyre $s(H) = \{1\}$ azaz H nem-felcserélhető, és $(\kappa)^+ = |H| \leq n(S_h)$.

Az előző példák után továbbra is kérdés, hogy

1 Probléma *Tetszőleges végtelen λ számossághoz létezik-e olyan S extra-speciális csoport amelyre $|S| = n(S) = \lambda$?*

2.2.4. Egyéb példák

2.12 Állítás *Legyen T test és $M_T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in T \right\}$ mátrixcsoport, akkor ha $|T| = t$*

$$|M_T| = t^3, \quad Z(M_T) = M_T' \simeq T^+, \quad bfc(M_T) = |M_T'| = t \tag{2.21}$$

$$|M_T : Z(M_T)| = t^2, \quad |M_T : Z_2(M_T)| = 1, \quad a(M_T) = n(M_T) = t+1 \tag{2.22}$$

Megjegyzés. Ha $T = \mathbb{F}_p$ véges prímtest, akkor M_T egy p^3 rendű extra-speciális p-csoport.

Bizonyítás. Először is $Z(M_T) = M_T' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in T \right\}$, és egy mátrix konjugáltosztálya M_T-ben: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & -ay+bx+c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y \in T \right\}$, tehát ha $m \in M_T \setminus Z(M_T)$, akkor $|Cl_{M_T}(m)| = t$. Mivel egy Abel részcsoport rendje legfeljebb t^2, ezért ha $M_T = \bigcup_{i=1}^k A_i$ Abel-fedés, akkor $t^3 - t = |M_T \setminus Z(M_T)| \leq \sum_{i=1}^k |A_i \setminus Z(M_T)| \leq k(t^2 - t)$, vagyis $t+1 \leq k$. Másrészt $t+1$ Abel részcsoporttal le is fedhető az M_T csoport, legyen ugyanis $A_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & \lambda x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y \in T \right\}$, $\forall \lambda \in T$-re és $A_{t+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y \in T \right\}$, akkor $M_T = \bigcup_{i=1}^{t+1} A_i$ Abel-fedés, tehát $a(G) = t+1$. Világos, hogy egyfelől $n(G) \leq a(G) \leq t+1$, másfelől ha $a, c \in T$ rögzített nem nulla elemek, akkor a $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & \lambda a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in T \right\}$ elemek egy nem-felcserélhető halmazt alkotnak, tehát $n(G) = t+1$. $\square$

A következő állítás fogja mutatni az 5.5, 5.17 és 5.18 Tételek élességét:

2.13 Állítás (2000) *Tetszőleges κ végtelen számosságra létezik olyan G csoport, melyben bfc(G) $= |G'| = \kappa$ és $|G| = |G : Z(G)| = |G : Z_2(G)| = 2^\kappa$ továbbá $a(G) = n(G) = \kappa$, és a G csoport nem tartalmaz valódi Abel normálosztót.*

Bizonyítás. Legyenek $Y = X \times \{0,1\}$, ahol X egy κ számosságú halmaz és $Sym(Y)$ az Y halmaz összes permutációinak csoportja. Tekintsük a $Sym(Y)$ következő két részcsoportját: $Alt(Y) \lhd Sym(Y)$ álljon Y páros permutációiból, továbbá legyen $A = \{\pi \in Sym(Y) \mid \forall (x,t) \in Y \quad \pi(x,t) \in \{x\} \times \{0,1\}$. Világos, hogy A Abel részcsoport és $|A| = 2^\kappa$. Tekintsük a következő G csoportot: $G = \langle Alt(Y), A\rangle = Alt(Y)A$. Mivel az összes hármas ciklus konjugált, bfc$(G) \geq \kappa$, és mivel $Alt(Y)$ egyszerű csoport ezért $G' = Alt(Y)$ így $|G'| = \kappa$. Világos, hogy mivel $C_{Sym(Y)}(Alt(Y)) = 1$ így $Z(G) = 1$ ezért $|G : Z_2(G)| = |G| = |Alt(Y)||A| = 2^\kappa$. A 2.2 Állítás szerint $a(G) \leq$ bfc$(G)|G : A| = \kappa$, valamint $H = \{\pi \in G \mid \pi = (abx)$ *hármas ciklus, ahol a,b rögzítettek, de* $x \in Y$ *tetszőleges*$\}$ nem-felcserélhető halmaz. Így $\kappa \leq n(G) \leq a(G) \leq \kappa$. Most tegyük fel, hogy létezik $1 \neq B \lhd G$ Abel normálosztó. Világos, hogy $A \cap B \neq 1$. Legyen $a \in A \cap B$ és $x \in Alt(Y)$, hogy $1 \neq [a,x] \in B \cap Alt(Y)$. Tehát a véges sok elemet mozgató $[a,x]$ permutáció összes konjugáltja felcserélhető egymással, ami lehetetlen. $\square$

Az előző fontos példákra, melyek segítettek kijelölni a kutatás irányvonalát, még sokszor fogunk hivatkozni illetve visszautalni. A következő fejezetekben áttekintjük lényegében időrendi sorrendben ezen terület kutatásának eredményeit.

2.3. A felcserélhetőségi gráf

Egy G csoporthoz definiálhatunk egy, a felcserélhetőségi struktúrát jól tükröző, $\Gamma = \Gamma(G)$ gráfot a következőképpen:

Γ csúcsai a G elemei, a g,h csúcsokat pontosan akkor köti össze él, ha $[g,h] \neq 1$. Világos, hogy Γ minden üres részgráfja G egy Abel részhalmazának, egy teljes részgráfja pedig a csoport egy nem-felcserélhető részhalmazának felel meg. Ennélfogva a Γ gráf kromatikus száma $\chi(\Gamma) = a(G)$ és a teljes részgráfok méreteinek szuprémuma $n(G)$.

Erdős Pál ennek a gráfnak a vizsgálata kapcsán tette fel a következő kérdéseket, melyekkel jelentősen előre lendítette a kutatásokat:

1. Ha a G csoport $\Gamma(G)$ nem tartalmaz végtelen teljes részgráfot, akkor létezik-e véges korlát a teljes részgráfok méretére?
2. Ha $n(G) = n$ véges, akkor milyen korlátot lehet adni $\chi(\Gamma)$-ra?
3. Ha $\chi(G) = \kappa$, és κ végtelen számosság, akkor létezik-e korlát a centrum indexére?

Ezeket a kérdéseket mind megválaszolták, az elsőt B. H. Neumann [10] 1976-ban, a másodikat Pyber László [15] 1985-ben, a harmadik kérdésre V. Faber, R. Laver és R. McKenzie [5] adott választ 1978-ban. Ezeket a későbbiekben még részletesen áttekintjük.

3. fejezet

VÉGESSÉGI TÉTELEK

3.1. Történeti áttekintés

Az 1900-as évek elejétől kezdve tanulmányozták, hogy a vizsgált mennyiségeink valamelyikének végessége a többi mennyiségek közül melyek végességét vonja maga után. Először áttekintjük a XX. század első felének eredményeit, majd az összes kapcsolatot tisztázzuk, és ábrázoljuk egy végességi táblában.

A legelső eredmény az 1902-ből származó, transzfer használatával bizonyítható Schur-tétel.

3.1 Tétel (Schur [16]) *Ha a G csoportra $|G : Z(G)|$ véges, akkor a G' is véges.*

Ennek a tételnek a megfordítása nem igaz, mint azt az előző fejezetben az extra-speciális csoportok mutatták(2.9, 2.10 Állítás). Azonban bizonyos fordított jellegű állítás kimondható, amelynek egy bizonyítását is bemutatjuk, ugyanis ezt a gondolatmenetet még használni fogjuk a későbbiekben.

3.2 Tétel (P. Hall [16]) *Ha a G csoportra G' véges, akkor $|G : Z_2(G)|$ véges.*

Bizonyítás. A (2.1) szerint ha $g \in G$ akkor $|G : C_G(g)|$ véges, és minden $x \in G' \setminus Z(G)$ elemhez $\exists g_x$, hogy $x \notin C_G(g_x)$. Legyen $H = \cup Cl_G(g_x)$, ekkor H véges, mivel véges sok véges halmaz uniója. H teljes konjugáltosztályok uniója, ezért az $N = C_G(H)$ normálosztó, és $|G : N| = |G : \bigcap_{h \in H} C_G(h)| \leq \prod_{h \in H} |G : C_G(h)|$, ez pedig véges. $[N, G] \subset N \cap G' \subset Z(G)$ mivel H definíciója miatt $N \cap (G' \setminus Z(G)) = \emptyset$. Ennélfogva $N \leq Z_2(G)$, és $|G : Z_2(G)| \leq |G : N|$ tehát véges. $\square$

A 2.12 Állítás mutatja, hogy P. Hall tételének megfordítása nem igaz bizonyos mátrixcsoportokra. Már a második fejezet elején (2.1 Állítás) láttuk, hogy ha G' véges, akkor a bfc*(G)* is véges, azonban igaz ennek a megfordítása is.

3.3 Tétel (B. H. Neumann [16]) *Ha G csoport, a bfc(G) véges pontosan akkor, ha G' véges.*

Nyilvánvaló a 2.1 Állításból, hogy ha $|G : Z(G)|$ véges, akkor az $a(G)$, továbbá az $n(G)$ is véges, viszont ezek megfordítása már korántsem triviális.

3.4 Tétel (Baer [11]) *Ha $a(G)$ véges, akkor a $|G : Z(G)|$ véges.*

A következő eredmény megválaszolja Erdős Pál első kérdését a felcserélhetőségi gráffal kapcsolatban.

3.5 Tétel (B. H. Neumann [10]) *A G csoportra,*
ha $n(G)$ végtelen, akkor $\exists H \subset G$ végtelen nem felcserélhető halmaz
ha $n(G)$ véges, akkor $|G : Z(G)|$ véges

Az előző fejezet példái mutatják, hogy a $|G : Z_2(G)|$ végességéből nem következik $a(G)$ és $n(G)$ végessége.

Az előző tételek bizonyításához (3.4, 3.5) a következő két eredmény ad segítséget:

3.6 Tétel (B. H. Neumann) *Ha a G csoport le van fedve véges sok részcsoportjával $G = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$, és H_r nem hagyható el a fedésből azaz $H_r \not\subseteq \bigcup_{i \neq r} H_i$, akkor $|G : H_r| < \infty$.*

Bizonyítás. Legyen $h \in H_r \setminus \bigcup_{i \neq r} H_i$. Tegyük fel, hogy $|G : H_r| = \infty$ és legyen $\{t_i \mid i \in I\}$ egy mellékosztály reprezentáns rendszere. Legyen Γ végtelen teljes gráf, melynek a csúcsai: $V(\Gamma) = \{t_i \mid i \in I\}$. A gráf éleit n színnel színezzük a következőképpen: a $i < j$-re a (t_i, t_j) él színe $s = \min\{l \leq n \mid t_i t_j^{-1} \in H_l h^{-1}\}$. Mivel a Γ végtelen teljes gráf éleit n színnel színeztük, a klasszikus végtelen Ramsey tétel (lásd 5.1 Tétel) egy triviális esete szerint vannak olyan $i < j < k$, hogy a (t_i, t_j), (t_j, t_k), (t_i, t_k) élek ugyanolyan s színűek, $t_i t_j^{-1}, t_j t_k^{-1}, t_i t_k^{-1} \in H_s h^{-1}$. Ezeknek alapján $h = (t_j t_k^{-1} h)(t_i t_k^{-1} h)^{-1}(t_i t_j^{-1} h) \in H_r$, ami ellentmondás. $\square$

Megjegyzés. A tétel a részcsoportok helyett mellékosztályokat véve is ugyanígy igaz. Az 5.4 Tétel bizonyítása ezzel teljesen analóg az 5.2 Erdős, Rado Tétel a $(2^\kappa)^+ \longrightarrow (3)^2_\kappa$ alkalmazásával.

3.7 Tétel (M. J. Tomkinson [20]) *Ha egy G csoportban $n(G) = n < \infty$ és $H = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ maximális nem-felcserélhető halmaz, akkor*

$$Z(G) = \bigcap_{i=1}^{n} C_G(x_i)$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $a \in \bigcap_{i=1}^{n} C_G(x_i) \setminus Z(G)$. Ekkor van olyan $b \in G$ amelyre $[a, b] \neq 1$. Legyen

$$y_i := \begin{cases} x_i & \text{ha } [x_i, b] \neq 1 \\ a x_i & \text{ha } [x_i, b] = 1 \end{cases}$$

Ekkor az $\{y_1, y_2, \ldots, y_n, b\}$ egy $n+1$ elemű nem-felcserélhető halmaz, ami ellentmond n maximalitásának. $\square$

Megjegyzés. Ha $H \subset G$ egy maximális nem-felcserélhető halmaz, akkor a $G = \bigcup_{h \in H} C_G(h)$ fedés irredundáns (semelyik tag nem hagyható el a fedésből).

3.2. A végességi tábla

A vizsgált mennyiségek segítségével elkészíthetünk egy 6×6-os táblázatot:

A táblázat sorainak ill. oszlopainak megfeleltetjük a mennyiségeinket, és a táblázat i-dik sorának j-dik oszlopába 1-t írunk, ha a j-dik oszlop mennyiségének végességéből következik az i-dik sor mennyiségének végessége, és 0-t írunk, ha ez nem teljesül.

	bfc(G)	$\|G'\|$	$\|G : Z(G)\|$	$\|G : Z_2(G)\|$	$a(G)$	$n(G)$
bfc(G)	1	1	1	0	1	1
$\|G'\|$	1	1	1	0	1	1
$\|G : Z(G)\|$	0	0	1	0	1	1
$\|G : Z_2(G)\|$	1	1	1	1	1	1
$a(G)$	0	0	1	0	1	1
$n(G)$	0	0	1	0	1	1

Ebből a táblázatból kitűnik, hogy a legerősebb a $|G : Z(G)|$ végessége, ugyanis ebből az összes többi mennyiség végessége is következik, a leggyengébb pedig a $|G : Z_2(G)|$ végessége, mert ez bármelyik másik mennyiség végességéből következik, valamint, ha $|G : Z_2(G)|$ véges, a többi mennyiség mindegyike lehet végtelen (akár egyszerre is, ha pl. $G = M_T$, ahol T egy végtelen test (lásd 2.12 állítás). Továbbá még azt is láthatjuk, hogy a bfc(G), $|G'|$ ill. a $|G : Z(G)|$, $a(G)$, $n(G)$ mennyiségek ebből a szempontból ekvivalensek egymással.

4. fejezet

VÉGES CSOPORTOK

Ebben a fejezetben azt az esetet vizsgáljuk, amikor a mennyiségeink végesek, ehhez (mint láttuk az előző fejezetben) elegendő feltennünk, hogy a $|G : Z(G)|$ véges. Először megmutatjuk, hogy elegendő a véges csoportok vizsgálatára szorítkoznunk

4.1 Állítás (I. D. Macdonald [9]) *Ha a G csoportra $|G : Z(G)|$ véges, akkor létezik olyan G_0 véges csoport, amelyre $G/Z(G) \simeq G_0/Z(G_0)$, továbbá $G/Z_2(G) \simeq G_0/Z_2(G_0)$, és $G' = G_0'$ valamint bfc(G)* $=$ bfc(G_0), *$a(G) = a(G_0)$, és $n(G) = n(G_0)$*

Bizonyítás.(Vázlat) A következő két egyszerű észrevételt fogjuk használni:

1. Ha a G és H csoportokra léteznek $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\} \subset G$, $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subset H$ melyek $Z(G)$ illetve $Z(H)$ mellékosztály reprezentáns rendszerek, és a

   $$\varphi(t_i) = u_i \quad 1 \leq i \leq k$$

   leképezés kiterjeszthető Φ izomorfizmussá

   $$\Phi \colon \langle t_1, t_2, \ldots, t_k \rangle \to \langle u_1, u_2, \ldots, u_k \rangle$$

   akkor $G/Z(G) \simeq H/Z(H)$, $G/Z_2(G) \simeq H/Z_2(H)$, és $G' = H'$ valamint bfc*(G)* $=$ bfc*(H)*, $a(G) = a(H)$, és $n(G) = n(H)$.

2. Ha $N \leq Z(G)$ és $N \cap G' = 1$, akkor a G és a $H = G/N$ csoportokra is teljesülnek az előző egyenlőségek.

Ezek után legyen először $\hat{G} = \langle t_1, t_2, \ldots, t_k \rangle$, ahol $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ egy $Z(G)$ mellékosztály reprezentáns rendszer. Mivel $|\hat{G} : Z(\hat{G})| = |G : Z(G)| < \omega$, ezért $Z(\hat{G})$ is végesen generált (lásd [16]), tehát $Z(\hat{G}) = P \times F$, ahol P véges Abel, F egy szabad Abel csoport. A $\hat{G}'$ végessége miatt $\hat{G}' \cap F = 1$ így az előző két észrevétel alapján látjuk, hogy a $G_0 = \hat{G}/F$ csoport teljesíti a feltételeket. □

Időrendi sorrendben áttekintve a következő kapcsolatokat vizsgáljuk:

1. A $|G : Z(G)|$, $a(G)$ és az $n(G)$ mennyiségek közötti kapcsolat
2. A $|G'|$ és a bfc(G) kapcsolata egymással és a többi mennyiséggel
3. A $|G : Z_2(G)|$ becslése a tőbbi mennyiséggel

Felvetődik a kérdés, hogy ha a végességi tábla szerint következik egyik mennyiségünk végességéből egy másik végessége, és az egyik mennyiségünk n, akkor egyáltalán korlátozható-e a másik mennyiség egy $f(n)$ függvénnyel. Erre a matematikai logika eszközeivel, az ultraszorzat segítségével, pozitív válasz adható.

4.1. Csoportok ultraszorzata

Legyen I egy nem üres halmaz ekkor egy $\emptyset \neq \mathcal{F} \in \mathcal{P}(I)$ halmazrendszer egy I-n értelmezett

- szürő, ha $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{F}$, akkor $\emptyset \neq A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m \in \mathcal{F}$, továbbá $A \in \mathcal{F}$ és $A \subset B$ esetén $B \in \mathcal{F}$
- ultraszűrő, ha szűrő, és tetszőleges $X \subset I$ esetén $X \in \mathcal{F}$ vagy $I \setminus X \in \mathcal{F}$
- főszűrő, ha $\mathcal{F}_a = \{X \subset I \mid a \in X\}$

Minden maximális szűrő ultraszűrő (Zorn lemma), valamint ha $|I| = \lambda \geq \omega$ van olyan $\mathcal{U}$ ultraszűrő amely nem főszűrő és minden $A \in \mathcal{F}$ elemére $|A| = \lambda$ (ezt az $\mathcal{F} = \{X \bigm| |I \setminus X| < \lambda\}$ szűrő kiterjesztésével kaphatjuk). Az $\mathcal{U}$ a továbbiakban egy ilyen típusú ultraszűrőt jelent.

1 Definició *A G_γ $(\gamma \in I)$ csoportok $\prod_{\gamma \in I} G_\gamma / \mathcal{U}$ ultraszorzatán a komplett direkt szorzat következő faktorát értjük:*

$$\bar{g}, \bar{h} \in \prod_{\gamma \in I} G_\gamma / \mathcal{U} \quad \bar{g} = \bar{h} \iff \{\gamma \in I \mid g_\gamma = h_\gamma\} \in \mathcal{U}$$

Az ultraszorzatok alaptételét jól fogjuk tudni használni:

4.2 Tétel *A ϕ formulára $\prod_{\gamma \in I} G_\gamma / \mathcal{U} \models \phi \iff \{\gamma \in I \mid G_\gamma \models \phi\} \in \mathcal{U}$.*

Megjegyzés. Csoportok esetében egy ϕ formula megalkotásánál használt függvényjelek a $\{\cdot, {}^{-1}\}$ csoportműveletek és az $\{=\}$ relációjel.

Ezek után már nem nehéz megmutatnunk, hogy ha egyik mennyiségünk véges és következik egy másik mennyiségünk végessége (lásd végességi tábla), akkor az első mennyiség valamilyen függvénye korlátozza felülről a második mennyiséget. Ezt egy esetre bebizonyítjuk, a többi esetben a bizonyítás analóg módon végezhető.

4.3 Állítás *Létezik olyan f függvény, hogy ha egy G csoportban bfc$(G) = n$ akkor $|G'| \leq f(n)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy nem létezik megfelelő f függvény, akkor tekintsünk olyan G_i $(i < \omega)$ csoportokat melyekre $\mathrm{bfc}(G_i) = n$ és $|G_i'| \to \infty$. Tekintsük a $G = \prod_{i<\omega} G_i/\mathcal{U}$ ultraszorzatot. Legyenek ϕ_1, ϕ_2 a következő formulák:

$$\phi_1 := \forall y, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \left(\bigvee_{1 \le i < j \le n+1} (x_i^{-1} y x_i = x_j^{-1} y x_j) \right)$$

$$\phi_2 := \forall x_{i,j}, y_{i,j}, 1 \le i, j \le m+1 \left(\bigvee_{1 \le i < j \le m+1} \left(\prod_{k=1}^{m+1} [x_{i,k}, y_{i,k}] = \prod_{k=1}^{m+1} [x_{j,k}, y_{j,k}] \right) \right)$$

A ϕ_1 formula azt fejezi ki, hogy a $\mathrm{bfc}(G) \le n$, a ϕ_2 pedig azt, hogy $|G'| \le m$. Mivel $G_i \models \phi_1$ $\forall i < \omega$ ezért $G \models \phi_1$ így $\mathrm{bfc}(G) \le n$. A Schur-tétel (3.1) szerint ekkor $|G'| < \omega$ így $m = |G'|$ választással $G \models \phi_2$ tehát $\{i < \omega \mid |G_i'| \le m\} \in \mathcal{U}$. Mivel $\mathcal{U}$ minden eleme végtelen halmaz, ez azt jelenti, hogy $|G_i'| \le m$ végtelen sok i-re, ami ellentmondás. □

4.2. A $|G : Z(G)|$, $a(G)$ és az $n(G)$ mennyiségek közötti kapcsolat

Az (1.3) szerint $n(G) \le a(G) \le |G : Z(G)| - 1$. A legelső fordított irányú becslés:

4.4 Tétel (B. H. Neumann [11]) *Ha G csoport és $a(G) = a$, akkor $|G : Z(G)| \le c^{2^n}$ valamilyen c konstansra.*

Majd egy újabb eredményéből $n(G)$-re egy jobb korlát adódott:

4.5 Tétel (B. H. Neumann [10]) *Ha G csoport és $n(G) = n$, akkor $|G : Z(G)| \le c^{n^2}$ valamilyen c konstansra.*

1974-ben I. M. Isaacs javította ezt az eredményt:

4.6 Tétel (I. M. Isaacs [8]) *Ha egy G csoportra $n(G) = n$, akkor $|G : Z(G)| \le (n!)^2$.*

Végül 1985-ben Pyber László megadta a nagyságrendileg legjobb becslést:

4.7 Tétel (L. Pyber [15]) *Ha egy G csoportra $n(G) = n$, akkor $|G : Z(G)| \le c^n$ valamilyen c konstansra.*

Nagyságrendileg ez már nem javítható, mivel az extra-speciális 2-csoport esetén (lásd 2.8 Állítás) $|G : Z(G)| = 2^{n-1}$. Viszont a Pyber László által megadott konstans igen nagy $2^{2^{25}}$ körüli. Tehát továbbra is kérdés, hogy mennyire javítható ez a konstans, az extra-speciális csoport példája alapján, talán $c = 2$ a legjobb konstans.

1987-ig az $a(G)$ mennyiségre is ez volt a legjobb becslés, ekkor M. J. Tomkinson bebizonyította, hogy

4.8 Tétel (M. J. Tomkinson [20]) *Ha G nem Abel csoport és $a(G) = a$, akkor*

$$|G : Z(G)| \le \max\{(a-1)^2, (a-2)^{\log_2(a-2)}\}$$

Továbbá Tomkinson sejtette, mint ezt számos példa mutatja (pl. ha G egyszerű vagy extraspeciális /lásd 2.fejezet/), hogy ez a korlát $(a-1)^2$-ig csökkenthető.

Szegedy Balázzsal közösen megmutattuk, hogy nem igaz ez a sejtés, sőt több különböző csoportosztályban (2-nilpotens, triviális centrumú) találtunk példákat, melyek mutatják, hogy a Tomkinson által adott felső korlát lényegében, kitevőbeli konstanstól eltekintve, nem javítható.

4.9 Tétel (2000) *Létezik olyan H_n 2-nilpotens csoportsorozat, melyre $|H_n : Z(H_n)| \to \infty$, továbbá $|H_n : Z(H_n)| > a(H_n)^{c \log_2 a(H_n)}$ ahol c pozitív konstans.*

4.10 Tétel (2000) *Létezik olyan G_n csoportsorozat, melyre $Z(G_n) = 1$ és $|G_n| \to \infty$ továbbá $|G_n| > a(G_n)^{c \log_2 a(G_n)}$ ahol c pozitív konstans.*

Most tekintsük ezen tételek bizonyítását:

Bizonyítás. Először megkonstruáljuk a G_n csoportokat : Legyen V egy n^2 dimenziós vektor tér a 3 elemű $\mathbb{F}_3$ test felett és $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n^2\}$ egy bázisa V-nek. Tekintsük a blokk-diagonális $\mathsf{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset GL(V)$ mátrixok M halmazát (az $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n^2\}$ bázisban felírva), ahol $x_i \in \mathbb{F}_3 \quad 1 \leq i \leq n$, $x_n \neq 0$ és

$$\mathsf{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \mathsf{X} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathsf{X} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{X} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathsf{X} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy M a $GL(V)$ részcsoportja. Legyen $G_n = M \ltimes V^+$ (V^+ a V additív csoportja), ahol az M elemei természetes módon hatnak a V^+-on, $G_n = \{(m, v) \mid m \in M, v \in V^+\}$. Világos, hogy $|G_n| = |V^+||M| = 2 \cdot 3^{n^2+n-1}$.

Ha a G_n csoportsorozat konstrukciójában az $\mathbb{F}_3$ testet az $\mathbb{F}_2$-re cseréljük, kapjuk a H_n csoportsorozatot. Hasonlóan az előzőkhöz kapjuk, hogy $|H_n| = 2^{n^2+n-1}$.

4.11 Lemma $Z(G_n) = 1$.

Bizonyítás. Ha $g = (m, v) \in Z(G_n)$ akkor minden $w \in V^+$ esetén

$$(1, w)(m, v) = (m, v)(1, w) \quad \text{tehát} \quad m(w) = w.$$

Ebből következőleg $m = id_V$ és $g \in V^+$. Tekintsünk egy tetszőleges nem nulla $v \in V^+$ vektort. Válasszunk egy i $(1 \leq i \leq n^2)$ számot, melyre a v vektor i-dik koordinátája nullától különböző és legyen $i \equiv r \pmod{n}$, $\quad 1 \leq r \leq n$. Ha $r \neq n$ akkor $\mathsf{F}(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{r}, 0, \ldots, 0, 1) \notin C_{G_n}(v)$. Ha $r = n$ akkor $\mathsf{F}(0, 0, \ldots, 0, -1) \notin C_{G_n}(v)$. Következésképpen $g = (id_V, 0)$ ezért $Z(G_n) = 1$.

□

4.12 Lemma $|Z(H_n)| = 2^n$ *és* $H_n/Z(H_n)$ *Abel csoport, így* H_n *2-nilpotens.*

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint az előző lemmában, ha $h \in Z(H_n)$, akkor $h \in V^+$. Tekintsünk egy tetszőleges nem nulla $v \in V^+$ vektort. Válasszunk egy i $(1 \leq i \leq n^2)$ számot, melyre a v vektor i-dik koordinátája nullától különböző és legyen $i \equiv r \pmod{n}$, $1 \leq r \leq n$. Ha $r \neq n$ akkor $\mathsf{F}(0,\ldots,0,\underbrace{1}_{r},0,\ldots,0,1) \notin C_{H_n}(v)$. Ebből következik, hogy $Z(H_n) \leq \langle e_{nk} \mid 1 \leq k \leq n \rangle$. A fordított tartalmazás nyilvánvaló, ezért $|Z(H_n)| = |\langle e_{nk} \mid 1 \leq k \leq n \rangle| = 2^n$. Mivel $[V^+, M] \leq Z(H_n)$ és V^+, M Abel részcsoportjai H_n-nek, ezért a $H_n/Z(H_n)$ is Abel csoport. $\square$

4.13 Lemma *Ha* $m = \mathsf{F}(0,0,\ldots,0,-1) \in M \leq G_n$ *then* $|C_M(m)| = 2$ *akkor* $|C_{V^+}(m)| = 3^{n^2-n}$, *továbbá* bfc$(G_n) = |G'_n| = 3^{2n-1}$

Bizonyítás. Legyen $K = \{\mathsf{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 1) \mid x_i \in \mathbb{F}_3\}$. Most $K \leq M$ és $|M : K| = 2$, K elemi Abel 3-csoport és minden $k \in K$-ra és $m^{-1}km = k^{-1}$. Következésképpen $C_M(m) \cap K = 1$. Ez azt jelenti, hogy $|C_M(m)| = 2$. Továbbá

$$C_{V^+}(m) = \{v \in V^+ \mid m(v) = v\} = \ker(m - id_V) = \langle e_i \mid 1 \leq i \leq n^2, \ \ n \nmid i \rangle,$$

azaz $|C_{V^+}(m)| = 3^{n^2-n}$. Mivel $m \in M$ kapjuk, hogy $C_{G_n}(m) = C_M(m) \ltimes C_{V^+}(m)$. Innen láthatjuk, hogy $|C_{G_n}(m)| = 2 \cdot 3^{n^2-n}$ tehát $|Cl_{G_n}(m)| = 3^{2n-1}$ vagyis bfc$(G_n) \geq 3^{2n-1}$. Legyen $A = \langle e_{nk} \mid k = 1, 2, \ldots n \rangle \lhd G_n$. Minthogy $[V^+, M] \leq A$ és $M' \leq K$ láthatjuk, hogy $G_n/A = V^+/A \oplus MA/A$ így $G'_nA/A = M'A/A$. Ennélfogva $|G'_n| \leq |M'||A| \leq |K||A| = \frac{1}{2}|M||A| = 3^{2n-1}$. Mindezeket összegezve $3^{2n-1} \leq$ bfc$(G_n) \leq |G'_n| \leq 3^{2n-1}$ tehát a bizonyítást befejeztük. $\square$

Most megmutatjuk, hogy a most definiált G_n és H_n csoportok rendelkeznek a 4.9 és 4.10 Tételekben megkívánt tulajdonságokkal.

4.14 Állítás (2000) $a(G_n) \leq 2 \cdot 3^{2n-1} - 3^n + 1$ *ezért*

$$|G_n| > a(G_n)^{\frac{1}{4}\log_3 a(G_n)}.$$

Bizonyítás. Használjuk a 2.2 Állítást az $A = V^+$ és a $(t_i)_{i \in I} = M$ szereposztással. Kapjuk, hogy

$$a(G_n) \leq \sum_{m \in M} |V^+ : C_{V^+}(m)|$$

Ha $id_V \neq m \in M$ akkor $C_{V^+}(m) = \{v \in V^+ \mid m(v) = v\} = \ker(m - id_V)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\dim_V \ker(m - id_V) = n^2 - n$, így $|C_{V^+}(m)| = 3^{n^2-n}$ és $|V^+ : C_{V^+}(m)| = 3^n$ azaz $a(G_n) \leq 3^n(2 \cdot 3^{n-1} - 1) + 1$. $\square$

4.15 Állítás (2000) $a(H_n) \leq 2^{2n} - 2^n + 1$ *és* $|H_n : Z(H_n)| > a(H_n)^{\frac{1}{4}\log_2 a(H_n)}$.

A bizonyítás teljesen analóg az előző állítás bizonyításával, ezért nem részletezzük. $\square$

Az $a(G)$ felső korlátait vizsgálva az $n(G)$ mennyiség függvényében a 4.7 Tételből láthatjuk, hogy $a(G) \leq |G : Z(G)| \leq c^{n(G)}$, és az extra-speciális 2-csoport mutatja, hogy ez a becslés nagyságrendileg már nem javítható.

4.3. A $|G'|$ és a bfc(G) kapcsolata

A (2.1) szerint bfc$(G) \leq |G'|$. A fordított becslés kedvelt vizsgálódási területe a csoportelmélettel foglalkozó kutatóknak. 1956-ban Wiegold sejtette, hogy ha bfc$(G) = n$, akkor

$$|G'| \leq n^{\frac{1}{2}(1+\log_2 n)}$$

Továbbá bebizonyította, hogy

4.16 Tétel (Wiegold [22]) *Ha egy G csoportra bfc$(G) = n$, akkor* $|G'| \leq n^{\frac{1}{2}n^4(\log_2 n)^3}$

A következő eredmény 1961-ből származik I. D. Macdonald-tól:

4.17 Tétel (I. D. Macdonald [9]) *Ha egy G csoportra bfc$(G) = n$, akkor* $|G'| \leq n^{6n(\log_2 n)^3}$

Wiegold sejtését Vaughan-Lee bebizonyította nilpotens csoportokra 1974-ben (lásd [21]). 1975-ben P. M. Neumann és M. R. Vaughan-Lee két újabb eredményt ért el:

4.18 Tétel (P. M. Neumann, M. R. Vaughan-Lee [12]) *Ha egy G csoportra bfc$(G) = n$, akkor*

$$|G'| \leq n^{\frac{1}{2}(3+5\log_2 n)}$$
$$|G'| \leq n^{\frac{1}{2}(5+\log_2 n)}, \text{ha } G \text{ feloldható}$$

Továbbá megadták a T_m csoportokat (lásd 2.1 Állítás utáni megjegyzés), amelyek mutatják a Wiegold-sejtés élességét. M. Cartwright [2] a véges egyszerű csoportok klasszifikációját használva megmutatta, hogy

4.19 Tétel (M. Cartwright [2]) *Ha egy G csoportra bfc$(G) = n$, akkor* $|G'| \leq n^{\frac{1}{2}(41+\log_2 n)}$

Majd ezt tovább javította D. Segal és A. Shalev 1999-ben

4.20 Tétel (D. Segal, A. Shalev [17]) *Ha egy G csoportra bfc$(G) = n$, akkor* $|G'| \leq n^{\frac{1}{2}(13+\log_2 n)}$

Ez utóbbi a jelenleg ismert legjobb eredmény.

Megjegyzés. M. R. Vaughan-Lee és P. M. Neumann [12] azt sejtették, hogy

Ha a G csoport különböző prímekhez tartozó Sylow részcsoportjai $P_1, P_2, \ldots, P_t$ akkor bfc(P_1)bfc$(P_2)\ldots$bfc$(P_t) \leq$ bfc(G).

Ebből a sejtésből következett volna, hogy ha bfc$(G) = n$, akkor $|G'| \leq n^{\frac{1}{2}(5+\log_2 n)}$. Azonban 2000-ben J. Cossey és T. Hawkes [3] $\forall \varepsilon > 0$-ra mutattak olyan 3 feloldhatósági hosszú csoportokat melyekre $\varepsilon\,($bfc(P_1)bfc$(P_2)\ldots$bfc$(P_t)) \geq$ bfc(G).

4.4. A $|G'|$ és a bfc(G) kapcsolata a többi mennyiséggel

Az extra-speciális 2-csoportok (2.8 Állítás) példája mutatja, hogy csak ezen mennyiségek felső becslésével érdemes próbálkoznunk, a bfc(G)-t becsüljük felülről, majd Segal és Shalev tételét alkalmazva, kapjuk $|G'|$ becslését. Valószínű, hogy néhány esetben ennél jobb eredmény is elérhető, de ez ma még megoldatlan. Először is a (2.4) és a (4.20) ad egy becslést a $|G'|$-re a $|G : Z(G)|$ mennyiséggel. Azonban erre Wiegold [23] megadta a pontos becslést (Schur-multiplikátor használatával), hogy

4.21 Tétel (Wiegold [23]) *Ha egy G csoportra $|G : Z(G)| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, akkor $|G'| \leq p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, ahol $\beta_i \leq \frac{1}{2}\alpha_i(\alpha_i + 1)$ $\ i = 1, 2, \dots, k$*

Megjegyzés. Ebből azonnal adódik, hogy ha $|G : Z(G)| = n$, akkor $|G'| \leq n^{\frac{1}{2}\log_2 n}$, és a T_m [12] 2-csoportok mutatják, hogy ez a legkisebb felső korlát.

Erre R. M. Guralnick [6] 1975-ben egy szép egyszerű bizonyítást adott:

Bizonyítás. Először két lemmát bizonyítunk:

4.22 Lemma *Legyen P Sylow részcsoportja a G véges csoportnak. Ekkor $P \cap G' \cap Z(G) = P' \cap Z(G)$.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $P' \cap Z(G) \leq P \cap G' \cap Z(G)$. A fordított tartalmazást transzfer segítségével bizonyítjuk. Legyen $\varphi\colon P \to P/P'$ természetes homomorfizmus, és $\tau\colon G \to P/P'$ az ehhez tartozó transzfer, világos, hogy $G' \leq \ker\tau$. Tekintsük a $\tau \restriction_{P\cap Z(G)}$ homomorfizmust, $P \cap G' \cap Z(G) \leq \ker\tau \restriction_{P\cap Z(G)}$. Másfelől a transzfer a centrumra megszorítva egyszerű alakban írható: $\tau \restriction_{P\cap Z(G)} (x) = \varphi(x^{|G:P|})$. Mivel $p \nmid |G : P|$ ezért $P' \cap Z(G) = \ker\varphi \restriction_{P\cap Z(G)} = \ker\tau \restriction_{P\cap Z(G)} \geq P \cap G' \cap Z(G)$. □

4.23 Lemma *Ha G p-csoport és $|G : Z(G)| = p^{\alpha}$, akkor $|G'| \leq p^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}}$.*

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $\alpha < 2$ a lemma triviális. Feltehetjük, hogy $\alpha \geq 2$. Legyen $a \in Z_2(G) \setminus Z(G)$. Mivel $H = [G, a] \subset Z(G)$ ezért $H = \{[x, a] \mid x \in G\}$ így $|H| = |G : C_G(a)| \leq p^{\alpha-1}$. Az indukciós feltevés szerint $|G'/H| \leq p^{\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}}$, ennélfogva $|G'| = |G'/H||H| \leq p^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}}$. □

Ezek után legyen S egy p_i-Sylow részcsoportja G-nek. Alkalmazva az előző két lemmát kapjuk, hogy $|S \cap G' \cap Z(G)| = |S' \cap Z(G)| \leq |S'| \leq p_i^{\frac{1}{2}\alpha_i(\alpha_i-1)}$. Tehát $p_i^{\beta_i} = |S \cap G'| = |S \cap G' : S \cap G' \cap Z(G)||S \cap G' \cap Z(G)| \leq |S : S \cap Z(G)||S \cap G' \cap Z(G)| \leq p_i^{\alpha_i} p_i^{\frac{1}{2}\alpha_i(\alpha_i-1)} = p_i^{\frac{1}{2}\alpha_i(\alpha_i+1)}$.

□

A bfc(G) mennyiségre az $n(G)$ mennyiséggel Pyber László [15] adott egy felső becslést 1985-ben megmutatva, hogy

4.24 Állítás (L. Pyber [15]) *Ha G csoportra $n(G) = n$, akkor bfc$(G) \leq 4n^2$.*

Ebből Segal és Shalev tételét alkalmazva azonnal adódik, hogy

4.25 Következmény *Ha G csoportra $n(G) = n$, akkor* $|G'| \leq (2n)^{15+2\log_2 n}$.

Pyber László kérdezte (szóbeli közlés), hogy

2 Probléma *Igaz-e, hogy egy G véges csoportban bfc$(G) \leq a(G)$?*

Azonban csak annyit sikerült megmutatnom, hogy

4.26 Állítás (2000) *Ha G nem Abel csoportra $a(G) = a$, akkor bfc$(G) \leq \frac{1}{2}(a-1)^2$.*

Bizonyítás. Tekintsük a G csoport egy, a darab Abel részcsoportjával történő fedését. Ekkor van olyan A Abel részcsoport a fedésből, amelyre $|G : A| \leq a - 1$. Megmutatjuk, hogy

$$\forall g \in G \quad |A : C_A(g)| \leq a - 1.$$

Feltehetjük, hogy $g \notin A$. Legyen T a $C_A(g)$ egy mellékosztály reprezentáns rendszere A-ban. Legyenek $t, u \in T$, hogy $[tg, ug] = 1$. Ekkor mivel $[u, t] = 1$ ezért $ut^{-1}g = gut^{-1}$ azaz $uC_G(g) = tC_G(g)$ így $u = t$. Tehát Tg egy nem-felcserélhető halmaz. Mivel, ha $g \notin A$ akkor $Tg \cap A = \emptyset$ tehát a Tg halmaz le van fedve $a(G) - 1$ darab Abel részcsoporttal, ezért $|A : C_A(g)| = |T| = |Tg| \leq a - 1$. Ebből következik, hogy $|Cl_G(g)| = |G : C_G(g)| = \frac{|C_A(g)|}{|C_G(g)|}|G : C_A(g)| \leq \frac{1}{2}|G : A||A : C_A(g)| \leq \frac{1}{2}(a-1)^2$. Nyilvánvaló, hogy ha $g \in A$ akkor $|Cl_G(g)| = |G : C_G(g)| \leq |G : A| \leq a - 1$. Tehát bebizonyítottuk, hogy bfc$(G) \leq \frac{1}{2}(a-1)^2$.

□

4.27 Következmény *A G nem Abel csoportra $a(G) = a$, akkor $|G'| \leq \left(\frac{1}{2}(a-1)^2\right)^{6+\log_2(a-1)}$, tehát aszimptotikusan $|G'| \leq a^{c\log_2 a}$, ahol $c > 1$ konstans.*

Megjegyzés. Az előző bizonyításból figyelembe véve, hogy $|G : A| \leq a - 1$, és $|A : C_A(g)| \leq a - 1 \ \ \forall g \in G$ esetén valamint, hogy $G = \langle A, x_1, x_2, \dots x_t \rangle$, ahol $t \leq \log_2(a-1)$ kapjuk, hogy

$$|G : Z(G)| = |G : \bigcap_{i=1}^{t}(C_G(x_i) \cap A)| \leq |G : A| \prod_{i=1}^{t} |A : C_A(x_i)| \leq (a-1)^{1+\log_2(a-1)}$$

Az így kapott becslés nagyságrendileg megegyezik Tomkinson becslésével (4.8 Tétel).

4.5. A $|G : Z_2(G)|$ becslése a többi mennyiséggel

Mint a második fejezet példái mutatják, csak a $|G : Z_2(G)|$ felső becslésére van esély. Az első ezzel kapcsolatos eredmény 1961-ből származik

4.28 Tétel (I. D. Macdonald [9]) *Ha egy G csoportra $|G'| = n$, akkor*

$$|G : Z_2(G)| \leq n^{(1+\log_2 n)\log_2 n}$$

A bizonyítás lényegében tartalmazza a következőt:

4.29 Állítás *Ha egy G csoportban bfc(G) $= k$, és $|G'| = n$, akkor*

$$|G : Z_2(G)| \leq k^{(1+\log_2 k)\log_2 n}$$

Ezt a Szegedy Balázzsal közösen sikerült megjavítanunk:

4.30 Tétel (2000) *Ha egy G csoportban bfc(G) $= k$, és $|G'| = n$, akkor*

$$|G : Z_2(G)| \leq k^{2\log_2 n} \leq n^{2\log_2 n}$$

Bizonyítás. Válasszunk olyan $\{x_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ elemeket a G csoportban, amelyekre

$$C_{G'}(x_i) \bigcap C_{G'}(\{x_j \mid j < i\}) \subsetneq C_{G'}(\{x_j \mid j < i\}) \quad 1 \leq i \leq k,$$

és $C_{G'}(\{x_i \mid 1 \leq i \leq k\}) = G' \cap Z(G)$. Ezen x_i elemek száma $k \leq \log_2 |G'|$. Legyen T egy minimális generátorrendszere G'-nek, így $|T| \leq \log_2 |G'|$. Tehát a $H = \{x_i \mid 1 \leq i \leq k\} \cup T$ halmaz elemszámára kapjuk, hogy $|H| \leq 2\log_2 |G'|$. Mivel $G' \leq \langle H \rangle$ ezért $\langle H \rangle$ normálosztó G-ben, tehát $C_G(H) = C_G(\langle H \rangle)$ is normálosztó G-ben. Most

$$[C_G(H), G] \leq G' \cap C_G(H) \leq C_{G'}(\{x_i \mid 1 \leq i \leq k\}) \leq Z(G)$$

azaz $C_G(H) \leq Z_2(G)$. Innen következik, hogy

$$|G : Z_2(G)| \leq |G : C_G(H)| \leq \prod_{h \in H} |G : C_G(h)| \leq \mathrm{bfc}(G)^{|H|} \leq \mathrm{bfc}(G)^{2\log_2 |G'|}.$$

Végül felhasználva, hogy $\mathrm{bfc}(G) \leq |G'|$ (2.1) kapjuk, hogy $|G : Z_2(G)| \leq |G'|^{2\log_2 |G'|}$. □

A G_n csoportok mutatják, hogy ez a becslés kitevőbeli konstanstól eltekintve nem javítható (lásd 4.10–4.14 Tételek), hiszen $|G_n| = 2 \cdot 3^{n^2+n-1}$ és $|G_n'| = 3^{2n-1}$, tehát $|G_n| > |G_n'|^{\frac{1}{4}\log_3 |G_n'|}$

Az eredményünkből, ha alkalmazzuk a Segal és Shalev tételét (4.20) és az előző fejezet eredményeit, kapjuk, hogy

4.31 Következmény *Ha egy G csoportban bfc(G) $= k$, és $n(G) = n$, akkor*

$$|G : Z_2(G)| \leq k^{(13+\log_2 k)\log_2 k}$$
$$|G : Z_2(G)| \leq (2n)^{4(1+\log_2 n)(15+2\log_2 n)}$$

A fenti egyenlőtlenségek nem feltétlenül a legjobb korlátok (aszimptotikusan), hiszen nem sikerült olyan csoportokat találnunk, ahol nagyságrendileg egyenlőség lenne, tehát továbbra is probléma, hogy

3 Probléma *Igaz-e, hogy $|G : Z_2(G)| \leq bfc(G)^{c\log_2 bfc(G)}$ valamilyen pozitív c konstansra?*

A $|G : Z_2(G)|$ felső becslése az $a(G)$ mennyiséggel ugyanaz, mint Tomkinson eredménye a $|G : Z(G)|$ becslésére, és a G_n csoportok mutatják, hogy ez a becslés aszimptotikusan már nem javítható (hiszen a 4.11 Lemma szerint $Z(G_n) = Z_2(G_n) = 1$).

4.6. Az eredmények ábrázolása

A vizsgált mennyiségek segítségével elkészíthetünk ismét egy 6×6-os táblázatot hasonlóan, mint az első fejezetben. A táblázat sorainak ill. oszlopainak megfeleltetjük a mennyiségeinket és a táblázat i-dik sorának j-dik oszlopába írt a_{ij} elemet a következőképpen definiáljuk: Legyenek $c > 1$, $C > 2^{2^{25}}$ konstansok

$$a_{ij} := \begin{cases} f(n) & \text{ha a } j\text{-dik oszlop } n\text{, akkor az } i\text{-dik sor legfeljebb } f(n) \text{ elég nagy } n\text{-re} \\ 0, & \text{ha az } i\text{-dik sor nem becsülhető felülről a } j\text{-dik oszloppal} \end{cases}$$

	$\mathrm{bfc}(G)$	$\|G'\|$	$\|G : Z(G)\|$	$\|G : Z_2(G)\|$	$a(G)$	$n(G)$
$\mathrm{bfc}(G)$	n	n	$\frac{1}{2}n$	0	$\mathbf{\frac{1}{2}(n-1)^2}*$	$4n^2$
$\|G'\|$	$n^{\frac{1}{2}c\log_2 n}$	n	$n^{\frac{1}{2}\log_2 n}$	0	$n^{2c\log_2 n}$	$n^{2c\log_2 n}$
$\|G : Z(G)\|$	0	0	n	0	$n^{log_2 n}$	C^n
$\|G : Z_2(G)\|$	$\mathbf{n^{clog_2^2 n}}*$	$\mathbf{n^{2log_2 n}}$	n	n	$n^{log_2 n}$	$\mathbf{n^{clog_2^2 n}}$
$a(G)$	0	0	$n-1$	0	n	C^n
$n(G)$	0	0	$n-1$	0	n	n

A táblázatban lévő nagyságrendi becslések ismertek jelenleg. A vastag betűvel szedett értékek önálló eredmények. Néhánynál nem ismert példa a feltüntetett nagyságrend élességére. A csillaggal jelölt helyeken a szerző úgy véli jobb becslések után kutatni.

5. fejezet

VÉGTELEN CSOPORTOK

Ebben a fejezetben vizsgáljuk, hogy milyen kapcsolat van a mennyiségeink között, ha valamelyik mennyiség végtelen. Itt bizonyos esetekben kombinatorikus halmazelméleti eszközök is alkalmazhatóak, mint partíciókalkulus, végtelen Ramsey-tételek [7]. Ez a terület fejlődött ki legkésőbb, valamennyire párhuzamosan haladt a halmazelmélet egy ágának fejlődésével. Az első fejezet példái és a második fejezet eredményei alapján a következő kapcsolatokat szükséges vizsgálnunk:

1. $a(G)$ és $|G : Z(G)|$ kapcsolata.
2. A bfc*(G)* kapcsolata a többi mennyiséggel.
3. $|G'|$ kapcsolata a $|G : Z(G)|$, $|G : Z_2(G)|$, és az $a(G)$ mennyiségekkel.

Mielőtt elkezdenénk ezeket vizsgálni, áttekintjük az ezen a területen használható halmazelméleti tételeket.

5.1. Különböző halmazelméleti módszerek

F. P. Ramsey 1930-ban bebizonyította klasszikus tételét, amelynek transzfinit általánosítása a halmazelmélet fontos ágát hozta létre, melyet Erdős Pál és Richard Rado [4] munkássága nyomán partíciókalkulusnak nevezünk. Ahhoz, hogy be tudjuk mutatni a számunkra fontos ide tartozó eredményeket, célszerű bevezetnünk egyfajta jelölésrendszer a partíció relációkra.

2 Definició *Legyen X egy halmaz $[X]^\kappa = \{\ Y \leq X \mid |Y| = \kappa\ \}$ és $(\gamma_\alpha \mid \alpha < \lambda)$ számosságok egy rendszere, akkor azt írjuk, hogy*

$$\kappa \longrightarrow (\gamma_\alpha \mid \alpha < \lambda)^n,$$

ha $[\kappa]^n = \cup_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ $(f\colon \kappa^n \to \lambda)$ esetén létezik olyan $\alpha < \lambda$ és $Y \in [\kappa]^{\gamma_\alpha}$, hogy $[Y]^n \subseteq X_\alpha$ $(f([Y]^n) = \{\alpha\})$. Ha $\gamma_\alpha = \gamma\ \forall \alpha < \lambda$, akkor azt írhatjuk, hogy $\kappa \longrightarrow (\gamma)^n_\lambda$. Ha az előzőek nem teljesülnek, akkor azt írjuk, hogy $\kappa \not\longrightarrow (\gamma_\alpha \mid \alpha < \lambda)^n$.

5.1 Tétel (Ramsey [7]) *Ha k, r véges számosságok, akkor*

$$\omega \longrightarrow (\omega)^k_r.$$

Erdős és Rado tételeinek két fontos esete hasznos lesz számunkra:

5.2 Tétel (Erdős, Rado [4])

$$(2^\kappa)^+ \longrightarrow ((2^\kappa)^+, \kappa^+)^2 \tag{5.1}$$

$$(2^\kappa)^+ \longrightarrow (\kappa^+)^2_\kappa \tag{5.2}$$

Előfordul, hogy elég csak az (5.2) egy speciális esetét használnunk:

$$(2^\kappa)^+ \longrightarrow (3)^2_\kappa$$

Ennek egy alkalmazását fogjuk látni a következő állításban:

5.3 Állítás (V. Faber, R. Laver, R. McKenzie [5]) *Legyen $G = \bigoplus_{\gamma<\lambda} G_\gamma$ véges nem Abel csoportok diszkrét direkt szorzata, ekkor $a(G) = \log\lambda = \min\{\kappa \mid \lambda \leq 2^\kappa\}$*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy $a(G) \geq \log\lambda$. Indirekten tegyük fel, hogy $G = \bigcup_{\vartheta<\kappa} A_\vartheta$, ahol $2^\kappa < \lambda$. Minden egyes G_γ-ban válasszunk két nem-felcserélhető x_γ és y_γ elemet. Minden $\alpha < \beta < \kappa$ esetén legyen $s(\alpha,\beta)_\gamma \in G_\gamma$ ahol

$$s(\{\alpha,\beta\})_\gamma := \begin{cases} 1, & \text{ha } \gamma \neq \alpha,\beta \\ x_\alpha, & \text{ha } \gamma = \alpha \\ y_\beta, & \text{ha } \gamma = \beta \end{cases}$$

Minden $\{\alpha,\beta\}$ halmazhoz ($\alpha < \beta < \lambda$) hozzárendelünk egy $\vartheta < \kappa$ rendszámot, amelyre $s(\{\alpha,\beta\}) \in A_\vartheta$. Ekkor mivel $\lambda \geq (2^\kappa)^+$, és $(2^\kappa)^+ \longrightarrow (3)^2_\kappa$ és ($\alpha,\beta < \kappa$) ezért léteznek olyan $\alpha < \beta < \gamma$ és ϑ, hogy $s(\{\alpha,\beta\}), s(\{\beta,\gamma\}), s(\{\alpha,\gamma\}) \in A_\vartheta$, de $[s(\{\alpha,\beta\}), s(\{\beta,\gamma\})] = [x_\beta, y_\beta] \neq 1$ ez ellentmondás. Most megmutatjuk, hogy $a(G) \leq \log\lambda$. Tekintsük a $\log\lambda$-nál kisebb rendszámokon értelmezett 0-1 függvényeket. Minden ilyen függvényhez egyértelműen tartozik egy út a $\log\lambda$ mélységű T bináris fában. Ezen utakat megcímkézzük a λ-nál kisebb rendszámokkal. Tekintsük a következő φ függvényeket: Álljon egy φ függvény $D(\varphi)$ értelmezési tartománya a T fa csúcsainak egy olyan véges részhalmazából melynek semelyik 2 eleme nem összehasonlítható (nem esnek ugyanabba a megcímkézett útba), $R(\varphi)$ értékkészlete pedig a $\sup a(G_\gamma)$ számosságnál kisebb véges számosságok egy véges részhalmaza. Ezen φ függvények száma $\log\lambda$. Most legyen $G_\gamma = \bigcup_{\vartheta<a(G_\gamma)} A_{\gamma,\vartheta}$. Minden φ függvényhez definiálunk egy C_φ halmazt: Legyen $g \in C_\varphi$ pontosan akkor, ha létezik $\psi\colon D(\varphi) \to \{\gamma \mid g_\gamma \neq 1\}$ bijekció, amelyre a benne van a $\psi(a)$-val címkézett útban minden $a \in D(\varphi)$-re, továbbá $g_{\psi(a)} \in A_{\psi(a),\varphi(a)}$. Elegendő belátnunk, hogy C_φ Abel és $G = \bigcup_\varphi C_\varphi$. Legyenek $f,g \in G$. Ha $f_\gamma, g_\gamma \neq 1$, akkor mivel $D(\varphi)$ összehasonlíthatatlan elemekből áll ezért egyértelműen létezik olyan $a \in D(\varphi)$ amely a γ útba esik, így $f_\gamma, g_\gamma \in A_{\gamma,\varphi(a)}$ vagyis $[f_\gamma, g_\gamma] = 1$ azaz $[f,g] = 1$. A befező rész bizonyításához vegyünk egy tetszőleges $g \in G$ elemet, ekkor választhatunk egy olyan B a T csúcsaiból álló véges nem összehasonlítható halmazt, és $\psi\colon B \to \{\gamma \mid g_\gamma \neq 1\}$ bijekciót, amelyre minden $b \in B$ benne van a $\psi(b)$ címkéjű útban. Most $\varphi(b)$-t $b \in B$ esetén definiáljuk úgy, hogy $g_{\psi(b)} \in A_{\psi(b),\varphi(b)}$. Ekkor valóban $g \in C_\varphi$. □

5.2. $a(G)$ és a $|G : Z(G)|$ kapcsolata

A (2.3) szerint $a(G) \leq |G : Z(G)|$, és egyenlőség áll fenn pl. ha $G = M_T$, ahol T egy végtelen test (lásd 2.12 állítás).

A másik irányú becslés már jóval bonyolultabb dolog, Erdős Pál a felcserélhetőségi gráffal kapcsolatos egyik kérdése nyomán kezdtek vele foglalkozni (lásd 2.3-ban a 3. kérdés), hogy ha $a(G) = \kappa$ végtelen számosság, akkor létezik-e egyáltalán valamilyen korlát a $|G : Z(G)|$-re.

1978-ban V. Faber, R. Laver és R. McKenzie [5] erre pozitív választ adott, kombinatorikus halmazelméleti eszközök segítségével (többek között használva az 5.2 tételt), bebizonyította, hogy

$$|G : Z(G)| \leq 2^{2^{2^{\kappa}}}$$

Ugyanakkor megmutatták, hogy ha a G csoport 2^κ véges nem Abel csoport diszkrét direkt szorzata, (lásd 5.3 állítás), akkor $a(G) = \kappa$ és $|G : Z(G)| = 2^\kappa$ (egyébként ez az általunk a 2.13 Állítás bizonyításában megadott csoportokra is teljesül). A cikkük végén megkérdezték, hogy vajon lehet-e javítani a becslésüket akár 2^κ-ra. M. J. Tomkinson [19] megjavította a korlátukat 1985-ben bebizonyítva, hogy

$$|G : Z(G)| \leq 2^{2^{\kappa}}$$

Továbbá megmutatta, hogy $|G : Z(G)| \leq 2^\kappa$, ha G irredundánsan lefedhető κ Abel részcsoportjával (azaz $G = \bigcup_{\gamma<\kappa} A_\gamma$, ahol egyik A_γ sem hagyható el a fedésből, $A_\alpha \not\subseteq \bigcup_{\gamma\neq\alpha} A_\gamma$). Ehhez a következő, önmagában is érdekes állítást bizonyította partíciókalkulus segítségével, melynek bizonyítása analóg a 3.6 tétel bizonyításával, csak a Ramsey tétel helyett a $(2^\kappa)^+ \longrightarrow (3)^2_\kappa$ kerül alkalmazásra:

5.4 Tétel (Tomkinson[19]) *Ha a G csoport irredundánsan le van fedve κ részcsoportjával $G = \bigcup_{\gamma<\kappa} H_\gamma$, $H_\alpha \not\subseteq \bigcup_{\gamma\neq\alpha} H_\gamma$, akkor $|G : H_\alpha| \leq 2^\kappa$.*

Ebből következőleg, ha $G = \bigcup_{\gamma<\kappa} A_\gamma$ irredundáns Abel-fedés, akkor $|G : A_\alpha| \leq 2^\kappa$, és mivel $\bigcap_{\gamma<\kappa} A_\gamma \subset Z(G)$, ezért $|G : Z(G)| \leq |G : \bigcap_{\gamma<\kappa} A_\gamma| \leq \prod_{\gamma<\kappa} |G : A_\gamma| \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa$. Azonban nem feltétlenül igaz, hogy $a(G) = \kappa$ esetén G lefedhető irredundánsan legfeljebb κ Abel részcsoporttal.

És most itt az ideje, hogy bizonyítsuk a dolgozat legfontosabb önálló eredményét (lásd [13]):

5.5 Tétel (2000) *Ha egy G csoportra az $a(G) = \kappa$ végtelen számosság, akkor $|G : Z(G)| \leq 2^\kappa$.*

Bizonyítás. A bizonyítás teljesen elemi, nem használ semmilyen komoly segédeszközt. Mivel minden Abel részcsoport benne van egy maximális Abel részcsoportban, ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy G-t lefedi maximális Abel részcsoportok $\mathcal{K}$ halmaza, azaz $|\mathcal{K}| = \kappa$ és $\bigcup \mathcal{K} = G$. Ekkor $C_G(A) = A$ minden $A \in \mathcal{K}$-ra és $Z(G) = \bigcap \mathcal{K}$.
Először megmutatjuk, hogy elég bebizonyítanunk azt, hogy $|A : A \cap B| \leq 2^\kappa$ minden $A, B \in \mathcal{K}$ esetén.

5.6 Lemma *Ha $|A : A \cap B| \leq 2^\kappa$ tetszőleges $A, B \in \mathcal{K}$ esetén, akkor $|G : Z(G)| \leq 2^\kappa$.*

Bizonyítás. A következő egyenlőtlenséget írhatjuk fel:

$$|A:Z(G)| = |A:\bigcap\mathcal{K}| \le \prod_{B\in\mathcal{K}} |A:A\cap B| \le (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa$$
$$|G:Z(G)| = |\bigcup\mathcal{K}:Z(G)| \le \sum_{A\in\mathcal{K}} |A:Z(G)| \le \kappa 2^\kappa = 2^\kappa.$$

□

Legyenek $A, B \in \mathcal{K}$, $A \neq B$ rögzítettek. Transzfinit rekurzióval definiáljuk sorrendben a $b_\alpha \in B$ $(\alpha < \nu)$ elemeket oly módon, hogy

$$C_A(b_\alpha) \cap C_A(\{b_\beta \mid \beta < \alpha\}) \subsetneqq C_A(\{b_\beta \mid \beta < \alpha\})$$

egészen addig folytatva, míg az utóbbi nem ér le $A \cap B = C_A(B)$-ig. Válasszunk továbbá $a_\alpha \in C_A(\{b_\beta \mid \beta < \alpha\}) \setminus C_A(b_\alpha)$ elemeket. Ezen lánc ν hosszát meg tudjuk becsülni:

5.7 Lemma $|\nu| \le 2^\kappa$.

Bizonyítás. Definiáljuk a $\mathcal{K}_\alpha = \{C \in \mathcal{K} \mid \exists\beta : \alpha < \beta < \nu,\ a_\beta b_\alpha \in C\}$ halmazokat $\forall\alpha < \nu$ esetén. Megmutatjuk, hogy ezek a halmazok páronként különbözőek. Legyenek ugyanis $\alpha < \beta < \nu$ és $C \in \mathcal{K}$ olyanok, hogy $a_\beta b_\alpha \in C$. A definíció szerint $C \in \mathcal{K}_\alpha$. Ha γ-t úgy választjuk, hogy $\beta < \gamma < \nu$, akkor $[a_\beta b_\alpha, a_\gamma b_\beta] = [a_\beta, b_\beta] \neq 1$, figyelembe véve, hogy $[a_\beta, a_\gamma] = 1$, $[b_\alpha, b_\beta] = 1$, $[b_\alpha, a_\beta] = 1$. Ezért $a_\gamma b_\beta \notin C$, mivel C Abel, tehát $C \notin \mathcal{K}_\beta$. Innen $|\nu| \le |\mathcal{P}(\mathcal{K})| \le 2^\kappa$ következik. □

Legyenek $\hat{B} = \{b_\alpha \mid \alpha < \nu\}$ és $\hat{A}$ az $A \cap B$ egy baloldali mellékosztály reprezentáns rendszere az A részcsoportban. Minden $C \in \mathcal{K}$ Abel részcsoporthoz definiáljunk az $\hat{A} \times \hat{B}$ halmazon egy M_C mátrixot, melynek elemei a $G \cup \{\emptyset\}$ halmazból valók. Először is legyenek $\hat{A}_C = \{a \in \hat{A} \mid a\hat{B} \cap C \neq \emptyset\}$, $\hat{B}_C = \{b \in \hat{B} \mid \hat{A}b \cap C \neq \emptyset\}$. Most, ha $a \in \hat{A}$, $b \in \hat{B}$ legyen

$$M_C(a,b) = \begin{cases} [b^{-1}, a], & \text{ha } a \in \hat{A}_C, b \in \hat{B}_C; \\ \emptyset, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A továbbiakban szükégünk lesz a következő technikai jellegű lemmára:

5.8 Lemma *Ha $a, a_1, b, b_1 \in G$ és $[a, a_1] = [b, b_1] = [a_1 b, a b_1] = 1$ akkor $[b^{-1}, a] = [b_1^{-1}, a_1]$.*

Bizonyítás. Mivel $b^{-1}a_1^{-1}b_1^{-1}a^{-1}a_1 bab_1 = 1$, ezért $a_1^{-1}b_1^{-1}a_1 a^{-1}[a^{-1}, a_1]ba = b_1^{-1}b[b, b_1^{-1}]$, vagyis $b_1 a_1^{-1}b_1^{-1}a_1 \cdot a^{-1}bab^{-1} = 1$ és $[b^{-1}, a] = [b_1^{-1}, a_1]$. □

5.9 Lemma *Az M_C mátrix különböző sorainak száma legfeljebb $1 + |\hat{B}| \le 2^\kappa$.*

Bizonyítás. Ha $a \in \hat{A} \setminus \hat{A}_C$, akkor az a elemhez tartozó sor csupa $\emptyset$-t tartalmaz. Legyen $a \in \hat{A}_C$ és $b_1 \in \hat{B}$ olyan elemek, hogy $ab_1 \in C$. Tételezzük fel, hogy $a^* \in \hat{A}_C$ is egy olyan elem, amelyre $a^* b_1 \in C$ szintén teljesül. Megmutatjuk, hogy az a és a^* elemekhez tartozó sorok megegyeznek. Ha $b \in \hat{B} \setminus \hat{B}_C$ akkor $M_C(a,b) = \emptyset = M_C(a^*, b)$.

Ha $b \in \hat{B}_C$ elemre $a_1 b \in C$, ahol $a_1 \in \hat{A}$, akkor $[ab_1, a_1 b] = 1$. Az előző lemma alapján $[b^{-1}, a] = [b_1^{-1}, a_1]$. Hasonlóan kapjuk, hogy $[b^{-1}, a^*] = [b_1^{-1}, a_1]$, tehát $[b^{-1}, a^*] = [b^{-1}, a]$, azaz $M_C(a, b) = M_C(a^*, b)$. Tehát az M_C mátrix különböző sorainak száma valóban legfeljebb $1 + |\hat{B}|$, és a 5.7 lemma szerint, $|\hat{B}| \leq 2^\kappa$. □

5.10 Lemma *Ha $a, a^* \in \hat{A}$, $a \neq a^*$, akkor van olyan $C \in \mathcal{K}$, hogy az M_C mátrixban az a és a^* elemekhez tartozó sorok különbözőek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $M_C(a, b) = M_C(a^*, b)$ minden $C \in \mathcal{K}$, és $b \in \hat{B}$ esetén. Vegyünk egy tetszőleges $b \in \hat{B}$ elemet. Minthogy $\bigcup \mathcal{K} = G$, ezért $\exists C \in \mathcal{K}$, hogy $ab \in C$. Ekkor $a \in \hat{A}_C$, $b \in \hat{B}_C$ és $M_C(a, b) = [b^{-1}, a]$. Innen következik, hogy $M_C(a^*, b) \neq \emptyset$, tehát $M_C(a^*, b) = [b^{-1}, a^*] = [b^{-1}, a]$. Ez azt jelenti, hogy $a^{-1}a^* \in C_A(b)$. Ez teljesül minden $b \in \hat{B}$ esetén, ezért $a^{-1}a^* \in C_A(\hat{B}) = A \cap B$. Mivel $\hat{A}$ az $A \cap B$ egy mellékosztály reprezentáns rendszere az A részcsoportban, azt kaptuk, hogy $a = a^*$. □

Az előző két lemmából következik, hogy $|A : A \cap B| = |\hat{A}| \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa$, és ezt akartuk bizonyítani. □

5.3. A bfc*(G)* kapcsolata a többi mennyiséggel

A (2.1) szerint bfc*(G)* $\leq |G'|$, és ha pl. G véges nem Abel csoportok diszkrét direkt szorzata (lásd 2.6 Álllítás), akkor a $|G'|$ nem korlátozható felülről a bfc*(G)*-vel. A (2.4) szerint bfc*(G)* $\leq \frac{1}{2}|G : Z(G)|$, fordított irányú becslés nem adható (lásd 2.9 Állítás). $|G : Z_2(G)|$-vel, az első fejezet példái alapján nincs kapcsolata bfc*(G)*-nek.

Viszont az $a(G)$ és az $n(G)$-vel való kapcsolata jóval érdekesebb és nehezebb is. Faber, Laver és McKenzie [5] bizonyították a következőt:

5.11 Állítás (V. Faber, R. Laver, R. McKenzie [5]) *Ha $a(G) = \kappa$ végtelen számosság, akkor bfc(G) $\leq \kappa$*

A bizonyításhoz szükségünk lesz a következő egyszerű lemmára:

5.12 Lemma *Legyenek $x, g, h \in G$. Ha $[g, h] = 1$ valamint $[gx, hx] = 1$, akkor $gC_G(x) = hC_G(x)$.*

Bizonyítás. Ha $gh = hg$, akkor a $gxhx = hxgx$ egyenlőségből következik, hogy $x = h^{-1}gxhg^{-1} = h^{-1}gxg^{-1}h$. Ezért $g^{-1}h \in C_G(x)$, azaz $gC_G(x) = hC_G(x)$. □

Most nézzük az állítás bizonyítását:

Bizonyítás. Legyen $x \in G$ és $G = \bigcup_{\gamma<\kappa} A_\gamma$ Abel-fedés, továbbá $G = \bigcup_{\beta \in T} x_\beta C_G(x)$. Tegyük fel, hogy $|T| \geq (\kappa)^+$, ekkor létezik olyan $\alpha < \kappa$ és $S \in [T]^{\kappa^+}$, hogy $x_\beta \in A_\alpha$ $\forall \beta \in S$. Tekintsük a $\{x_\beta x \mid \beta \in S\}$ halmazt. Világos, hogy lesz olyan $R \in [S]^{\kappa^+}$ és $\gamma < \kappa$, amire $x_\beta x \in A_\gamma$ $\forall \beta \in R$. Az előző lemma mutatja, hogy az $\{x_\beta \mid \beta \in T\}$ nem lehet a $C_G(x)$ mellékosztály reprezentáns rendszere, amiből már következik a bizonyítandó. □

Egyenlőség áll pl. ha $G = M_T$, ahol T végtelen test (lásd 2.10 Állítás), fordított irányú becslés nem lehetséges. Mostanra már csak a bfc(G) becslése felülről $n(G)$-vel van hátra. Sajnos ebben az esetben nem tudjuk, mi a legjobb becslés. Először bizonyítunk egy lemmát:

5.13 Lemma *Ha $\lambda^+ \longrightarrow (\kappa^+)^2_2$ és a G csoportra $n(G) \leq \kappa$, ahol κ végtelen számosság, akkor bfc$(G) \leq \lambda$.*

Bizonyítás. Legyen $x \in G$ és $\{x_\alpha \mid \alpha < \lambda^+\} \subset G$. Találni fogunk $\alpha \neq \beta$ rendszámokat úgy, hogy $x_\alpha C_G(x) = x_\beta C_G(x)$. Az $[\{x_\alpha \mid \alpha < \lambda^+\}]^2$ két részre osztható, a felcserélhető és a nem felcserélhető párok halmazára. Mivel $\lambda^+ \longrightarrow (\kappa^+)^2_2$ és $n(G) \leq \kappa$ ezért van olyan $S \in [\lambda]^{\kappa^+}$, hogy $[x_\alpha, x_\beta] = 1$ $\forall \alpha, \beta \in S$ valamint a $n(G) \leq \kappa$ miatt $\exists \alpha \neq \beta \in S$, hogy $[x_\alpha x, x_\beta x] = 1$, tehát az előző lemma alapján $x_\alpha C_G(x) = x_\beta C_G(x)$. □

5.14 Állítás *Ha $n(G) = \kappa$ végtelen számosság, akkor bfc$(G) \leq 2^\kappa$.*

Bizonyítás. Az (5.1)-ből következik, hogy $(2^\kappa)^+ \longrightarrow (\kappa^+)^2_2$, így $\lambda = 2^\kappa$ választással az előző lemma adja a kívánt eredményt. □

Megjegyezzük, hogy Tomkinson (5.4 tétel) eredményéből is következik az előző állítás, ugyanis a Zorn-lemma szerint $g \in G$ esetén $\exists H \subset G$ maximális nem-felcserélhető halmaz, amelyre $g \in H$ és ekkor $G = \cup_{h \in H} C_G(h)$ irredundáns fedés, továbbá $|H| \leq n(G) = \kappa$, ennélfogva $|G : C_G(g)| \leq 2^\kappa$.
Megoldatlan az a probléma, hogy mennyire élesíthető ez az eredmény:

4 Probléma *Igaz-e, hogy ha $n(G) = \kappa$ végtelen számosság, akkor bfc$(G) \leq \kappa$?*

Faber, Laver és McKenzie 1978-ban ezzel kapcsolatban kérdezték, hogy

5 Probléma *Igaz-e, hogy ha G csoportban $n(G) = \kappa$ limeszszámosság, de nincs κ számosságú nem-felcserélhető halmaz, akkor bfc$(G) \leq \kappa$ és nincs κ méretű konjugáltosztály?*

5.4. $|G'|$ kapcsolata a $|G : Z(G)|$, $|G : Z_2(G)|$, és az $a(G)$ mennyiségekkel

Az második fejezet példái alapján csak a következő esetekben van esélyünk kapcsolatot találnunk, azaz valamelyik mennyiséget egy másikkal becsülni:

- $|G'|$ felső becslése $|G : Z(G)|$-vel
- $|G'|$ felső becslése $a(G)$-vel
- $|G : Z_2(G)|$ felső becslése $|G'|$-vel

5.15 Állítás *Ha G csoport és $|G:Z(G)|=\kappa$ végtelen számosság, akkor $|G'|\leq\kappa$.*

A bizonyításhoz felhasználunk egy alapvető lemmát:

5.16 Lemma *Ha G csoport, $H\subset G$ és $|H|=\kappa$ végtelen számosság, akkor a H által generált részcsoport számossága $|\langle H\rangle|=\kappa$.*

Bizonyítás. Legyen $H=\{x_\alpha \mid \alpha<\kappa\}$ ekkor $\langle H\rangle=\left\{x_{i_1}^{\alpha_1}x_{i_2}^{\alpha_2}\dots x_{i_n}^{\alpha_n} \mid \alpha_j<\kappa,\ i_j \text{ egész }\right\}$. Definiáljuk az f injekciót: $f\longrightarrow[\kappa]^{<\omega}=\cup_{n<\omega}[\kappa]^n$ úgy, hogy

$$f(x_{i_1}^{\alpha_1}x_{i_2}^{\alpha_2}\dots x_{i_n}^{\alpha_n})=(x_{i_1},\alpha_1,x_{i_2},\alpha_2,\dots x_{i_n},\alpha_n)$$

Mivel $|[\kappa]^{<\omega}|=\kappa$, következik, hogy $|\langle H\rangle|=\kappa$. □

Most már egyszerű az állítás bizonyítása:

Bizonyítás. Legyen $\{x_\gamma \mid \gamma<\kappa\}$ a $Z(G)$ egy mellékosztály reprezentáns rendszere, ekkor a kommutátorok K halmaza $K=\{[x_\alpha,x_\beta] \mid \alpha,\beta<\kappa\}$, tehát $|K|=\kappa^2=\kappa$. Mivel κ végtelen számosság és $G'=\langle K\rangle$ ezért az előző lemma szerint $|G'|=\kappa$. □

5.17 Állítás *Ha G csoport és $a(G)=\kappa$, akkor $|G'|\leq 2^\kappa$.*

Bizonyítás. Azonnal adódik a 5.5 tételből és az előző állításból, azonkívűl Tomkinson is bebizonyította 1985-ben. □

5.18 Állítás (2000) *Ha G csoport és $|G'|=\kappa$ végtelen számosság, akkor $|G:Z_2(G)|\leq 2^\kappa$*

Bizonyítás. A bizonyítás gondolatmenete hasonló a P. Hall-féle tétel bizonyításához (3.2 tétel). A (2.1) szerint $\forall g\in G$-re $|G:C_G(g)|\leq\kappa$, továbbá $\forall x\in G'\setminus Z(G)$-re $\exists g_x$, hogy $x\notin C_G(x)$. Legyen $H=\cup Cl_G(g_x)$, ekkor $|H|\leq\sum_{g_x}|Cl_G g_x|\leq|G'|\text{bfc}(G)=\kappa^2=\kappa$. H konjugáltosztályok uniója, ezért az $N=C_G(H)$ normálosztó, és $|G:N|=|G:\bigcap_{h\in H}C_G(h)|\leq\prod_{h\in H}|G:C_G(h)|\leq\kappa^\kappa=2^\kappa$. $[N,G]\subset N\cap G'\subset Z(G)$, mivel H definíciója miatt $N\cap(G'\setminus Z(G))=\emptyset$. Ennélfogva $N\leq Z_2(G)$, vagyis $|G:Z_2(G)|\leq|G:N|\leq 2^\kappa$. □

A 2.6 ill. 2.13 állítások mutatják, hogy az előző két egyenlőtlenség éles.

5.5. A kapcsolatok ábrázolása

A vizsgált mennyiségek segítségével elkészíthetünk ismét egy 6×6-os táblázatot hasonlóan, mint az első fejezetben. A táblázat sorainak ill. oszlopainak megfeleltetjük a mennyiségeinket és a táblázat i-dik sorának j-dik oszlopába írt a_{ij} elemet a következőképpen definiáljuk: Jelöljön κ egy végtelen számosságot,

$$a_{ij} := \begin{cases} f(\kappa) & \text{ha a } j\text{-dik oszlop } \kappa\text{, akkor az } i\text{-dik sor legfeljebb } f(\kappa) \\ 0, & \text{ha az } i\text{-dik sor nem becsülhető felülről a } j\text{-dik oszloppal} \end{cases}$$

	bfc(G)	$\lvert G'\rvert$	$\lvert G : Z(G)\rvert$	$\lvert G : Z_2(G)\rvert$	$a(G)$	$n(G)$
bfc(G)	κ	κ	κ	0	κ	$2^\kappa *$
$\lvert G'\rvert$	0	κ	κ	0	2^κ	0
$\lvert G : Z(G)\rvert$	0	0	κ	0	$\mathbf{2}^{\boldsymbol{\kappa}}$	0
$\lvert G : Z_2(G)\rvert$	0	$\mathbf{2}^{\boldsymbol{\kappa}}$	κ	κ	$\mathbf{2}^{\boldsymbol{\kappa}}$	0
$a(G)$	0	0	κ	0	κ	0
$n(G)$	0	0	κ	0	κ	κ

A táblázatból kitűnik, hogy a $|G : Z(G)|$ majorálja az összes mennyiséget, még az $a(G)$-vel is jól becsülhető felülről a többi. Legkevesebb információt a $|G : Z_2(G)|$ és a bfc(G) adja, hiszen ezek egyet sem korlátoznak felülről a többi mennyiségből. Az $n(G)$ ill. a $|G'|$ mennyiségekből 1 ill. 2 másik mennyiségre adható felső korlát. A vastag betűvel szedett értékek önálló eredmények. A csillag a táblázatban azt jelenti, hogy elképzelhető, hogy jobb korlát is írható az illető helyre, ez azonban jelenleg nem ismert.

Irodalomjegyzék

[1] E. A. Bertram, Some applications of graph theory to finite groups, *Discrete Math.* 44 (1983) 31–43

[2] M. Cartwright, The order of the derived group of a BFC-group, *J. London Math. Soc.* (2) 30 (1984), 227–243

[3] J. Cossey, T. Hawkes, On the largest conjugacy class size in a finite group, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 103 (2000), 171–179

[4] P. Erdős, A. Hajnal, A. Máté, R. Rado, Combinatorical Set Theory: partition relations for cardinals.

[5] V. Faber, R. Laver and R. McKenzie, Coverings of groups by abelian subgroups, *Canad. J. Math* 30 (1978), 933–945.

[6] R. M. Guralnick, On a result of Schur, *J. Algebra* 59 (1979), 302–310

[7] A. Hajnal, P. Hamburger, Halmazelmélet

[8] N. Jacobson, Basic Algebra I (Freeman, San Fransisco, 1974).

[9] I. D. Macdonald, Some explicit bounds in groups with finite derived groups, *Proc. London Math. Soc* (3) 11 (1961) 23–56

[10] B. H. Neumann, A problem of Paul Erdős on groups, *J. Austral. Math. Soc.* 21 (1976), 467–472.

[11] B. H. Neumann, Groups covered by finitely many cosets, *Publ. Math. Debrecen* 3 (1954), 227–242.

[12] P. M. Neumann, M. R. Vaughan-Lee, An essay on BFC groups, *Proc. London Math. Soc.* (3) 35 (1977) 213–237

[13] K. Podoski, Groups covered by an infinite number of Abelian subgroups, *Combinatorica* (1) 21 (2001) 1–3.

[14] K. Podoski, B. Szegedy, Bounds in groups with finite Abelian coverings or with finite derived groups, (előkészületben)

[15] L. Pyber, The number of pairwise non–commuting elements and the index of the center in a finite group, *J. London Math. Soc.* (2) 35 (1987), 287–295.

[16] Derek J. S. Robinson, A Course in the Theory of Groups, Springer–Verlag, New York (1982).

[17] D. Segal, A. Shalev, On groups with bounded conjugacy classes, *Quart. J. Math. Oxford* (2), 50 (1999), 505–516

[18] S. Shelah, J. Stepräns, Extraspecial p-groups, *Annals of Pure and Applied Logic* 34 (1987), 87–97

[19] M. J. Tomkinson, Groups covered by abelian subgroups, *Proceedings of Groups—St. Andrews 1985*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 121, Cambridge University Press, 1986, 332–334.

[20] M. J. Tomkinson, Groups covered by finitely many cosets or subgroups, *Communications in Algebra* 15 (4) (1987), 845–859.

[21] M. R. Waughan-Lee, Breadth and commutatorsubgroups of p-group, *J. Algebra* 32 (1974), 278–285

[22] J. Wiegold, Groups with boundedly finite classes of conjugate elements, *Proc. Roy. Soc. London Ser A* 238 (1956), 389–401

[23] J. Wiegold, Multiplicators and groups with finite central factor-groups, *Math. Z.* 89 (1965), 345–347