Kivonat

Lineáris programozási feladatok megoldására hosszú időn keresztül kizárólag a szimplex-módszert (1947) használták. Ez az eljárás a gyakorlatban hatékonynak bizonyult, viszont Klee és Minty 1970-ben példával illusztrálták, hogy elvileg exponenciális komplexitású. A belsőpontos algoritmusok megjelenése (1984) új lendületet adott a lineáris optimalizálási kutatásoknak. Polinomiális komplexitásuk és sokoldalú általánosíthatóságuk révén mára már általánosan elfogadott és a gyakorlatban is sikerrel használt módszerekké váltak. A dolgozatban az alapvető technikák és eljárások tárgyalása után ezen általánosítási lehetőségek közül mutatok be néhányat.

Lineáris optimalizálás belsőpontos módszereinek újszerű vizsgálata

SZAKDOLGOZAT

Pólik Imre
matematikus szak

Témavezető: Illés Tibor

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

2002

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Történeti áttekintés

A lineáris optimalizálás történetének kezdetei az 1930–40-es évekre nyúlnak vissza, a kutatások viszont csak a II. világháború hatására váltak igazán intezívvé. Az első jelentős eredmény 1947-ből való, ekkor jelent meg Dantzig első cikke[1] [5, 6] a *szimplex-módszerről.* Ez volt az első algoritmus, amelyik megoldotta a lineáris programozási feladatot. Viszonylag hosszú idő telt el, míg 1970-ben Klee és Minty [24] példával igazolták, hogy az eljárás exponenciálisan sok iterációt is igényelhet egy feladat megoldása során. Az általuk adott n-változós problémán a szimplex módszer $2^n - 1$ lépést tesz. Ezzel az eredménnyel azt is megmutatták, hogy a szimplex-módszer alkalmatlan a *Hirsch-sejtés* [23] bizonyítására. A sejtés azt mondja ki, hogy egy d dimenziós poliéder bármely csúcsából – csak a csúcsokon keresztül – $d + 1$ pivotálással eljuthatunk bármely más csúcsba. Az eddig ismert legerősebb eredmény Fukuda és Terlaky nevéhez fűződik, és azt mondja ki, hogy létezik $d + 1$ hosszúságú ilyen út a poliéder metszési rendszerén mozogva.

Mindezen vizsgálatokkal párhuzamosan alakultak ki a *criss–cross* algoritmusok. Először Chang [3] dolgozta ki a *legkisebb indexes criss–cross* eljárást, amely tulajdonképpen a Lemke-algoritmus [26, 27] lineáris programozási alakja volt. Eredményét sajnos nem publikálta, így az csak a 90-es évek elején vált ismertté. Tőle

[1] Valószínű, hogy az eredmény már a háború alatt ismert volt és hozzájárult az amerikaiak győzelméhez is.

függetlenül 1984-ben Terlaky publikált ilyen eljárást [38, 39], majd általánosította irányított matroidokra [40]. Végül az előzőektől függetlenül Wang [45] is publikált ilyen algoritmust, azonban ő közvetlenül az irányított matroidok elméletében dolgozott. Ezek az eljárások bizonyítottan végesek, azonban a szimplex-módszerhez hasonlóan nem polinomiálisak.

Az újabb és egyre általánosabb eljárások megjelenésével világossá vált, hogy a klasszikus lineáris programozás helyett célszerűbb a lineáris komplementaritási feladatokat vizsgálni, amelyek a lineáris programozási feladatot speciális esetként tartalmazzák. Ez a felismerés vezetette vissza a kutatókat a nemlineáris optimalizálás korábbi eredményeihez. Ilyen közvetlen előzménynek tekinthető például Lemke munkássága [26, 27] vagy az *akadályfüggvény-módszer*, amely Frisch [10, 11], Fiacco és McCormick [8] nevéhez köthető és a későbbiekben kap jelentőséget. A nagy áttörés Hacsiján nevéhez fűződik: 1979-ben[2] publikált cikkében [20] megmutatja, hogy az *ellipszoid-módszer* [36] alkalmazható a lineáris optimalizálási feladatra és polinomiális időben meg is oldja azt. Az eredmény fontosságát az is jelzi, hogy abban az időben még az sem volt ismert, hogy az LP-feladat megoldható-e egyáltalán polinomiális időben. Ha az derült volna ki, hogy az LP feladat nem oldható meg polinomiális időben, akkor az azt jelentette volna, hogy $P \neq NP$. Ezen bonyolultságosztályok egyenlőségének kérdése a mai napig megoldatlan.

Fontos megjegyezni, hogy a 80-as években a gyakorlatban – exponenciális komplexitása ellenére – még mindig *kizárólag* a szimplex-módszert használták, Hacsiján módszerét pedig csupán elméleti eredménynek tekintették, mivel a gyakorlatban igen lassú volt. Ezt a kettősséget az okozza, hogy egyrészt a szimplex módszer átlagos komplexitása polinomiális (l. [2]) és a polinom kitevője kisebb, mint az ellipszoid módszeré, másrészt az ellipszoid módszer igen gyakran eléri az elméletileg lehetséges legrosszabb lépésszámát.

A következő fontos lépés Karmarkar nevéhez fűződik, aki 1984-ben publikált eredményével megvetette a belsőpontos módszerek lineáris programozási alkalmazásának alapjait. Olyan eljárást dolgozott ki, amely polinomiális komplexitású és a gyakorlatban is jól használható. Ez volt az első ilyen lineáris programozási algorit-

[2] A történeti hűség kedvéért meg kell jegyeznünk, hogy Fiacco és McCormick már 1968-ban publikált egy akadályfüggvényes eljárást [8] konvex nemlineáris programozási feladatok megoldására, amelyről azonban csak 1990-ban látta be Anstreicher [1], hogy polinomiális.

mus [19]. Az eredetileg bonyolult megfogalmazás folyamatosan csiszolódott és egyszerűsödött, a belőle kinövő elmélet pedig a mai napig meghatározza a kutatások irányát. A gyakorlatban Karmarkar módszere sem volt hatékonyabb a szimplex-módszernél, de a nagymérvű általánosítási lehetőségek miatt a belsőpontos eljárások mégis a figyelem középpontjába kerültek. Az évek során sikerrel alkalmazták a belsőpontos algoritmusokat a lineáris programozási feladat megoldására, növelték hatékonyságukat, majd általánosították őket a kvadratikus programozási feladatra, sőt egészen általános konvex optimalizálási feladatokra is. A konvex optimalizálási kutatások középpontjában ma is a belsőpontos módszerek tökéletesítése áll.

Az évek során a gyakorlati problémákról fokozatosan mély elméleti kérdésekre terelődött a hangsúly. Ilyen kérdés például a különböző mátrixosztályok elmélete, amely azt vizsgálja, hogy milyen kapcsolat van az egyes mátrixtulajdonságok és a lineáris komplementaritási feladatok megoldhatósága illetve megoldásainak tulajdonságai között. Példaként tekintsük a leggyakrabban használt mátrixosztályokat. Cottle, Pang és Venkateswaran [4] 1989-ben vezették be a sor- és oszlopelégséges (RS ill. CS), valamint az elégséges (SU) mátrixok fogalmát, amelyről később bebizonyosodott, hogy a legnagyobb olyan mátrixosztály, amelyre a criss-cross módszer véges sok lépésben megoldja a lineáris komplementaritási feladatot [7]. További érdekes összefüggésekre is fény derült, például, hogy a lineáris komplementaritási feladat megoldáshalmaza pontosan akkor konvex poliéder, ha a feladatban szereplő mátrix oszlopelégséges [4]. Mindettől függetlenül Kojima és társai definiálták a P_* mátrixokat, amelyekről belátták, hogy a belsőpontos módszerek pontosan a P_* mátrixokra oldják meg polinomiális időben a problémát. A két elmélet függetlenül fejlődött, amíg Kojima ($P_* \subset CS$, [25]), Guu és Cottle ($P_* \subset RS$, [16]) valamint Väliaho ($SU \subset P_*$, [43]) be nem látták, hogy az elégségesség és a P_* tulajdonság ekvivalens. Ezzel a két addig független elmélet eredményei egyesültek.

A fenti felsorolásból is látható, hogy a lineáris optimalizálás már hosszú ideje nem csak a gyakorlati alkalmazásokkal foglalkozik, hanem számos komoly, még megoldatlan elméleti problémát is állít elénk. Mindezekről több ezer cikk és jó néhány alapos összefoglaló mű (pl. [31, 35]) született az elmúlt években.

1.2. A dolgozat felépítése

A dolgozat célja, hogy áttekintést nyújtson a belsőpontos módszerek elméletéről, illetve legfrisebb eredményeiről. Az elmélet kiterjedtsége miatt természetesen nem lehet célunk a belsőpontos módszerek teljes részletességű bemutatása, ehelyett inkább az alkalmazott technikák (belsőpontos feltétel, centrális út, Newton–lépés, távolságfüggvények, $P_*(\kappa)$ mátrixok) mélyebb elemzésével foglalkozunk. Részletesen tárgyalunk két modern belsőpontos algoritmust. A megfelelő helyeken utalunk a további általánosítási lehetőségekre is.

A 2. fejezetben röviden bemutatjuk a lineáris és a kvadratikus programozás alapfeladatait és megadjuk a hozzájuk tartozó komplementaritási feladatot. A 2.3. szakaszban vezetjük be a $P_*(\kappa)$ mátrixokat és fogalmazzuk meg a előző két feladatnál jóval általánosabb $P_*(\kappa)$-lineáris komplementaritási problémát. Az újonnan bevezetett mátrixosztály alaptulajdonságaival a 2.4. szakaszban ismerkedünk meg. A 3. fejezetben mutatjuk be a belsőpontos módszereket általánosságban, a konkrét eljárások és elemzésük pedig a következő fejezetek témája. A 4. fejezetben egy klasszikus útkövető eljárást, az 5. fejezetben pedig egy általánosított prediktor–korrektor algoritmust ismertetünk. A záró megjegyzések és az összefoglalás a 6. fejezetben találhatók.

1.3. Jelölések

A dolgozatban az alábbi jelöléseket használjuk. A vektorokat a latin ábécé kis dőlt betűivel $(x, y, s, \dots)$, a mátrixokat a latin ábécé nagy dőlt betűivel $(A, M, \dots)$ jelöljük. A konvencióknak megfelelően I jelöli az egységmátrixot, e pedig a csupa egyesből álló vektort. Az x vektor i-edik komponensét x_i, az A mátrix i-edik sorának j-edik elemét a szokásos módon A_{ij} jelöli. Ha $x \in \mathbb{R}^n$, és nem okoz félreértést, akkor X azt az $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli mátrixot jelöli, amelynek főátlójában az x vektor komponensei állnak. Az n-dimenziós euklidészi tér nemnegatív ortánsát $\mathbb{R}^n_\oplus$ jelöli, a minden komponensükben pozitív vektorokat $\mathbb{R}^n_+$. Két $\mathbb{R}^n$-beli vektor skalárszorzatát $x^T s$-sel jelöljük, megkülönböztetve az $x \cdot s = (x_1 \cdot s_1, \dots, x_n \cdot s_n)$ koordinátánkénti szorzattól. Ehhez hasonlóan használjuk vektorok komponensenkénti osztására az $\frac{x}{y}$ jelölést. Általában is igaz, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $x \in \mathbb{R}^n$ vektor, akkor

$f(x)$ jelöli az $(f(x_1), \ldots, f(x_n)) \in \mathbb{R}^n$ vektort.

Az önálló lemmák, állítások, tételek bizonyításának végét $\blacksquare$, egy nagyobb tétel bizonyításán belül egy kisebb lemma bizonyításának végét $\square$ jelzi.

2. fejezet

Lineáris komplementaritási feladatok

Ebben a fejezetben bemutatjuk a lineáris és a kvadratikus optimalizálás alapfeladatait, majd olyan modellt adunk meg, amelyik képes együtt kezelni ezeket a problémákat, sőt sokkal általánosabb is azoknál. A dolgozat hátralévő részében ezt az általánosabb modellt oldjuk meg.

2.1. Lineáris programozás

A lineárisan korlátozott, lineáris célfüggvényes optimalizálás a legegyszerűbb operációkutatási modellek közé tartozik, mégis számos fontos gyakorlati problémát lehet megfogalmazni és megoldani segítségével. Az alapfeladatnak több, lényegében ekvivalens alakja létezik, amelyek új változók bevezetésével, átskálázással, illetve a feltételek átcsoportosításával könnyen átfogalmazhatók egymásba. Tekintsük most az alábbi formában adott klasszikus lineáris programozási feladatot:

$$\min \left\{ c^T u \colon Au \geq b, u \geq 0 \right\}, \tag{P}$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, c, $u \in \mathbb{R}^n$, és írjuk fel a duális problémát:

$$\max \left\{ b^T v \colon A^T v \leq c, v \geq 0 \right\}. \tag{D}$$

A primál megengedett megoldások $\{u \colon Au \geq b, u \geq 0\}$ halmazát P-vel, a duál megengedett megoldások $\left\{v \colon A^T v \leq c, v \geq 0\right\}$ halmazát D-vel jelöljük. Ha az A mátrix sorai lineárisan összefüggnek, akkor könnyen látható, hogy valamelyik egyenlet elhagyható (következik a többiből), vagy ellentmondásos a rendszer, tehát az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy az A *mátrix sorai lineárisan függetlenek*, vagyis az A teljes sorrangú.

Legyen most $u \in P$ primál, $v \in D$ duál megengedett megoldás, ekkor:

$$c^T u \geq (v^T A)u = v^T(Au) \geq v^T b, \tag{2.1.1}$$

ez a *gyenge dualitástétel*. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy a duál probléma minden megengedett megoldásához tartozó duál célfüggvényérték alsó korlátot jelent a primál optimumra és minden primál megoldáshoz tartozó primál célfüggvényérték felső korlátot ad a duál optimumra. A $c^T u - b^T v \geq 0$ értéket *dualitásrésnek* nevezzük.

A fenti gondolatmenetből nyilvánvaló, hogy ha $u \in P$ és $v \in D$ olyan megengedett megoldások, amelyekre a dualitásrés 0, akkor azok optimálisak is. Ezt felhasználva az alábbi primál-duál optimalitási feltételt kapjuk:

$$\begin{array}{rrcrl} & Au & \geq & b, & u \geq 0 \\ -A^T v & & \geq & -c, & v \geq 0 \\ b^T v & -c^T u & \geq & 0 & \end{array} \tag{PD^*}$$

Homogenizáljuk az egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{array}{rrrll} & Au & -b\tau & \geq 0, & u \geq 0 \\ -A^T v & & +c\tau & \geq 0, & v \geq 0 \\ b^T v & -c^T u & & \geq 0, & \tau \geq 0 \end{array} \tag{2.1.2}$$

Vezessünk be eltérés-változókat:

$$\begin{array}{rrrrrrlll} & Au & -b\tau & -w_1 & & & = 0 & u \geq 0 & w_1 \geq 0 \\ -A^T v & & +c\tau & & -w_2 & & = 0 & v \geq 0 & w_2 \geq 0 \\ b^T v & -c^T u & & & & -w_3 & = 0 & \tau \geq 0 & w_3 \geq 0 \end{array} \tag{HR}$$

A kapott homogén rendszer a Goldman – Tucker modell [15, 42].

Vizsgáljuk most meg, hogy milyen kapcsolat van a primál-duál feladatpár megoldhatósága és a (HR) feladat megoldhatósága között.[1] A (HR) feladatnak nyilvánvalóan megoldása a csupa nulla vektor. A nemtriviális megoldásokról a következők mondhatók.

[1] Ezek a gondolatok – trivialitásuk ellenére – az elmélet alapvető elemei. A most következő, igen világos elemzés [41]-ban található meg.

Ha a (HR) valamely $(u, v, \tau, w_1, w_2, w_3)$ megoldására $\tau > 0$ és $w_3 = 0$, akkor az $\left(\frac{u}{\tau}, \frac{v}{\tau}\right)$ optimális megoldást szolgáltat a primál-duál problémára.

Ha olyan megoldást kapunk, amelyre $\tau = 0$ és $w_3 > 0$, akkor a (HR) rendszer első és második egyenlete miatt $Au \geq 0$ és $A^T v \leq 0$. Mivel $w_3 > 0$, ezért a harmadik egyenlet miatt $b^T v > 0$ és $c^T u < 0$ közül legalább az egyik teljesül. Ha $b^T v > 0$ és létezne (P)-nek $u \geq 0$ megoldása, akkor arra $0 < b^T v \leq u^T A^T v \leq 0$, vagyis (P)-nek nincs megoldása. Hasonlóan, ha $c^T u < 0$ és létezik (D)-nek $v \geq 0$ megoldása, akkor arra $0 > c^T u \geq v^T A u \geq 0$, vagyis (D)-nek nincs megoldása.

Problémát jelentene, ha a homogén rendszernek létezne olyan $(u, v, \tau, w_1, w_2, w_3)$ megoldása, amelyre $\tau w_3 > 0$. Ez azonban nem fordulhat elő, mivel:

$$0 < \tau w_3 = \tau b^T v - \tau c^T u = u^T A v - w_1^T v - u^T A^T v - w_2^T u = -w_1^T v - w_2^T u \leq 0 \tag{2.1.3}$$

Ha (u, v) olyan megoldása a primál-duál rendszernek, amelyre a dualitásrés 0, akkor az megoldása a Goldman – Tucker rendszernek is $\tau = 1$ és $w_3 = 0$ választással.

Ezzel ekvivalens módon átfogalmaztuk a lineáris programozási alapfeladatot. A kapott (HR) feladat jobb megértése érdekében legyen

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A & -b \\ -A^T & 0 & c \\ b^T & -c^T & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.4}$$

$$x = (v, u, \tau) \tag{2.1.5}$$

$$s = Mx + q = (w_1, w_2, w_3) \tag{2.1.6}$$

$$q = 0. \tag{2.1.7}$$

Ezekkel a jelölésekkel a (HR) probléma a következő alakban írható:

$$\min q^T x \tag{2.1.8}$$

$$Mx \geq -q \tag{2.1.9}$$

$$x \geq 0 \tag{2.1.10}$$

Elegendő tehát a (2.1.8) feladattal foglalkozni, ahol az M mátrixra igaz, hogy $M^T = -M$. Az ilyen mátrixokra külön elnevezést vezetünk be:

2.1.1. Definíció. (Ferdén szimmetrikus mátrix) *Az $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot ferdén szimmetrikusnak nevezzük, ha $M^T = -M$.*

Mivel esetünkben a $q = 0$ választással írtuk fel a feladatot, ezért $x \geq 0$ miatt az optimum értéke 0. Így foglalkozhatunk a

$$-Mx + s = q \tag{2.1.11}$$

$$x \geq 0, s \geq 0 \tag{2.1.12}$$

$$x \cdot s = 0 \tag{2.1.13}$$

feladattal. Ezt a problémát nevezzük *ferdén szimmetrikus lineáris komplementaritási feladat*nak. Az olyan megoldásokat, amelyekre teljesül az $x \cdot s = 0$ feltétel, komplementáris megoldásnak nevezzük. A fentieket foglalja össze a következő állítás.

2.1.2. Állítás. *A (HR) feladat $(u, v, \tau, w_1, w_2, w_3)$ komplemetáris megoldása pontosan akkor állítja elő a (PD^*) feladat megoldását, ha $\tau > 0$.*

2.1.3. Következmény. *Ha a (HR) feladat minden komplementáris megoldására $\tau = 0$, akkor a (P) és (D) feladatoknak nem létezik optimális megoldása.*

2.2. Kvadratikus programozás

Ebben a szakaszban a lineárisan korlátozott, de kvadratikus célfüggvényes optimalizálási modellt vizsgáljuk. Ez a modell látszólag bonyolultabb az előző szakaszban tárgyalt lineáris modellnél, viszont hasonló komplementaritási problémára vezet, mint a lineáris feladat. Csakúgy, mint a lináris programozásnak, a kvadratikusnak is számtalan különböző formája használatos, a további vizsgálatokhoz tekintsük a következő alakban adott kvadratikus optimalizálási primál-duál feladatpárt:

$$\min\left\{c^T u + \frac{1}{2}(Cu)^2 + \frac{1}{2}z^2 \colon Au + Bz \geq b, u \geq 0\right\} \tag{QP}$$

$$\max\left\{v^T b - \frac{1}{2}(vB)^2 - \frac{1}{2}w^2 \colon v^T A - w^T C \leq c, v \geq 0\right\}, \tag{QD}$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$ tetszőleges mátrixok és $c, u \in \mathbb{R}^n$, $b, v \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^k$ és $w \in \mathbb{R}^l$ vektorok.[2]

[2]Ebben a modellben a lineáris programozás is megfogalmazható.

Vezessük be a *primál megengedett megoldás*ok

$$QP = \left\{(u, z) \in \mathbb{R}^{n+k} \colon Au + Bz \geq b,\ u \geq 0\right\} \tag{2.2.1}$$

és a *duál megengedett megoldás*ok

$$QD = \left\{(v, w) \in \mathbb{R}^{m+l} \colon v^T A - w^T C \leq c,\ v \geq 0\right\} \tag{2.2.2}$$

halmazát. Az előző szakaszhoz hasonlóan egyszerűen igazolható a következő állítás.

2.2.1. Állítás. (Gyenge dualitástétel) *Bármely* $(u, z) \in QP$ *és* $(v, w) \in QD$ *esetén*

$$c^T u + \frac{1}{2}(Cu)^2 + \frac{1}{2}z^2 \geq v^T b - \frac{1}{2}(v^T B)^2 - \frac{1}{2}w^2. \tag{2.2.3}$$

A kvadratikus programozási feladatnak megfelelő komplementaritási problémát könnyen megkaphatjuk, ha felírjuk a primál feladat Karush – Kuhn – Tucker-rendszerét.[3] A következő tételt használjuk:

2.2.2. Tétel. (KKT–rendszer) *Legyen* $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$ *nyílt halmaz,* $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ *differenciálható konvex függvények. Tegyük fel továbbá, hogy a* $g'(x)$ *és a* $h'(x)$ *mátrix teljes sorrangú. Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:*

1. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *lokálisan optimális megoldása a*

$$\min f(x) \tag{2.2.4}$$

$$g(x) \leq 0 \tag{2.2.5}$$

$$h(x) = 0 \tag{2.2.6}$$

$$x \in X \tag{2.2.7}$$

problémának.

2. *Létezik* $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^l$ *vektor, hogy*

$$f'(\bar{x}) + g'(\bar{x})u + h'(\bar{x})v = 0 \tag{2.2.8}$$

$$u^T g(\bar{x}) + v^T h(\bar{x}) = 0 \tag{2.2.9}$$

$$u \geq 0. \tag{2.2.10}$$

[3]Ezt természetesen megtehettük volna a lineáris esetben is, azonban ott – az elmélet mögött rejlő összefüggések feltárása végett – praktikusabb volt egy szemléletes tárgyalásmód.

Könnyen ellenőrizhető, hogy teljesülnek a tétel feltételei, vagyis azt kapjuk, hogy a (QP) és (QD) feladatpárhoz tartozó komplementaritási feladat lineáris komplementaritási feladat lesz, amely a következő formában adható meg:

$$\begin{array}{ccccccccc} -Pv & - & Au & + & \bar{v} & & & = & -b \\ A^T v & - & Qu & & & + & \bar{u} & = & c \\ & & u, & v, & \bar{u}, & \bar{v} & & \geq & 0 \\ & & u\,\bar{u} & = & 0, & & v\,\bar{v} & = & 0 \end{array}, \qquad (LCP_{QP})$$

ahol $P = BB^T$ és $Q = C^TC$ pozitív szemidefinit mátrixok. Jelölje a (QP) és (QD) feladatokból nyert (LCP_{QP}) feladat mátrixát M. Ekkor az M mátrix a következő alakú lesz:

$$M = \begin{bmatrix} P & A \\ -A^T & Q \end{bmatrix}, \qquad (2.2.11)$$

ahol P és Q pozitív szemidefinitek. Vezessük be a következő jelöléseket: $q := \left(\begin{smallmatrix} -b \\ c \end{smallmatrix}\right)$, $x := (v, u)$ és $s := (\bar{v}, \bar{u})$. Ekkor az (LCP_{QP}) feladat egyszerűen

$$\begin{aligned} -Mx + s &= q \\ x,\, s &\geq 0 \\ x \cdot s &= 0 \end{aligned}$$

alakú lesz, ahol az M mátrix speciális szerkezetű, ún. *biszimmetrikus mátrix.*

2.2.3. Definíció. (Biszimmetrikus mátrix) *Az* $M = \left(\begin{smallmatrix} P & A \\ -A^T & Q \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ *biszimmetrikus mátrix, ha P és Q pozitív szemidefinit mátrixok.*

Megjegyezzük, hogy a duál feladatból indulva ugyanezt a komplementaritási feladatot kaptuk volna.

2.3. A $P_*(\kappa)$-lineáris komplementaritási feladat

Az előző szakaszokban bemutattuk, hogy a linárisan korlátozott, lineáris vagy kvadratikus célfüggvényes programozási feladatok felírhatók

$$\begin{aligned} Mx + q &= s \\ x,\, s &\geq 0 \\ x \cdot s &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(CP)}$$

alakban, ahol az M mátrix a lineáris célfüggvény esetén ferdén szimmetrikus, kvadratikus esetben biszimmetrikus mátrix. Most ezt a modellt általánosítjuk. Tekintsük az alábbi definíciót [25]:

2.3.1. Definíció. ($P_*(\kappa)$ mátrix) *Az $M \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mátrix $P_*(\kappa)$ mátrix, ha minden $u \in \mathbb{R}^N$ vektorra*

$$(1+4\kappa)\sum_{i\in\mathcal{I}_+} u_i[Mu]_i + \sum_{i\in\mathcal{I}_-} u_i[Mu]_i \geq 0,$$

ahol

$$\mathcal{I}_+ = \{i\colon u_i[Mu]_i > 0\}, \quad \mathcal{I}_- = \{i\colon u_i[Mu]_i < 0\}.$$

Vegyük észre, hogy az indexhalmazok függnek az u vektortól és az M mátrixtól is. Jelölje P_* azon mátrixok halmazát, amelyek valamilyen κ-ra kielégítik a fenti definíciót, vagyis

$$P_* = \bigcup_{\kappa\geq 0} P_*(\kappa). \tag{2.3.1}$$

Nyilvánvaló, hogy a $P_*(0)$ mátrixok osztálya definíció szerint megegyezik a pozitív szemidefinit mátrixok osztályával. Először azt mutatjuk meg, hogy ez a mátrixosztály tartalmazza az előző két fejezetben tárgyalt mátrixokat.

2.3.2. Állítás. *A ferdén szimmetrikus és a biszimmetrikus mátrixok pozitív szemidefinitek, vagyis $P_*(0)$ mátrixok.*

Bizonyítás: Legyen M ferdén szimmetrikus mátrix. Ekkor $x^TMx = \left(x^TMx\right)^T = x^TM^Tx = -x^TMx$, vagyis minden x esetén $x^TMx = 0$, így M pozitív szemidefinit. Másrészt legyen $M = \left(\begin{smallmatrix} P & A \\ -A^T & Q\end{smallmatrix}\right)$ biszimmetrikus mátrix, ahol P és Q pozitív szemidefinit mátrixok. Tekintsük az x^TMx szorzatot és bontsuk fel az x-et az M mátrix szerkezetének megfelelően (x_1, x_2) alakban. Ekkor $x^TMx = x_1^TPx_1 + x_2^TQx_2 \geq 0$, mivel P és Q pozitív szemidefinit, ezzel az állítást beláttuk. ■

A következő példa azt mutatja, hogy a P_* mátrixosztály bővebb a ferdén szimmetrikus és a biszimmetrikus mátrixoknál.

2.3.3. Példa. *Tekintsük az*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot. Ekkor egyrészt az $u = (1,1)$ *vektorral* $u^T M u = -1$*, tehát* M nem pozitív szemidefinit, *másrészt bármely* $u = (x,y)$ *esetén a* $\kappa = \frac{5}{16}$ *választással*

$$(1+4\kappa)\sum_{\mathcal{I}_+} u_i[Mu]_i + \sum_{\mathcal{I}_-} u_i[Mu]_i \geq (1+4\kappa)y^2 + x^2 - 3xy = \left(\frac{3}{2}y - x\right)^2 \geq 0,$$

vagyis M *a* $P_*(\frac{5}{16})$ *osztályba tartozik.*

Tekinthetünk a $P_*(\kappa)$ mátrixoknál általánosabb osztályt is:

2.3.4. Definíció. (P_0 mátrix) *Az* M *mátrix* P_0 *tulajdonságú, ha minden főminorja nemnegatív.*

A bevezetőben már említettük, hogy a $P_*(\kappa)$ mátrixokra a belsőpontos eljárások polinomiálisak. Ismertek olyan példák P_0 mátrixokkal, amelyek viszont NP-teljesek (l. [25]).

2.4. A $P_*(\kappa)$ mátrixok alapvető tulajdonságai

Ebben a szakaszban foglaljuk össze azokat az állításokat, amelyeket a későbbi bizonyításokban fel fogunk használni.

2.4.1. Lemma. *Ha az* M *mátrix* $P_*(\kappa)$ *tulajdonságú, akkor az*

$$M' = \begin{bmatrix} -M & I \\ S & X \end{bmatrix} \tag{2.4.1}$$

mátrix minden S *és* X *pozitív diagonális mátrix mellett nemszinguláris.*

Bizonyítás: Legyen először M $P_*(\kappa)$ mátrix, x és s pozitív vektorok. Tegyük fel, hogy M' szinguláris, ekkor létezik $\zeta = (\xi, \eta) \neq 0$, hogy $M'\zeta = 0$, vagyis

$$s_i\xi_i + x_i\eta_i = 0 \tag{2.4.2}$$

$$\eta = M\xi. \tag{2.4.3}$$

Itt $\xi \neq 0$, így a (2.4.4) állítás miatt található olyan i index, hogy $\xi_i \neq 0$ és $\xi_i\eta_i \geq 0$. Másrészt viszont $\xi_i\eta_i = -s_i\xi_i^2/x_i < 0$, ami ellentmondás. Ezzel beláttuk, hogy M' nemszinguláris. ∎

2.4.2. Megjegyzés. *Belátható, hogy az M' mátrix pontosan akkor nemszinguláris, ha M P_0 tulajdonságú, vagyis, ha M minden főminorja nemnegatív [25]. Ez azt is mutatja, hogy minden $P_*(\kappa)$ mátrix P_0 mátrix is egyben. A dolgozat további részében erre az eredményre nem lesz szükségünk.*

A következő lemma a $P_*(\kappa)$ mátrixok ekvivalens jellemzését adja.

2.4.3. Lemma. *A alábbi két állítás ekvivalens ($\kappa \geq 0$):*

1. *$M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $P_*(\kappa)$ mátrix.*

2. *Bármely $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitív diagonális mátrix és $h \in \mathbb{R}^n$ vektor mellett a*

$$\begin{aligned} -Mx + s &= 0 \\ D^{-1}x + Ds &= h \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

rendszer tetszőleges (x, s) megoldására teljesül, hogy

$$x^T s \geq -\kappa \|h\|^2. \tag{2.4.5}$$

Bizonyítás: Nyilvánvaló, hogy a második állítás a h vektor nélkül is megfogalmazható:
Bármely $x, s \in \mathbb{R}^n$ vektorra, ahol $Mx = s$, teljesül, hogy

$$x^T s \geq -\kappa \inf_D \left\|D^{-1}x + Ds\right\|^2. \tag{2.4.6}$$

Először azt látjuk be, hogy

$$\inf_D \left\|D^{-1}x + Ds\right\|^2 = 4 \sum_{i\in\mathcal{I}_+} x_i s_i, \tag{2.4.7}$$

ahol $\mathcal{I}_+ = \{i : x_i s_i > 0\}$. Ehhez legyen $D = \operatorname{diag} d$, ahol $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pozitív diagonális mátrix. Ekkor

$$\inf_D \left\|D^{-1}x + Ds\right\|^2 = \inf_{d>0} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{d_i} + d_i s_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n \inf_{d_i>0} \left(\frac{x_i}{d_i} + d_i s_i\right)^2 \tag{2.4.8}$$

Vizsgáljuk az $\alpha(x_i, s_i) = \inf_{d_i>0} \left(\frac{x_i}{d_i} + d_i s_i\right)^2$ tagokat. Ha $x_i s_i < 0$, akkor $d_i = \sqrt{-\frac{x_i}{s_i}}$ esetén $\alpha(x_i, s_i) = 0$. Ha $x_i s_i = 0$, akkor $x_i = 0$ (vagy $s_i = 0$), így $d_i \to 0$ ($d_i \to \infty$) esetén $\alpha(x_i, s_i) \to 0$. Az $x_i s_i > 0$ esetben az alábbi becslés igaz:

$$\left(\frac{x_i}{d_i} + d_i s_i\right)^2 = 4x_i s_i + \left(\frac{x_i}{d_i} - d_i s_i\right)^2 \geq 4x_i s_i. \tag{2.4.9}$$

A becslésben pontosan akkor áll fenn egyenlőség, ha $d_i = \sqrt{\frac{x_i}{s_i}}$, vagyis $\alpha(x_i, s_i) = 4x_i s_i$. Ezeket összeadva adódik a (2.4.7) állítást. Ebből kapjuk, hogy a lemma második állítása ekvivalens a

$$x^T Mx + 4\kappa \sum_{i \in \mathcal{I}_+} x_i[Mx]_i \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{2.4.10}$$

állítással, ami éppen a $P_*(\kappa)$ mátrixok definíciója. Ezzel az ekvivalencia mindkét irányát beláttuk. ■

Gyakran fogjuk használni a következő tulajdonságot:

2.4.4. Állítás. *Ha az M mátrix $P_*(\kappa)$ tulajdonságú, akkor bármely $x \neq 0$ vektor esetén létezik olyan i index, hogy*

$$x_i \neq 0, \quad x_i[Mx]_i \geq 0. \tag{2.4.11}$$

Bizonyítás: Az állítás tulajdonképpen azt mondja ki, hogy bármely $x > 0$ esetén az $\mathcal{I}_+^x$ indexhalmaz csak akkor lehet üres, ha $\mathcal{I}_-^x$ is az, ez viszont triviális következménye a $P_*(\kappa)$ tulajdonságnak. ■

2.4.5. Megjegyzés. *Ez a tulajdonság is ekvivalens a P_0 mátrixtulajdonsággal. [9]*

További tulajdonságok és fontos becslések találhatók [25]-ben.

3. fejezet

Belsőpontos módszerek

Amint azt a lineáris programozási feladat átírásáról szóló 2.1. szakaszban láttuk, az LP feladat megoldása ekvivalens egy ferdén szimmetrikus komplementaritási feladat megoldásával, nevezetesen:

$$\begin{aligned} Ax = \quad & b, \quad x \geq 0 \\ A^T y + s = \quad & c, \quad s \geq 0 \\ x \cdot s = 0 & \end{aligned}$$

Itt az első és a második sor rendre a primál és a duál megengedettséget adja, míg a harmadik sor a komplementaritási feltétel, amely biztosítja, hogy a megoldás optimális legyen. Az LP feladat megoldására használt algoritmusok mindegyike azt a módszert követi, hogy ezen feltételekből néhányat *állandóan* megtartva igyekszik a relaxált feltételeket is kielégíteni. A primál (duál) szimplex-módszer csak a duál (primál) nemnegativitást relaxálja, az eljárás során végig bázismegoldásokon dolgozik és akkor ér véget, ha a duál (primál) változó nemnegatívvá válik. A criss–cross-módszer mindkét előjelmegkötési feltételt relaxálja és addig hajt végre báziscseréket, amíg megengedett megoldást nem kap. Ezek az összefoglaló néven pivot-algoritmusnak nevezett eljárások csak bázismegoldásokon dolgoznak, és felhasználják azt a tényt, hogy az optimum bázismegoldáson is fölvétetik.

A belsőpontos algoritmusok a megengedettségi feltétel egy erősebb formáját követelik meg: *szigorúan pozitív* megengedett megoldásokon keresztül próbálják elérni, hogy a komplementaritási feltétel is teljesüljön. A gyakorlatban ez a dualitásrés minimalizálását jelenti, amiből már látszik, hogy ezek a módszerek – legalábbis az esetek nagy részében – nem képesek pontos megoldást adni. Ez azonban csak látszólag jelent problémát: egyrészt a gyakorlati alkalmazásokban legtöbbször elég egy rögzített hibakorláton belül megoldást találni, másrészt a „majdnem pontos" megoldásból egy polinomiális kerekítési eljárást használva elő lehet állítani a pontos optimumot [17]. Ennek ellenére a belsőpontos módszerek fejlődését és gyakorlati elterjedését sokáig visszavetette az, hogy nagy pontosságú számítást igényeltek.

3.1. Elméleti háttér

3.1.1. A belsőpontos feltétel

Mostantól az LP feladat helyett a sokkal általánosabb $P_*(\kappa)$-lineáris komplementaritási feladattal foglalkozunk. Amint azt bemutattuk az előző fejezetben, ez a modell tartalmazza a lineáris és a kvadratikus célfüggvényes optimalizálási problémát is. Tekintsük tehát az alábbi feladatot:

$$\begin{aligned} Mx + q &= s \\ x \geq 0,\ s &\geq 0, \\ s \cdot x &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

ahol M $P_*(\kappa)$ mátrix, $q \geq 0$. Definiáljuk a következő halmazokat:

Megengedett megoldások: $\mathcal{F} = \left\{(x,s) \in \mathbb{R}^{2n}_{\oplus} : Mx + q = s\right\}$

Szigorúan megengedett megoldások: $\mathcal{F}_+ = \left\{(x,s) \in \mathbb{R}^{2n}_{+} : Mx + q = s\right\}$

Optimális megoldások: $\mathcal{F}_* = \left\{(x,s) \in \mathbb{R}^{2n}_{\oplus} : Mx + q = s,\ x \cdot s = 0\right\}$

A szigorúan megengedett megoldásokat gyakran *belső pont*nak,[1] az optimális megoldásokat pedig *komplementáris* megoldásnak fogjuk nevezni. Szükségünk lesz az alábbi feltételre:

3.1.1. Definíció. (Belsőpontos feltétel, IPC) *A továbbiakban feltesszük, hogy a belső pontok $\mathcal{F}_+$ halmaza nem üres, vagyis létezik belső pont.*

A belső pont létezésének kérdése alapvető fontosságú. A továbbiakban belátjuk a belső pont létezésének fontosabb következményeit:

[1] Az elnevezést az indokolja, hogy a szigorúan megengedett megoldások általában belső pontjai a megengedett megoldások halmazának.

3.1.2. Tétel. *Ha M $P_*(\kappa)$ mátrix és létezik belső pont, akkor az*

$$\mathcal{F}^w = \{(x,s) \in \mathcal{F} : x \cdot s \leq w\} \tag{3.1.2}$$

szinthalmaz minden $w \in \mathbb{R}^n_\oplus$ esetén nemüres, kompakt halmaz.

Bizonyítás: Legyen (x^0, s^0) belső pont és $w^0 = x^0 \cdot s^0 > 0$. A tételt több részben bizonyítjuk.

Korlátos: Legyen $(x,s) \in \mathcal{F}^w$, ekkor $x \cdot s \leq w$. Használjuk továbbá a $c^0 := {x^0}^T s = e^T w^0$ és $c := x^T s = e^T w$ jelölést. A $P_*(\kappa)$ mátrixok definíciója alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}(x-x^0)^T(s-s^0) \geq -4\kappa \sum_{i\in\mathcal{I}_+}(x_i - x_i^0)(s_i - s_i^0) \geq -4\kappa \sum_{i\in\mathcal{I}_+}(x_i s_i + x_i^0 s_i^0) \geq \\ \geq -4\kappa(x^T s + {x^0}^T s^0) \geq -4\kappa(c + c^0),\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

ahol $\mathcal{I}_+ = \{i : (x_i - x_i^0)(s_i - s_i^0) > 0\}$. Így:

$$\begin{aligned}{s^0}^T x + {x^0}^T s = x^T s + {x^0}^T s^0 - (x-x^0)^T(s-s^0) \leq c + c^0 + 4\kappa(c+c^0) = \\ = (1+4\kappa)(c+c^0),\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

vagyis

$$\mathcal{F}^w \subset \left\{(x,s) \geq 0 : {s^0}^T x + {x^0}^T s \leq (1+4\kappa)(c+c^0)\right\}, \tag{3.1.5}$$

ami korlátos halmaz.

Zárt: Vezessük be az $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ függvényt, amelyre $f(x,s) = x \cdot s$. Látható, hogy az f függvény folytonos a teljes értelmezési tartományán. Ekkor az $\mathcal{F}^w$ szinthalmaz az alábbi alakban állítható elő:

$$\mathcal{F}^w = \mathcal{F} \cap f^{-1}\left(w - \mathbb{R}^n_\oplus\right), \tag{3.1.6}$$

ahol $w - \mathbb{R}^n_\oplus = \left\{w - w' : w' \in \mathbb{R}^n_\oplus\right\}$, f^{-1} pedig teljes inverz képet jelöl. Az f függvény folytonos, a $w - \mathbb{R}^n_\oplus$ halmaz zárt, így az ősképp is az, tehát a $\mathcal{F}$ halmaz zártsága miatt $\mathcal{F}^w$ is zárt.

Nemüres: Tegyük fel indirekt módon, hogy létezik $\hat{w} > 0$, amelyre $\mathcal{F}^{\hat{w}} = \emptyset$. Az $\mathcal{F}^{w^0}$ halmaz nem üres, mivel tartalmazza az (x^0, s^0) pontot és a már bizonyítottak miatt kompakt is. Tekintsük a következő halmazt:

$$\mathcal{G} = \left\{w \geq 0 \,\middle|\, \exists\,(x,s) \in \mathcal{F} : x \cdot s = w\right\} \tag{3.1.7}$$

A $\mathcal{G}$ halmazról az alábbi mondható:

3.1.3. Lemma. *A $\mathcal{G}$ halmaz nemüres és zárt.*

Bizonyítás: A belső pont létezése miatt $w^0 \in \mathcal{G}$, vagyis $\mathcal{G}$ nem üres. A zártsághoz azt kell igazolni, hogy bármely $\mathcal{G}$-beli pontsorozat limeszpontja is $\mathcal{G}$-ben van. Legyen tehát w^n konvergens sorozat, amelyre $w^n \to \bar{w}$. Azt kell belátni, hogy létezik $(\bar{x}, \bar{s}) \in \mathcal{F}$, amelyre $\bar{w} = \bar{x} \cdot \bar{s}$. Tekintsünk egy olyan $\tilde{w} \in \mathbb{R}^n_\oplus$ elemet, amelyre teljesül, hogy $\forall n \; \tilde{w} > w^n$ és $\tilde{w} > \hat{w}$. A $\mathcal{G}$ halmaz definíciója miatt a w^n sorozathoz létezik olyan (x^n, s^n) sorozat, hogy $w^n = x^n \cdot s^n$, ahol $(x^n, s^n) \in \mathcal{F}^{\tilde{w}}$. Az $\mathcal{F}^{\tilde{w}}$ halmaz kompakt, így az (x^n, s^n) sorozatnak van konvergens részsorozata, amelynek határértékét jelöljük $(\bar{x}, \bar{s})$-pal. Az $(x, s) \mapsto x \cdot s$ leképezés folytonossága miatt ekkor $\bar{w} = \bar{x} \cdot \bar{s}$, vagyis $\bar{w} \in \mathcal{G}$. Ezzel a lemmát beláttuk. □

Legyen $w' \in \mathbb{R}^n$ olyan vektor, hogy $w' > w^0$ és $w' > \hat{w}$ és tekintsük az

$$\mathcal{A} = \left\{ w \in \mathbb{R}^n_\oplus : e^T w \le e^T w' \right\} \tag{3.1.8}$$

nemüres, kompakt halmazt. Definiáljunk egy $f : \mathcal{A} \cap \mathcal{G} \to \mathbb{R}^n_\oplus$ függvényt:

$$f_i(w) = \begin{cases} 0, \text{ ha } w_i \le \hat{w}_i, \\ w_i - \hat{w}_i \text{ különben.} \end{cases} \tag{3.1.9}$$

A definíció miatt az f függvény folytonos, így a $\|.\|_\infty$ folytonossága miatt a $\|f(w)\|_\infty$ függvény is folytonos. Mivel kompakt halmaz zárt részhalmaza kompakt, így a Weierstrass–tétel miatt az f függvény felveszi a minimumát az $\mathcal{A} \cap \mathcal{G}$ halmazon, vagyis létezik ρ, hogy

$$\rho = \|f(w^*)\|_\infty = \min_{w \in \mathcal{A} \cap \mathcal{G}} \|f(w)\|_\infty \le \left\|f(w^0)\right\|_\infty, \tag{3.1.10}$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség azért igaz, mert $w^0 \in \mathcal{A}$. Ha most $\rho = 0$ lenne, akkor létezne olyan $w^* \in \mathcal{A} \cap \mathcal{G}$, amelyre $w^* \le \hat{w}$, de ekkor $w^* \in \mathcal{G}$ miatt $\exists\, x^*, s^*$, hogy $x^* \cdot s^* = w^* \le \hat{w}$, ez pedig ellentmond annak, hogy $\mathcal{F}^{\hat{w}} = \emptyset$, vagyis $\rho > 0$. Tekintsük most a

$$T(w^*, \hat{w}) = \{w : w^* \le w \le \hat{w}\} \tag{3.1.11}$$

halmazt, amely tulajdonképpen egy n-dimenziós (esetleg elfajuló) téglatest. Célunk az, hogy a w^* pontból a $\hat{w}$ pont „felé” ellépve olyan w^+ pontot találjunk a téglatestben, amelynek ismerjük az $x^+ \cdot s^+ = w^+$ előállítását, ekkor a $\|f(w^+)\|_\infty < \|f(w^*)\|_\infty$

ellentmondás miatt az indirekt feltevés nem igaz, vagyis $\mathcal{F}^{\hat{w}}$ nem üres. A következő eredményre még hivatkozni fogunk a későbbiekben, így általános lemmaként fogalmazzuk meg.

3.1.4. Lemma. *Legyen $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $P_*(\kappa)$ mátrix, $q \in \mathbb{R}^n$ vektor, továbbá $w^1 < w^2 \in \mathbb{R}^n_+$ olyan vektorok, hogy létezik $(x^1, s^1) \in \mathbb{R}^{2n}_+$, amelyekre $w^1 = x^1 \cdot s^1$ és $Mx^1 + q = s^1$. Legyen*

$$T(w^1, w^2) = \left\{w : w^1 \leq w \leq w^2\right\}. \tag{3.1.12}$$

Ha $\operatorname{int} T(w^1, w^2) \neq \emptyset$, akkor létezik $\alpha \in (0,1)$ és $(\triangle x, \triangle s) \in \mathbb{R}^{2n}$, hogy az $x^+ = x^1 + \alpha\triangle x > 0$, $s^+ = s^1 + \alpha\triangle s > 0$, $w^+ = x^+ \cdot s^+$ vektorokkal $w^+ \in \operatorname{int} T(w^1, w^2)$.

Bizonyítás: Tekintsük az

$$M\triangle x = \quad \triangle s \tag{3.1.13}$$

$$s^1\triangle x + x^1\triangle s = \quad w^2 - w^1 \tag{3.1.14}$$

rendszert. Mivel M $P_*(\kappa)$ mátrix, így a (2.4.1) lemma miatt ennek a rendszernek létezik egyértelműen $(\triangle x, \triangle s)$ megoldása. A továbbiakban olyan $\alpha \in (0,1)$-et kell találni, amelyre

$$x^+ = x^1 + \alpha\triangle x > 0 \tag{3.1.15}$$

$$s^+ = s^1 + \alpha\triangle s > 0 \tag{3.1.16}$$

$$w_i^1 < w_i^+ < w_i^2 \ \forall i, \tag{3.1.17}$$

ahol a harmadik feltétel biztosítja, hogy a w^+ pont valóban tégla belsejében van. Az első két feltételt koordinátánkénti alakra bontva a következő feltételeket kapjuk az α számra:

$$\alpha \quad < \min_{i:\triangle x_i<0}\left\{-\frac{x_i^1}{\triangle x_i}\right\} =: \alpha_1 \tag{3.1.18}$$

$$\alpha \quad < \min_{i:\triangle s_i<0}\left\{-\frac{s_i^1}{\triangle s_i}\right\} =: \alpha_2, \tag{3.1.19}$$

ahol az α_1 és α_2 számok az (x, s) szigorú pozitivitása miatt pozitívak. A harmadik feltétel első fele az alábbi alakban írható:

$$w_i^1 \leq w_i^+ = x_i^+ s_i^+ = (x_i^1 + \alpha\triangle x_i)(s_i^1 + \alpha\triangle s_i) = x_i^1 s_i^1 + \alpha(\triangle x_i s_i^1 + \triangle s_i x_i^1) + \\ + \alpha^2\triangle x_i\triangle s_i = w_i^1 + \alpha(w_i^2 - w_i^1) + \alpha^2\triangle x_i\triangle s_i, \tag{3.1.20}$$

vagyis

$$(w_i^2 - w_i^1) + \alpha \triangle x_i \triangle s_i > 0. \tag{3.1.21}$$

Ez a feltétel csak azokra a i indexekre jelent megkötést, amelyekre $\triangle x_i \triangle s_i < 0$, mégpedig a következő formában:

$$\alpha < \min_{i:\triangle x_i \triangle s_i < 0} \left\{ -\frac{w_i^2 - w_i^1}{\triangle x_i \triangle s_i} \right\} =: \alpha_3, \tag{3.1.22}$$

ahol α_3 ismét pozitív szám. A másik feltételt tekintve:

$$\begin{aligned} w_i^2 > w_i^+ = x_i^+ s_i^+ = (x_i^1 + \alpha \triangle x_i)(s_i^1 + \alpha \triangle s_i) = x_i^1 s_i^1 + \alpha(\triangle x_i s_i^1 + \triangle s_i x_i^1) + \\ + \alpha^2 \triangle x_i \triangle s_i = w_i^1 + \alpha(w_i^2 - w_i^1) + \alpha^2 \triangle x_i \triangle s_i, \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

vagyis

$$0 < (1 - \alpha)(w_i^2 - w_i^1) - \alpha^2 \triangle x_i \triangle s_i. \tag{3.1.24}$$

Mivel $w_i^2 - w_i^1 > 0$, ezért ez csak akkor jelent megkötést, ha $\triangle x_i \triangle s_i > 0$. Ebben az esetben az egyenlet kisebbik gyöke negatív, így az egyenlőtlenség azokra a pozitív α számokra teljesül, amelyekre:

$$\alpha < \frac{w_i^1 - w_i^2 + \sqrt{(w_i^2 - w_i^1)^2 + 4\triangle x_i \triangle s_i}}{2\triangle x_i \triangle s_i} =: \alpha_4, \tag{3.1.25}$$

ami $\triangle x_i \triangle s_i > 0$ miatt pozitív. A kapott feltételeket összevetve kapjuk, hogy bármely

$$\alpha < \min \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 1\} \tag{3.1.26}$$

szám kielégíti a lemma kívánalmait. Ilyen pedig az α_i számok pozitivitása miatt létezik. $\square$

Most már könnyen befejezhetjük a tétel bizonyítását, hiszen, ha $\operatorname{int} T(w^*, \hat{w}) \neq \emptyset$, akkor az előbb belátott lemma miatt létezik olyan $w^+ = x^+ \cdot s^+$, hogy $\hat{w} < w^+ < w^*$, vagyis $\|f(w^+)\|_\infty < \|f(w^*)\|_\infty$, ami ellentmondás. Ha $\operatorname{int} T(w^*, \hat{w}) = \emptyset$, akkor folytonossági megfontolások miatt felvehetünk egy w' pontot a w^* megfelelően kis környezetében, amelynek ismerjük a $x' \cdot s'$ előállítását és arra a pontra mondjuk el a bizonyítást. A bizonyítás azért fog működni, mert elég a legnagyobb koordinátában közelebb kerülni a $\hat{w}$ ponthoz.

Ezzel a tétel mindegyik állítását beláttuk. $\blacksquare$

3.1.5. Következmény. *Ha létezik belső pont, akkor az optimális (komplementáris) megoldások*

$$\mathcal{F}_* = \left\{(x,s) \in \mathbb{R}^{2n} : -Mx + q = s,\, x, s \geq 0,\, x \cdot s = 0\right\} \tag{3.1.27}$$

halmaza kompakt.

Bizonyítás: Legyen $(w^i) \subset \mathbb{R}^n$ olyan sorozat, hogy $w^i > 0$, $w^{i+1} < w^i$ és $\lim_{i\to\infty} w^i = 0$. Ekkor előző tétel jelöléseivel írhatjuk, hogy

$$\mathcal{F}_* = \mathcal{F}^0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}^{w^i} \subset \mathcal{F}^{w^0}, \tag{3.1.28}$$

A tétel szerint a $\mathcal{F}^{w^i}$ halmazok kompaktak és nem üresek, így az $\mathcal{F}_*$ halmaz zárt és része az $\mathcal{F}^{w^0}$ halmaznak, ami kompakt, vagyis a $\mathcal{F}_*$ halmaz is kompakt. ■

Amint azt már említettük korábban, a belsőpontos módszerek csak a komplementaritási feltételt relaxálják, és a többi feltétel megtartása mellett törekednek arra, hogy az $x \cdot s$ vektor „közel legyen" a nullvektorhoz. Ebből a koncepcióból adódik az alábbi, *Sonnevend György*től [37, 28] származó definíció:

3.1.6. Definíció. (Centrális út) *Az*

$$\begin{aligned} Mx + q &= s \\ x \geq 0, \quad s &\geq 0 \\ s \cdot x &= \mu e \end{aligned} \tag{3.1.29}$$

rendszer (x, s, μ) megoldásait – ahol $e = (1, \ldots, 1)$ – centrális út*nak nevezzük.*

A definíció jogosságáról szól az alábbi állítás:

3.1.7. Állítás. *Ha M $P_*(\kappa)$ mátrix és a (3.1.1) rendszernek létezik belső pontja, akkor minden $\mu > 0$ értékhez egyértelműen létezik (x, s) vektor, amely kielégíti a centrális út definícióját, vagyis a centrális út egyparaméteres görbe a primál-duál változók terében.*

Ennél erősebb állítás is igaz.

3.1.8. Tétel. *Az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. *A (3.1.1) rendszernek létezik belső pontja.*

2. *Minden $\mu > 0$ számhoz létezik egyértelműen olyan $(x, s) \in \mathcal{F}_+$ vektor, hogy $x \cdot s = \mu e$.*

3. *Minden $w \in \mathbb{R}^{2n}_{+}$ vektorhoz létezik egyértelműen olyan $(x, s) \in \mathcal{F}_+$ vektor, hogy $x \cdot s = w$.*

Bizonyítás: (Kojima, [25]) Nyilván elég az (1)→(3) irányt belátni, mivel a többi triviális.
EGYÉRTELMŰSÉG: Tegyük fel indirekt módon, hogy valamely $w > 0$-hoz léteznek $(x^1, s^1) \neq (x^2, s^2) > 0$ vektorok, amelyek kielégítik a harmadik állítást. Ekkor:

$$M(x^1 - x^2) = s^1 - s^2 \tag{3.1.30}$$

$$x^1 \cdot s^1 = x^2 \cdot s^2 > 0 \tag{3.1.31}$$

Mivel $x^1 - x^2 \neq 0$, ezért a (2.4.4) lemma alapján tekinthetünk olyan i indexet, amelyre $x^1_i \neq x^2_i$ és $0 \leq (x^1_i - x^2_i)(s^1_i - s^2_i)$. Nyilván feltehetjük, hogy pl. $x^1_i > x^2_i$, de ekkor a kapott egyenlőtlenség miatt $s^1_i \geq s^2_i$, ez viszont ellentmond annak, hogy $x^1_i x^2_i = s^1_i s^2_i > 0$. Ezzel az egyértelműséget beláttuk. □

A létezésre két bizonyítást adunk. Az első egy analitikus egzisztenciabizonyítás, a másik egy konstruktívabb szellemű, Newton–rendszerre épülő bizonyítás.
LÉTEZÉS (1. BIZONYÍTÁS): Legyen $w^1 = x^1 \cdot s^1 \in \mathbb{R}^n_{++}$, ahol $(x^1, s^1) \in \mathcal{F}_+$ belső pont, ilyen a belsőpontos feltétel miatt létezik. Tekintsük most az

$$x \cdot s = (1-t)w^1 + tw, \quad t \in [0, 1], \quad (x, s) \in \mathcal{F}_+ \tag{3.1.32}$$

egyenleteket. Legyen

$$t^* = \sup\left\{\hat{t} : \text{(3.1.32)-nek } \forall t \in [0, \hat{t})\text{-re létezik megoldása}\right\} \tag{3.1.33}$$

Ekkor van a megoldásoknak egy olyan (x^k, s^k, t^k) sorozata, hogy $\lim_{k\to\infty} t^k = t^*$. Ebben a sorozatban

$$x^{k^T} s^k = e^T(x^k \cdot s^k) = (1-t^k)e^T w^1 + t^k e^T w \leq e^T w^1 + e^T w, \tag{3.1.34}$$

amiből a (3.1.2) állítás felhasználásával kapjuk, hogy a $\left\{(x^k, s^k)\right\}$ halmaz korlátos, vagyis feltehető, hogy tart egy $(x^*, s^*) \in \mathcal{F}_+$ ponthoz. Folytonossági megfontolások miatt erre a pontra igaz, hogy

$$x^* \cdot s^* = (1 - t^*)w^1 + t^* w. \tag{3.1.35}$$

A jobb oldalon álló vektor pozitív, vagyis a határértékként kapott (x^*, s^*, t^*) pont is kielégíti a (3.1.32) rendszert. Ha most $t^* = 1$, akkor készen vagyunk. Ha $t^* < 1$, akkor a már bizonyított unicitás miatt az

$$u : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathcal{F}_+, \quad u(x, s) = x \cdot s \tag{3.1.36}$$

leképezés lokális homeomorfizmus (x^*, s^*)-ban. Ekkor azonban a (3.1.32) rendszernek minden t-hez elég közeli t^*-ra van megoldása, ami ellentmond t^* definíciójának. □

Létezés (2. bizonyítás): Használjuk a (3.1.2) tétel jelöléseit. Ekkor az $\mathcal{F}^w$ halmaz minden $w \in \mathbb{R}^n_+$ esetén kompakt, nemüres halmaz. Tegyük fel indirekt, hogy létezik $\hat{w} > 0$, amely nem áll elő $\hat{x} \cdot \hat{s}$ alakban. Tudjuk, hogy az $\mathcal{F}^{\hat{w}}$ halmaz nem üres, így ez csak úgy fordulhat elő, ha $\exists\, i : \hat{x}_i \hat{s}_i < \hat{w}_i$, amiből következik, hogy $\hat{x}^T \hat{s} < e^T \hat{w}$.

Tekintsük az $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_\oplus$, $f(x, s) = x^T s$ folytonos függvényt. A $\mathcal{F}^{\hat{w}}$ halmaz kompaktsága miatt létezik $(\bar{x}, \bar{s}) \in \mathcal{F}^{\hat{w}}$, amelyre

$$\bar{x}^T \bar{s} = \max_{\mathcal{F}^{\hat{w}}} x^T s. \tag{3.1.37}$$

Tekintsük most a $T(\hat{w}, \bar{w})$ téglát, ahol $\bar{w} := \bar{x} \cdot \bar{s}$. Ha $T(\hat{w}, \bar{w})$ nem üres, akkor a (3.1.4) lemma miatt létezik $(\triangle x, \triangle s)$ és $\alpha \in (0, 1)$, hogy

$$(x^+, s^+) \in \operatorname{int}(\hat{w}, \bar{w}) \cap \mathcal{F}_+, \tag{3.1.38}$$

ahol $x^+ = \bar{x} + \alpha \triangle x$, $s^+ = \bar{s} + \alpha \triangle s$. A továbbiakban olyan α értéket választunk, hogy $(x^+)^T s^+ > \bar{x}^T \bar{s}$ és $w^+ \in \mathcal{F}^{\hat{w}}$ teljesüljön, ami ellentmond $(\bar{x}, \bar{s})$ optimalitásának. A definíciók miatt:

$$\begin{aligned} w^+ = (\bar{x} + \alpha \triangle x)(\bar{s} + \alpha \triangle s) = \bar{x} \cdot \bar{s} + \alpha(\bar{s} \triangle x + \bar{x} \triangle s) + \alpha^2 \triangle x \cdot \triangle s = \\ = \bar{w} + \alpha(\hat{w} - \bar{w}) + \alpha^2 \triangle x \triangle s, \end{aligned} \tag{3.1.39}$$

vagyis

$$\begin{aligned} (x^+)^T s^+ = e^T w^+ = e^T \bar{w} + \alpha e^T (\hat{w} - \bar{w}) + \alpha^2 \triangle x^T \triangle s \geq \\ \geq e^T \bar{w} + \alpha e^T (\hat{w} - \bar{w}) - 4\kappa \alpha^2 \sum_{i : \triangle x_i \triangle s_i > 0} \triangle x_i \triangle s_i, \end{aligned} \tag{3.1.40}$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségnél kihasználtuk a $P_*(\kappa)$ tulajdonságot. Olyan α-t keresünk, amelyre

$$e^T(\hat{w} - \bar{w}) - 4\kappa\alpha \sum_{i:\triangle x_i \triangle s_i > 0} \triangle x_i \triangle s_i > 0, \tag{3.1.41}$$

ahonnan átrendezés után kapjuk az

$$0 < \alpha < \frac{e^T(\hat{w} - \bar{w})}{4\kappa \sum_{i:\triangle x_i \triangle s_i > 0} \triangle x_i \triangle s_i} \tag{3.1.42}$$

feltételt. Ilyen α az $e^T(\hat{w} - \bar{w})$ pozitivitása miatt létezik.[2] □

Ezzel a tételt beláttuk. ■

A centrális út további analitikus tulajdonságaival foglalkozik [35] 16. fejezete.

3.1.9. Példa. *Tekintsük újra az* $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ *mátrixot a* $q = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ *jobboldal mellett. Ekkor a centrális út* μ *értékhez tartozó* (x, s) *pontjára:*

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 1 = &\ s_1 \\ x_2 = &\ s_2 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 > &\ 0 \\ x_i s_i = &\ \mu \end{aligned}$$

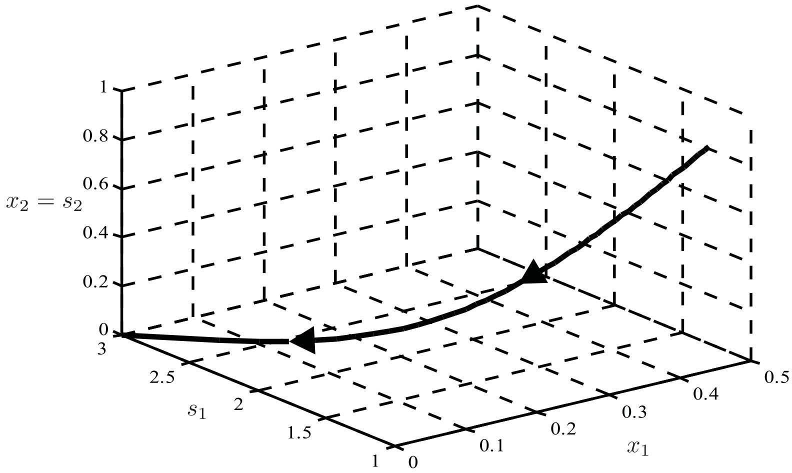
Ezt könnyen megoldhatjuk, és kapjuk, hogy a centrális út μ*-höz tartozó pontja*

$$\begin{aligned} x_1^\mu &= \sqrt{\mu} \\ x_2^\mu &= \tfrac{3\sqrt{\mu}-1+\sqrt{13\mu-6\sqrt{\mu}+1}}{2} \\ s_1^\mu &= \tfrac{-7\sqrt{\mu}+5+\sqrt{13\mu-6\sqrt{\mu}+1}}{2} \\ s_2^\mu &= \tfrac{3\sqrt{\mu}-1+\sqrt{13\mu-6\sqrt{\mu}+1}}{2} \end{aligned}$$

A kapott eredményt a (3.1) ábrán láthatjuk.

Mivel a centrális út (x, s) pontjaira $x \cdot s = \mu e$ és az előbb bizonyított tétel szerint bármely μ értékhez létezik megfelelő (x, s) pont, ezért $\mu \to 0$ esetén a megfelelő

[2] Az (5.1.2) lemma alapján konkrét becslést is adhatnánk az α értékre, azonban erre most nincs szükségünk.



3.1. ábra. **A (3.1.9) példában szereplő feladat centrális útjának részlete**
A nyilak a csökkenő μ értékek irányába mutatnak. A négy változó közül csak hármat ábrázoltunk, mivel $x_2 = s_2$.

(x^μ, s^μ) pontsorozat határértéke olyan (x^*, s^*) pont, amelyre $x^* \cdot s^* = 0$, vagyis optimális (komplementáris) megoldás. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy a centrális úton „végighaladva" – vagyis egyre kisebb μ értékekhez kiszámítva az (x, s) vektort – optimális megoldáshoz tartunk.

3.1.10. Példa. *Az előbbi példát megvizsgálva látjuk, hogy a centrális út limeszpontjára*

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= 0\\
x_2^* &= 0\\
s_1^* &= 3\\
s_2^* &= 0,
\end{aligned}
$$

vagyis $x^* = (0, 0)$*,* $s^* = (3, 0)$*. Ekkor*

$$
\begin{aligned}
Mx^* + q = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} = s^*\\
x^* \cdot s^* = (0, 0) \cdot (3, 0) = (0, 0),
\end{aligned}
$$

vagyis valóban megoldása a feladatnak.

A gyakorlatban ez nem kivitelezhető, mivel ennek a segédfeladatnak a bonyolultsága megegyezik az eredeti feladatéval. Célunk inkább az, hogy a centrális úthoz valamilyen értelemben közel maradjunk. A centrális úttól való távolságot egy $\delta(x, s, \mu)$ függvény méri, amelynek konkrét alakjáról később lesz szó. Az algoritmusok egy előre adott *belső* pontból indulnak, vagyis feltesszük, hogy létezik ilyen pont. Az előbb láttuk, hogy ebben az esetben létezik komplementáris megoldás, például a centrális út határpontja ilyen. Ez a feltétel az egyik kritikus pontja a belsőpontos módszereknek. Léteznek ugyan módszerek, amelyek egy olyan (nagyobb) feladatba ágyazzák a problémát, amelynek már létezik belső pontja, de ezek nem alkalmazhatók teljes általánosságban.

3.1.2. A Newton-módszer általában

A lineáris komplementaritással való kapcsolat ad alapot arra, hogy alkalmazzuk a nemlineáris programozás eszközeit[3] is, például a Newton-módszert, nemlineáris egyenletek megoldására.

Legyen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvény, amelynek $J(x)$ Jacobi-mátrixa minden x esetén nemszinguláris. A Newton–módszer az $F(x) = 0$ egyenletet oldja meg iteratív közelítő módszerrel, minden lépésben egy hipersíkkal közelítve a függvényt. Formálisan $x_{k+1} = x_k + \triangle x_k$, ahol $\triangle x_k = -J(x_k)^{-1}F(x_k)$.[4] Az eljárás konvergál, ha a kezdőpont a gyökhely megfelelő környezetében van. Ugyanez a módszer használható minimalizálási problémák megoldására is: ha a $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt kell minimalizálni, akkor a $\nabla g(x) = 0$ egyenletet oldjuk meg. Ennek megoldása szigorú minimum, ha g Hesse-mátrixa pozitív definit, vagyis például, ha g szigorúan konvex.

Észrevehetjük, hogy a Newton-módszer nem kezeli az előjelmegkötéseket, ezért ezeket más módon kell megjeleníteni az algoritmusban. Erre szolgálnak az *akadályfüggvény*ek. Tekintsük tehát a következő definíciót:

[3] Ismét utalunk arra, hogy a nemlineáris programozás eredményei sokszor megelőzték a lineáris programozást: többször előfordult, hogy egy „újonnan” felfedezett lineáris programozási algoritmusról kiderült, hogy egy rég elfelejtett nemlineáris programozási eljárás speciális esete.

[4] A gyakorlatban természetesen nem a mátrix inverzét számítják ki, hanem a lineáris egyenletrendszert oldják meg.

3.1.11. Definíció. (Akadályfüggvény) *Egy $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt akadályfüggvénynek (barrier) nevezünk, ha* $\lim_{x\to 0^+} \phi(x) = +\infty$.

Ezzel a definícióval a

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x), \quad g_i(x) \geq 0 \; \forall i \tag{3.1.43}$$

feladat

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) + \mu \sum_i \phi(g_i(x)) \tag{3.1.44}$$

alakban közelíthető. Jól látható, hogy a nemnegativitási feltétel helyett a célfüggvénybe építettük be az előjelmegkötést: ha x közel van a tengelyekhez, akkor a célfüggvény nagy lesz. Ezzel egy egész problémacsaládot kaptunk a μ paraméter függvényében, ahol $\mu = 0$ esetén visszakapjuk az eredeti feladatot. Természetesen nem várható, hogy a paraméteres feladatok μ-höz tartozó megoldása megegyezzen ez eredeti minimumhellyel, az azonban már jogos elvárás, hogy ha μ nullához tart, akkor a paraméteres feladatok megoldásai tartsanak a valódi optimumhoz. A következő szakaszban ezt az általános gondolatot fejtjük ki a lineáris komplementaritás esetére.

3.2. Szabad paraméterek

A belsőpontos eljárások szinte kivétel nélkül a centrális utat használják az optimális megoldsá elérésére. Ennek számtalan módja lehetséges, ezekről adunk most egy rövid összefoglalást. Nem célunk mindegyik lehetőség teljes bemutatása, inkább csak a fő irányokat jelöljük ki és a következő két fejezetre hagyjuk egy-egy konkrét algoritmus részletes elemzését.

3.2.1. Az algoritmus típusa

Több módon s rendszerezhetjük az algoritmus-típusokat. Most a következő felosztást tekintjük:[5] útkövető, affin skálázású, illetve potenciálcsökkentő eljárások.

Az *útkövető* algoritmusok nevükhöz híven a centrális utat követik. Az előbbiekben belátott tétel szerint a centrális út limeszpontja optimális megoldás. Minden

[5]Ez a felosztás [14]-ben olvasható.

iterációban olyan pontokkal dolgoznak, amelyek közel vannak a centrális út valamely pontjához. A dolgozat további részében két útkövető eljárást ismertetünk.

Az *affin skálázású* eljárások más módon működnek. A megengedett megoldások poliéderét ellipszoiddal közelítik és az ellipszoidon minimalizálják a célfüggvényt: ez rendszerint könnyebb feladat, mint a poliéderen keresni optimumot. A kapott pont lesz az iteráció következő pontja. Ebbe a csoportba tartozik a Dikin–módszer.

A *potenciálcsökkentő algoritmusok* az iteráció tér pontjaihoz potenciálértéket rendelnek. Ez a függvény olyan, hogy $-\infty$-hez tart, ha az iteráció tart egy optimális ponthoz, illetve $+\infty$-hez, ha úgy tart, hogy a megengedett tartomány határához, hogy nem optimális pontot közelít meg. Az algoritmusok célja ezen függvény értékének csökkentése. Ebbe a csoportba tartozik a legelső belsőpontos módszer a Karmarkar–algoritmus [19] is. Megjegyezzük, hogy a potenciálcsökkentő eljárások az akadályfüggvényeken keresztül szoros kapcsolatban állnak az útkövető módszerekkel.

3.2.2. Megengedettség

A belsőpontos módszerek eddigi tárgyalásánál végig ügyeltünk arra, hogy az iterációkban kapott pontok belső pontok legyenek, vagyis szigorúan megengedett megoldásokon keresztül közelítjük meg az optimális megoldást. Az elmélet egy része kiterjeszthető azonban arra az esetre is, megengedjük, hogy az iterációk kilépjenek a poliéderből, ezek az *infeasible*, *nem megengedett* eljárások. Jelentőségük akkor válik világossá, ha felidézzük, hogy a belsőpontos módszerek egyik gyenge pontja éppen kezdőpont megválasztása. A dolgozatban kizárólag feasible eljárásokkal foglalkozunk.

3.2.3. Primál-duál

Mi most csak olyan eljárásokkal foglalkozunk, amelyek a primál-duál térben, vagyis az (x, s) pontok terében hajtanak végre iterációkat. Az elmélet megfogalmazható csak primál, illetve csak duál változókkal, azonban az így kapott eljárások hatékonysága és numerikus stabilitása elmarad a primál-duál módszerekétől.

3.2.4. A távolságfüggvény

Adott (x, s) pont *centralitását*, vagyis a centrális út adott μ paraméterhez tartozó pontjától való távolságát sokféleképpen mérhetjük. Alapvető elvárás, hogy ez a távolság akkor legyen minimális, ha az (x, s) pont rajta van a centrális úton, vagyis $x \cdot s = \mu e$. Ezt a követelményt magában figyelembe véve természetes választás lenne a $\|xs - \mu e\|$ távolság használata, azonban ennek súlyos hiányossága, hogy nem tart végtelenhez, ha x vagy s valamelyik koordinátája közel kerül 0-hoz.[6] Mivel a Newton-rendszerben nem foglalkozunk az előjelmegkötésekkel, így ezt is a távolságfüggvény helyes megválasztásával kell megakadályoznunk. Egy másik praktikus választás a $\|v - v^{-1}\|^2$ távolság, amelynek már nincs meg az előbb említett hiányossága. A dolgozat további részében különböző tulajdonságú távolságfüggvényekkel fogunk foglalkozni; a távolságfüggvény megválasztásának problémáját részletesebben a 4. fejezetben tárgyaljuk.

3.2.5. Előrelépés centrális úton

Az útkövető eljárásokban a dualitásrést a centrális úton való előrehaladással, vagyis a μ paraméter folyamatos csökkentésével minimalizálhatjuk. Itt is több lehetőségünk van.

- A μ paramétert minden lépésben $(1 - \theta)\mu$-re cseréljük, vagyis rögzített konstanssal szorzunk. Ezek a *large-update* algoritmusok.
- A csökkentés mértéke maga is változik, vagyis μ helyett $(1 - \theta_n)\mu$-t veszünk, ahol például $\theta_n = \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Így működnek a *small-update* eljárások.
- Az előző lehetőség egyik változata az, amikor a csökkentés függ az algoritmus aktuális iterációjától, vagyis *adaptívan* változtatjuk a μ paraméter értékét.

Furcsa ellentmondás, hogy a gyakorlatban a large-update módszerek működnek jobban, miközben a small-update eljárások elméleti komplexitása jobb: $\mathcal{O}\left(\sqrt{n}\log\frac{n}{\varepsilon}\right)$ az $\mathcal{O}\left(\sqrt{n}\log n\log\frac{n}{\varepsilon}\right)$ helyett. Nyitott kérdés, hogy elérhető-e a jobb komplexitás a large-update módszerekkel.

[6] Ennek ellenére – kellemes analitikus tulajdonságai miatt – időnként használják ezt mértéket.

3.2.6. A Newton-rendszer és a lépéshossz

A Newton-rendszert arra használjuk, hogy az abból adódó $(\triangle x, \triangle s)$ irányba ellépve csökkenteni tudjuk a centrális úttól való távolságot. A Newton-rendszer alkalmazása eredetileg a következő egyszerű ötletből származik: Adott (x, s) pontból szeretnénk eljutni olyan $(x', s') = (x + \triangle x, s + \triangle s)$ pontba, amely már komplementáris, vagyis $x' \cdot s' = 0$. Ehhez a következő rendszert kellene megoldanunk:

$$\begin{aligned} Mx' &= s' \\ x', s' &\geq 0 \\ x' \cdot s' &= 0 \end{aligned}$$

Először relaxáljuk a nemnegativitási feltételeket, ennek persze az lehet a következménye, hogy a kapott $(\triangle x, \triangle s)$ megoldás nem jó, vagyis az $(x + \triangle x, s + \triangle s)$ pont nem lesz megengedett megoldás. Ezt úgy küszöböljük ki, hogy nem a teljes $(\triangle x, \triangle s)$ lépést tesszük meg, hanem annak csak α-szorosát, ahol $\alpha \leq 1$. Felhasználva az (x, s) pontra vonatkozó egyenleteket a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} M\triangle x = &\quad \triangle s \\ x \cdot s + \alpha s \cdot \triangle x + \alpha x \cdot \triangle s + \alpha^2 \triangle s \triangle x = &\quad 0 \end{aligned}$$

Sajnos ez egy kvadratikus egyenletrendszer, így egzakt megoldásában általában nem reménykedhetünk. A következő közelítést alkalmazzuk: elhanyagoljuk az $\alpha^2 \triangle s \triangle x$ tagot, ezáltal a kapott megoldás csak kis α értékek esetén lesz viszonylag pontos. A Newton-rendszer így csak hozzávetőleges irányt ad meg, utána külön meg kell határoznunk, hogy mennyit lépünk abba az irányba, úgy hogy a kapott pont még megengedett megoldás legyen.

A Newton-rendszer alapját az adta, hogy olyan (x', s') pontot kerestünk, amelyre $x' \cdot s' = 0$. Ezt a célt egy lépésben a feltételek relaxációja miatt nem tudjuk elérni, viszont bízunk abban, hogy a kapott új pont valamilyen értelemben jobb, mint az előző, például kisebb rá a dualitásrés, vagy közelebb van a centrális úthoz. Az ilyen lépést nevezik *affin skálázású* lépésnek.[7] Természetesen a 0 helyett más értéket is megcélozhattunk volna, például μe-t, ennek a prediktor korrektor módszereknél

[7] Megmutatható, hogy ez az irány megfelel az affin skálázású módszerek (3.2.1. szakasz) esetén az ellipszoidon felvett optimumnak.

lesz nagy jelentősége. Végül aztán az is elképzelhető, hogy a megoldandó Newton-rendszer már nem vezethető vissza valamilyen megcélozott értékre, vagyis nem a fenti gondolatmenetből kaptuk. Erre fogunk példát látni a 4. fejezetben.

Természetesen a Newton-rendszer egy általánosabb, a nemlineáris egyenletek megoldására vonatkozó elmélet [13] része. Mivel azonban esetünkben minden tulajdonságot könnyen tudunk bizonyítani, nem kell az általános elméletre hivatkoznunk.

4. fejezet

Útkövető eljárás önreguláris távolsággal

Az alábbiakban példát mutatunk egy olyan klasszikus útkövető eljárásra, amely tetszőleges $P_*(\kappa)$-mátrix mellett megoldja a lineáris komplementaritási problémát. Az eljárás $O(\sqrt{n}\log n \log \frac{n}{\varepsilon})$ lépésben olyan megoldást talál, amelynél a dualitásrés legfeljebb ε. Az eredmény ereje abban rejlik, hogy távolságmértékek széles osztálya (önreguláris függvények) esetén garantálható az eljárás működése. A következő szakaszok alapjául [32] 2–4. fejezete szolgált, azzal az egyszerűsítéssel, hogy mi csak a lineáris problémát vizsgáljuk.

Tekintsük tehát a

$$\begin{aligned} Mx + q &= s \\ x, s &\geq 0 \\ x \cdot s &= 0 \end{aligned}$$

feladatot, ahol M $P_*(\kappa)$ mátrix. A továbbiakban tegyük fel, hogy a feladatnak létezik szigorúan megengedett megoldása, vagyis

$$\mathcal{F}_+ = \left\{(x, s) \in \mathbb{R}^{2n}_{\oplus} : Mx + q = s\right\} \neq \emptyset. \tag{4.0.1}$$

A belsőpontos módszerek általános tárgyalásánál már beláttuk, hogy ekkor minden $\mu > 0$ esetén egyértelműen létezik olyan (x, s) vektor, amelyre $Mx+q = s$ és $x \cdot s = \mu e$, vagyis létezik a centrális út. Az ilyen eljárásokban szokásos következő lépés a távolságfüggvény megadása, amelynek praktikusan a következő tulajdonságokat kell teljesítenie:

- Legyen minimális – alkalmasan 0 –, amikor a pont rajta van a centrális úton.
- A centrális úttól távolodva tartson a végtelenhez.
- A megengedett tartomány határához közeledve tartson a végtelenhez.

Ezeket a függvényeket általában a $v = \sqrt{\frac{x \cdot s}{\mu}}$ változó függvényeként adják meg. Praktikus választás, ha ilyen tulajdonságú Ψ függvényt $\Psi(v) = \sum_{i=1}^{n} \psi(v_i)$ alakban keresünk, hiszen minden koordinátát egyformán veszünk figyelembe. Könnyen meggondolható, hogy ekkor a fenti három tulajdonság hasonlóan átvihető ψ-re is. Ezekből a meggondolásokból, valamint a becslésekhez szükséges további feltételekből adódik a következő szakasz alapját adó definíció.

4.1. Önreguláris függvények és tulajdonságaik

4.1.1. Definíció. (Önreguláris függvény) *A $\psi(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ függvényt* önreguláris*nak (self-regular) nevezzük, ha kétszer folytonosan differenciálható és kielégíti az alábbi két feltételt:*

SR1 *A teljes értelmezési tartományán szigorúan konvex, a $t = 1$ pontban globális minimuma van, amelyre $\psi(1) = \psi'(1) = 0$. Léteznek továbbá $\nu_2 \geq \nu_1 > 0$ és $p, q \geq 1$ konstansok, hogy minden $t > 0$-ra*

$$\nu_1(t^{p-1} + t^{-1-q}) \leq \psi''(t) \leq \nu_2(t^{p-1} + t^{-1-q}). \tag{4.1.1}$$

SR2 *Minden $t_1, t_2 > 0$-ra és $r \in [0, 1]$-re*

$$\psi(t_1^r t_2^{1-r}) \leq r\psi(t_1) + (1 - r)\psi(t_2). \tag{4.1.2}$$

Az első feltétel annyit követel meg a ϕ-ről, hogy a végtelen és a 0 közelében megfelelően növekedjen, a második pedig egy exponenciális konvexitás jellegű tulajdonság.

A szokásos módon legyen $v = \sqrt{\frac{x \cdot s}{\mu}}$ és definiáljuk a centrális utat (3.1.6) alapján. Legyen továbbá $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ önreguláris függvény.[1] Ekkor a centrális úttól mért távolságot a

$$\Psi(x, s, \mu) := \Psi(v) = \sum_{i=1}^{n} \psi(v_i) \tag{4.1.3}$$

képlettel definiálhatjuk.

Először vizsgáljuk meg, hogy értelmes-e ez a definíció. Egy (x, s) pontpár pontosan akkor van rajta a centrális úton, ha $x \cdot s = \mu e$, vagyis $v = e$. Ebben az esetben $\Psi(x, s, \mu) = 0$, sőt – a ψ függvény szigorú konvexitása miatt – a fordított állítás is igaz. Másrészt, ha az (x, s) vektor valamelyik koordinátája „közel van" 0-hoz, akkor $\Psi(x, s, \mu)$ „nagy lesz", ami azt jelenti, hogy a fenti Ψ függvény egyszerre bünteti a centrális úttól való eltávolodást és a megengedett tartomány határához való közeledést, megfelelve a fent kirótt követelményeknek. A kétféle büntetés arányát a ψ definíciójában szereplő p és q paraméterek szabályozzák.

Felmerülhet még a kérdés, hogy létezik-e egyáltalán önreguláris függvény. Erre könnyen válaszolhatunk, hiszen $\psi(1) = \psi'(1) = 0$ miatt

$$\psi(t) = \int_1^t \int_1^s \psi''(z) dz ds. \tag{4.1.4}$$

Ha most a $\nu_1 = \nu_2 = 1$ esetet tekintjük, akkor azt kapjuk, hogy $\psi''(t) = t^{p-1} + t^{-1-q}$, ami az SR1 tulajdonságnál megkövetelt peremfeltételekkel együtt egyértelműen meghatároz egy ψ függvényt. Ezt a függvényt a továbbiakban $\Upsilon_{p,q}(t)$-vel jelöljük.[2] Mivel a függvény konkrét alakjára és deriváltjára is szükségünk lesz, ezért most azt

[1] Bár tételeink bizonyításánál fel fogjuk használni mindkét tulajdonságot, fontos megemlíteni, hogy ezen fejezet eredményei abban az esetben is igazak maradnak, ha a ψ függvényről csak az SR1 tulajdonságot tesszük föl, vagyis tulajdonképpen csak annyit követelünk meg a ψ-ről, hogy nullához, illetve végtelenhez tartva megfelelően növekedjen.

[2] Valójában csak annyit láttunk, hogy $\Upsilon_{p,q}$ kielégíti az SR1 feltételt. A további bizonyításokhoz ez már elég, azonban – itt nem részletezett módon – bizonyítható, hogy $\Upsilon_{p,q}$ az SR2 feltételt is teljesíti, vagyis tényleg önreguláris.

is megadjuk:

$$\Upsilon_{p,1}(t) = \frac{t^{p+1}-1}{p(p+1)} - \log t + \frac{p-1}{p}(t-1) \tag{4.1.5}$$

$$\Upsilon_{p,q}(t) = \frac{t^{p+1}-1}{p(p+1)} + \frac{t^{1-q}-1}{q(q-1)} + \frac{p-q}{pq}(t-1), \quad q > 1 \tag{4.1.6}$$

$$\Upsilon'_{p,q}(t) = \frac{t^p}{p} - \frac{t^{-q}}{q} + \frac{p-q}{pq}, \quad \forall q \geq 1 \tag{4.1.7}$$

Vegyük észre, hogy $\Upsilon_{p,q}(t) \to \Upsilon_{p,1}(t)$ ha $q \to 1$.

Ha az eddig megismert távolságfüggvényeket vizsgáljuk, akkor azt találjuk, hogy az $\left\|\sqrt{\frac{x \cdot s}{\mu}} - e\right\|$ távolság nem önreguláris (nem bünteti közvetlenül a megengedett tartomány határához való közeledést, míg a $\|v - v^{-1}\|^2$ távolság önreguláris ($p = 1$, $q = 3$). Ez talán szolgálhat némi magyarázattal az utóbbi távolsággal elérhető jobb eredményekre.

Tekintsük most a következő Newton–rendszert:

$$\begin{aligned} M\triangle x &= \triangle s \\ s\triangle x + x\triangle s &= -\mu v \nabla\Psi(v). \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

A Newton–rendszerről (3.1.2)-ben mondottak értelmében ez a rendszer az

$$x \cdot s = -\mu v(\nabla\Psi(v) - v) \tag{4.1.9}$$

egyenlet megoldását közelíti, ahol a jobb oldal rögzített.

Mivel M $P_*(\kappa)$ mátrix, így a (4.1.8) rendszernek egyértelműen létezik megoldása.[3] A rendszer megoldásaként kapott $(\triangle x, \triangle s)$ irány mentén úgy szeretnénk ellépni az $(x(\alpha), s(\alpha)) = (x + \alpha\triangle x, s + \alpha\triangle s)$ pontba, hogy a kapott pont még belül legyen a megengedett tartományon. A továbbiakban látni fogjuk, hogy ezzel el tudjuk érni azt, hogy a centrális úttól mért távolság csökkenjen, vagyis $\Psi(x(\alpha), s(\alpha), \mu) < \Psi(x, s, \mu)$.[4] Amikor ez a távolság lecsökken τ alá, akkor μ értékét csökkentjük, vagyis előrébb lépünk a centrális úton, aztán visszatérünk a Newton-rendszerre.

[3]Tulajdonképpen azt kell belátni, hogy a $\begin{pmatrix} M & -I \\ X & S \end{pmatrix}$ mátrix nemszinguláris. Ez éppen a (2.4.1) lemma állítása.

[4]Említettük már, hogy a Ψ függvényt a $v = \sqrt{\frac{x \cdot s}{\mu}}$ változó függvényeként értelmezzük. A szemléletesség és a könnyebb érthetőség érdekében azonban használni fogjuk a $\Psi(x, s, \mu)$ jelölést is, ha hangsúlyozni kívánjuk, hogy melyik változónak mi az értéke.

Algoritmus 4.1 Newton-lépéses útkövető algoritmus

Input:

Pontosság: $\varepsilon > 0$

Távolság a centrális úttól: $\tau > \nu_1^{-1}$

Frissítési paraméter: $0 < \theta < 1$

(x^0, s^0) és $\mu^0 = 1$, amelyekkel $\Psi(x^0, s^0, \mu^0) \leq \tau$

Output: x és s, amelyekre $x^T s < \varepsilon$

```
x := x^0, s := s^0, μ := μ^0
while nμ ≥ ε do
  μ := (1 − θ)μ
  while Ψ(x, s, μ) ≥ τ do
    △x és △s kiszámítása (4.1.8) alapján
    Az α lépéshossz kiszámítása
    x := x + α△x, s := s + α△s
  end while
end while
```

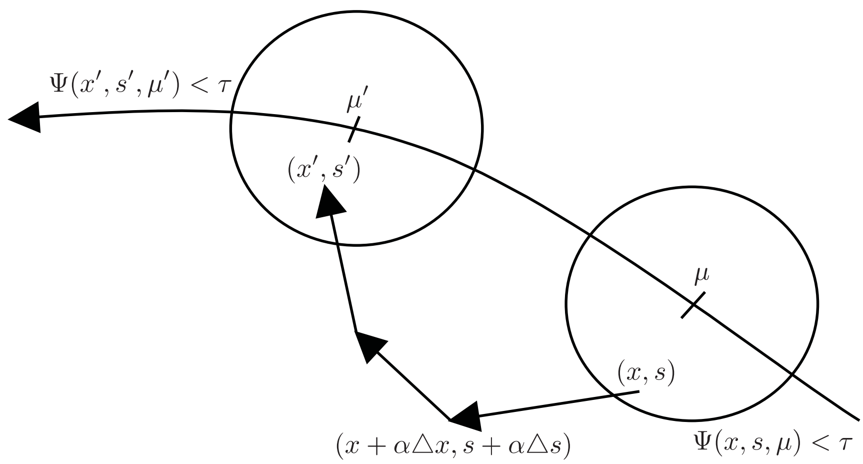
Nézzük a (4.1) ábrát és az algoritmus leírását. Ha az iteráció során olyan (x, s) pontot kaptunk, amelyre $\Psi(x, s, \mu) < \tau$, akkor csökkentjük a μ paramétert. Ha $\Psi(x, s, \mu) \geq \tau$, akkor megoldjuk a (4.1.8) rendszert és meghatározzuk a α lépéshosszt, úgy, hogy a kapott pont még megengedett megoldás legyen.[5] A Newton-rendszert annyiszor oldjuk meg, hogy végül a kapott pont már benne legyen a centrális út μ'-höz tartozó pontjának τ-környezetében. Az egész iterációval akkor állunk meg, ha olyan pontba jutottunk, ahol a dualitásrés kisebb, mint ε. A $\tau > \nu_1^{-1}$ feltételre a bizonyítás miatt van szükség, mivel azonban önreguláris függvény konstansszorosa is önreguláris, így ez nem jelent valódi megszorítást.

A komplexitás elemzése az alábbi lépésekből áll:[6]

- Ha olyan (x, s) pontban vagyunk, amelyre $\Psi(x, s, \mu) < \tau$ és a μ paramétert az algoritmusnak megfelelően $(1 - \theta)\mu$-re cseréljük, akkor mennyivel nőhet meg

[5] Ezen a ponton elmélet és gyakorlat élesen különválik. A gyakorlatban közvetlenül keresnek egy „elég jó” lépéshosszt, mi viszont a komplexitás elemzésénél megadunk egy konkrét értéket, amelynek pontos kiszámítása sokáig tart, de garantálható vele a megfelelő komplexitás.

[6] Az itt elmondottak általános érvényűek, nem csak erre a konkrét algoritmusra vonatkoznak.



4.1. ábra. **Útkövető eljárás működése**

a távolság, vagyis legfeljebb mennyivel térhet el $\Psi(x, s, \mu)$ és $\Psi(x, s, (1-\theta)\mu)$.

- Ha olyan (x, s) pontban vagyunk, amelyre $\Psi(x, s, \mu) > \tau$, akkor egy Newton-lépés során mennyivel csökken a távolság, vagyis – alkalmas α választása esetén – mennyivel lehet kisebb $\Psi(x(\alpha), s(\alpha), \mu)$, mint $\Psi(x, s, \mu)$.

A következő szakaszokban először az első kérdést vizsgáljuk, majd megadunk egy konkrét α lépéshosszt, és megbecsüljük mennyivel csökken a távolság egy akkora lépésnél. Ezen eredmények birtokában már meg tudjuk adni az eljárás lépésszámát.

4.2. Előrelépés a centrális úton

Legyenek ν_1, ν_2, p és q az önreguláris függvény (4.1.1) definíciójában szereplő konstansok, $\sigma := \|\nabla\Psi(v)\|$. Ebben a szakaszban azt fogjuk vizsgálni, hogy mennyivel és hogyan változik meg a távolság, ha a centrális úton μ értékét csökkentjük, vagyis $\Psi(x, s, \mu)$-t és $\Psi(x, s, (1-\theta)\mu)$-t hasonlítjuk össze. A v változóval megfogalmazva ez ezt jelenti, hogy $\Psi(v)$-t és $\Psi(\frac{v}{\sqrt{1-\theta}})$-t hasonlítjuk össze. Adódik tehát, hogy elég $\Psi(\vartheta v)$-vel foglalkozni. Először tekintsük az egyváltozós esetet:

4.2.1. Lemma. *Ha ψ önreguláris a ν_1, ν_2, p, q konstansokkal, akkor minden $\vartheta > 1$*

esetén igaz, hogy

$$\psi(\vartheta t) \leq \frac{\nu_2}{\nu_1}\left(\vartheta^{p+1}\psi(t) + \vartheta\Upsilon'_{p,q}(\vartheta)\sqrt{2\nu_1\psi(t)} + \nu_1\Upsilon_{p,q}(\vartheta)\right). \tag{4.2.1}$$

Bizonyítás: Először tekintsük azt az esetet, amikor $\vartheta t \leq 1$, ekkor $\vartheta > 1$ miatt $t < 1$, vagyis $t < \vartheta t \leq 1$. A ψ függvény szigorú konvexitása miatt $\psi(\vartheta t) < \psi(t)$, vagyis az egyenlőtlenség triviálisan teljesül.

A másik esetben legyen $\vartheta t > 1$ és tegyük fel először, hogy $t \leq 1$. Ekkor $1 < \vartheta t \leq \vartheta$, így $\psi(\vartheta t) \leq \psi(\vartheta) \leq \nu_2\Upsilon_{p,q}(\vartheta)$, vagyis készen vagyunk. Elég tehát azt az esetet vizsgálni, amikor $t > 1$.

Az önreguláris függvények definíciójából következik, hogy $\psi(\vartheta t) \leq \nu_2\Upsilon_{p,q}(\vartheta t)$, a továbbiakban ez utóbbi mennyiségre adunk felső becslést. Az $\Upsilon_{p,q}$ függvény konkrét alakját felhasználva kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{p,q}(\vartheta t) &= \frac{\vartheta^{p+1}t^{p+1}-1}{p(p+1)} + \frac{\vartheta^{1-q}t^{1-q}-1}{q(q-1)} + \frac{p-q}{pq}(\vartheta t - 1) = \\
&= \vartheta^{1-q}\left(\frac{t^{p+1}-1}{p(p+1)} + \frac{t^{1-q}-1}{q(q-1)} + \frac{p-q}{pq}(t-1)\right) + \frac{(\vartheta^{p+1}-\vartheta^{1-q})}{p(p+1)}(t^{p+1}-1) + \\
&\quad + \frac{(p-q)(\vartheta-\vartheta^{1-q})}{pq}(t-1) + \frac{\vartheta^{p+1}-1}{p(p+1)} + \frac{\vartheta^{1-q}-1}{q(q-1)} + \frac{p-q}{pq}(\vartheta-1) = \\
&= \vartheta^{1-q}\Upsilon_{p,q}(t) + (\vartheta^{p+1}-\vartheta^{1-q})\frac{t^{p+1}-1}{p(p+1)} + \frac{(p-q)(\vartheta-\vartheta^{1-q})}{pq}(t-1) + \Upsilon_{p,q}(\vartheta)
\end{aligned}$$

Használjuk fel, hogy

$$\psi''(t) \geq \nu_1(t^{p-1} + t^{-q-1}) \geq \nu_1 \max\left\{t^{p-1}, t^{-q-1}\right\} = \nu_1 \max\left\{1, t^{p-1}, t^{-q-1}\right\} \tag{4.2.2}$$

miatt

$$\frac{1}{2}(t-1)^2 \leq \frac{\psi(t)}{\nu_1} \tag{4.2.3}$$

és

$$\frac{t^{p+1}-1}{p(p+1)} - \frac{t-1}{p} \leq \frac{\psi(t)}{\nu_1}. \tag{4.2.4}$$

Ezek segítségével tovább írhatjuk a becslést:

$$\begin{aligned}\Upsilon_{p,q}(\vartheta t) \leq \vartheta^{1-q}\Upsilon_{p,q}(t) + (\vartheta^{p+1} - \vartheta^{1-q})\left(\Upsilon_{p,q}(t) + \frac{t-1}{p}\right) + \\ + \frac{(p-q)\,(\vartheta - \vartheta^{1-q})}{pq}(t-1) + \Upsilon_{p,q}(\vartheta) = \\ = \vartheta^{p+1}\Upsilon_{p,q}(t) + \frac{\vartheta^{p+1} - \vartheta^{1-q}}{p}(t-1) + \frac{(p-q)(\vartheta - \vartheta^{1-q})}{pq}(t-1) + \Upsilon_{p,q}(\vartheta) = \\ = \vartheta^{p+1}\Upsilon_{p,q}(t) + \vartheta\left(\frac{\vartheta^{p}-1}{p} + \frac{1-\vartheta^{-q}}{q}\right)(t-1) + \Upsilon_{p,q}(\vartheta) = \\ = \vartheta^{p+1}\Upsilon_{p,q}(t) + \vartheta\Upsilon'_{p,q}(\vartheta)(t-1) + \Upsilon_{p,q}(\vartheta)\end{aligned}$$

Az SR1 feltételt kétszer integrálva kapjuk, hogy bármely $\psi(t)$ önreguláris függvényre:

$$\psi(t) = \int_1^t\int_1^s \psi''(z)dzds \geq \int_1^t\int_1^s \nu_1(z^{p-1}+z^{-1-q})dzds = \nu_1\int_1^t\int_1^s \Upsilon''_{p,q}(z) = \nu_1\Upsilon_{p,q}(t), \tag{4.2.5}$$

ahol p, q és ν_1 az SR1 feltételben szereplő állandók, illetve használjuk a (4.2.3) becslést. Így:

$$\Upsilon_{p,q}(\vartheta t) \leq \vartheta^{p+1}\frac{\psi(t)}{\nu_1} + \vartheta\Upsilon'_{p,q}(\vartheta)\sqrt{\frac{2\psi(t)}{\nu_1}} + \Upsilon_{p,q}(\vartheta) \tag{4.2.6}$$

Ebből $\psi(\vartheta t) \leq \nu_2\Upsilon_{p,q}(\vartheta t)$ figyelembe vételével kapjuk a lemma állítását. ∎

4.2.2. Következmény. *Az előző lemma feltételei mellett léteznek ν_3, $\nu_4 > 0$ csak p, q-tól függő konstansok, hogy minden $\vartheta \in [1, 1+\nu_3]$ esetén*

$$\psi(\vartheta t) \leq \frac{\nu_2\nu_4}{\nu_1}\left(\psi(t) + (\vartheta-1)\sqrt{2\nu_1\psi(t)} + \nu_1(\vartheta-1)^2\right). \tag{4.2.7}$$

Bizonyítás: A l'Hospital-szabály segítségével könnyen ki tudjuk számítani az alábbi határértékeket:

$$\lim_{\vartheta\to1}\frac{\Upsilon_{p,q}(\vartheta)}{(\vartheta-1)^2} = \lim_{\vartheta\to1}\frac{\Upsilon'_{p,q}(\vartheta)}{2(\vartheta-1)} = \lim_{\vartheta\to1}\frac{\Upsilon''_{p,q}(\vartheta)}{2} = \lim_{\vartheta\to1}\frac{\vartheta^{p-1}+\vartheta^{-1-q}}{2} = 1 \tag{4.2.8}$$

és

$$\lim_{\vartheta\to1}\frac{\vartheta\Upsilon'_{p,q}(\vartheta)}{\vartheta-1} = \lim_{\vartheta\to1}\frac{\vartheta\Upsilon''_{p,q}(\vartheta)}{1} = \lim_{\vartheta\to1}\frac{\vartheta(\vartheta^{p-1}+\vartheta^{-1-q})}{1} = 2, \tag{4.2.9}$$

ahol felhasználtuk az $\Upsilon_{p,q}(\vartheta)$ függvény deriváltjára vonatkozó (4.1.5) összefüggéseket. Emiatt léteznek ν_3 és ν_4 pozitív konstansok, hogy minden $\vartheta \in [1, 1+\nu_3]$ esetén

$$\vartheta^{p+1} \leq \nu_4, \quad \vartheta\Upsilon'_{p,q}(\vartheta) \leq \nu_4(\vartheta-1), \quad \Upsilon_{p,q}(\vartheta) \leq \nu_4(\vartheta-1)^2. \tag{4.2.10}$$

Ezeket a becsléseket a lemmába helyettesítve kapjuk az állítást. ∎

A kapott becslések természetes módon átvihetők a többváltozós esetre is az alábbi formában:

4.2.3. Lemma. *Legyen* $\Psi(v) = \sum_{i=1}^n \psi(v_i)$*, Ekkor*

$$\Psi(v) \leq \tfrac{\sigma^2}{2\nu_1} \tag{4.2.11}$$

$$v_{min} \geq \left(1+\tfrac{q\sigma}{\nu_1}\right)^{-\frac{1}{q}} \tag{4.2.12}$$

$$v_{max} \geq \left(1+\tfrac{p\sigma}{\nu_1}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.2.13}$$

Továbbá, ha $v_{max} > 1$ *és* $v_{min} < 1$*, akkor*

$$\sigma \geq \nu_1 \left(\frac{(v_{max}^p - 1)^2}{p^2} + \frac{(v_{min}^{-q} - 1)^2}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2.14}$$

Minden $\vartheta > 1$ *esetén*

$$\Psi(\vartheta v) \leq \frac{\nu_2}{\nu_1}\left(\vartheta^{p+1}\Psi(v) + \vartheta\Upsilon'_{p,q}(\vartheta)\sqrt{2n\nu_1\Psi(v)} + n\nu_1\Upsilon_{p,q}(\vartheta)\right) \tag{4.2.15}$$

és minden $\vartheta \in (1, 1+\nu_3]$ *mellett*

$$\Psi(\vartheta v) \leq \frac{\nu_2\nu_4}{\nu_1}\left(\Psi(v) + (\vartheta-1)\sqrt{2n\nu_1\Psi(v)} + n\nu_1(\vartheta-1)^2\right), \tag{4.2.16}$$

ahol a ν_3*,* ν_4 *konstansok megegyeznek az egyváltozós lemmában szereplő konstansokkal.*

Bizonyítás: Az első egyenlőtlenséghez használjuk fel, hogy

$$\psi''(t) > \nu_1(t^{p-1} + t^{-1-q}) \geq 1, \tag{4.2.17}$$

így

$$\psi(t) = \int_1^t \int_1^s \psi''(z)dzds \leq \frac{1}{\nu_1} \int_1^t \int_1^s \psi''(s)\psi''(z)dzds =$$
$$= \frac{1}{\nu_1} \int_1^t \psi''(s)(\psi'(s) - \psi'(1))ds = \frac{1}{2\nu_1}\psi'(t)^2. \quad (4.2.18)$$

Ebből összegzéssel kapjuk a kívánt becslést. A második becsléshez $t < 1$ esetén:

$$\psi'(t) = \int_1^t \psi''(s)ds \leq \nu_1 \int_1^t (s^{p-1}+s^{-1-q})ds \leq \nu_1 \int_1^t s^{-1-q}ds = \frac{\nu_1}{q}(1-t^{-q}). \quad (4.2.19)$$

Tekintsük a v vektor koordinátáit. Ha $v_i < 1$ akkor $|\psi'(v_i)| \geq \frac{\nu_1}{q}(v_i^{-q} - 1)$, ha pedig $v_i \geq 1$, akkor ugyanez az egyenlőtlenség azért teljesül, mert a jobb oldala negatív. Vegyük észre, hogy $\sigma = \|\nabla\Psi(v)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \psi'(v_i)^2} \geq |\psi'(v_i)^2|$, így:

$$\sigma \geq \left|\psi'(v_i)^2\right| \geq \frac{\nu_1}{q}(v_i^{-q} - 1)\;\forall\, i, \quad (4.2.20)$$

ahonnan egyszerű átrendezéssel kapjuk a második becslést. A harmadik egyenlőtlenség hasonlóan bizonyítható.

A negyedik egyenlőtlenség a második és a harmadik összevonása, az utolsó kettő pedig a (4.2.1) lemma többváltozós alakja. Ezzel mindegyik egyenlőtlenséget beláttuk. ■

Ezen becslések segítségével tudjuk megbecsülni, hogy mennyivel nő a távolság, miközben a μ paraméter helyett $(1-\theta)\mu$-t veszünk, vagyis hogyan viszonyul egymáshoz $\Psi(v)$ és $\Psi(\frac{v}{\sqrt{1-\theta}})$. A (4.2.15) eredménybe $\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}$-t helyettesítve kapjuk, hogy

$$\Psi\left(\frac{v}{\sqrt{(1-\theta)}}\right) \leq \frac{\nu_2\tau}{\nu_1(1-\theta)^{\frac{p+1}{2}}} + \nu_2\Upsilon'_{p,q}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2n\tau}{\nu_1(1-\theta)}} + n\nu_2\Upsilon_{p,q}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.2.21)$$

4.3. Közeledés a centrális úthoz

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy egy Newton-lépés során mennyit tudunk közeledni a centrális úthoz, vagyis rögzített μ mellett x és s változtatásával csökkentjük

$\Psi(v)$-t. Ehhez egy Newton-típusú rendszert oldunk meg, nevezetesen:

$$\begin{aligned} M\triangle x &= \triangle s \\ s\triangle x + x\triangle s &= -\mu v \nabla\Psi(v). \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Legyen $x(\alpha) = x + \alpha\triangle x$, $s(\alpha) = s + \alpha\triangle s$ és $v(\alpha) = \sqrt{\frac{x(\alpha)\cdot s(\alpha)}{\mu}}$. Vezessük be a szokásos skálázási paramétereket:

$$d_x := \frac{v}{x}\triangle x, \quad d_s := \frac{v}{s}\triangle s. \tag{4.3.2}$$

Ezekkel a jelölésekkel rendszerünk a következő alakban írható:

$$\Lambda_M d_x = d_s, \quad d_x + d_s = -\nabla\Psi(v), \tag{4.3.3}$$

ahol $\Lambda_M = \mu V S^{-1} M V S^{-1}$. Az alábbi becslések könnyen következnek a $P_*(\kappa)$ mátrixok alaptulajdonságaiból és a (2.4.3) lemmából:

4.3.1. Lemma. *Legyen $\triangle x$ és $\triangle s$ a (4.3.1) rendszer megoldása, d_x, d_s pedig az átskálázott (4.3.3) rendszeré. Ekkor igazak az alábbiak:*

(a) $-\kappa\sigma^2 \leq \frac{\triangle x^T \triangle s}{\mu} = d_x^T d_s \leq \frac{1}{4}\sigma^2$

(b) $\|d_x \cdot d_s\|_\infty = \frac{1}{\mu}\|\triangle x \cdot \triangle s\|_\infty \leq \frac{1}{4}(1+\kappa)\sigma^2$

(c) $\|d_x\|^2 + \|d_s\|^2 = \|d_x + d_s\|^2 - 2d_x^T d_s \leq (1+2\kappa)\sigma^2$

(d) $\|x^{-1}\triangle x\| = \|v^{-1}d_x\| \leq \frac{1}{v_{min}}\|d_x\| \leq \frac{\sqrt{1+2\kappa}}{v_{min}}\sigma$

(e) $\|s^{-1}\triangle s\| = \|v^{-1}d_s\| \leq \frac{1}{v_{min}}\|d_s\| \leq \frac{\sqrt{1+2\kappa}}{v_{min}}\sigma$

Bizonyítás: A (d) és az (e) pont triviálisan következik (c)-ből. A (c)-hez vegyük észre, hogy $\|d_x + d_s\| = \|-\nabla\Psi(v)\| = \sigma$, így:

$$\|d_x\|^2 + \|d_s\|^2 = \|d_x + d_s\|^2 - 2d_x^T d_s \leq \sigma^2 + 2\kappa\sigma^2 = (1+2\kappa)\sigma^2 \tag{4.3.4}$$

ahol az alkalmazott egyenlőtlenség az (a) pont bal oldala. A (b) állítás egyszerű következménye (a)-nak a normák közötti egyenlőtlenségek felhasználásával. Az (a) pont első egyenlőtlensége ekvivalens azzal, hogy M $P_*(\kappa)$ mátrix – ez a (2.4.3) lemma állítása –, a másodikhoz pedig használjuk fel, hogy bármilyen $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$, így:

$$d_x^T d_s = \sum_{i=1}^{n} [d_x]_i [d_s]_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{([d_x]_i + [d_s]_i)^2}{4} = \frac{\sigma^2}{4} \tag{4.3.5}$$

Ezzel a lemma minden állítását beláttuk. ∎

Legyen

$$\bar{\alpha} = \min\left\{1, \frac{v_{min}}{\sigma\sqrt{1+2\kappa}}\right\}, \tag{4.3.6}$$

ekkor az előző lemma (d) és (e) pontja miatt minden $\alpha \in [0, \bar{\alpha})$ esetén $x + \alpha\triangle x > 0$, vagyis a maximális megengedett lépéshosszra igaz, hogy $\alpha_{\max} \geq \bar{\alpha}$. Ez azonban még nem elég a bizonyításhoz, erősebb eredményre van szükségünk.

Azt akarjuk megvizsgálni, hogy mennyivel csökken a távolság egy lépés után, vagyis a $g(\alpha) = \Psi(v(\alpha)) - \Psi(v)$ függvényt vizsgáljuk. A következő tétel igaz:

4.3.2. Tétel. *Ha $\Psi(v) \geq \nu_1^{-1}$, akkor*

$$g(\alpha^*) \leq -\frac{C}{4}\sigma^{\frac{q-1}{q}} \leq -\frac{C}{4}(2\nu_1)^{\frac{q-1}{2q}}\Psi(v)^{\frac{q-1}{2q}}, \tag{4.3.7}$$

ahol az α^* lépéshossz az

$$0 = -1 + \nu_2\nu_4\alpha\left((v_{max} + \alpha\nu_3\sigma)^p + (v_{min} - \alpha\nu_3\sigma)^{-q}\right). \tag{4.3.8}$$

egyenlet megoldásaként áll elő, a C konstans pedig

$$\frac{\nu_1}{2\nu_2(1+2\kappa)(\nu_1+p)+\nu_1\sqrt{1+2\kappa}(p-1)} \quad \textit{és} \quad \frac{\nu_1^2}{(1+\nu_1)(2\nu_2(1+2\kappa)(\nu_1+q)+\nu_1\sqrt{1+2\kappa}(q+1))} \tag{4.3.9}$$

közül a kisebbik.

Bizonyítás: (Peng, [32]) Az SR2 feltétel felhasználásával[7] a $g(\alpha)$ függvényre az alábbi becslés írható:

$$\begin{aligned} g(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\psi(v_i(\alpha) - \psi(v_i)\Big) &= -\Psi(v) + \sum_{i=1}^{n} \psi(v_i(\alpha) \leq \\ &\leq -\Psi(v) + \sum_{i=1}^{n} (v_i + \alpha[d_x]_i)^{\frac{1}{2}} (v_i + \alpha[d_s]_i)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq -\Psi(v) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \Big(\psi(v_i + \alpha[d_x]_i) + \psi(v_i + \alpha[d_s]_i)\Big). \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Definiáljuk a

$$\varphi_i(\alpha) := \quad \psi(v_i + \alpha[d_s]_i) \tag{4.3.11}$$

$$r_i(\alpha) := \quad \psi(v_i + \alpha[d_x]_i) \tag{4.3.12}$$

folytonosan differenciálható függvényeket. Ekkor:

$$\varphi_i(\alpha) = \varphi_i(0) + \alpha\varphi_i'(0) + \int_0^{\alpha} \Big(\varphi_i'(s) - \varphi_i'(0)\Big) \mathrm{ds} \tag{4.3.13}$$

Elemi számolással a következő egyenlőségeket kapjuk az egyenletben szereplő mennyiségekre:

$$\varphi_i(0) = \qquad \psi(v_i) \tag{4.3.14}$$

$$\varphi_i'(\alpha) = \quad \psi'(v_i + \alpha[d_s]_i)[d_s]_i \tag{4.3.15}$$

$$\varphi_i'(0) = \qquad \psi'(v_i)[d_s]_i. \tag{4.3.16}$$

Ezeket beírva a fenti egyenletbe kapjuk, hogy

$$\psi(v_i + \alpha[d_s]_i) = \psi(v_i) + \alpha\psi'(v_i)[d_s]_i + \int_0^{\alpha} \Big(\varphi_i'(s) - \varphi_i'(0)\Big) \mathrm{ds}. \tag{4.3.17}$$

Hasonlóan:

$$\psi(v_i + \alpha[d_x]_i) = \psi(v_i) + \alpha\psi'(v_i)[d_x]_i + \int_0^{\alpha} \Big(r_i'(s) - r_i'(0)\Big) \mathrm{ds}. \tag{4.3.18}$$

[7] Az egész bizonyítás során ez az egyetlen hely, ahol az SR2 feltételt használjuk. Valójában itt sem lenne rá szükség, mivel bonyolultabb számolás árán az SR1 feltételből is hasonló becslést tudnánk levezetni. A részletek [32]-ben találhatók meg.

Az utóbbi két egyenlőséget az i indexekre összegezve kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\psi(v_i+\alpha[d_x]_i)+\psi(v_i+\alpha[d_s]_i)\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\psi(v_i)+\alpha\sum_{i=1}^{n}\psi'(v_i)[d_x+d_s]_i+\int\limits_0^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n}\Big(r_i'(s)-r_i'(0)+\varphi_i'(s)-\varphi_i'(0)\Big)\right)\mathrm{ds}=$$

$$=\Psi(v)-\alpha\left\|\nabla\Psi(v)\right\|^2+\int\limits_0^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n}\Big(r_i'(s)-r_i'(0)+\varphi_i'(s)-\varphi_i'(0)\Big)\right)\mathrm{ds}=$$

$$=\Psi(v)+g_1(\alpha), \quad (4.3.19)$$

ahol

$$g_1(\alpha)=-\alpha\sigma^2+\int\limits_0^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n}\Big(r_i'(s)-r_i'(0)\Big)+\Big(\varphi_i'(s)-\varphi_i'(0)\Big)\right)\mathrm{ds} \qquad (4.3.20)$$

A következőkben becslést adunk az $r_i'(\alpha)$ és a $\varphi_i'(\alpha)$ deriváltakra, ehhez szükségünk lesz az alábbi lemmára:

4.3.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy* $\Psi(v)$ *önreguláris,* $\bar{\alpha}$ *pedig legyen a* $\min\left\{1,\frac{\sigma\sqrt{1+2\kappa}}{v_{\min}}\right\}$ *képlettel definiálva. Ekkor:*

$$\left\|(x^{-1}\triangle x,s^{-1}\triangle s)\right\|=\left\|(v^{-1}d_x,v^{-1}d_s)\right\|\le\frac{1}{\bar{\alpha}}\le\sqrt{1+2\kappa}\left(1+\frac{q\sigma}{\nu_1}\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (4.3.21)$$

Bizonyítás: A (4.3.1) lemma (b) pontját és a (4.2.3) lemmát felhasználva kapjuk, hogy

$$\left\|(x^{-1}\triangle x,s^{-1}\triangle s)\right\|=\left\|(v^{-1}d_x,v^{-1}d_s)\right\|\le$$

$$\le\frac{1}{v_{\min}}\sqrt{\left\|d_x\right\|^2+\left\|d_s\right\|^2}\le\frac{\sigma\sqrt{1+2\kappa}}{v_{\min}}\le\sqrt{1+2\kappa}\left(1+\frac{q\sigma}{\nu_1}\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (4.3.22)$$

Ezzel a lemmát beláttuk. □

Most már megfogalmazhatjuk a becslést:

4.3.4. Lemma. *Legyen* $\Psi(v)$ *önreguláris,* $\alpha\in(0,\bar{\alpha})$*. Ekkor:*

$$\max_i\left\{\psi''(v_i+\alpha[d_x]_i),\psi''(v_i+\alpha[d_s]_i)\right\}\le\nu_2\omega(\alpha), \qquad (4.3.23)$$

ahol

$$\omega(\alpha) = \left(v_{\max} + \alpha\sigma\sqrt{1+2\kappa}\right)^{p-1} + \left(v_{\min} - \alpha\sigma\sqrt{1+2\kappa}\right)^{-q-1},$$

és

$$\sum_{i=1}^{n}\left(r_i'(\alpha) - r_i'(0)\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_i'(\alpha) - \varphi_i'(0)\right) \leq \alpha\nu_2(1+2\kappa)\sigma^2\omega(\alpha). \tag{4.3.24}$$

Bizonyítás: Az előbb bizonyított lemma miatt a $(0, \bar{\alpha})$ intervallumban lévő α számokra

$$(v + \alpha[d_x], v + \alpha[d_s]) > 0, \tag{4.3.25}$$

így írhatjuk, hogy

$$\psi''(v_i + \alpha[d_x]_i) \leq \ \nu_2\left((v_i + \alpha[d_x]_i)^{p-1} + (v_i + \alpha[d_x]_i)^{-q-1}\right) \tag{4.3.26}$$

$$\psi''(v_i + \alpha[d_s]_i) \leq \ \nu_2\left((v_i + \alpha[d_s]_i)^{p-1} + (v_i + \alpha[d_s]_i)^{-q-1}\right). \tag{4.3.27}$$

Felhasználva, hogy a (4.3.1) lemma (c) pontja miatt

$$\alpha\left\|d_x\right\| \leq \alpha\sigma\sqrt{1+2\kappa} \tag{4.3.28}$$

$$\alpha\left\|d_s\right\| \leq \alpha\sigma\sqrt{1+2\kappa} \tag{4.3.29}$$

kapjuk a lemma első állítását.

A második állítás bizonyításához használjuk fel a φ függvény deriváltjára vonatkozó (4.3.14) képleteket és a differenciálszámítás középértéktételét:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_i'(\alpha) - \varphi_i'(0)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\psi'\left(v_i + \alpha[d_s]_i\right)[d_s]_i - \psi'(v_i)[d_s]_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\psi'\left(v_i + \alpha[d_s]_i\right) - \psi'(v_i)}{\alpha[d_s]_i}\alpha[d_s]_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\psi''\left(v_i + \chi_i[d_s]_i\right)\alpha[d_s]_i^2, \tag{4.3.30}$$

ahol $0 \leq \chi \leq \alpha e$, vagyis $\chi_i \in (0, \bar{\alpha})$, így alkalmazható a már bizonyított első egyenlőtlenség:[8]

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_i'(\alpha) - \varphi_i'(0)\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\psi''\left(v_i + \chi_i[d_s]_i\right)\alpha[d_s]_i^2 \leq$$

$$\leq \alpha\nu_2\omega(\alpha)\sum_{i=1}^{n}[d_s]_i^2 = \alpha\nu_2\omega(\alpha)\left\|d_s\right\|^2 \tag{4.3.31}$$

[8]Megjegyezzük, hogy ennél erősebb becslés is adható, ez azonban nem befolyásolja a komplexitási eredmény nagyságrendjét.

A másik tagra ehhez hasonló módszerrel kaphatjuk meg a

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(r_i'(\alpha) - r_i'(0)\Big) \leq \alpha\nu_2\omega(\alpha)\,\|d_x\|^2 \tag{4.3.32}$$

becslést. Ismét használva a (4.3.1) lemma (c) pontját kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(r_i'(\alpha) - r_i'(0)\Big) + \sum_{i=1}^{n} \Big(\varphi_i'(\alpha) - \varphi_i'(0)\Big) \leq \alpha\nu_2\omega(\alpha)\left(\|d_x\|^2 + \|d_s\|^2\right) \leq$$
$$\leq \alpha\nu_2\omega(\alpha)(1+2\kappa)\sigma^2. \tag{4.3.33}$$

Ezzel a lemma második állítását is beláttuk. □

Végeredményben azt kaptuk, hogy

$$g_1(\alpha) = -\alpha\sigma^2 + \int_0^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} \Big(r_i'(s) - r_i'(0)\Big) + \sum_{i=1}^{n} \Big(\varphi_i'(s) - \varphi_i'(0)\Big)\right) \mathrm{ds} \leq$$
$$\leq -\alpha\sigma^2 + (1+2\kappa)\nu_2\sigma^2 \int_0^{\alpha} s\omega(s)\mathrm{ds} =: g_2(\alpha). \tag{4.3.34}$$

A $g_2(\alpha)$ függvény kétszer folytonosan differenciálható a $[0, \bar{\alpha})$ intervallumon. A deriváltak:

$$g_2'(\alpha) = -\sigma^2 + (1+2\kappa)\nu_2\sigma^2\alpha\omega(\alpha) \tag{4.3.35}$$

$$g_2''(\alpha) = (1+2\kappa)\nu_2\sigma^2\big(\omega(\alpha) + \alpha\omega'(\alpha)\big) > 0 \tag{4.3.36}$$

Az első derivált vizsgálatával meggyőződhetünk róla, hogy $g'(0) < 0$ és $g'(\alpha)$ pozitív az $\bar{\alpha}$ kis környezetében. A második derivált pozitivitása miatt $g_2(\alpha)$ szigorúan konvex a $[0, \bar{\alpha})$ intervallumon, így a minimumát vagy az intervallum szélén lévő $\bar{\alpha}$ pontban, vagy valamilyen közbülső α^* helyen veszi föl. Egy ilyen α^* pontban az első derivált szükségképpen 0, így α^* az

$$0 = -1 + (1+2\kappa)\nu_2\alpha\left[\Big(v_{\max} + \alpha\sigma\sqrt{1+2\kappa}\Big)^{p-1} + \Big(v_{\min} - \alpha\sigma\sqrt{1+2\kappa}\Big)^{-q-1}\right] \tag{4.3.37}$$

egyenlet egyértelmű megoldása. Két esetet különböztetünk meg: ha $\alpha^* \geq \bar{\alpha}$, akkor a (4.3.3) lemma alsó becslést szolgáltat α^*-ra. A nehezebb eset az, ha $\alpha^* < \bar{\alpha}$, ezzel foglalkozunk a továbbiakban. Az egyenlet gyökének becsléséhez szükségünk lesz a következő lemmára:

4.3.5. Lemma. *Legyenek $p > 1$ és $\gamma > 0$ rögzített konstansok.*
Ha t_* a $t(1+t)^{p-1} = \gamma$ egyenlet egyértelmű megoldása, akkor

$$t_* \geq \frac{\rho}{1+\gamma(p-1)} \tag{4.3.38}$$

Másrészt, ha $t_* \in (0,1)$ a $t(1-t)^{-1-p} = \gamma$ egyenlet egyértelmű gyöke, akkor

$$t_* \geq \frac{\gamma}{1+\gamma(p+1)} \tag{4.3.39}$$

Bizonyítás: A paraméterekre tett megkötések miatt $t_* > 0$ teljesül, így

$$(1+t_*)^p = \gamma\left(1+\frac{1}{t_*}\right) > 1. \tag{4.3.40}$$

átrendezve az egyenletet:

$$\begin{aligned} t_* = \left(\gamma + \frac{\gamma}{t_*}\right)^{\frac{1}{p}} - 1 = \left(1 - \frac{\gamma+\gamma t_* - t_*}{\gamma+\gamma t_*}\right)^{-\frac{1}{p}} - 1 \geq \left(1 - \frac{\gamma+\gamma t_* - t_*}{p\gamma+p\gamma t_*}\right)^{-1} - 1 = \\ = \frac{\gamma+\gamma t_* - t_*}{(p-1)(\gamma+\gamma t_*)+t_*} > 0, \end{aligned} \tag{4.3.41}$$

ahol felhasználtuk a $\gamma + \gamma t_* - t_*$ pozitivitását, illetve az

$$(1-t)^\alpha \leq 1 - \alpha t \ \ \forall\, \alpha, t \in [0,1] \tag{4.3.42}$$

egyenlőtlenséget. Tekintsük most a

$$h(t) = (1+\gamma(p-1))t^2 + (1+\gamma(p-1)-\gamma)t - \gamma = 0 \tag{4.3.43}$$

egyenletet. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy az egyenlet két gyöke:

$$t_1 = -1; \quad t_2 = \frac{\gamma}{1+\gamma(p-1)} > 0. \tag{4.3.44}$$

Ellenőrizhető, hogy

$$h(t_*) > 0, \tag{4.3.45}$$

így t_* pozitivitása miatt

$$t_* \geq t_2 = \frac{\gamma}{1+\gamma(p-1)}, \tag{4.3.46}$$

vagyis megkaptuk az első állítást. A másodikhoz vezessük be a $\bar{t} = \frac{t_*}{1-t_*}$ új változót, amellyel

$$\bar{t}(1+\bar{t})^p = \frac{t_*}{1-t_*}\left(1+\frac{t_*}{1-t_*}\right)^p = \frac{t_*}{1-t_*}\left(\frac{1}{1-t_*}\right)^p = t_*(1-t_*)^{-p-1} = \gamma. \tag{4.3.47}$$

Alkalmazzuk az első állítást a kapott egyenletre:

$$\bar{t} \geq \frac{\gamma}{1+\gamma p}, \tag{4.3.48}$$

vagyis

$$t_* = \frac{\bar{t}}{1+\bar{t}} \geq \frac{\frac{\gamma}{1+\gamma p}}{1+\frac{\gamma}{1+\gamma p}} = \frac{\gamma}{1+\gamma(p+1)}. \tag{4.3.49}$$

Ezzel a lemma mindkét állítását beláttuk. □

Most már meg tudjuk becsülni α^*-ot az $\alpha^* < \bar{\alpha}$ esetben is. A továbbiakban tegyük fel, hogy $\Psi(v) \geq \nu_1^{-1}$, és, hogy $v_{\max} > 1$. Tekintsük az

$$\omega_1(\alpha) = -\frac{1}{2} + (1+2\kappa)\nu_2\alpha\left(v_{\max} + \alpha\sigma\sqrt{1+2\kappa}\right)^{p-1} = 0 \tag{4.3.50}$$

és az

$$\omega_2(\alpha) = -\frac{1}{2} + (1+2\kappa)\nu_2\alpha\left(v_{\min} - \alpha\sigma\sqrt{1+2\kappa}\right)^{-q-1} = 0 \tag{4.3.51}$$

egyenleteket. A bal oldalon álló $\omega_1(\alpha)$ és $\omega_2(\alpha)$ függvények növekvőek, így az egyenleteknek egyértelmű megoldásuk van, jelölje ezeket rendre α_1^* és α_2^*. Vezessük be a

$$t_1 = \frac{\alpha\sqrt{1+2\kappa}}{v_{\max}}, \quad \gamma_1 = \frac{\sqrt{1+2\kappa}}{2(1+2\kappa)\nu_2 v_{\max}^p} \tag{4.3.52}$$

jelöléseket. Ezekkel az első egyenlet

$$t_1(1+t_1)^{p-1} = \gamma_1 \tag{4.3.53}$$

alakban írható. Alkalmazva az előző lemma első becslését kapjuk, hogy

$$t_1 \geq \frac{\gamma_1}{1+\gamma_1(p-1)}. \tag{4.3.54}$$

Átalakítás után írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}\alpha_1^* \geq \frac{\gamma_1 v_{\max}}{\sigma(1+\gamma_1(p-1))\sqrt{1+2\kappa}} &= \frac{v_{\max}}{2(1+2\kappa)\nu_2 v_{\max}^p + (p-1)\sigma\sqrt{1+2\kappa}} \geq \\ &\geq \frac{1}{2(1+2\kappa)\nu_2 v_{\max}^p + (p-1)\sigma\sqrt{1+2\kappa}} \geq \\ &\geq \frac{\nu_1}{2(1+2\kappa)\nu_2(\nu_1+p\sigma) + \nu_1\sqrt{1+2\kappa}(p-1)\sigma} \geq \\ &\geq \frac{\nu_1}{2(1+2\kappa)\nu_2(\nu_1+p) + \nu_1\sqrt{1+2\kappa}(p-1)}\sigma^{-1} \end{aligned} \tag{4.3.55}$$

ahol az egyenlőtlenségek rendre $v_{\max} \geq 1$, a (4.3.1) lemma (c) pontja és $\Psi(v) \geq \nu_1^{-1}$ miatt $\sigma \geq 1$ következményei.

A másik egyenlet esetén hasonló eljárással kapjuk, hogy

$$\alpha_2^* \geq \frac{\nu_1^2}{(1+\nu_1)\left(2(1+2\kappa)\nu_2(\nu_1+q) + \nu_1\sqrt{1+2\kappa}(q+1)\right)}\sigma^{-\frac{q+1}{q}}. \tag{4.3.56}$$

Definíció szerint az $\omega(\alpha^*) = 0$ egyenlet ekvivalens az $\omega_1(\alpha^*) + \omega_2(\alpha^*) = 0$ egyenlettel, így $\alpha^* \geq \min\{\alpha_1^*, \alpha_2^*\}$.

Összesítve az eddigi eredményeket azt kapjuk, hogy a $\Psi(v) \geq \nu_1^{-1}$, és $v_{\max} > 1$ feltételek mellett a (4.3.37) egyenlet egyértelmű α_* megoldására:

$$\alpha_* \geq C\sigma^{-\frac{q+1}{q}}, \tag{4.3.57}$$

ahol

$$C = \min\left\{\frac{\nu_1}{2\nu_2(1+2\kappa)(\nu_1+p)+\nu_1\sqrt{1+2\kappa}(p-1)}, \frac{\nu_1^2}{(1+\nu_1)(2\nu_2(1+2\kappa)(\nu_1+q)+\nu_1\sqrt{1+2\kappa}(q+1))}\right\}. \tag{4.3.58}$$

Ezen becslés birtokában már könnyen befejezhetjük a tétel bizonyítását. Szükségünk lesz a következő apró lemmára:

4.3.6. Lemma. *Tegyük fel, hogy $h(t)$ kétszer differenciálható konvex függvény, amelyre*

$$h(0) = 0, \quad h'(0) < 0. \tag{4.3.59}$$

Tegyük fel továbbá, hogy $h(t)$-nek globális minimuma van a $t_* > 0$ pontban és hogy $h''(t)$ monoton növekvő függvény. Ekkor $\forall\, t \in [0, t_*]$ esetén

$$h(t) \leq \frac{h'(0)t}{2}. \tag{4.3.60}$$

Bizonyítás: Mivel $h(0) = 0$, így

$$h(t) = \int_0^t h'(s)\mathrm{ds} = h'(0)t + \int_0^t \int_0^s h''(z)\mathrm{dzds} \leq h'(0)t + \int_0^t sh''(s)\mathrm{ds} =$$

$$= h'(0)t + [sh'(s)]_0^t - \int_0^t h'(s)\mathrm{ds} \leq h'(0)t - h(t), \quad (4.3.61)$$

ahonnan átrendezés után kapjuk a kívánt állítást. □

Idézzünk fel néhány definíciót és eredményt a szakasz elejéről:

$$g(\alpha) = \sum_{i=1}^n \Big(\psi(v_i(\alpha) - \psi(v_i)\Big) \leq -\Psi(v) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \Big(\psi(v_i + \alpha[d_x]_i) + \psi(v_i + \alpha[d_s]_i)\Big) =$$

$$= -\frac{1}{2}\Psi(v) + \frac{1}{2}g_1(\alpha), \quad (4.3.62)$$

ahol

$$g_1(\alpha) = -\alpha\sigma^2 + \int_0^\alpha \left(\sum_{i=1}^n \Big(r_i'(s) - r_i'(0)\Big) + \Big(\varphi_i'(s) - \varphi_i'(0)\Big)\right)\mathrm{ds} \leq$$

$$\leq -\alpha\sigma^2 + (1 + 2\kappa)\nu_2\sigma^2 \int_0^\alpha s\omega(s)\mathrm{ds} =: g_2(\alpha), \quad (4.3.63)$$

és

$$\omega(\alpha) = \Big(v_{\max} + \alpha\sigma\sqrt{1 + 2\kappa}\Big)^{p-1} + \Big(v_{\min} - \alpha\sigma\sqrt{1 + 2\kappa}\Big)^{-q-1}. \quad (4.3.64)$$

A $g_2(\alpha)$ függvény teljesíti a lemma feltételeit, így

$$2g(\alpha^*) \leq g_1(\alpha^*) \leq g_2(\alpha^*) \leq \frac{g_2'(0)}{2}\alpha^* = \frac{-\sigma^2}{2}\alpha^*. \quad (4.3.65)$$

Írjuk be ebbe az egyenlőtlenségbe az imént kapott (4.3.57) eredményt, így kapjuk a bizonyítandó tételben szereplő becslést, miszerint

$$g(\alpha^*) \leq \frac{-\sigma^2}{4}\alpha^* \leq C\frac{-\sigma^2}{4}\sigma^{-\frac{q+1}{q}} = -\frac{C}{4}\sigma^{\frac{q-1}{q}}. \quad (4.3.66)$$

Tekintsük a (4.2.3) lemma első állítását:

$$\sigma \geq \sqrt{2\nu_1\Psi(v)}. \quad (4.3.67)$$

Ezt felhasználva kapjuk a tétel második egyenlőtlenségét:

$$-\frac{C}{4}\sigma^{\frac{q-1}{q}} \leq -\frac{C}{4}(2\nu_1)^{\frac{q-1}{2q}}\Psi(v)^{\frac{q-1}{2q}}. \tag{4.3.68}$$

Ezzel a tételt beláttuk. ■

4.3.7. Megjegyzés. *Fontos hangsúlyozni, hogy a megadott α^* lépéshossz nem feltétlenül optimális, de a későbbi bizonyításokhoz már ennyi is elég. A gyakorlatban általában nem előre rögzített α-t használnak, hanem valamilyen egydimenziós optimalizálási (line-search) módszerrel közvetlenül keresnek alkalmas lépéshosszt.*

Érdemes megnézni, hogy mit ad a fenti eredmény az egyszerűbb esetekben. Ha például $\kappa = 0$, vagyis az M mátrix pozitív szemidefinit és távolságnak valamelyik kanonikus $\Upsilon_{p,q}$ függvényt választjuk, akkor $C = \min\left\{\frac{1}{3p+1}, \frac{1}{6q+6}\right\}$. Konkrétan a már sokat említett $\|v - v^{-1}\|^2$ távolság esetén ($p = 1$, $q = 3$) ez $C = \frac{1}{24}$-ed ad.

4.4. Komplexitás

Az előző szakaszok eredményei alapján könnyen meg tudjuk adni az eljárás lépésszámát. A végleges eredmény a következő alakot ölti:

4.4.1. Tétel. *Ha $\tau \geq \nu_1^{-1}$, akkor nem több, mint*

$$\left\lceil \frac{8q(2\nu_1)^{-\frac{q-1}{2q}}}{C(q+1)}(\psi_0(\theta,\tau,n))^{\frac{q+1}{2q}} \right\rceil \left\lceil \frac{1}{\theta}\log\frac{n}{\varepsilon} \right\rceil, \tag{4.4.1}$$

lépésben olyan megoldást kapunk, amelyre a dualitásrés ε-nál kisebb, ahol $\psi_0(\theta,\tau,n)$ a (4.2.21) egyenlőtlenség jobb oldala, vagyis

$$\psi_0(\theta,\tau,n) = \frac{\nu_2\tau}{\nu_1(1-\theta)^{\frac{p+1}{2}}} + \nu_2\Upsilon'_{p,q}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2n\tau}{\nu_1(1-\theta)}} + n\nu_2\Upsilon_{p,q}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.4.2}$$

Bizonyítás: Két dolgot kell megvizsálnunk:

Az (x_0, s_0, μ) pontból indulva hányszor kell előrelépni a centrális úton, hogy a kívánt pontosságot elérjük.

Ha az algoritmus során $\Psi(x, s, \mu) > \tau$, akkor legfeljebb hány Newton–lépés szükséges ahhoz, hogy végül $\Psi(x', s', \mu) < \tau$ legyen.

Az első ponthoz gondoljuk meg, hogy ha az algoritmus a $\mu_0 = 1$ értékről indul és minden lépésben μ helyett $(1-\theta)\mu$-t veszünk, akkor k lépés után a

$$(1-\theta)^k n\mu_0 \leq \varepsilon \tag{4.4.3}$$

feltételt kell vizsgálnunk. Logaritmust véve:

$$k \log(1-\theta) + \log(n\mu_0) \leq \log \varepsilon, \tag{4.4.4}$$

amiből átrendezés után, felhasználva, hogy $-\log(1-\theta) \geq \theta$ kapjuk, hogy

$$k\theta \geq \log(n\mu_0) - \log \varepsilon = \log \frac{n\mu_0}{\varepsilon}, \tag{4.4.5}$$

vagyis legfeljebb $\left\lceil \frac{1}{\theta} \log \frac{n\mu_0}{\varepsilon} \right\rceil$ alkalommal kell a μ paraméter értékét csökkenteni.

Az második ponthoz tekintsük az alábbi technikai lemmát:

4.4.2. Lemma. *Legyen $t_k > 0$ olyan sorozat, amelyre*

$$t_{k+1} \leq t_k - \beta t_k^\gamma, \quad \beta > 0,\ \gamma \in [0,1),\ k = 0, 1, \ldots, \bar{k}. \tag{4.4.6}$$

Ekkor

$$\bar{k} \leq \left\lceil \frac{t_0^{1-\gamma}}{\beta(1-\gamma)} \right\rceil, \tag{4.4.7}$$

sőt, ha valamely rögzített $\rho \geq 0$ esetén $t_k > \rho$, akkor

$$k \leq \left\lceil \frac{t_0^{1-\gamma} - \rho^{1-\gamma}}{\beta(1-\gamma)} \right\rceil. \tag{4.4.8}$$

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy ha $\beta \geq t_0^{1-\gamma}$, akkor

$$t_1 \leq t_0 - \beta t_k^\gamma \leq t_0 - t_0 = 0, \tag{4.4.9}$$

vagyis legfeljebb csak a $k = 0$ érték jöhet szóba, arra viszont triviálisan teljesülnek az egyenlőtlenségek. A továbbiakban tehát feltesszük, hogy $0 < \beta < t_0^{1-\gamma}$. Ha a k-adik lépésben még teljesülnek az egyenlőtlenségek, akkor

$$\begin{aligned} t_{k+1}^{1-\gamma} &\leq (t_k - \beta t_k^\gamma)^{1-\gamma} = t_k^{1-\gamma}\left(1 - \beta t_k^{\gamma-1}\right)^{1-\gamma} \leq \\ &\leq t_k^{1-\gamma}\left(1 - \beta(1-\gamma) t_k^{\gamma-1}\right) = t_k^{1-\gamma} - \beta(1-\gamma), \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

ahol felhasználtuk a sorozatra vonatkozó feltételt valamint az

$$(1-t)^\alpha \leq 1-\alpha t, \quad \forall\, t \in [0,1] \tag{4.4.11}$$

egyenlőtlenséget. Ez azt jelenti, hogy $t_k^{1-\gamma}$ értéke minden lépésben legfeljebb $\beta(1-\gamma)$-val csökken. Ezt átrendezve kapjuk az állításokat. □

A (4.2) szakaszban beláttuk, hogy a centrális úton μ-ről $(1-\theta)\mu$-re lépve a $\Psi(x,s,(1-\theta)\mu)$ távolság kisebb lesz, mint $\psi_0(\theta,\tau,n)$. Annyi Newton–lépést kell tennünk, hogy a távolság kisebb legyen, mint τ. A (4.3) szakaszban aztán megmutattuk, hogy található olyan lépéshossz, amellyel egy Newton–lépés során a távolságcsökkenés legalább $\frac{C}{4}(2\nu_1)^{\frac{q-1}{2q}}\Psi(v)^{\frac{q-1}{2q}}$. Tekintsük most a $t_k = \Psi(v_k)$ sorozatot, ahol a v_k pontokat az egymás után követező Newton–lépésekből kapjuk. Az elmondottak értelmében:

$$t_{k+1} = \Psi(v_{k+1}) \leq \Psi(v_k) - \frac{C}{4}(2\nu_1)^{\frac{q-1}{2q}}\Psi(v)^{\frac{q-1}{2q}} = t_k - \beta t_k^\gamma, \tag{4.4.12}$$

ahol

$$\beta = \frac{C}{4}(2\nu_1)^{\frac{q-1}{2q}}, \quad \gamma = \frac{q-1}{2q} \tag{4.4.13}$$

és tudjuk, hogy $t_0 = \Psi(v_0) \leq \psi_0(\theta,\tau,n)$. Legyen $\rho = \tau$, ekkor az imént belátott lemma második állítását alkalmazva kapjuk, hogy

$$k \leq \left\lceil \frac{t_0^{1-\gamma} - \rho^{1-\gamma}}{\beta(1-\gamma)} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\psi_0(\theta,\tau,n)^{1-\frac{q-1}{2q}} - \tau^{1-\frac{q-1}{2q}}}{\frac{C}{4}(2\nu_1)^{\frac{q-1}{2q}}(1-\frac{q-1}{2q})} \right\rceil = \left\lceil \frac{8q(2\nu_1)^{-\frac{q-1}{2q}}}{C(q+1)}\psi_0(\theta,\tau,n)^{\frac{q+1}{2q}} \right\rceil. \tag{4.4.14}$$

A kapott két lépésszám (4.4.14 és 4.4.5) szorzata adja a tételben szereplő becslést. Ezzel a tételt beláttuk. ■

Legyen most $\theta \in (0,1)$ konstans, és $\tau = \mathcal{O}(n)$, $q = \log n$, $p \geq 1$ konstans. Ekkor a $\psi_0(\theta,\tau,n)$ mennyiség a definíciója alapján $\mathcal{O}(n)$ nagyságrendű, így az algoritmus lépésszáma $\mathcal{O}(\sqrt{n}\log n \log \frac{n}{\varepsilon})$. Jelen pillanatban ez a legjobb lépésszámbecslés a large-update algoritmusok között a $P_*(\kappa)$ lineáris komplementaritási feladatra, sőt a lineáris programozási feladatra is. A gyakorlati alkalmazásokat tekintve ezek az algoritmusok a leghatékonyabbak, bár a small-update módszerek elméleti komplexitása jobb.

Itt is megnézhetjük, hogy milyen eredmény jön ki az előző szakaszban említett speciális esetekben. Ha az $\Upsilon_{p,q}$ függvényt tekintjük $\kappa = 0$ mellett, akkor a következő felső becslést kapjuk:

$$\left\lceil \frac{8q}{q+1} \max\left\{3p+1, 6q+6\right\} \left(\psi_0(\theta,\tau,n)\right)^{\frac{q+1}{2q}} \right\rceil \left\lceil \frac{1}{\theta} \log \frac{n}{\varepsilon} \right\rceil. \tag{4.4.15}$$

4.5. Általánosítás

Amint azt már a bevezetőben említettük, a fejezet eredményei átvihetők az egészen általános komplementaritási problémákra is:

$$f(x) \geq 0, \quad x \geq 0, \quad x \cdot f(x) = 0, \tag{4.5.1}$$

ahol $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Az ilyen problémák (mint például a variációs egyenlőtlenségek) a gyakorlati élet számtalan területén előfordulnak. Az általánosítás alapjául a következő definíció és tétel szolgál:

4.5.1. Definíció. ($P_*(\kappa)$ leképezés) *Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezést $P_*(\kappa)$ leképezésnek nevezünk, ha minden $x \neq y \in \mathbb{R}^n$ mellett érvényes, hogy*

$$(1+4\kappa)\sum_{i\in\mathcal{I}_+^f}(x_i-y_i)(f_i(x)-f_i(y)) + \sum_{i\in\mathcal{I}_-^f}(x_i-y_i)(f_i(x)-f_i(y)) \geq 0, \tag{4.5.2}$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_+^f &= \{i : (x_i-y_i)(f_i(x)-f_i(y)) > 0\} \\ \mathcal{I}_-^f &= \{i : (x_i-y_i)(f_i(x)-f_i(y)) < 0\} \end{aligned}$$

4.5.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható. Ekkor f pontosan akkor $P_*(\kappa)$ leképezés, ha $\nabla f(x)$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ mellett $P_*(\kappa)$ mátrix.*

Az – egyébként elég hosszadalmas – bizonyítások megtalálhatók [32]-ben.

4.5.3. Megjegyzés. *A tételből is látszik, de a definíciók alapján is meggondolható, hogy egy lineáris $f(x) = Mx + q$ függvény pontosan akkor $P_*(\kappa)$ leképezés, ha M $P_*(\kappa)$ mátrix.*

4.5.4. Megjegyzés. *A nemlineáris komplementaritási feladatok megoldásához általában szükség van az f függvényre vonatkozóan valamilyen Lipschitz–jellegű simasági feltételre is.*

Mindezen feltételek mellett a nemlineáris komplementaritási feladatra a most bemutatottal megegyező komplexitási eredményt tudunk igazolni.

5. fejezet

A Mizuno – Todd – Ye prediktor-korrektor algoritmus

A prediktor–korrektor-módszerek alapgondolata Mehrotra nevéhez [29] fűződik, a prediktor–korrektor kifejezést pedig Mizuno, Todd és Ye használták először 1993-ban publikált cikkükben [30]. A módszer alapötlete nem az optimalizálás témaköréből származik, hasonló módszereket használnak a parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásainál is. Külön érdekessége az eljárásnak, hogy nem sorolható be a hagyományos small update/large update (l. 3.2.5. szakasz) eljárások közé, hanem ún. adaptív módszer. Komplexitása a jelenleg ismert legjobb eredmény a belsőpontos módszerek között. Az eredeti algoritmust többen általánosították, egyszerűsítették: a bevezető rész után most egy ilyen általánosítást mutatunk be. A tárgyalás folyamatosságát megőrizendő a lábjegyzetekben világítunk rá az eredeti módszertől való eltérésekre. Részletesen kitérünk arra is, hogy milyen általánosítási lehetőségeket rejt még magában ez a téma.

5.1. A Mizuno – Todd – Ye algoritmus

Az eredeti algoritmus alábbi általánosítása Florian Potra eredménye [34]. [1]

[1] Jelöléseink eltérnek Potra jelöléseitől, mi inkább a belsőpontos módszerek elméletében szokásos jelöléseket alkalmazzuk.

Tekintsük az alábbi problémát, ahol M pozitív szemidefinit[2] mátrix:

$$Mx + q = s \tag{5.1.1}$$

$$x \geq 0, \quad s \geq 0 \tag{5.1.2}$$

$$s \cdot x = 0, \tag{5.1.3}$$

Jelölje $\mathcal{F} = \left\{(x,s) \in \mathbb{R}^{2n}_{\oplus} : Mx + q = s, x, s \geq 0\right\}$ a megengedett megoldások halmazát, $\mathcal{F}_* = \{(x,s) \in \mathcal{F} : x \cdot s = 0\}$ az optimális (komplementáris) megoldások halmazát és $\mathcal{F}_+ = \mathcal{F} \bigcap \mathbb{R}^{2n}_{+}$ a feladat megengedett belső pontjainak halmazát. Definiáljuk a centrális utat a szokásos módon:

$$\mathcal{C} = \{(x,s,\mu) : (x,s) \in \mathcal{F}, \mu > 0, x \cdot s = \mu e\}. \tag{5.1.4}$$

Tekintsük az $F_\mu : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, $F_\mu : (x,s) \mapsto \left[\begin{smallmatrix} x \cdot s - \mu e \\ Mx - s + q \end{smallmatrix}\right]$ függvényt, ekkor a centrális út éppen az $F_\mu(x,s) = 0$ egyenlet megoldáshalmaza.

Definiáljuk a centrális úttól mért távolságot a gyakran használt

$$\Psi(v) = \left\|v - v^{-1}\right\|_2 \tag{5.1.5}$$

képlettel, ahol $v = \sqrt{\frac{x \cdot s}{\mu}}$ (l. pl. [35]). Legyen τ és τ' olyan, hogy $0 < \tau < \tau' \leq \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt[4]{\tau^2+2}}$, ezzel a két paraméterrel adjuk meg a két környezetet.[3] Ilyen számokat akkor tudunk találni, ha

$$\tau < \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt[4]{\tau^2 + 2}}, \tag{5.1.6}$$

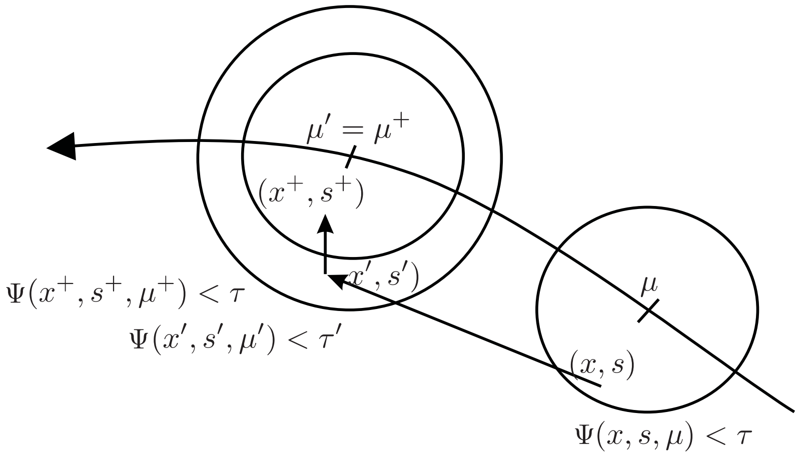
ahonnan négyzetreemelés után a

$$\tau^4 + 2\tau^2 - 16 < 0 \tag{5.1.7}$$

egyenlőtlenség adódik. Ezt megoldva és a megoldáshoz hozzávéve, hogy $\tau > 0$, kapjuk, hogy $0 < \tau < \sqrt{\sqrt{17} - 1} \approx 1,767$.

[2]Az eredeti MTY-algoritmus csak ferdén szimmetrikus mátrixokkal foglalkozott, vagyis szigorúan csak az LP feladatot oldotta meg. A pozitív szemidefinit komplementaritási probléma viszont már magában foglalja pl. a kvadratikus programozást is.

[3]Eredetileg itt a $\delta(v) = \left\|v^2 - e\right\|_2$ távolság szerepelt a $0,25$ és $0,5$ környezeti paraméterekkel. Könnyen látható, hogy ezek rendre benne vannak a $0,29$ és $0,71$ által definiált Ψ-környezetben, ezzel sikerült nagyobb környezetre kiterjeszteni az algoritmust.



5.1. ábra. **A Mizuno – Todd – Ye prediktor-korrektor algoritmus**

Az eljárás működése a (5.1) ábrán követhető. Indulásként olyan (x, s) pontot választunk, amelyre $\Psi(x, s, \mu) < \tau$, vagyis az (x, s) pont benne van a centrális út μ értékhez tartozó pontjának τ-környezetében. Innen – *egy* Newton-lépéssel – olyan (x', s') pontba jutunk, amely legfeljebb τ' távolságra van a centrális út egy μ' pontjától, ahol $\mu' < \mu$.

A korrektor lépésben arra törekszünk, hogy bejussunk a μ' pont τ-környezetébe. Ehhez szintén csak *egy*[4] Newton-lépésre lesz szükségünk. Ezek után az iteráció kezdődik elölről, amíg valamilyen megállási kritérium nem teljesül.

5.1.1. A prediktor lépés

Tekintsünk egy olyan (x, s) pontot az algoritmus működése során, amelyre

$$\Psi(x, s, \mu) < \tau. \tag{5.1.8}$$

Ekkor az alábbi Newton-rendszert oldjuk meg:

$$M\triangle x = \triangle s \tag{5.1.9}$$
$$x\triangle s + s\triangle x = -xs \tag{5.1.10}$$

[4]Miznuo, Todd és Ye eredeti algoritmusában csak annyi volt garantálható, hogy néhány korrektor lépés elég. Az eredmény a maga idejében mégis újnak számított, mivel előtte nem voltak ismertek ilyen becslések.

Algoritmus 5.1 A Mizuno – Todd – Ye prediktor–korrektor algoritmus

Input:

Pontosság: $\varepsilon > 0$

τ és τ' környezeti paraméterek, amelyekre $0 < \tau < \tau' < \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt[4]{\tau^2+2}}$

(x^0, s^0, μ^0) kezdőpont, amelyre $\Psi(x^0, s^0, \mu^0) < \tau$

$k := 0$

while $x^T s \geq \varepsilon$ **do**

$(x, s, \mu) \leftarrow (x^k, s^k, \mu^k)$

Prediktor-lépés

$\triangle x$ és $\triangle s$ meghatározása (5.1.9) alapján

az α lépéshossz meghatározása

$x' = x + \alpha \triangle x$, $s' = s + \alpha \triangle s$, $\mu' = (1 - \alpha)\mu$

$\rightarrow \Psi(x', s', \mu') < \tau'$

Korrektor-lépés

$\triangle x'$ és $\triangle s'$ meghatározása (5.1.22) alapján

$x^+ = x' + \triangle x'$, $s^+ = s' + \triangle s'$, $\mu^+ = \mu'$

$(x^{k+1}, s^{k+1}, \mu^{k+1}) \leftarrow (x^+, s^+, \mu^+)$

$\rightarrow \Psi(x^+, s^+, \mu^+) < \tau$

$k := k + 1$

end while

Output: (x, s), amelyre $x^T s < \varepsilon$

Ez egy klasszikus affin skálázású lépés, és mivel az M mátrix pozitív szemidefinit, ezért egyértelműen létezik a $(\triangle x, \triangle s)$ megoldás. Ezek után az α paramétert a lehető legnagyobbra választjuk:

$$\alpha = \max\left\{\alpha^0 \in [0,1] : \forall \alpha' \in [0,\alpha^0], \Psi(x(\alpha'), s(\alpha'), \mu(\alpha')) < \tau'\right\}, \tag{5.1.11}$$

így biztosítani tudjuk, hogy a prediktor lépésben kapott (x', s') pont benne lesz a centrális út $(1-\alpha)\mu$-höz tartozó pontjának τ' környezetében.

Legyen tehát $x(\alpha) = x + \alpha\triangle x$, $s(\alpha) = s + \alpha\triangle s$ és $\mu(\alpha) = (1-\alpha)\mu$ és vezessük be a $\varphi = \frac{\alpha^2}{1-\alpha}$ jelölést. A prediktor lépésben kapott pont távolságára a következő igaz:

$$\begin{aligned}
\Psi^2(x(\alpha), s(\alpha), \mu(\alpha)) &= \left\|\sqrt{\tfrac{x(\alpha)\cdot s(\alpha)}{\mu(\alpha)}} - \sqrt{\tfrac{\mu(\alpha)}{x(\alpha)\cdot s(\alpha)}}\right\|^2 = \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\tfrac{x_i(\alpha)s_i(\alpha)}{\mu(\alpha)}} - \sqrt{\tfrac{\mu(\alpha)}{x_i(\alpha)s_i(\alpha)}}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\mu(\alpha)}{x_i(\alpha)s_i(\alpha)} - 2n + \sum_{i=1}^n \frac{x_i(\alpha)s_i(\alpha)}{\mu(\alpha)} = \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{(1-\alpha)\mu}{(1-\alpha)x_is_i + \alpha^2\triangle x_i\triangle s_i} - 2n + \sum_{i=1}^n \frac{(1-\alpha)x_is_i + \alpha^2\triangle x_i\triangle s_i}{(1-\alpha)\mu} = \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\mu}{x_is_i + \varphi\triangle x_i\triangle s_i} - 2n + \sum_{i=1}^n \frac{x_is_i + \varphi\triangle x_i\triangle s_i}{\mu} = \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\mu}{x_is_i} - 2n + \sum_{i=1}^n \frac{x_is_i}{\mu} - \sum_{i=1}^n \frac{\mu\varphi\triangle x_i\triangle s_i}{x_is_i(x_is_i + \varphi\triangle x_i\triangle s_i)} + \sum_{i=1}^n \frac{\varphi\triangle x_i\triangle s_i}{\mu},
\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

vagyis

$$\Psi^2(x(\alpha), s(\alpha), \mu(\alpha)) = \Psi^2(x, s, \mu) + f(\varphi), \tag{5.1.13}$$

ahol

$$p = \frac{x\cdot s}{\mu}, \quad q = \frac{\triangle x\cdot\triangle s}{\mu} \tag{5.1.14}$$

$$f(\varphi) = \varphi e^T q - \sum_{i=1}^n \frac{\varphi q_i}{p_i(p_i + \varphi q_i)}. \tag{5.1.15}$$

Az f függvény csak az

$$I = [0, \hat{\varphi}), \quad \hat{\varphi} = \min\left\{\frac{p_i}{|q_i|} : q_i < 0\right\} \tag{5.1.16}$$

intervallumon értelmezhető, hiszen itt garantálható, hogy $(x(\alpha), s(\alpha))$ belső pont lesz. A második derivált:

$$f''(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2q_i^2}{(p_i + \varphi q_i)^3} > 0, \tag{5.1.17}$$

ha $\varphi \in I$, vagyis f szigorúan konvex I-n. Mivel $f(0) = 0$ és $\lim_{\varphi \to \hat{\varphi}} f(\varphi) = \infty$, ezért az

$$f(\varphi) = \tau'^2 - \Psi^2(x, s, \mu) \tag{5.1.18}$$

egyenletnek egyértelműen létezik megoldása I-n. A megoldást φ^*-gal jelölve:

$$\frac{\alpha^{*2}}{1 - \alpha^*} = \varphi^*, \tag{5.1.19}$$

vagyis $\alpha^* = \frac{2\varphi^*}{\varphi^* + \sqrt{\varphi^{*2} + 4\varphi^*}}$. Erről az értékről az alábbi állítás mondható:

5.1.1. Állítás. *Az így kapott* α, *vagyis az* $f\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right) = \tau'^2 - \Psi^2(x, s, \mu)$ *egyenlet egyértelmű megoldása a prediktor lépésben megtehető legnagyobb lépéshossz.*

Bizonyítás: Könnyen látható, hogy ennél nagyobb már nem lehet, mert akkor $\Psi^2(x', s', \mu') > \tau'$. Az is triviális, hogy $Mx(\alpha) = s(\alpha)$ teljesül. A megengedettség bizonyításához már csak azt kell látnunk, hogy $x(\alpha'), s(\alpha') > 0, \quad \forall \alpha' \in [0, \alpha]$. Tegyük fel indirekt módon, hogy létezik olyan $\alpha' \in [0, \alpha]$, amelyre ez nem teljesül, vagyis $x(\alpha') \cdot s(\alpha') = 0$. Ekkor

$$\lim_{\alpha \to \alpha'} \Psi^2(x(\alpha), s(\alpha), \mu(\alpha)) = \infty, \tag{5.1.20}$$

ami ellentmond annak, hogy

$$\Psi^2(x(\alpha), s(\alpha), \mu(\alpha)) = \Psi^2(x, s, \mu) + f(\alpha) < \infty \tag{5.1.21}$$

Ezzel beláttuk, hogy a fent definiált α a megengedett legnagyobb lépéshossz, amelyre még az is teljesül, hogy $\Psi^2(x(\alpha), s(\alpha), \mu(\alpha)) < \tau'$. ■

5.1.2. A korrektor lépés

A prediktor lépésben olyan (x', s') pontot kaptunk, amelyre $\Psi^2(x', s', \mu') < \tau'$. Célunk most az, hogy a centrális út τ'-környezetéből visszatérjünk a τ-környezetbe, és utána folytassuk az iterációt egy prediktor lépéssel. A következő Newton-rendszert oldjuk meg:

$$M\triangle x' = \triangle s' \tag{5.1.22}$$

$$x'\triangle s' + s'\triangle x' = \mu' e - x's' \tag{5.1.23}$$

Legyen $(x^+, s^+) = (x' + \triangle x', s' + \triangle s')$. Vizsgáljuk a $\Psi^2(x^+, s^+, \mu^+)$ távolságot, ahol $\mu^+ = \mu' = (1-\alpha)\mu$.

$$\begin{aligned}
\Psi^2(x^+, s^+, \mu^+) = \left\| \sqrt{\tfrac{x^+ \cdot s^+}{\mu^+}} - \sqrt{\tfrac{\mu^+}{x^+ \cdot s^+}} \right\|^2 &= \sum_{i=1}^n \frac{\mu'}{x_i^+ s_i^+} - 2n + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^+ s_i^+}{\mu'} = \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\mu'}{\mu' + \triangle x_i' \triangle s_i'} - 2n + \sum_{i=1}^n \frac{\mu' + \triangle x_i' \triangle s_i'}{\mu'} = \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mu'}{\mu' + \triangle x_i' \triangle s_i'} - 1 \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\triangle x_i' \triangle s_i'}{\mu'} = \\
= \sum_{i=1}^n \frac{-\triangle x_i' \triangle s_i'}{\mu' + \triangle x_i' \triangle s_i'} + \sum_{i=1}^n \frac{\triangle x_i' \triangle s_i'}{\mu'} &= \sum_{i=1}^n \frac{(\triangle x_i' \triangle s_i')^2}{\mu'(\mu' + \triangle x_i' \triangle s_i')} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i'^2}{1 + q_i'} = \\
&= \sum_{i \in \mathcal{I}_+} \frac{q_i'^2}{1 + q_i'} + \sum_{i \in \mathcal{I}_-} \frac{q_i'^2}{1 - |q_i'|},
\end{aligned} \tag{5.1.24}$$

ahol bevezettük a $q' = \frac{\triangle x' \cdot \triangle x'}{\mu'}$ jelölést, az $\mathcal{I}_+$ és $\mathcal{I}_-$ indexhalmazokat pedig q_i' előjele szerint definiáljuk. Becsüljük most a vektorokat a $\|.\|_\infty$ norma segítségével:

$$\Psi^2(x^+, s^+, \mu^+) \le \sum_{i \in \mathcal{I}_+} \frac{\|q'\|_\infty q_i'}{1 + \|q'\|_\infty} + \sum_{i \in \mathcal{I}_-} \frac{\|q'\|_\infty |q_i'|}{1 - \|q'\|_\infty} \le \frac{2\|q'\|_\infty}{1 - \|q'\|_\infty^2} \sum_{i \in \mathcal{I}_+} q_i', \tag{5.1.25}$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségnél kihasználtuk, hogy M pozitív definitsége miatt

$$\sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i \in \mathcal{I}_+} q_i + \sum_{i \in \mathcal{I}_-} q_i \ge 0. \tag{5.1.26}$$

A továbbiakhoz tekintsük az alábbi lemmát:

5.1.2. Lemma. *Legyen $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitív szemidefinit mátrix, $a \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektor. Ekkor az*

$$M\triangle x = \triangle s \tag{5.1.27}$$

$$x\triangle s + s\triangle x = a \tag{5.1.28}$$

Newton-rendszer bármely $(\triangle x, \triangle s)$ megoldására teljesül, hogy

$$\sum_{i\in\mathcal{I}_+} \triangle x_i \triangle s_i \leq \tfrac{1}{4}\left\|(x\cdot s)^{-1/2}a\right\|_2^2 \tag{5.1.29}$$

$$\|\triangle x\cdot\triangle s\|_\infty \leq \tfrac{1}{4}\left\|(x\cdot s)^{-1/2}a\right\|_2^2 \tag{5.1.30}$$

$$\|\triangle x\cdot\triangle s\|_1 \leq \tfrac{1}{2}\left\|(x\cdot s)^{-1/2}a\right\|_2^2 \tag{5.1.31}$$

$$\|\triangle x\cdot\triangle s\|_2 \leq \tfrac{1}{\sqrt{8}}\left\|(x\cdot s)^{-1/2}a\right\|_2^2, \tag{5.1.32}$$

ahol $\mathcal{I}_+ = \{i : \triangle x_i \triangle s_i > 0\}$.

Bizonyítás: M pozitív szemidefinitsége miatt elég az első egyenlőtlenséget igazolnunk, a többi ennek egyszerű következménye. Osszuk el a Newton-rendszer második egyenletét $\sqrt{x\cdot s}$-sel. Ezzel az alábbi rendszert kapjuk:

$$D\triangle x + D^{-1}\triangle s = \frac{a_i}{\sqrt{x\cdot s}}, \tag{5.1.33}$$

ahol D pozitív diagonális mátrix. Ekkor az $i\in\mathcal{I}_+$ koordinátákra:

$$0 < 4\triangle x_i\triangle s_i \leq \frac{a^2}{x_i s_i}. \tag{5.1.34}$$

Ezeket összeadva kapjuk a kívánt állítást. ■

A lemmát az $a = \mu' e - x's'$ választással alkalmazva kapjuk, hogy

$$\|q'\|_\infty \leq \sum_{i\in\mathcal{I}_+} q_i' \leq \frac{1}{4}\left\|\frac{\mu' e - x'\cdot s'}{\sqrt{x'\cdot s'}}\right\|_2^2 = \mu'\left\|\sqrt{\frac{x's'}{\mu'}} - \sqrt{\frac{\mu'}{x's'}}\right\|_2^2 \leq \Psi^2(x', s', \mu'), \tag{5.1.35}$$

mivel $\mu' < 1$. Ezt beírva a fenti (5.1.25) becslésbe kapjuk, hogy:

$$\Psi^2(x^+, s^+, \mu^+) \leq \frac{2\Psi^4(x', s', \mu')}{16 - \Psi^4(x', s', \mu')} \leq \frac{2\tau'^4}{16-\tau'^4}. \tag{5.1.36}$$

Használjuk ki a τ'-re tett $\tau' < \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt[4]{\tau^2+2}}$ kikötést, így:

$$\Psi^2(x^+, s^+, \mu^+) \leq \frac{2\tau'^4}{16-\tau'^4} \leq \frac{2\left(\frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt[4]{\tau^2+2}}\right)^4}{16 - \left(\frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt[4]{\tau^2+2}}\right)^4} = \frac{2\cdot 16\tau^2}{16(\tau^2+2) - 16\tau^2} = \tau^2, \tag{5.1.37}$$

vagyis tényleg visszajutottunk a kisebb környezetbe. Ebből – a prediktor lépésnél leírtakhoz hasonlóan – könnyen következik, hogy az (x^+, s^+) pont szigorúan megengedett megoldás.

5.1.3. Komplexitás

Az algoritmus komplexitásának elemzéséhez a prediktor lépésben szereplő α lépéshosszra kell alsó becslést adnunk. A prediktor lépésről szóló részben láttuk, hogy α az $f(\varphi) = \tau'^2 - \Psi^2(x, s, \mu)$ egyenlet egyértelmű megoldásából[5] számolható az $\alpha = \frac{2\varphi}{\varphi+\sqrt{\varphi^2+4\varphi}}$ képlettel. Tekintsük most az f függvényt csak a $\left[0, \frac{3 \min p}{8\|q\|_\infty}\right]$ intervallumon, ami szűkebb, mint az eredeti $\left[0, \min\left\{\frac{p_i}{|q_i|} : i \in \mathcal{I}_-\right\}\right]$ intervallum. A következő lemmát fogjuk használni:

5.1.3. Lemma. *Ha $\Psi^2(x, s, \mu) \leq 2\eta$, akkor*

$$\frac{1}{1+\eta+\sqrt{2\eta+\eta^2}} \leq \frac{xs}{\mu} \leq 1+\eta+\sqrt{2\eta+\eta^2}. \tag{5.1.38}$$

Bizonyítás: Legyen ν a $\frac{\mu}{xs}$ tetszőleges komponense, például az első és legyen $\check{x}$ illetve $\check{s}$ a többi komponensből álló $n-1$ dimenziós vektor. Ekkor:

$$\begin{aligned} 2\eta \geq \Psi^2(x, s, \mu) = \nu + \sum_{i=2}^{n} \frac{\mu}{x_i s_i} - 2(n-1) - 2 + \frac{1}{\nu} + \sum_{i=2}^{n} \frac{x_i s_i}{\mu} \geq \\ \geq \nu - 2 + \frac{1}{\nu} + \Psi^2(\check{x}, \check{s}, \mu) \geq \nu - 2 + \frac{1}{\nu} \end{aligned} \tag{5.1.39}$$

Ebből a következő másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\nu^2 - 2(1+\eta)\nu + 1 \leq 0, \tag{5.1.40}$$

ahonnan adódik a lemma állítása. ■

A lemmát $\eta = \frac{\tau^2}{2}$ esetén alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{m(\tau)} \leq \min p \leq \|p\|_\infty \leq m(\tau), \tag{5.1.41}$$

ahol

$$m(\tau) = 1 + \frac{\tau^2}{2} + \sqrt{\tau^2 + \frac{\tau^4}{4}}. \tag{5.1.42}$$

A lényegi eredményt a következő állítás tartalmazza:

[5] A φ érték ε pontossággal kiszámítható $\mathcal{O}(\log\log\varepsilon)$ időben [33].

5.1.4. Állítás. *Minden* $\varphi \in \left[0, \frac{3 \min p}{8\|q\|_\infty}\right]$ *esetén igaz, hogy*

$$f(\varphi) \leq \varphi\, h(\tau) \sum_{i \in \mathcal{I}_+} q_i, \tag{5.1.43}$$

ahol $h(\tau) = 8\left(\frac{m(\tau)^2}{5} - \frac{1}{11\, m(\tau)^2}\right)$.

Bizonyítás: A definíció miatt nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \sum_{i=1}^{n} \varphi q_i \left(1 - \frac{1}{p_i(p_i + \varphi q_i)}\right) = \sum_{i \in \mathcal{I}_+} \varphi q_i \left(1 - \frac{1}{p_i(p_i + \varphi q_i)}\right) + \\ &+ \sum_{i \in \mathcal{I}_-} \varphi q_i \left(1 - \frac{1}{p_i(p_i + \varphi q_i)}\right) \leq \sum_{i \in \mathcal{I}_+} \varphi q_i \left(1 - \frac{1}{\|p\|_\infty \left(\|p\|_\infty + \varphi \|q\|_\infty\right)}\right) - \\ &- \sum_{i \in \mathcal{I}_-} \varphi \left|q_i\right| \left(1 - \frac{1}{\min p\left(\min p - \varphi \|q\|_\infty\right)}\right). \end{aligned} \tag{5.1.44}$$

Az M mátrix pozitív szemidefinit, így:

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_+} q_i \geq \sum_{i \in \mathcal{I}_-} \left|q_i\right|. \tag{5.1.45}$$

vagyis $\sum_{i \in \mathcal{I}_-} |q_i|$ helyett $\sum_{i \in \mathcal{I}_+} q_i$-t véve további felső becslést kapunk. Használjuk fel még a (5.1.41) eredményt és azt, hogy az f függvény szűkebb értelmezési tartományán $\varphi \|q\|_\infty \leq \frac{3}{8} \min p$:

$$\begin{aligned} f(\varphi) &\leq \sum_{i \in \mathcal{I}_+} \left(\frac{1}{\min p\left(\min p - \varphi \|q\|_\infty\right)} - \frac{1}{\|p\|_\infty \left(\|p\|_\infty + \varphi \|q\|_\infty\right)}\right) q_i \leq \\ &\leq \varphi \left[\frac{1}{\frac{5}{8}(\min p)^2} - \frac{1}{\|p\|_\infty \left(\|p\|_\infty + \frac{3}{8} \min p\right)}\right] \sum_{i \in \mathcal{I}_+} q_i \leq \\ &\leq 8\varphi \left(\frac{m(\tau)^2}{5} - \frac{1}{11\, m(\tau)^2}\right) \sum_{i \in \mathcal{I}_+} q_i \end{aligned} \tag{5.1.46}$$

Ezzel a lemma állítását beláttuk. ■

A lemma erejét az adja, hogy az f függvényt felülről tudjuk becsülni egy egyenessel, ezáltal – f konvexitása miatt – alsó becslést tudunk adni $f(\varphi) = \tau'^2 - \Psi^2(x, s, \mu)$ gyökére.

5.1.5. Következmény. *Az* $f(\varphi) = \tau'^2 - \Psi^2(x,s,\mu)$ *egyenlet egyértelmű* φ *megoldására teljesül, hogy*

$$\varphi \geq \hat{\varphi} := \min\left\{\frac{\tau'^2 - \Psi^2(x,s,\mu)}{h(\tau)\sum_{i\in\mathcal{I}_+} q_i}, \frac{3}{8\,m(\tau)\,\|q\|_\infty}\right\}. \tag{5.1.47}$$

Bizonyítás: Az minimumban szereplő első tag a lineáris becslésből, a második pedig az f függvény értelmezési tartományára tett megszorításból származik. ■

Vizsgáljuk most meg a becslésben szereplő mennyiségeket:

5.1.6. Lemma. [6] *Legyen* $q = \frac{\triangle x \triangle s}{\mu}$, *ahol* $\triangle x$ *és* $\triangle s$ *a (5.1.9) rendszer megoldásai. Ekkor*

$$\sum_{i\in\mathcal{I}_+} q_i \leq \frac{n}{4} m\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right) \tag{5.1.48}$$

$$\|q\|_\infty \leq \frac{n}{4} m\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right). \tag{5.1.49}$$

Bizonyítás: A (5.1.3) lemmához hasonlóan igazolható, hogy ha $\Psi^2(x,s,\mu) \leq 2\eta$, akkor

$$\frac{1}{m\left(\sqrt{\frac{2\eta}{n}}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{\eta}{n} + \sqrt{\frac{2\eta}{n} + \frac{\eta^2}{n^2}}} \leq \frac{x^T s}{n\mu} \leq 1 + \frac{\eta}{n} + \sqrt{\frac{2\eta}{n} + \frac{\eta^2}{n^2}} = m\left(\sqrt{\frac{2\eta}{n}}\right). \tag{5.1.50}$$

A korrektor lépésnél használt (5.1.2) lemmát az $a = -xs$ esetben használva kapjuk, hogy

$$\sum_{i\in\mathcal{I}_+} \triangle x_i \triangle s_i \leq \frac{1}{4}\left\|\sqrt{xs}\right\|_2^2 = \frac{x^T s}{4}, \tag{5.1.51}$$

vagyis

$$\sum_{i\in\mathcal{I}_+} q_i \leq \frac{x^T s}{4\mu} \leq \frac{n}{4} m\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right). \tag{5.1.52}$$

A másik egyenlőtlenség hasonlóan látható be. ■

Ezeket az eredményeket az (5.1.47) becslésbe beírva és figyelembe véve, hogy $\Psi^2(x,s,\mu) \leq \tau$ kapjuk, hogy

$$\varphi \geq \hat{\varphi} \geq \frac{4}{n\,m\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right)} \min\left\{\frac{\tau'^2 - \tau^2}{h(\tau)}, \frac{3}{8\,m(\tau)}\right\} = \frac{4\gamma}{n\,m\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right)}. \tag{5.1.53}$$

[6] Ez a lemma hibásan szerepel a már említett [34] cikkben.

A φ értékből könnyen visszaszámolhatjuk a megfelelő α értéket:

$$\alpha = \frac{-\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 4\varphi}}{2}, \tag{5.1.54}$$

ami az φ-nek növekvő függvénye, vagyis a φ-re kapott alsó becslés átvihető α-ra is. Az eredmények a következő tételben foglalhatók össze:

5.1.7. Tétel. *A prediktor lépésben megtehető legnagyobb lépéshosszra igaz, hogy*

$$\alpha \geq \frac{\chi_n}{\sqrt{n}}, \tag{5.1.55}$$

ahol

$$\chi_n = 2\sqrt{\frac{\gamma}{m\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right)}}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{n\,m\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right)} + 1} - \sqrt{\frac{\gamma}{n\,m\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right)}}\right) \tag{5.1.56}$$

korlátos mennyiség.

Bizonyítás: A tétel bizonyításához már csak χ_n korlátosságát kell belátni. Az m függvény definíciójából adódóan

$$m\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right) \searrow 1, \tag{5.1.57}$$

ha $n \to \infty$, így

$$\chi_n \to 2\sqrt{\gamma} = 2\sqrt{\min\left\{\frac{\tau'^2 - \tau^2}{h(\tau)}, \frac{3}{8\,m(\tau)}\right\}} > 0. \tag{5.1.58}$$

Ezzel a tételt beláttuk. ■

5.1.8. Megjegyzés. *Az alkalmazott közelítés egyszerűsége ellenére jelenleg ez a legjobb aszimptotikus alsó becslés az affin skálázású irányhoz tartozó lépéshosszra a pozitív szemidefinit esetben.*

Az algoritmus iterációszámának becslését az teszi különösen egyszerűvé, hogy a prediktor és a korrektor lépésben is csak *egy* lépésre van szükség, így csak azt kell kiszámolnunk, hogy a centrális úton hányat kell lépnünk, vagyis hányszor frissítjük a μ paramétert. Legyen az algoritmus olyan, hogy $\mu_0 = 1$, ekkor a k-adik iterációban a dualitásrés $n(1-\alpha)^k$. Így ekvivalens átalakításokkal írhatjuk, hogy:

$$n(1-\alpha)^k < \varepsilon$$
$$\log n + k\log(1-\alpha) < \log\varepsilon,$$

ahonnan a minimális iterációszámra kapjuk, hogy

$$k = \left\lceil \frac{\log \frac{\varepsilon}{n}}{\log(1-\alpha)} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{\log \frac{\varepsilon}{n}}{\log(1-\frac{c}{\sqrt{n}})} \right\rceil = \left\lceil \frac{\log \frac{n}{\varepsilon}}{-\log(1-\frac{c}{\sqrt{n}})} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{1}{\frac{c}{\sqrt{n}}} \log \frac{n}{\varepsilon} \right\rceil, \tag{5.1.59}$$

vagyis a Mizuno – Todd – Ye–algoritmus lépésszáma $\mathcal{O}\left(\sqrt{n}\log\frac{n}{\varepsilon}\right)$ nagyságrendű. Ez a ma ismert legjobb lépésszámbecslés a lineáris (kvadratikus) programozási feladatra.

5.2. Általánosítási lehetőségek

Amint azt már a bevezetőben is említettük, a belsőpontos módszerek legnagyobb ereje a sokoldalú általánosíthatóság. Az előző fejezetben mutattunk példát olyan eljárásra, amely a $P_*(\kappa)$-lineáris komplementaritási feladatot oldja meg *tetszőleges* önreguláris távolságfüggvény mellett. Azt is láttuk, hogy az eredeti Mizuno – Todd – Ye algoritmus a távolságfüggvény cseréje által nagyobb környezetben tud működni, így jobb eredményt tud elérni. Felmerül tehát a kérdés, hogy lehet-e a MTY algoritmust tovább általánosítani. Több kérdés merülhet fel:

A legtermészetesebb kérdés az, hogy működik-e az algoritmus $P_*(\kappa)$ mátrixok esetén is. A fenti bizonyításban az M mátrix pozitív szemidefinitségét lényegében csak a prediktor lépés hosszának becslésekor használtuk, ebből tudtuk bizonyítani, hogy az algoritmus polinomiális. Ez azt jelenti, hogy a MTY algoritmus alkalmazható a $P_*(\kappa)$ esetre is, változtatni esetleg csak a környezeti paramétereken kell és nem garantált a polinomiális komplexitás sem. Ezen javítani két módon lehet. Az egyik, hogy a szükséges becsléseket belátjuk $P_*(\kappa)$ mátrixokra is, a másik, hogy az algoritmust változtatjuk meg. Ha visszaidézzük az eljárás lépéseit, akkor látjuk, hogy két helyen változtathatunk: a Newton-rendszereken, vagy a távolságfüggvényen.

A Newton-rendszerek általánosan elfogadott és hatékony eszközei a belsőpontos módszerek elméletének. Több kutató [18, 32] foglalkozott azzal, hogy a különböző alakokkal milyen eredmények érhetők el. Alkalmasan választott rendszerek esetén az elemzés könnyebbé válhat. Hasonló a helyzet a távolságfüggvény esetén is. Láttuk, hogy a fenti általánosítás alapgondolata az volt, hogy a $\|v-e\|$ távolság helyett a $\sqrt{v - v^{-1}}$ távolságot használtuk, ezáltal változatlan komplexitáseredmény mellett nagyobb környezetben működött az algoritmus. Ez utóbbi távolság önreguláris függvényből származik, így természetes a kérdés, hogy más önreguláris függvényekkel milyen eredmények érhetők el.

Algoritmus 5.2 Általánosított prediktor–korrektor algoritmus vázlata

Input:

Pontosság: $\varepsilon > 0$

Ψ_{pred} és Ψ_{corr} távolságfüggvények

τ és τ' környezeti paraméterek

(x^0, s^0, μ^0) kezdőpont, amelyre $\Psi_{pred}(x^0, s^0, \mu^0) < \tau$

$k := 0$

while $x^T s \geq \varepsilon$ **do**

  $(x, s, \mu) \leftarrow (x^k, s^k, \mu^k)$

  Prediktor-lépés

  $\triangle x$ és $\triangle s$ és az α lépéshossz meghatározása

  $x' = x + \alpha \triangle x$, $s' = s + \alpha \triangle s$, $\mu' = (1 - \alpha)\mu$

  $\rightarrow \Psi_{corr}(x', s', \mu') < \tau'$

  Korrektor-lépés

  $\triangle x'$ és $\triangle s'$ és az α' lépéshossz meghatározása

  $x^+ = x' + \alpha' \triangle x'$, $s^+ = s' + \alpha' \triangle s'$, $\mu^+ = \mu'$

  $\rightarrow \Psi_{pred}(x^+, s^+, \mu^+) < \tau$

  $(x^{k+1}, s^{k+1}, \mu^{k+1}) \leftarrow (x^+, s^+, \mu^+)$

  $k := k + 1$

end while

Output: (x, s), amelyre $x^T s < \varepsilon$

Végül a MTY-algoritmust egészen általános formában is megfogalmazhatjuk (l. az (5.2) algoritmust). Látható, hogy a prediktor és a korrektor lépésben két különböző távolságfüggvényt, vagyis tulajdonképpen két különböző környezetet használunk. Ezáltal könnyebbé válhat a Newton-rendszerek kezelése, viszont bonyolultabb lesz a két környezet összehasonlítása.

6. fejezet

Összefoglalás

A dolgozatban összefoglaltuk a belsőpontos módszerek megértéséhez és elemzéséhez szükséges alapvető elméletet.

A 2. fejezetben megmutattuk, hogy a lineáris és a kvadratikus optimalizálási feladatok megfogalmazhatók $P_*(\kappa)$-lineáris komplementaritási problémaként. A fejezet további részében (2.3. szakasz) megvizsgáltuk a $P_*(\kappa)$ mátrixok legfontosabb tulajdonságait.

A 3. fejezetben bemutattuk a belsőpontos módszerek kulcselemeit: a belsőpontos feltételt ((3.1.1) definíció), a centrális utat ((3.1.6) definíció és (3.1.8) tétel), a Newton–rendszert (3.1.2. szakasz) és az akadályfüggvényeket ((3.1.11) definíció), majd részletesen elemeztük a centrális út és az optimális megoldáshalmaz tulajdonságait ((3.1.2) tétel és következményei). A fejezet további részében különböző szempontok szerint röviden sorra vettük a lehetséges algoritmusokat. Röviden kitértünk az elmélet és a gyakorlat közötti különbségekre is.

A 4. fejezetben egy klasszikus útkövető eljárást ismertettünk a $P_*(\kappa)$-lineáris komplementaritási feladatra. Bevezettük az önreguláris függvényeket ((4.1.1) definíció) és megvizsgáltuk alapvető tulajdonságaikat. Részletesen elemeztük az algoritmus komplexitását általános és speciális esetekben, tetszőleges önreguláris távolságfüggvény mellett. Kitértünk a nemlineáris komplementaritási feladatra való általánosítás lehetőségére is (4.5. szakasz). A levezetett komplexitási eredmény a ma ismert legjobb a large-update algoritmusok (3.2.5. szakasz) között.

Az 5. fejezetben egy prediktor–korrektor módszert, a Mizuno – Todd – Ye–algoritmus általánosított változatát tárgyaltuk a pozitív szemidefinit komplementaritási feladatra. A prediktor (5.1.1. szakasz) és a korrektor (5.1.2. szakasz) lépés vizsgálata után részletesen elemeztük az algoritmus komplexitását (5.1.3. szakasz). Az itt kapott komplexitási eredmény a ma ismert legjobb a belsőpontos eljárások között.

Az elmélet mellett a fontos definíciókat, tételeket egyszerű példával, ábrával is illusztráltuk.

Köszönetnyilvánítás

Köszönet illeti témavezetőmet, Illés Tibort, aki bevezetett engem a belsőpontos módszerek világába, és minden szakmai segítséget megadott a szakdolgozat megírásához.
A dolgozat elkészítését részben támogatta az ETIK.

Tárgymutató

Irodalomjegyzék

[1] K. M. Anstreicher. On long step path following and SUMT for linear and quadratic programming. *SIAM Journal on Optimization*, 6(1):33–46, 1996.

[2] K. H. Borgwardt. Some distribution independent results about the asymptotic order of the average number of pivot steps of the simplex methods. *Mathematics of Operations Research*, 7:441–462, 1982.

[3] Y. Y. Chang. Least index resolution of degeneracy in linear complementarity problems. Technical report 79-14, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, California, USA, 1979.

[4] R. W. Cottle, J. S. Pang, and V. Venkateswaran. Sufficient matrices and the linear complementarity problem. *Linear Algebra and its Applications*, (114/115):231–249, 1989.

[5] G. B. Dantzig. Programming in a linear structure. *Comptroller*, February 1948.

[6] G. B. Dantzig. *Linear programming and extensions.* Princeton University Press, Princeton, 1963.

[7] D. den Hertog, C. Roos, and T. Terlaky. The linear complementarity problem, sufficient matrices and the criss-cross method. *Linear Algebra and Its Applications*, (187):1–14, 1993.

[8] A. V. Fiacco and G. P. McCormick. *Nonlinear programming: Sequential unconstrained minimization techniques.* John Wiley & Sons, New York, 1968.

[9] M. Fiedler and V. Pták. Some generalizaions of positive definiteness and monotonicity. *Numerische Mathematik*, 9:163–172, 1966.

[10] R. Frisch. The logarithmic potential method for convex programming problems. Memorandum, University Institute of Economics, Oslo, 1955.

[11] R. Frisch. The logarithmic potential method for solving linear programming problems. Memorandum, University Institute of Economics, Oslo, 1955.

[12] K. Fukuda and T. Terlaky. Criss-cross methods: A fresh view on pivot algorithms. *Mathematical Programming*, 1997.

[13] Stoyan Gisbert and Galina Takó. *Numerikus módszerek I.* ELTE – TYPOTEX, Budapest, 1993.

[14] F. Glineur. *Topics in convex optimization: Interior-point methods, conic duality and approximations.* PhD thesis, Faculté Polytechnique de Mons, Mons, Belgium, 2001.

[15] A. J. Goldman and A. W. Tucker. Theory of linear programming. In H. W. Kuhn and A. W. Tucker, editors, *Linear Inequalities and related systems*, Annals of mathematical studies, No. 38, pages 53–97. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956.

[16] S. M. Guu and R. W. Cottle. On a subclass of P_0. *Linear Algebra and its Applications*, 223/224:325–335, 1995.

[17] T. Illés, J. Peng, C. Roos, and T. Terlaky. A strongly polynomial rounding procedure yielding a maximally complementary solution for $P_*(\kappa)$ linear complementarity problems. *SIAM Journal on Optimization*, 11(2):320–340, 1998.

[18] T. Illés, C. Roos, and T. Terlaky. Polynomial affine-scaling algorithms for $P_*(\kappa)$ linear complementartiy problems. In *Recent advances in optimization, Trier, 1996*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 452, pages 119–137. Springer, Berlin, Germany, 1997.

[19] N. K. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4:373–395, 1984.

[20] L. G. Khachiyan. A polynomial-time algorithm for linear programming. *Doklady Akad. Navk. USSR*, (244):1093–1096, 1979.

[21] E. Klafszky and T. Terlaky. Some generalizations of the criss-cross method for quadratic programming. *Combinatorica*, 9:189–198, 1989.

[22] E. Klafszky and T. Terlaky. Some generalizations of the criss-cross method for quadratic programming. *Math. Oper und Stat. ser. Optimization*, 24:127–139, 1992.

[23] V. Klee and P. Kleinschmidt. The d-step conjecture and its relatives. *Mathematics of Operations Research*, 12:781–755, 1998.

[24] V. Klee and G. J. Minty. *How good is the simplex method?* Inequalities III. Academic Press, NY, 1972.

[25] N. and Noma T. and Yoshise A. Kojima, M. and Megiddo. *A Unified Approach to Interior Point Algorithms for Linear Complementarity Problems.* Lecture notes in computer science. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1991.

[26] C. E. Lemke. On complementary pivot theory. In G. B. Dantzig and A. F. Veinott, editors, *Mathematics of decision sciences, Part 1*, pages 95–114. AMS, Providence, Rhode Island, 1968.

[27] C. E. Lemke and J. T. Howson Jr. Equilibrium points of bimatrix games. *SIAM Journal*, 12:413–423, 1964.

[28] N. Megiddo. Pathways to the optimal set in linear programming. In N. Megiddo, editor, *Progress in mathematical programming: Interior point and related methods*, pages 131–158. Springer-Verlag, 1989.

[29] S. Mehrotra. On the implementation of a (primal-dual) interior point method. *SIAM Journal on Optimization*, 2(4):575–601, 1992.

[30] S. Mizuno, M. J. Todd, and Y. Ye. On adaptive-step primal-dual interior point algorithms for linear programming. *Mathematics of Operations Research*, 18:964–981, 1993.

[31] Y. E. Nesterov and A. S. Nemirovskii. *Interior point polynomial algorithms in convex programming*, volume 13 of *SIAM studies in Apllied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, USA, 1994.

[32] Jiming Peng. *Self-regular proximities in convex optimization.* PhD thesis, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada, 2001.

[33] Florian A. Potra. Efficient hybrid algorithms for finding zeros of convex functions. *Journal of Complexity*, 10:199–215, 1994.

[34] Florian A. Potra. The Mizuno – Todd – Ye algorithm in a larger neighborhood of the central path. *European Journal of Operational Research*, 2002.

[35] C. Roos, T. Terlaky, and J.-Ph. Vial. *Theory and Algorithms for Linear Optimization, An Interior Point Approach.* Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, New York, USA, 1997.

[36] N. Z. Shor. Utilization of the operation of space dilatation in the minimazation of convex functions. *Kibernetika*, 1:6–12, 1970.

[37] Gy. Sonnevend. An 'analytic center' for polyhedrons and new classes of global algorithms for linear (smooth, convex) programming. In A. Prékopa, J. Szelezsán, and B. Strazicky, editors, *System modelling and optimization: proceedings of the 12th IFIP conference held in Budapest, Hungary, September, 1985*, volume 84 of *Lecture notes in Control and information sciences*, pages 866–876, Berlin, West Germany, 1986. Springer-Verlag.

[38] T. Terlaky. Egy új, véges criss-cross módszer lineáris programozási feladatok megoldására. *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 10:289–296, 1984.

[39] T. Terlaky. A convergent criss-cross method. *Math. Oper und Stat. ser. Optimization*, 16(5):683–690, 1985.

[40] T. Terlaky. A finite criss-cross method for oriented matroids. *Journal of Combinatorial Theory (Ser. B)*, 42(6):319–327, 1987.

[41] T. Terlaky. An easy way to teach interior point methods. *European Journal of Operational Research*, 130(1):1–19, 2001.

[42] A. W. Tucker. Dual systems of homogenous linear relations. In H. W. Kuhn and A. W. Tucker, editors, *Linear Inequalities and related systems*, Annals of mathematical studies, No. 38, pages 3–18. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956.

[43] H. Väliaho. P_* matrices are just sufficient. *Linear Algebra and its Applications*, 239:103–108, 1986.

[44] Xin Wang. From simplex methods to interior point methods: a brief survey on linear programming algorithms, March 1999.

[45] Zh. Wang. A conformal elimination free algorithm for oriented matroid programming. *Chinese Annals of Mathematics*, 8(B1), 1987.