Prause István

Kvázikonform leképezések magasabb dimenzióban

SZAKDOLGOZAT

témavezető
Halász Gábor
egyetemi tanár

ELTE-TTK
2002.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Konform leképezések számos tulajdonsága érvényben marad ha csak a kvázikonformitást követeljük meg – a gömbök infinitezimálisan olyan ellipszoidra képződjenek, amelyek nem nagyon lapulnak el (azaz a torzulás egyenletesen korlátos). Magasabb dimenzióban a konform leképezésekre nem igaz a Riemann alaptétel: Liouville tétele szerint $n \geq 3$ dimenzióban alig van konform leképezés. Ezért magasabb dimenzióban még fontosabb szerepük van a kvázikonform leképezéseknek, helyettesíthetik a konformakat. Például egy golyó konform képe mindig golyó vagy féltér, míg kvázikonforman leképezhető egy olyan tartományra, aminek a külseje üres.

Grötzsch terület–ívhossz elvén alapul a modulus fogalma (másnéven az extremális hossz reciproka). Ezzel foglalkozunk általánosságban az első fejezetben és levezetünk néhány hasznos (kvalitatív) modulus becslést.

Éles becslésekhez nélkülözhetetlen a Gehring által bevezett szimmetrizáció technikája. A második fejezetben ezt tárgyaljuk Sarvas ([3]) alapján. Valamint két fontos speciális extremális gyűrű modulusára adunk becslést.

A harmadik fejezetben bevezetjük magát a kvázikonform leképezés fogalmát és az eddigi eredmények alapján vizsgáljuk néhány tulajdonságát: torzítás, kiterjesztés a határra, konvergencia.

A fő forrás Väisälä könyve ([1]) a témáról.

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Halász Gábor tanár úrnak.

0.1. Jelölések

$\mathbb{R}^n$ koordináta egységvektorait $e_1, \ldots, e_n$ jelöli, egy x pont koordinátáit $x_1, \ldots, x_n$. Az euklideszi normát csak $|\cdot|$ jelöli. $\mathbb{R}^{n-1}$ alatt, ha mást nem mondunk, az $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ alteret értjük. Az $\mathbb{R}^n$-beli golyó, ill. a gömb jelölésére a szokásos B^n ill. S^{n-1}-t használjuk. $\bar{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ az $\mathbb{R}^n$ tér egypontos kompaktifikációja.

Az n-dimenziós Lebesgue mérték m_n. Az S^{n-1} egységgömb felszínét ω_{n-1} jelöli. Egy differenciálható leképezés Jacobi determinánsa $J_f(x)$ az $f'(x)$ determinánsa.

Tartomány nyílt és összefüggő halmaz $\bar{\mathbb{R}}^n$-ben, D (D') mindig tartományt jelöl. Az $f : D \to D'$ homeomorfizmus (kvázikonform leképezés) szituáció, azt jelenti hogy f homeomorfizmus (kvázikonform leképezés) a D és D' tartományok között, azaz f D'-re képez. A tér dimenziójáról pedig hallgatólagosan mindig feltesszük, hogy legalább 2.

A görbe intervallum folytonos leképezése. Persze az intervallum átparaméterezésével keletkező görbét nem tekintjük különbözőnek. Egy görbe attól függően nyílt vagy zárt, hogy az intervallum nyílt vagy zárt.

Az ívhossz szerinti integrált $\mathrm{d}s$-sel vagy $|\,\mathrm{d}x|$-szel jelöljük. Zárt rektifikálható γ görbén egy $\varrho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ nemnegatív Borel mérhető függvényre

$$\int_\gamma \varrho \,\mathrm{d}s = \int_0^{l(\gamma)} \varrho(\gamma_0(t)) \,\mathrm{d}t,$$

ahol γ_0 γ ívhossz szerinti reprezentációja. Lokálisan rektifikálható görbére pedig improprius integrálként definiáljuk.

Egy rektifikálható γ nyílt görbe egyértelműen kiterjeszthető γ^* zárt görbévé: a rektifikálhatóság miatt létezik határértéke a végpontokban. Az ívhossz szerinti integrál ugyanaz marad: $\int_\gamma \varrho \,\mathrm{d}s = \int_{\gamma^*} \varrho \,\mathrm{d}s$.

Felhasználunk néhány tételt.

0.1. tétel. *Zárt rektifikálható $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ görbére az s ívhossz függvény pontosan akkor abszolút folytonos, ha γ az. Ekkor $s'(t) = |\gamma'(t)|$ majdnem mindenütt és*

$$\int_0^{l(\gamma)} \varrho(\gamma_0(t)) \,\mathrm{d}t = \int_a^b \varrho(\gamma(t))|\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t$$

minden nemnegatív ϱ Borel függvényre (γ_0 az ívhossz szerinti reprezentáció).

0.2. tétel. *Legyen $f : U \to \mathbb{R}^m$ folytonosan differenciálható leképezés. Legyen γ U-beli lokálisan rektifikálható görbe. Ekkor $f \circ \gamma$ is lokálisan rektifikálható, emellett*

$$\int_{f\gamma} \varrho \,\mathrm{d}s \leq \int_\gamma \varrho(f(x))\|f'(x)\| \;|\,\mathrm{d}x|$$

minden ϱ nemnegatív Borel függvényre.

Konform leképezés esetén itt egyenlőség van.

Definíció. Legyenek $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ tartományok. Egy $f : D \to D'$ diffeomorfizmus konform leképezés ha $|f'(x)h| = \|f'(x)\| \; |h|$ $(h \in \mathbb{R}^n)$ minden $x \in D$-re. $\bar{\mathbb{R}}^n$-beli tartományok közötti leképezésről pedig akkor mondjuk, hogy konform ha kihagyva ∞-t és ősképét konform. A deriváltra kirótt feltétel a síkon (irányítás-tartástól eltekintve) valóban a regularitást jelenti. A konformitás úgy is megfogalmazható, hogy $\|f'(x)\|^n = |J_f(x)|$ minden $x \in D$-re.

A legegyszerűbb konform leképezések a Möbius transzformációk. Ezek csoportját az eltolások, nyújtások, ortogonális leképezések, valamint a gömbre vonatkozó inverziók generálják. Liouville tétele szerint $n \geq 3$ esetén nincs is más konform leképezés.

1. fejezet

A modulus

1.1. Alaptulajdonságok

Definíció. Legyen Γ görbesereg $\bar{\mathbb{R}}^n$-ben. Erre nézve a $\varrho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \infty$ nemnegatív Borel-mérhető függvény megengedett, ha minden $\gamma \in \Gamma$ lokálisan rektifikálható görbére $\int_\gamma \varrho \, \mathrm{d}s \geq 1$. A görbesereg p-modulusa ($p \geq 1$):

$$\mathsf{M}_p(\Gamma) = \inf_\varrho \int_{\mathbb{R}^n} \varrho^p \, \mathrm{d}m \,,$$

ahol ϱ a megengedett függvényeken fut.

A megengedett függvényeket $F(\Gamma)$-val jelöljük. A legfontosabb $p = n$ esetben elhagyjuk az n indexet a modulus jelölésében.

1.1. állítás. M_p *külső mérték az* $\bar{\mathbb{R}}^n$*-ben fekvő görbék terében, azaz*

- $\mathsf{M}_p(\emptyset) = 0$
- $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ *esetén* $\mathsf{M}_p(\Gamma_1) \leq \mathsf{M}_p(\Gamma_2)$
- $\mathsf{M}_p(\cup_{i=1}^\infty \Gamma_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathsf{M}_p(\Gamma_i)$

Bizonyítás. Az első kettő nyilvánvaló, az üres görbeseregre nem jelent semmi feltételt a megengedettség, a tartalmazás esetén pedig a megengedettség a bővebb görbeseregre jelent erősebb feltételt. A harmadik tulajdonság igazolásához feltehetjük, hogy minden $\mathsf{M}_p(\Gamma_i) < \infty$. $\varepsilon > 0$-hoz legyen $\varrho_i \in F(\Gamma_i)$ olyan, hogy

$$\int \varrho_i^p \, \mathrm{d}m < \mathsf{M}_p(\Gamma_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Ekkor $\varrho = (\sum \varrho_i^p)^{\frac{1}{p}} \in F(\Gamma)$, ugyanis $\varrho \geq \varrho_i$. Ezért

$$\mathsf{M}_p(\Gamma) \leq \int \varrho^p = \sum \int \varrho_i^p \, \mathrm{d}m < \varepsilon + \sum \mathsf{M}_p(\Gamma_i)$$

$\varepsilon \to 0$ adja az állítást.

Definíció. Legyenek Γ_1 és Γ_2 görbeseregek. Γ_1 minorja Γ_2-nek (jelölésben $\Gamma_1 < \Gamma_2$), ha minden $\gamma \in \Gamma_2$ görbének van Γ_1-hez tartozó részgörbéje.

Azt mondjuk, hogy Γ_2 kevesebb, de hosszabb, mint Γ_1. Modulusaikra $\mathsf{M}_p(\Gamma_1) \geq \mathsf{M}_p(\Gamma_2)$, hiszen a megengedett függvényekre fordított irányban áll fenn tartalmazási reláció. $\Gamma_1 \supset \Gamma_2$ esetén $\Gamma_1 < \Gamma_2$.

Definíció. Görbeseregek $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ sorozata szeparált, ha vannak olyan diszjunkt E_i Borel-halmazok, hogy $\gamma \in \Gamma_i$ lokálisan rektifikálható görbére $\int_\gamma (1-\chi_i)\,\mathrm{d}s = 0$, ahol χ_i az E_i halmaz karakterisztikus függvénye.

1.2. állítás. *Legyen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ szeparált görbesereg sorozat.*

- *ha $\Gamma < \Gamma_i$ (minden i-re), akkor*

$$\mathsf{M}_p(\Gamma) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{M}_p(\Gamma_i)$$

- *ha $\Gamma_i < \Gamma$ (minden i-re), akkor $p > 1$ esetén*

$$\mathsf{M}_p(\Gamma)^{\frac{1}{1-p}} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{M}_p(\Gamma_i)^{\frac{1}{1-p}}$$

Bizonyítás. Legyenek E_i-k a szeparált görbesereghez tartozó diszjunkt Borel halmazok, χ_i karakterisztikus függvényekkel. $\varrho \in F(\Gamma)$-hoz definiáljuk $\varrho_i = \chi_i \varrho$-t. Ezzel $\varrho_i \in F(\Gamma_i)$, így

$$\sum \mathsf{M}_p(\Gamma_i) \leq \sum \int \varrho_i^p \,\mathrm{d}m = \sum \int_{E_i} \varrho^p \,\mathrm{d}m \leq \int \varrho^p \,\mathrm{d}m$$

adja az első állítást.

A másodikhoz legyenek $\varrho_i \in F(\Gamma_i)$ adottak. Ezekről feltehető, hogy mindegyik ϱ_i E_i-re koncentrált, ugyanis $\chi_i \varrho_i \in F(\Gamma_i)$ és $\chi_i \varrho_i \leq \varrho_i$. Tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, \sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$ sorozatra $\varrho = \sum a_i \varrho_i \in F(\Gamma)$:

$$\int_\gamma \sum a_i \varrho_i \,\mathrm{d}s = \sum a_i \int_\gamma \varrho_i \,\mathrm{d}s \geq \sum a_i \int_{\gamma_i} \varrho_i \,\mathrm{d}s \geq \sum a_i = 1 \ (\gamma \in \Gamma),$$

ahol $\gamma_i \in \Gamma_i$ $\Gamma_i < \Gamma$-ből adódó részgörbéje γ-nak. Γ p-modulusára

$$\mathsf{M}_p(\Gamma) \leq \int \varrho^p \,\mathrm{d}m = \sum \int_{E_i} \varrho^p \,\mathrm{d}m = \sum a_i^p \int \varrho_i^p \,\mathrm{d}m$$

Innen kapjuk, hogy

$$\mathsf{M}_p(\Gamma) \leq \sum a_i^p \mathsf{M}_p(\Gamma_i) \tag{1.1}$$

Feltehető, hogy $\mathsf{M}_p(\Gamma) > 0$ (különben nincs mit bizonyítani), és így $\mathsf{M}_p(\Gamma_i) \geq \mathsf{M}_p(\Gamma) > 0$ is. Valamint $\mathsf{M}_p(\Gamma_i) < \infty$ is feltehető, mert az $\mathsf{M}_p(\Gamma_i) = \infty$-nek megfelelő tagokoktól eltekinthetünk a bizonyítandó egyenlőtlenségben. Csak az első N tagot tekintve, feladatunk minimalizálni $\sum_{i=1}^{N} a_i^p \mathsf{M}_p(\Gamma_i)$-t a $\sum_{i=1}^{N} a_i = 1$ feltétel mellett. A Lagrange-féle multiplikátor elv alapján $a_i = \mathsf{M}_p(\Gamma_i)^{\frac{1}{1-p}} S_N^{-1}$-t célszerű választani, $S_N = \sum_{i=1}^{N} \mathsf{M}_p(\Gamma_i)^{\frac{1}{1-p}}$. Ekkor (1.1) szerint ezen a_i-kel ($a_i = 0, i > N$)

$$\mathsf{M}_p(\Gamma) \leq S_N^{-p} \sum_{i=1}^{N} \mathsf{M}_p(\Gamma_i)^{\frac{p}{1-p}} \mathsf{M}_p(\Gamma_i) = \sum_{i=1}^{N} \left(\mathsf{M}_p(\Gamma_i)^{\frac{1}{1-p}} \right)^{1-p},$$

és $N \to \infty$ igazolja az állítást.

Példák

Néhány speciális görbesereg modulusát könnyen ki tudjuk számítani. Vezessük be a következő jelölést: E, F és G $\bar{\mathbb{R}}^n$-beli halmazokra $\Delta_G(E,F)$ jelölje az E-t F-fel G-ben összekötő görbék seregét (az egyik végpont E-ben a másik F-ben van, és különben a görbe G-ben halad).

A modulus felső becsléséhez csak egy megengedett függvényt kell találni, konstans függvény esetén

1.3. állítás. *Tegyük fel, hogy egy Γ görbesereg görbéi a G Borel halmazban fekszenek, és hogy mindegyik hossza legalább h. Ekkor*

$$\mathsf{M}_p(\Gamma) \leq \frac{m(G)}{h^p}$$

Az alsó becslés már lényegesebben nehezebb. A szokásos példákban a Hölder-egyenlőtlenségből kaphatunk – felhasználva a Fubini-tételt – a megengedettségi feltételből becslést a modulusra.

Henger. Legyen $E \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ Borel halmaz, $h > 0$. $G = \{x \in \mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in E, 0 < x_n < h\}$ egy henger E és $F = E + he_n$ alapokkal. Modulusa az alapjait a hengerben összekötő görbesereg modulusa. $\Gamma = \Delta_G(E,F)$

$$\mathsf{M}_p(\Gamma) = \frac{m(G)}{h^p}$$

A felső becslést az előző állítás adja. Legyen most $\varrho \in F(\Gamma)$ tetszőleges. Rögzített $y \in E$-re legyen $\gamma_y \in \Gamma$ az y-ból kiinduló, E-t F-fel függőlegesen összekötő szakasz, $\gamma_y(t) = y + te_n$ $(0 \leq t \leq h)$. A Hölder-egyenlőtlenségből

$$1 \leq \left(\int_{\gamma_y} \varrho \, \mathrm{d}s \right)^p \leq h^{p-1} \int_0^h \varrho(y + te_n)^p \, \mathrm{d}t$$

$y \in E$-re integrálva Fubini tétele szerint

$$m_{n-1}(E) \leq h^{p-1} \int_E \int_0^h \varrho(y + te_n)^p \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}m_{n-1} = h^{p-1} \int_G \varrho^p \, \mathrm{d}m \leq h^{p-1} \int \varrho^p \, \mathrm{d}m$$

Ez minden ϱ megengedett függvényre igaz, így $\mathsf{M}_p(\Gamma) \geq \frac{m_{n-1}(E)}{h^{p-1}} = \frac{m(G)}{h^p}$.

Közönséges gyűrű. $0 < a < b < \infty$, $G = \{x \in \mathbb{R}^n : a < |x| < b\}$ közönséges gyűrű, amit $E = S^{n-1}(a)$ és $F = S^{n-1}(b)$ gömbfelszínek határolnak. Modulusa a $\Gamma_G = \Delta_G(E,F)$ görbesereg modulusa.

$$\mathsf{M}(\Gamma_G) = \omega_{n-1} \log^{1-n}(\frac{b}{a})$$

$y \in S^{n-1}$ egységvektorra legyen $\gamma_y \in \Gamma_G$ az y irányú sugár G-be eső része, $\gamma_y(t) = ty$ $(a \leq t \leq b)$. Most a Hölder-egyenlőtlenség a következőt adja egy $\varrho \in F(\Gamma_G)$-ra

$$1 \leq \left(\int_{\gamma_y} \varrho \, \mathrm{d}s \right)^n \leq \int_a^b \varrho^n(ty) t^{n-1} \, \mathrm{d}t \left(\int_a^b t^{-1} \, \mathrm{d}t \right)^{n-1} = \log^{n-1}(\frac{b}{a}) \int_a^b \varrho^n(ty) t^{n-1} \, \mathrm{d}t$$

$y \in S^{n-1}$ szerint integrálva
$$\omega_{n-1} \leq \log^{n-1}(\frac{b}{a}) \int \varrho^n \,\mathrm{d}m$$
adódik. $\varrho(x) = \frac{1}{|x|\log(\frac{b}{a})}\chi_G$ esetén egyenlőséggel. Ezen ϱ megengedett függvény, mert csak a sugár megváltozása szerinti integrálja $\gamma \in \Gamma_G$ mentén már 1.

Az elfajult $a = 0$ esetben a Γ_0 görbesereget tetszőleges $a > 0$ közönséges gyűrű minorálja ($\Gamma_G < \Gamma_0$), ezért
$$\mathsf{M}(\Gamma_0) \leq \mathsf{M}(\Gamma_G) \leq \omega_{n-1} \log^{1-n}(\frac{b}{a})$$
$a \to 0$ adja, hogy $\mathsf{M}(\Gamma_0) = 0$. Ugyanígy $b = \infty$ elfajult esetben.

Az előbbiekből kapjuk, hogy egy rögzített $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}^n$ ponton átmenő görbék Γ serege 0-modulusú. Valóban álljon Γ_i az $S(x_0, 1/i)$-t ($x_0 = \infty$ esetén $S(0, i)$-t) metsző Γ-beli görbékből. Ekkor Γ_i-t minorálja a megfelelő elfajult gömbgyűrű, $\mathsf{M}(\Gamma_i) = 0$. Másrészt $\Gamma = \cup\Gamma_i$, $\mathsf{M}(\Gamma) \leq \sum \mathsf{M}(\Gamma_i) = 0$. Ebből az is látszik, hogy a nem korlátos görbék serege 0-modulusú, és minthogy a korlátos nem rektifikálható görbék serege is triviálisan az, kapjuk, hogy az n-modulus definíciójában elég a rektifikálható görbékre szorítkozni.

Technikai szempontból hasznos lesz néha $\Delta_G(E, F)$ helyett a nyílt görbékből álló végig G-ben futó $\Delta^0_G(E, F)$ görbéket tekinteni. Azt, hogy E-et és F-et összekötik, úgy értjük, hogy a görbe (mint képhalmaz) lezártja tartalmaz E és F-beli pontot is. A következő állítás szerint ezt valóban megtehetjük.

1.4. állítás. $\mathsf{M}(\Delta^0_G(E, F)) = \mathsf{M}(\Delta_G(E, F))$

Bizonyítás. Legyen $\Gamma = \Delta_G(E, F)$ és $\Gamma_0 = \Delta^0_G(E, F)$. $\mathsf{M}(\Gamma_0) \geq \mathsf{M}(\Gamma)$, mert $\Gamma_0 < \Gamma$. A fordított egyenlőtlenség bizonyításához felhasználjuk, hogy a teljes Γ_0 helyett vehetjük csak a rektifikálható görbékből álló Γ'_0 részét. Egy $\gamma \in \Gamma_0$ rektifikálható görbe γ^* zárt kiterjesztése metszi mind E-t, mind F-t, így van Γ-beli $\gamma' \subset \gamma^*$ részgörbe. Ezért $\varrho \in F(\Gamma)$-ra
$$\int_\gamma \varrho \,\mathrm{d}s = \int_{\gamma^*} \varrho \,\mathrm{d}s \geq \int_{\gamma'} \varrho \,\mathrm{d}s \geq 1$$
Ami azt mutatja, hogy $F(\Gamma) \subset F(\Gamma'_0)$, $\mathsf{M}(\Gamma_0) = \mathsf{M}(\Gamma'_0) \leq \mathsf{M}(\Gamma)$.

Annak köszönhetően, hogy konform leképezés esetén a térfogat-torzítás az ívhossz-torzítás n-edik hatványa, az n-modulus konform invariáns.

1.1. tétel. *$f : D \to D'$ konform leképezésre és Γ D-ben fekvő görbeseregre*
$$\mathsf{M}(\Gamma) = \mathsf{M}(f\Gamma)$$

Bizonyítás. Az előbbiek szerint feltehető, hogy sem Γ, sem $f\Gamma$ nem tartalmaz ∞-n átmenő görbét. $\varrho' \in F(f\Gamma)$-hoz definiáljuk $\varrho(x) = \varrho'(f(x))\|f'(x)\|$ $x \in D$, különben 0-nak. ϱ megengedett: $\int_\gamma \varrho \,\mathrm{d}s = \int_{f\gamma} \varrho' \,\mathrm{d}s \geq 1$ ($\gamma \in \Gamma$)
$$\mathsf{M}(\Gamma) \leq \int \varrho^n \,\mathrm{d}m = \int_D \varrho'(f(x))^n |J_f(x)| \,\mathrm{d}m(x) = \int_{D'} \varrho'^n \,\mathrm{d}m \leq \int \varrho'^n \,\mathrm{d}m$$
Mert $\|f'(x)\|^n = |J_f(x)|$ abszolútértékben a Jacobi-determináns. Tehát $\mathsf{M}(\Gamma) \leq \mathsf{M}(f\Gamma)$, és fordítva is ezt f^{-1}-re alkalmazva.

1.2. Becslések

Az alábbiakban bizonyos szituációkban modulus becsléseket adunk, melyek hasznosak lesznek kvázikonform leképezések torzításának, határra való kiterjeszthetőségük vizsgálatára. Szükségünk lesz a Hardy–Littlewood–Pólya egyenlőtlenségre, először ezt tekintsük át.

Hardy–Littlewood–Pólya egyenlőtlenség

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos, nemnegatív, mérhető függvény. Jelölje $M(y)$ az $[f \geq y]$ nívóhalmaz mértékét. Az f szimmetrizáltja az $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f^*(x) = \inf\{y : M(y) \leq 2x\}$ $(x \geq 0)$, $f^*(x) = f^*(-x)$ $(x < 0)$ definiált függvény. Mivel $M : (0, \infty) \to \mathbb{R} \cup \infty$ monoton fogy, és előbb-utóbb 0-vá válik, f^* véges, nemnegatív és csökkenő $(x \geq 0)$. Látható, hogy $f \leq g$-ből $f^* \leq g^*$ következik, ha pedig $f(x)$ szigorúan fogy $(x \geq 0)$, folytonos és szimmetrikus, akkor $f^* = f$.

Ha egy mérhető E halmaz karakterisztikus függvényét tekintjük, akkor χ_E^* a $(-\frac{m(E)}{2}, \frac{m(E}{2})$ intervallum karakterisztikus függvénye. Általánosabban legyen f egy lépcsős függvény, diszjunkt előállítása: $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$ $(0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k)$. A $b_i = a_i - a_{i-1}$, $b_1 = a_1$ és $B_i = \cup_{j=1}^k A_j$ definicíókkal

$$f = \sum_{i=1}^k b_i \chi_{B_i}$$

A szimmetrizáció f-et szimmetrikusan csökkenő sorrendbe rendezi, így

$$f^* = \sum_{i=1}^k b_i \chi_{A_i}^*$$

1.2. tétel. *Legyenek f és g korlátos, nemnegatív, mérhető függvények. Ekkor*

$$\int_{\mathbb{R}} fg \,\mathrm{d}m \leq \int_{\mathbb{R}} f^* g^* \,\mathrm{d}m$$

Bizonyítás. $f = \chi_E$, $g = \chi_F$ karakterisztikus függvényekre

$$\int fg \,\mathrm{d}m = m(E \cap F) \leq m(E) = \int f^* g^* \,\mathrm{d}m$$

feltéve, hogy $m(E) \leq m(F)$.

Most tekintsünk lépcsős függvényeket. Legyen $f = \sum a_i f_i$ fenti alakú előállítás, ahol tehát f_i karakterisztikus függvény és $f^* = \sum a_i f_i^*$. Hasonlóan állítsuk elő g-t, $g = \sum b_i g_i$.

$$\int fg \,\mathrm{d}m = \sum a_i b_j \int f_i g_j \,\mathrm{d}m \leq \sum a_i b_j \int f_i^* g_j^* \,\mathrm{d}m = \int f^* g^* \,\mathrm{d}m$$

az előbbi eset szerint.

Általában pedig legyen (f_i) és (g_i) lépcsős függvények sorozata, melyek $f_i \nearrow f$ és $g_i \nearrow g$. Ekkor

$$\int fg \,\mathrm{d}m = \lim_{i\to\infty} \int f_i g_i \,\mathrm{d}m \leq \limsup_{i\to\infty} \int f_i^* g_i^* \,\mathrm{d}m \leq \int f^* g^* \,\mathrm{d}m$$

Gömbsapka egyenlőtlenség

Általánosítjuk a modulus fogalmát hiperfelületeken fekvő görbeseregekre. Csak a gömb és a hipersík esetére lesz szükségünk. Jelölje ezt S.

Definíció. Ha Γ S-en fekvő görbesereg, akkor ugyanúgy azon $\varrho : S \to \mathbb{R} \cup \infty$ nemnegatív Borel függvényeket hívjuk megengedettnek, amelyekre $\int_\gamma \varrho \, \mathrm{d}s \geq 1$ ($\gamma \in \Gamma$ lokálisan rektifikálható). Γ S-re vonatkozó p-modulusa

$$\mathsf{M}_p^S(\Gamma) = \inf_\varrho \int_S \varrho^p \, \mathrm{d}m_{n-1},$$

ahol ϱ a megengedett függvényeken fut, és m_{n-1} a felszíni integrál.

Gömbsapkán a gömb egy nyílt féltérrel vett metszetét értjük.

1.3. tétel. *Legyen K az S r sugarú gömb egy sapkája. E és F diszjunkt, nemüres részhalmazai $\bar{K}$-nak. $\Gamma = \Delta_K(E, F)$, ekkor*

$$\mathsf{M}_n^S(\Gamma) \geq \frac{b_n}{r},$$

ahol $b_n = 2^{-(n+1)} \omega_{n-2} \left(\int_0^\infty t^{-\frac{n-2}{n-1}} (1+t^2)^{-\frac{1}{n-1}} \, \mathrm{d}t \right)^{1-n}$, $b_2 = \frac{1}{2\pi}$ konstans.

Bizonyítás. Az $n = 2$ esetben K az $S^1(x_0, r)$ egy íve, és van egy γ részíve, ami Γ-hoz tartozik. Egy ϱ megengedett függvényre, így

$$1 \leq \left(\int_\gamma \varrho \, \mathrm{d}s \right)^2 \leq \int_\gamma \varrho^2 \, \mathrm{d}s \leq 2\pi r \int_S \varrho^2 \, \mathrm{d}m_1$$

a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség alapján. Tehát $\mathsf{M}_2^S(\Gamma) \geq \frac{1}{2\pi r} = \frac{b_2}{r}$.

Most tegyük fel, hogy $n \geq 3$. Feltehető, hogy $S = S^{n-1}(e_n/2, 1/2)$ és $e_n \in E$, mert az egyenlőtlenség invariáns a hasonlósági transzformációkra. Legyen f az $S^{n-1}(e_n, 1)$-re vonatkozó inverzió. Ennek segítségével átírjuk a feladatot $\mathbb{R}^{n-1}$-re. f S-et sztereografikusan leképezi $\bar{\mathbb{R}}^{n-1}$-re, $S \setminus K$ képe zárt golyó vagy zárt féltér (vagy üres). Még azt is feltehetjük, hogy $a = \alpha e_1 \in f(F)$ ($\alpha \geq 0$). Van egy G $n-2$ dimenziós nyílt félgömb, hogy $a + ty \in f(K)$ ($y \in G, t > 0$). Legyen $\gamma_y(t) = f(a + ty) \in S$ ($0 \leq t \leq \infty$). $\gamma_y \in \Gamma$ ($y \in G$), ezért

$$1 \leq \int_{\gamma_y} \varrho \, \mathrm{d}s = \int_0^\infty \frac{\varrho(f(a+ty))}{1 + |a+ty|^2} \, \mathrm{d}t$$

Felhasználva, hogy $\|f'(x)\| = \frac{1}{1+|x|^2}$. Integrálva $y \in G$-re

$$\frac{\omega_{n-2}}{2} \leq \int_H \frac{\varrho(f(x))}{|x-a|^{n-2}(1+|x|^2)} \, \mathrm{d}m_{n-1}(x),$$

ahol H egy féltér $\mathbb{R}^{n-1}$-ben. A Hölder-egyenlőtlenségből

$$\left(\frac{\omega_{n-2}}{2} \right)^n \leq \int_H \frac{\varrho(f(x))^n}{(1+|x|^2)^{n-1}} \, \mathrm{d}m_{n-1}(x) \left(\int_H |x-a|^{-\frac{n(n-2)}{n-1}} (1+|x|^2)^{-\frac{1}{n-1}} \, \mathrm{d}m_{n-1}(x) \right)^{n-1}$$

Az első integrál

$$\int_H \frac{\varrho(f(x))^n}{(1+|x|^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}m_{n-1}(x) = \int_{f(H)} \varrho^n\,\mathrm{d}m_{n-1} \le \int_S \varrho^n\,\mathrm{d}m_{n-1} \tag{1.2}$$

A második I integrál becsléséhez H helyett az egész $\mathbb{R}^{n-1}$-en integrálva

$$I \le \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \int_{-\infty}^{\infty} |z+(u-\alpha)e_1|^{-\frac{n(n-2)}{n-1}} (1+|z+ue_1|^2)^{-\frac{1}{n-1}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}m_{n-2}(z),$$

ahol $\mathbb{R}^{n-2} = \{x : x_1 = x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Rögzített $z \in \mathbb{R}^{n-2}$-re felülről becsüljük a belső integrált a Hardy–Littlewood–Pólya szimmetrizáció alapján.
Az $f_z(u) = |z+(u-\alpha)e_1|^{-\frac{n(n-2)}{n-1}}$, $g_z(u) = (1+|z+ue_1|^2)^{-\frac{1}{n-1}}$ függvények — $z \neq 0$ esetén — nemnegatív, korlátos, folytonos függvények. g_z szimmetrikus az origóra és tőle jobbra szigorúan monoton fogy, f_z-vel is ez a helyzet az origó helyett $u = \alpha$-val. Szimmetrizáltjaik tehát $f_z^*(u) = |z+ue_1|^{-\frac{n(n-2)}{n-1}}$, $g_z^*(u) = g_z(u)$.

$$\begin{aligned} I \le \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \int_{-\infty}^{\infty} f_z^* g_z^*\,\mathrm{d}m_1\,\mathrm{d}m_{n-2}(z) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |z|^{-\frac{n(n-2)}{n-1}} (1+|z|^2)^{-\frac{1}{n-1}}\,\mathrm{d}m_{n-1}(z) = \\ &= \omega_{n-2} \int_0^{\infty} t^{-\frac{n-2}{n-1}} (1+t^2)^{-\frac{1}{n-1}}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ezt az (1.2) egyenlőtlenséggel összevetve

$$\int_S \varrho^n\,\mathrm{d}m_{n-1} \ge 2b_n,$$

minden megengedett ϱ-ra, így $\mathsf{M}_n^S(\Gamma) \ge 2b_n = \frac{b_n}{r}$.

A $K = S$ esetben élesíthetjük az egyenlőtlenséget:

1.4. tétel. *Legyenek E és F diszjunkt, nemüres részhalmazai $S = S^{n-1}(x_0, r)$-nek. $\Gamma = \Delta_S(E,F)$-val*

$$\mathsf{M}_n^S(\Gamma) \ge \frac{c_n}{r},$$

ahol $c_n = 2^n b_n$. Két átellenes pont esetén egyenlőséget kapunk.

Bizonyítás. Az előző bizonyításban a G félgömb helyett vehetjük az egészet, ez adja a 2^n szorzót.

Az élességet pedig $S = S^{n-1}(e_n/2, 1/2)$, $E = \{0\}$, $F = \{e_n\}$ esetén a

$$\varrho(f(x)) = a_n |x|^{-\frac{n-2}{n-1}} (1+|x|^2)^{\frac{n-2}{n-1}}$$

függvény bizonyítja (a_n alkalmas konstans, f az előző bizonyításbeli sztereografikus projekció).

1.5. tétel. *Tegyük fel, hogy E és F diszjunkt halmazok metszik $S^{n-1}(t)$-t ($a < t < b$). G tartalmazza a $\{x : a < |x| < b\}$ gömbgyűrűt. Ekkor $\Gamma = \Delta_G(E,F)$-vel*

$$\mathsf{M}(\Gamma) \ge c_n \log \frac{b}{a}$$

Bizonyítás. $a < t < b$-re legyen $\Gamma_t = \Delta_{S(t)}(E \cap S(t), F \cap S(t))$. Tetszőleges $\varrho \in F(\Gamma)$ függvény $\varrho|_{S(t)}$ leszűkítése megengedett Γ_t-re nézve. Az előző tétel alapján

$$\int \varrho^n \,\mathrm{d}m \geq \int_a^b \int_{S(t)} \varrho^n \,\mathrm{d}m_{n-1} \,\mathrm{d}t \geq \int_a^b \mathsf{M}_n^{S(t)}(\Gamma_t) \,\mathrm{d}t \geq c_n \log \frac{b}{a}$$

1.3. Gyűrűk

Definíció. Egy $R \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ tartomány *gyűrű* ha kétszeresen összefüggő, azaz $\bar{\mathbb{R}}^n$-re vonatkozó komplementumának pontosan két összefüggőségi komponense van. Ha a két komponens C_0 és C_1, akkor a gyűrűt így jelöljük $R(C_0, C_1)$. R-en, mint ponthalmazon a tartományt értjük.

Legegyszerűbb példa gyűrűre a közönséges gömbgyűrű. Ismeretes, hogy a síkon a közönséges gyűrűk konform ekvivalencia erejéig minden gyűrűt reprezentálnak. Sugaraik hányadosa a gyűrű konform invariánsa. Ez magasabb dimenzióban nincs így, de a modulus segítségével itt is definiálhatunk konform invariánst.

Definíció. Egy $R = R(C_0, C_1)$ gyűrű modulusa, a $\Gamma_R = \Delta_R(C_0, C_1)$ görbesereg modulusa

$$\mathsf{M}(A) = \mathsf{M}(\Delta_R(C_0, C_1))$$

Láttuk, hogy a közönséges $a < |x| < b$ gyűrű modulusa $\omega_{n-1} \log^{1-n}(b/a)$. Egy gyűrű határának is két komponense van, nevezetesen $B_0 = C_0 \cap \bar{R}$ és $B_1 = C_1 \cap \bar{R}$. Ezeket összekötő görbesereggel is definiálhattuk volna a gyűrű-modulust.

1.5. állítás. *Legyen $R = R(C_0, C_1)$ gyűrű B_0 és B_1 határkomponensekkel. Ekkor $\mathsf{M}(R)$ megegyezik a következő görbeseregek modulusával*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 = \Delta_R(B_0, B_1) & \Gamma_2 = \Delta_{\bar{\mathbb{R}}^n}(B_0, B_1) & \Gamma_3 = \Delta_{\mathbb{R}^n}(B_0, B_1) \\ \Gamma_4 = \Delta_R^0(B_0, B_1) & \Gamma_5 = \Delta_{\bar{\mathbb{R}}^n}(C_0, C_1) & \Gamma_6 = \Delta_{\mathbb{R}^n}(C_0, C_1) \end{array}$$

Bizonyítás. Egyszerűen $\Gamma_1 = \Gamma_R$. $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 > \Gamma_1$ és $\Gamma_R \subset \Gamma_5 > \Gamma_R$ miatt $\mathsf{M}(\Gamma_1) = \mathsf{M}(\Gamma_2)$ és $\mathsf{M}(\Gamma_R) = \mathsf{M}(\Gamma_5)$. A végtelenen átmenő görbéktől eltekinthetünk (3,6). Az 1.4 állítás szerint pedig $\mathsf{M}(\Gamma_4) = \mathsf{M}(\Gamma_1)$.

1.6. állítás. *Legyenek $R = R(C_0, C_1)$ és $R' = R'(C_0', C_1')$ gyűrűk. Ha R bővebb R'-nél, ami alatt azt értjük, hogy $C_0 \subset C_0'$ és $C_1 \subset C_1'$, akkor $\mathsf{M}(R) \leq \mathsf{M}(R')$.*

Bizonyítás. Az előző 5-ös görbesereggel $\Gamma_R^5 \subset \Gamma_{R'}^5$.

1.7. állítás. *Egy R gyűrűre $\mathsf{M}(R)$ mindig véges.*

Bizonyítás. Legyen $R = R(C_0, C_1)$, feltehető, hogy C_0 korlátos. $h < \mathrm{d}(C_0, C_1)$-val definiáljuk ϱ-t C_0 h sugarú környezetén azonosan $1/h$-nak, különben pedig ϱ legyen 0. $\varrho \in F(\Gamma_R)$, így $\mathsf{M}(R) \leq \int \varrho^n \,\mathrm{d}m < \infty$.

A következő fejezetben – a Teichmüller gyűrű extremalitása folytán – látni fogjuk, hogy minden olyan $R = R(C_0, C_1)$ gyűrűre, amelyre $0, a \in C_0$ és $b, \infty \in C_1$, ahol $|a| = 1$, $|b| = r$, $\mathsf{M}(R) \geq \tau_n(r)$.

1.6. tétel. $\tau_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *a következő tulajdonságokkal rendelkezik:*

- τ_n *monoton fogy*
- $\lim_{r\to\infty} \tau_n(r) = 0$
- $\lim_{r\to 0} \tau_n(r) = \infty$
- $\tau_n(r) > 0$ *(*$r > 0$*)*

Szférikus metrika. Mivel nem akarjuk megkülönböztetni a ∞-t, vezessünk be metrikát az egész $\bar{\mathbb{R}}^n$-en a sztereografikus projekció segítségével. Majd erre fogalmazzuk át erre az iménti modulus becslést.

Definíció. $a, b \in \bar{\mathbb{R}}^n$ gömbi távolsága $\mathrm{q}(a,b) = |f(a) - f(b)|$, ahol $f : \bar{\mathbb{R}}^n \to S^n(e_{n+1}/2, 1/2) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sztereografikus projekció:

$$f(x) = e_{n+1} + \frac{x - e_{n+1}}{|x - e_{n+1}|^2}$$

Természetesen ez a topológiát nem változtatja meg. Mindig teljesülnek a $\mathrm{q}(a,b) \leq |a-b|$, $\mathrm{q}(a,b) \leq 1$ egyenlőtlenségek. A metrika konkrétan $a, b \in \mathbb{R}^n$-re

$$\mathrm{q}(a,b) = |a-b|(1+|a|^2)^{-\frac{1}{2}}(1+|b|^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \mathrm{q}(a,\infty) = (1+|a|^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Azon Möbius transzformációkat melyek megőrzik a q metrikát szférikus izometriának hívjuk. Ezek tranzitívan hatnak $\bar{\mathbb{R}}^n$-en, tetszőleges pontot elvihetünk egy előírtba, ugyanis ezt az S^n-en egy forgatással megtehetjük.

Adott $0 < r \leq 1$-re tekintsük azon $R = R(C_0, C_1)$ gyűrűket, melyre $\mathrm{q}(C_0) \geq r$, $\mathrm{q}(C_1) \geq r$. Ezekre a gyűrűkre véve az infimumot legyen $\kappa_n(r) = \inf \mathsf{M}(R)$.

1.7. tétel. $\kappa_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ *rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

- κ_n *monoton nő*
- $\lim_{r\to 0} \kappa_n(r) = 0$
- $\kappa_n(r) > 0$ $(0 < r \leq 1)$

Bizonyítás. Az első két tulajdonság triviális: $r < s$ esetén kevesebbet kötünk ki a gyűrűkről. A második meg csak annyit mond, hogy van olyan nem elfajult gyűrű (azaz komplementumának egyik komponense sem egyelemű), amelyik modulusa tetszőlegesen kicsi. Választhatunk pl. ilyen közönséges gyűrűt.

A harmadik bizonyításához legyen $R = R(C_0, C_1)$ olyan, hogy alkalmas $a, b \in C_0$ és $c, d \in C_1$ pontokkal $\mathrm{q}(a,b) \geq r$ és $\mathrm{q}(c,d) \geq r$. Egy szférikus izometria alkalmazásával feltehetjük, hogy $d = \infty$. Ekkor az 1.6 tétel szerint $\mathsf{M}(R) \geq \tau_n(\frac{|c-a|}{|b-a|})$. Azt kell még belássuk, hogy $\frac{|c-a|}{|b-a|}$ nem lehet akármilyen nagy. Feltéve, hogy $|a| \leq |b|$

$$r \leq \mathrm{q}(a,b) = |a-b|(1+|a|^2)^{-\frac{1}{2}}(1+|b|^2)^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{|a-b|}{1+|a|^2}$$

és

$$r \leq \mathrm{q}(c,\infty) = (1+|c|^2)^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{|c|}$$

Vagyis valóban

$$\frac{|c-a|}{|b-a|} \leq \frac{1+r|a|}{r^2(1+|a|^2)} \leq u(r) = \max_{0\leq t} \frac{1+rt}{r^2(1+t^2)} < \infty$$

Most még kössük ki azt is az $R = R(C_0, C_1)$ gyűrűre, hogy $\mathrm{q}(C_0, C_1) \leq t$ a $\mathrm{q}(C_0) \geq r$, $\mathrm{q}(C_1) \geq r$ feltételek mellett. Ekkor jelölje az infimumot $\kappa_n(r,t) = \inf \mathsf{M}(R)$. Tehát $\kappa_n(r,1) = \kappa(r)$.

1.8. tétel. *A $\kappa_n(r,t)$ $(0 < r, t \leq 1)$ függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

- *r-ben monoton növő*
- *t-ben monoton fogy*
- *$\kappa_n(r,t) \geq \kappa_n(r) > 0$*
- *$\lim_{t\to 0} \kappa_n(r,t) = \infty$ minden r-re*

Bizonyítás. Az első kettő triviális, a harmadik pedig a monotonitásból és az előző tételből következik. Az utolsó állítás bizonyításához tegyük fel, hogy $t < r/4$ és vegyünk egy (r,t) -hez tartozó $R = R(C_0, C_1)$ gyűrűt. Először vegyünk $a \in C_0$-t és $c \in C_1$-et, hogy $\mathrm{q}(a,c) \leq t$, majd $b \in C_0$-t és $d \in C_1$-t, hogy $\mathrm{q}(a,b) \geq r/2$ és $\mathrm{q}(c,d) \geq r/2$. Megintcsak feltehetjük, hogy $d = \infty$. Ekkor $\mathsf{M}(R) \geq \tau_n(\frac{|c-a|}{|b-a|})$.

$1/|c| \geq \mathrm{q}(c,\infty) \geq r/2$ és $1/|a| \geq \mathrm{q}(a,\infty) \geq \mathrm{q}(c,\infty) - \mathrm{q}(a,c) \geq r/2 - t \geq r/4$,

$$|c-a| = \mathrm{q}(a,c)(1+|a|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|c|^2)^{\frac{1}{2}} \leq t\left(1+\frac{16}{r^2}\right)$$

Másrészt $|b-a| \geq \mathrm{q}(a,b) \geq r/2$, vagyis

$$\mathsf{M}(R) \geq \tau_n\left(\frac{2t}{r}\left(1+\frac{16}{r^2}\right)\right)$$

Ami azt jelenti, hogy $\kappa_n(r,t) \geq \tau_n(\frac{2t}{r}(1+\frac{16}{r^2}))$ $(t < r/4)$. Az állítás adódik a $\lim_{s\to 0}\tau_n(s) = \infty$ határértékből.

2. fejezet

Szimmetrizáció

A modulus fontos tulajdonsága, hogy gyűrűk bizonyos szimmetrizációja során nem nő. Az első ilyen eredményeket szférikus, és pont szimmetrizációra Gehring adta [2]. Mi az 1-dimenziós szférikus szimmetrizációra bizonyítjuk ezt be Sarvas cikke alapján [3]. Ehhez a gyűrű–modulus egy ekvivalens – kapacitásnak nevezett – definíciójával dolgozunk.

Ebben a fejezetben gyűrű alatt olyan gyűrűt értünk, ami $\subset \mathbb{R}^n$, azaz a végtelent nem tartalmazza. Az $R = R(C_0, C_1)$ jelölésen pedig azt, hogy $\bar{\mathbb{R}}^n \setminus R$ korlátos komponense C_0, míg a másik $C_1 \cup \{\infty\}$.

2.1. Szférikus szimmetrizáció

A Steiner szimmetrizációhoz analóg módon definiáljuk a szférikus szimmetrizációt. Csak 1-dimenziós szférikus szimmetrizációval foglalkozunk. Csupán szimmetrizáció alatt is ezt értjük.

Legyen $T \subset \mathbb{R}^n$ hipersík, T_s egy zárt félhipersíkja, J legyen T_s határa T-re vonatkozóan. A következő körökön fogunk szimmetrizálni

$$K(z,r) = \begin{cases} \{z\} & \text{ha } r = 0, \\ S^{n-1}(z,r) \cap M(z) & \text{különben} \end{cases}$$

ahol $M(z)$ a z-n átmenő J-re merőleges sík. Egy $A \subset \mathbb{R}^n$ nyílt vagy zárt halmazra definiáljuk $\tilde{A}$ szimmetrizáltját. $K(z,r) \cap \tilde{A}$ legyen $K(z,r)$ olyan $K(z,r) \cap T_s$ középpontú íve, amelyre $m_1(K(z,r) \cap \tilde{A}) = m_1(K(z,r) \cap A$. Az ív attól függően legyen nyílt vagy zárt, hogy A nyílt vagy zárt. Ezentúl $K(z,r) \cap \tilde{A}$ akkor és csak akkor legyen az egész kör vagy üres, ha $K(z,r) \cap A$ az.

A szimmetrizált $\tilde{A}$ szimmetrikus T-re. Világos, hogy a szimmetrizáció monoton halmazfüggvény és megtartja a korlátos halmazokat. J-t hívjuk a szimmetrizáló tengelynek.

2.1. állítás. *Az 1-dimenziós szférikus szimmetrizáció kívülről és belülről is folytonos. Vagyis monoton növő G_i nyílt halmazokból álló sorozatra és monoton fogyó F_i zárt halmazokból álló sorozatra*

$$\widetilde{\cup G_i} = \cup \tilde{G}_i, \qquad \widetilde{\cap F_i} = \cap \tilde{F}_i$$

Bizonyítás. Az állítás a mérték folytonosságából következik. Legyen $G = \cup G_i$. Azt kell igazolnunk, hogy minden K szimmetrizáló körre $K \cap \tilde{G} = K \cap (\cup \tilde{G}_i)$. Feltehető, hogy $K \cap G \neq \emptyset$

és $K \not\subset G$, vagyis $K \cap \tilde{G} \neq K$ nyílt ív és minden $K \cap \tilde{G}_i$ egy koncenrtikus nyílt részíve. Azaz $K \cap (\cup \tilde{G}_i)$ is egy ilyen koncentrikus nyílt részív. Nem valódi részív, mert hosszuk megegyezik:

$$m_1(K \cap \tilde{G}) = m_1(K \cap G) = \lim m_1(K \cap G_i) = \lim m_1(K \cap \tilde{G}_i) = m_1(K \cap (\cup \tilde{G}_i)$$

Hasonlóan bizonyítható a kívülről való folytonosság is.

2.1. lemma. *Legyen F zárt halmaz. Ekkor minden $q > 0$-ra*

$$\tilde{F} + q\bar{B}^n \subset \widetilde{F + q\bar{B}^n}$$

Bizonyítás. Egy $K(z_0, r_0)$ kör (mérhető) részhalmazain legyen φ a szögmérték, $\varphi(A) = \frac{m_1(A)}{r_0}$. Jelöljük egy $A \subset K$ halmaz θ szögű környezetét $p_\theta(A)$-val ($\theta \leq \pi$):

$$p_\theta(A) = \{x \in K : \exists y \in A, \text{hogy } x - z_0 \text{ és } y - z_0 \text{ közti szög} \leq \theta\}$$

Tekinstünk tehát egy 1-dimenziós szférikus szimmetrizációt, J tengellyel. Legyen $x_0 \in \tilde{F}$ tetszőleges. $K(z_0, r_0)$ ($z_0 \in J$, $r_0 \geq 0$) a szimmetrizáló kör x_0-n keresztül.

$$A = K(z_0, r_0) \cap F, \qquad A^* = K(z_0, r_0) \cap \tilde{F}$$

jelölésekkel elegendő igazolnunk, hogy $A^* + q\bar{B}^n \subset \widetilde{A + q\bar{B}^n}$. Természetesen feltehető, hogy $r_0 > 0$. Tekintsünk most egy $K(z, r)$ ($z \in J$, $r \geq 0$) szimmetrizáló kört. Ekkor tehát

$$I = K(z, r) \cap (\widetilde{A + q\bar{B}^n}), \qquad I^* = K(z, r) \cap (A^* + q\bar{B}^n)$$

(esetleg elfajult) zárt ívekkel $I^* \subset I$ a bizonyítandó. Mivel koncentrikusak, ez annyit jelent, hogy $\varphi(I^*) \leq \varphi(I)$. Feltehető, hogy $r > 0$ és az is hogy $|z - z_0|^2 + |r - r_0|^2 \leq q^2$, különben $I = I^* = \emptyset$.

Képezzük le $K(z_0, r_0)$-t $K(z, r)$-re hasonlósági transzformációval:

$$f(x) = z + \frac{r}{r_0}(x - z_0) \qquad (x \in K(z_0, r_0))$$

Világos, hogy $\varphi(f(A)) = \varphi(A)$, $p_\theta(f(A)) = f(p_\theta(A))$. $K(z, r) \cap (A + q\bar{B}^n)$ pedig $f(A)$ egy θ szögű környezete $K(z, r)$-ben. Nevezetesen $\theta = \frac{1}{2}\varphi(K(z, r) \cap \bar{B}^n(x_0, q))$. Ezek alapján

$$\varphi(I) = \varphi(K(z,r) \cap \widetilde{A + q\bar{B}^n}) = \varphi(K(z,r) \cap (A + q\bar{B}^n)) = \varphi(p_\theta(f(A)) = \varphi(f(p_\theta(A)) = \varphi(p_\theta(A))$$

Hasonlóan

$$\varphi(I^*) = \varphi(K(z, r) \cap (A^* + q\bar{B}^n)) = \varphi(p_\theta(A^*))$$

Itt a szimmetrizáció definíciója alapján A^* egy zárt ív és $\varphi(A^*) = \varphi(A)$. A bizonyítandó $\varphi(I^*) \leq \varphi(I)$ következik tehát a következő állításból.

2.2. állítás. *Legyen $A \subset K$ zárt halmaz (K egy kör). I_A legyen egy zárt ív, melyre $\varphi(I_A) = \varphi(A)$. Ekkor*

$$\varphi(p_\theta(I_A)) \leq \varphi(p_\theta(A))$$

Bizonyítás. Az $A = K$ eset triviális, különben $K \setminus A$ megszámlálható sok diszjunkt nyílt $I_1, I_2, \dots$ ívből áll. Ha mindegyik $\varphi(I_i) \leq 2\theta$, akkor $p_\theta(A) = K$; az állítás teljesül. Ha pedig egy ívre $\varphi(I_i) > 2\theta$, akkor – $\varphi(A) = \varphi(I_A) < 2\pi - 2\theta$ figyelembevételével – $p_\theta(A)$ mértéke legalább, míg $p_\theta(I_A)$-é pontosan 2θ-val nő.

$$\varphi(p_\theta(A)) \geq \varphi(A) + 2\theta = \varphi(p_\theta(I_A))$$

2.3. állítás. *A szimmetrizáció nyílt és zárt leképezés, azaz nyílt halmaz szimmetrizáltja nyílt, zárt halmazé zárt.*

Bizonyítás. Legyen $G \neq \emptyset$ nyílt. Állítsuk elő korlátos nyílt $G_1, G_2, \dots$ halmazok uniójaként, hogy $\bar{G}_i \subset G$. A belülről való folytonosság szerint $\tilde{G} = \cup \tilde{G}_i$. Legyen $x \in \tilde{G}$. Létezik olyan G_i és $r > 0$ szám, hogy $x \in \tilde{G}_i$ és $\bar{G}_i + r\bar{B}^n \subset G$. A 2.1 lemma szerint

$$\tilde{G} \supset \widetilde{G_i + r\bar{B}^n} \supset \tilde{G}_i + r\bar{B}^n \supset \{x\} + r\bar{B}^n$$

A szimmetrizáció valóban nyílt leképezés.

Egy szimmetrizáció komplementer leképezése szintén szimmetrizáció, ugyanazzal a tengellyel és T hipersíkkal, csak T_s a másik félhipersík. Ezt nevezzük a komplementer szimmetrizációnak. Azaz A^c szimmetrizáltjának komplementerét A-nak a komplementer szimmetrizációnál vett szimmetrizáltja adja. Az előzőekben beláttuk, hogy minden szimmetrizáció nyílt, ezek szerint minden szimmetrizáció zárt is.

2.4. állítás. *Ha A összefüggő, akkor $\tilde{A}$ is. Ha $\bar{\mathbb{R}}^n \setminus A$ összefüggő, akkor $\bar{\mathbb{R}}^n \setminus \tilde{A}$ is.*

Bizonyítás. Legyen a szimmetrizáció a T_s félhipersíkkal megadva. $x \in \mathbb{R}^n$-re jelöljük $K(x)$-szel az x-n átmenő szimmetrizáló kört. Definiáljuk az $f : \mathbb{R}^n \to T_s$ folytonos leképezést, $f(x)$ legyen a $K(x) \cap T_s$ pont. Legyen $a \in A$-ra $S_a = (K(a) \cap \tilde{A}) \cup f(A)$. Ha A összefüggő akkor $f(A)$ is, mivel $K(a) \cap \tilde{A}$ is, és metszetük nemüres ($K(a) \cap \tilde{A} \cap f(A) = \{f(a)\}$) kapjuk, hogy S_a is összefüggő. $\tilde{A}$ is összefüggő, mert összefüggő halmazok uniója, melyek közös része nemüres: $\tilde{A} = \cup_{a \in A} S_a$, $\cap_{a \in A} S_a = f(A)$.

A másik esetben a komplementer szimmetrizációt tekintjük. Ügyelnünk kell arra is, hogy a komplementer képzéshez hozzá kell vennünk a ∞-t.

$$\bar{\mathbb{R}}^n \setminus \mathrm{Sym}(A) = \{\infty\} \cup (\mathrm{Sym}(A))^c = \{\infty\} \cup \mathrm{Sym}_c(A^c)$$

Ahol most Sym-mel jelöltük az eredeti szimmetrizációt és Sym_c-vel a komplementer szimmetrizációt. A $T'_s = \overline{T \setminus T_s}$ a Sym_c-t definiáló félhipersík. A szimmetrizáló $K(x)$ körök ugyanazok, mint előbb. Definiáljuk most az $f_c : \bar{\mathbb{R}}^n \to \bar{\mathbb{R}}^n$ folytonos leképezést a következőképp:

$$\{f_c(x)\} = K(x) \cap T'_s \quad (x \in \mathbb{R}^n), \quad f_c(\infty) = \infty$$

$\bar{\mathbb{R}}^n \setminus A$ összefüggőségéből $f_c(\bar{\mathbb{R}}^n \setminus A) = \{\infty\} \cup f_c(A^c)$ összefüggő. Ugyanúgy mint az imént kapjuk, hogy $S'_a = (K(a) \cap \mathrm{Sym}_c(A^c)) \cup f_c(\bar{\mathbb{R}}^n \setminus A)$ $(a \in A^c)$ összefüggő. $\bar{\mathbb{R}}^n \setminus \mathrm{Sym}(A) = \cup_{a \in A^c} S'_a$ ugyancsak összefüggő, ahogyan az előbb.

Gyűrű, függvény szimmetrizáltja

Egy $R = R(C_0, C_1)$ gyűrű R^* szimmetrizáltját a következőképp definiáljuk: $R^* = \widetilde{R \cup C_0} \setminus \widetilde{C_0}$. Mivel a szimmetrizáció nyílt és zárt leképezés, R^* nyílt, a 2.4 állítás szerint komplementerének pontosan két összefüggő komponense van. Valójában R^* gyűrű, de R^* összefüggőségét a továbbiakban – a szimmetrizációs egyenlőtlenség bizonyításához – nem fogjuk felhasználni.

Legyen $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. $F_a = [u \leq a]$, $G_a = [u < a]$ nívóhalmazok. Az u függvény szimmetrizáltja $u^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u^*(x) = \inf\{a \in \mathbb{R} : x \in \tilde{F}_a\}$ (az infimum véges).

2.2. lemma. *Minden $a \in \mathbb{R}$-re*

$$[u^* \leq a] = \tilde{F}_a, \qquad [u^* < a] = \tilde{G}_a$$

Bizonyítás. Legyen $F_a^* = [u^* \leq a]$, $\tilde{F}_a \subset F_a^*$ u^* definíciója folytán. Tegyük fel, hogy $x \in F_a^*$, azaz $u^*(x) \leq a$, $x \in \tilde{F}_b$ $(b > a)$. Egy monoton fogyó a-hoz tartó b_i sorozattal a kívülről való folytonosság alapján

$$x \in \cap \tilde{F}_{b_i} = \widetilde{\cap F_{b_i}} = \tilde{F}_a$$

A fordított $F_a^* \subset \tilde{F}_a$ tartalmazás is teljesül.
A belülről való folytonosság alapján egy monoton növő a-hoz tartó b_i sorozatra

$$\tilde{G}_a = \widetilde{\cup G_{b_i}} \cup \tilde{G}_{b_i} = \cup \tilde{F}_{b_i} = \cup [u^* \leq b_i] = [u^* < a]$$

Ez alapján u^* folytonos. Megmutatjuk, hogy Lipschitz folytonos függvény szimmetrizáltja is Lipschitz.

2.3. lemma. *Legyen $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz folytonos: $|u(x_1) - u(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n)$. Ekkor u^* is Lipschitz, ugyanazzal a konstanssal,*

$$|u^*(x_1) - u^*(x_2)| \leq M|x_1 - x_2| \qquad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n)$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $u^*(x_2) \geq u^*(x_1) = a$. Azt kell bebizonyítanunk, hogy $u^*(x_2) \leq a + Md$, ahol $d = |x_1 - x_2| > 0$. u Lipschitz folytonossága szerint $[u \leq a + Md] \supset [u \leq a] + d\bar{B}^n$. Ekkor az előző és a 2.1 lemma szerint

$$[u^* \leq a + Md] = \widetilde{[u \leq a + Md]} \supset \widetilde{[u \leq a] + d\bar{B}^n} \supset \widetilde{[u \leq a]} + d\bar{B}^n = [u^* \leq a] + d\bar{B}^n$$

Az utóbbi halmaznak eleme x_2, így az állítás teljesül.

2.2. Kapacitás

Definíció. Egy $u : U \to \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt) függvény vonalakon abszolút folytonos (ACL), ha folytonos, és minden $Q \subset U$ kompakt n-intervallumra u Q majdnem minden koordinátatengelyekkel párhuzamos szakasza mentén abszolút folytonos.

2.5. állítás. *Egy $u : U \to \mathbb{R}$ ACL függvénynek majdnem mindenütt létezik a parciális deriváltja, és $\partial_i u$ Borel mérhető.*

Bizonyítás. Rögzített i-re legyen E azon $x \in U$ pontok halmaza, ahol $\partial_i u(x)$ nem létezik. Ez Borel halmaz, ugyanis az hogy létezik a parciális derivált azt jelenti, hogy az összes parciális Dini derivált megegyezik és véges; folytonos függvény Dini deriváltjai mérhetőek.

Elegendő megmutatni, hogy minden $Q \subset U$ n-intervallumra $m(E \cap Q) = 0$. Jelöljük P_i-vel az $[x_i = 0]$ altérre vett merőleges vetítést. Fubini tétele szerint

$$m(E \cap Q) = \int_{P_i Q} m_1(P_i^{-1}(x) \cap E \cap Q)\, \mathrm{d}m_{n-1}(x)$$

Ha u abszolút folytonos a $P_i^{-1}(x) \cap Q$ szakaszon, akkor itt $\partial_i u$ majdnem mindenütt létezik, $m_1(P_i^{-1}(x) \cap E \cap Q) = 0$. Mivel u ACL az integrandus m_{n-1}-majdnem mindenütt 0, $m(E \cap Q) = 0$. $\partial_i u$ Borel mérhető, mert a Dini derivált Borel mérhető.

Definíció. Egy $R = R(C_0, C_1)$ gyűrű (R lehet akár nem összefüggő) p-kapacitása ($p \geq 1$)

$$\text{p-cap}(R) = \inf_u \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, \mathrm{d}m,$$

ahol u a következő megengedett függvényeken fut. $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ACL, $0 \leq u \leq 1$ mindenütt és $C_0 \subset [u = 0]$, $C_1 \subset [u = 1]$, valamint $\overline{[u < 1]} \subset R \cup C_0$ kompakt.

A kapacitás invariáns az ortogonális transzformációkra, ortogonális f-re $|\nabla(u \circ f)(x)| = |\nabla u(f(x))|$ ott ahol az utóbbi létezik. Valamint monoton: $R \subset R'$ – úgy hogy, $C_0 \supset C_0'$ és $C_1 \supset C_1'$ – esetén $\text{p-cap}(R) \geq \text{p-cap}(R')$.

Mint a bevezetőben említettük a szimmetrizációs egyenlőtlenséget a kapacitásra fogjuk bebizonyítani. Azt, hogy ez tényleg megegyezik a gyűrű-modulussal csak érzékeltetjük.

2.1. tétel.

$$M_p(R) = p\text{-}cap(R)$$

Bizonyításvázlat. Legyen u megengedett R-re nézve. Álljon Γ $\Delta_R(C_0, C_1)$ rektifikálható görbéiből. $\mathsf{M}_p(R) \leq \text{p-cap}(R)$ bizonyításához feltehető, hogy $|\nabla u| \in L_p$. Fuglede tétele ([8],[1]) szerint eltekinthetünk azon görbéktől, melyeken u nem abszolút folytonos. $\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma :$ u nem abszolút folytonos γ egy zárt részgörbéjén$\}$ görbeseregre $\mathsf{M}_p(\Gamma_0) = 0$. $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$ görbére pedig $\gamma_0 : [0, \alpha] \to \mathbb{R}^n$ normál reprezentációjával

$$1 = u(\gamma_0(\alpha)) - u(\gamma_0(0)) \leq \int_0^\alpha |(u \circ \gamma_0)'(t)| \, \mathrm{d}t \leq \int_0^\alpha |(\nabla u \circ \gamma_0)(t)| \, |\gamma_0'(t)| \, \mathrm{d}t = \int_\gamma |\nabla u| \, \mathrm{d}s$$

a 0.1 tétel szerint. Ez azt jelenti, hogy $|\nabla u| \in F(\Gamma \setminus \Gamma_0)$, vagyis

$$\mathsf{M}_p(R) = \mathsf{M}_p(\Gamma) = \mathsf{M}_p(\Gamma \setminus \Gamma_0) \leq \int |\nabla u|^p \, \mathrm{d}m$$

Ez tetszőleges megengedett u-ra igaz, kapjuk $\mathsf{M}_p(R) \leq \text{p-cap}(R)$.

Most legyen adva egy $\varrho \in F(\Gamma)$. A kérdéses u-t a következőképp konstruáljuk

$$u(x) = \inf_{\gamma_x} \int_{\gamma_x} \varrho \, \mathrm{d}s,$$

ahol γ_x C_0-t és $x \in \bar{R}$-et összekötő rektifikálható görbéken fut. Ha tudnánk, hogy u ACL és $|\nabla u| \leq \varrho$ majdnem mindenütt R-ben, akkor kész lennénk.

$$\text{p-cap}(R) \leq \int_R |\nabla u|^p \, \mathrm{d}m \leq \int_R \varrho^p \, \mathrm{d}m$$

Azonban itt technikai nehézségek merülnek fel. Teljes bizonyítás található Ziemer [6] cikkében.

A kapacitás definíciójában valójában számos szűkebb függvény-osztályra vehető volna az infimum. A szimmetrizációs egyenlőtlenség bizonyítása pont azon alapszik, hogy egy speciális, egyszerűbb szerkezetű függvényekre vezetjük vissza. Ezt több lépésben végezzük el. Először intergál-átlagolás segítségével folytonosan differenciálható függvényekre.

2.4. lemma. *Jelölje $W = W(R)$ azon folytonosan differenciálható függvények halmazát, melyre $0 \leq w \leq 1$ ($w \in W$), w 0 C_0-n, 1 C_1-en, és ∇w eltűnik R egy kompakt részhalmazán kívűl. Ekkor*

$$\textit{p-cap}(R) = \inf_{w \in W} \int |\nabla w|^p \, \mathrm{d}m$$

Bizonyítás. Mivel szűkebb függvény-osztályt veszünk, az infimum csak nőhetne. Azt kell belátni, hogy egy megengedett u-hoz, van olyan $w \in W$, aminek p-normája tetszőlegesen megközelíti az u függvényét.

Rögzített $0 < \varepsilon < 1/2$-ra legyen

$$v = \begin{cases} 0 & \text{ha } u < \varepsilon, \\ \frac{u-\varepsilon}{1-2\varepsilon} & \text{ha } \varepsilon \leq u \leq 1-\varepsilon, \\ 1 & \text{ha } 1-\varepsilon < u \end{cases}$$

A $[\varepsilon \leq u \leq 1-\varepsilon]$ egy kompakt halmaz $\subset R$, d távolságra ∂R-től. Legyen U az $\{y : |y| < c\}$ golyó ($c < b$), és

$$w(x) = \frac{1}{m(U)} \int_U v(x+y) \, \mathrm{d}m(y)$$

Ez folytonosan differenciálható, megfelelő értékekkel C_0-n és C_1-en. Eleve feltehető, hogy $\nabla u \in L_p$, amiből következik, hogy kompakt halmazon L_1-beli, így v is. Ezért be lehet deriválni w definíciójában:

$$\nabla w(x) = \frac{1}{m(U)} \int_U \nabla v(x+y) \, \mathrm{d}m(y)$$

A Jensen-egyenlőtlenség alapján (és az integrálok felcserélésével)

$$\int |\nabla w(x)|^p \, \mathrm{d}m(x) \leq \frac{1}{m(U)} \int_U \int |\nabla v(x+y)|^p \, \mathrm{d}m(x) \, \mathrm{d}m(y)$$

A belső integrált felülről becsüli $(1-2\varepsilon)^{-p} \int |\nabla u|^p \, \mathrm{d}m$,

$$\int |\nabla w|^p \, \mathrm{d}m \leq (1-2\varepsilon)^{-p} \int |\nabla u|^p \, \mathrm{d}m$$

és $\varepsilon \to 0$ szerint valóban teljesül a kívánt összefüggés.

Egy $w \in W$ függvényre a $[0 < w < 1]$ halmaz korlátos, és $d > 0$ távolságra van R^c-től. Trianguláljuk a teret $c < d$ átmérőjű szimplexekkel, véges sok metszi a fenti kompakt halmazt. Ezek uniója megad egy szimplicális komplexust, melynek teste P poliéder $\subset R$ (magát a komplexust is P-vel jelöljük). Definiáljunk egy új u függvényt, P-n legyen szimpliciális – azaz a szimplexeken belül lineáris – a csúcsokon pedig w értékeit vegye föl, a P komplementerének komponenseiben pedig, megintcsak w-nek megfelelően azonosan 0-t vagy 1-et. Elég finom triangulációval $(c \to 0)$ $\int |\nabla u|^p \,\mathrm{d}m \to \int |\nabla w|^p \,\mathrm{d}m$. Ez vezet a következő definícióhoz.

Definíció. Egy $R = R(C_0, C_1)$ gyűrűhöz egyszerű megengedett függvényeknek nevezzük, azokat az u megengedett függvényeket, amelyekhez van olyan $P \subset R$ szimpliciális komplexus, hogy erre nézve u szimpliciális, P komplementerének komponenseiben azonosan 0 vagy 1. Emellett rendelkezzen a következő tulajdonsággal. Jelölje $a_1, \dots, a_k$ a csúcsokban felvett értékeket. Minden $a \in (0,1) \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$-ra $[u = a]$ olyan $(n-1)$-dimenziós szimplexekből álljon, melyek normálvektorai $\notin \mathbb{R}^{n-2} = [x_{n-1} = 0, x_{n-2} = 0]$. Itt $\mathbb{R}^{n-2}$ a vizsgált szimmetrizációnk tengelye lesz.

Az egyszerű megengedett függvények halmazát $W_s(R)$-rel jelöljük.

2.5. lemma. *A kapacitás definíciójában a megengedett függvények helyett elegendő az egyszerű megengedett függvényeket tekinteni.*

Bizonyítás. A definíció előtti megállapítások szerint csak az utolsó feltételt kell biztosítanunk. Világos, hogy $a \in (0,1) \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$-ra $[u = a]$ véges sok $(n-1)$-dimenziós szimplex uniója, legyenek a fellépő normálvektorok $p_1, \dots, p_m$. Alkalmas f ortogonális transzformációval elérhető, hogy semelyik $f(p_i) \notin \mathbb{R}^{n-2}$ és $|f(x) - x| < \mathrm{d}(P, R^c)$ $(x \in P)$.

Ekkor $u_0 = u \circ f^{-1}$-gyel, $|\nabla u_0| = |\nabla u|$, az u_0-hoz tartozó $f(P)$ poliéder is $\subset R$, valamint az új normálvektorok, $f(p_i)$-k, megfelelőek: $u_0 \in W_s(R)$.

2.6. lemma. *Ha $u \in W_s(R)$, akkor u^* megengedett R^*-ra nézve.*

Bizonyítás. Világos, hogy $0 \le u^* \le 1$. $C_0 \subset [u \le 0]$ miatt $\tilde{C}_0 \subset [u^* \le 0]$ (2.2 lemma). Valamint $R \cup C_0 \subset [u < 1]$ miatt $\widetilde{R \cup C_0} \subset [u^* < 1]$.

Az u függvény Lipschitz, ezért a 2.3 lemma alapján u^* is, mindenesetre u^* ACL. Végül $[u^* < 1] = \widetilde{[u < 1]} \subset \widetilde{\overline{[u < 1]}} \subset \widetilde{R \cup C_0}$. S minthogy kompakt halmaz szimmetrizáltja kompakt u^* megengedettségének minden feltétele teljesül.

Ezen előkészületek után térjünk rá a szimmetrizációs egyenlőtlenség bizonyítására.

2.2. tétel. *Minden R gyűrűre fenn áll a*

$$p\text{-}cap(R^*) \le p\text{-}cap(R)$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Az előzőek szerint csak azt kell megmutatnunk, hogy $u \in W_s(R)$ függvényre

$$\int |\nabla u|^p \,\mathrm{d}m \ge \int |\nabla u^*|^p \,\mathrm{d}m$$

Mivel a p-kapacitás hasonlósági transzformációkra invariáns feltehető, hogy a $\{x \in \mathbb{R}^n : x_{n-1} \geq 0, x_n = 0\}$ félhipersík definiálja a szimmetrizációt. Ekkor a szimmetrizáló tengely az $x_1, \ldots, x_{n-2}$ által kifeszített $\mathbb{R}^{n-2}$. Az utolsó két koordináta-tengely meghatározta síkon pedig bevezetve az (r, φ) polárkoordinátákat, minden $K(z, r)$ ($z \in \mathbb{R}^{n-2}$, $r \geq 0$) szimmetrizáló kör $\{(r, \varphi, z) : 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ alakú.

Legyen P az u-hoz tartozó poliéder. A csúcsokban felvett értékek legyenek $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = 1$, $D_i = [a_{i-1} < u < a_i]$, $D_i^* = [a_{i-1} < u^* < a_i]$. Mivel az $[u^* = a_i]$ halmazokon majdnem mindenütt $\nabla u^* = 0$ – ugyanis majdnem minden pont sűrűségi pont – elegendő belátnunk, hogy rögzített i-re m_{n-1}-majdnem minden (r_0, z_0)-ra ($r_0 \geq 0$, $z_0 \in \mathbb{R}^{n-2}$)

$$\int_{K(z_0,r_0)\cap D_i} |\nabla u|^p \,\mathrm{d}m_1 \geq \int_{K(z_0,r_0)\cap D_i^*} |\nabla u^*|^p \,\mathrm{d}m_1 \tag{2.1}$$

Ehhez feltehetjük, hogy $K = K(z_0, r_0)$ nem metszi P $(n-2)$-vázát, és természetesen azt is, hogy $K \cap D_i \neq \emptyset$. $D_i \cap K$ olyan ívekből áll melyeken u szigorúan monoton φ szerint, $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ folytonos és nem tűnik el. Itt u szimpliciális volta mellett felhasználtuk, hogy minden $[u = a]$ ($a_{i-1} < a < a_i$) szinthalmazt K csak véges sok pontban metsz az egyszerű megengedett függvény definíciója alapján. Ezen ívek végpontjaiban u a $t_1 < t_2 < \ldots < t_L$ értékeket vegye fel. Tehát $[t_k < u < t_{k+1}]$ páros sok nyílt ívből áll, melyeken u szigorúan monoton φ szerint. Legyenek ezek az ívek φ koordinátájuk szerint (α_j, β_j), ($j = 1, 2, \ldots 2M$), ahol $0 \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \ldots \leq \alpha_{2M} < \beta_{2M} \leq 2\pi$, és például $(-1)^{j+1}\frac{\partial u}{\partial \varphi}(r_0, \varphi, z_0) > 0$ $(\alpha_j < \varphi < \beta_j)$.

Másrészt az u^* függvény szimmetrikus $\mathbb{R}^{n-1}$-re, és φ szerint monoton nő ($0 \leq \varphi \leq \pi$), illetve monoton fogy ($\pi \leq \varphi \leq 2\pi$). Így $[t_k < u < t_{k+1}] \cap K$ két szimmetrikus ívből áll, legyen ezek közül a felső féltérbe eső (α, β) ($0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$). Itt u szigorúan monoton, mert $m_1(K \cap [u^* = t]) = m_1(K \cap [u = t]) = 0$ ($t_k < t < t_{k+1}$).
Ezek alapján a (2.1)-hez elegendő

$$\sum_{j=1}^{2M} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} G(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \geq 2\int_{\alpha}^{\beta} G^*(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \tag{2.2}$$

ahol $G(\varphi) = r_0\,|\nabla u(r_0, \varphi, z_0)|^p = r_0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r_0^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{\partial u}{\partial z_i}\right)^2\right]^{p/2}$, és $G^*(\varphi)$ ugyanez u^*-ra.

Legyen $\tau_j : (\alpha_j, \beta_j) \to (t_k, t_{k+1})$ homeomorfizmus, amit u ad meg, φ_j jelölje az inverzét. Hasonlóan $\tau^* : (\alpha, \beta) \to (t_k, t_{k+1})$ homeomorfizmus, amit u^* ad, és legyen φ^* az inverze. A függvény szimmetrizálása alapján

$$\varphi^*(t) = \frac{1}{2r_0} m_1(K \cap [u \leq t]) = \frac{1}{2}\left(2\pi - \sum_{j=1}^{2M}(-1)^j \varphi_j(t)\right), \text{ és} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_j'(t) &= \left[\frac{\partial u}{\partial \varphi}(r_0, \varphi_j(t), z_0)\right]^{-1} = (-1)^{j+1}|\varphi_j'(t)|,\\
\varphi^{*\prime}(t) &= \left[\frac{\partial u^*}{\partial \varphi}(r_0, \varphi^*(t), z_0)\right]^{-1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2M}(-1)^{j+1}\varphi_j'(t) > 0
\end{aligned}$$

φ-t a φ_j és φ^* függvényekkel paraméterezve a (2.2)-beli integrálok

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2M} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} G(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{j=1}^{2M} G(\varphi_j(t))|\varphi_j'(t)|\,\mathrm{d}t \\
\int_{\alpha}^{\beta} G^*(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} G^*(\varphi^*(t))|\varphi^{*\prime}(t)|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

az előzőekben megállapított előjeleket is figyelembevéve.

Szóval elegendő az integrandusok közötti $H(t) \geq 2H^*(t)$ $(t_k < t < t_{k+1})$ egyenlőtlenséget bizonyítani. Annak köszönhetően, hogy K nem metszi P $(n-2)$-vázát és $u \in W_s(R)$, rögzített t-re a (2.3) egyenlet kiterjed (r_0, z_0) egy környezetére. Azaz egy $\varepsilon > 0$-ra $C_j = [u = t] \cap B^n(p_j, \varepsilon)$, $p_j = (r_0, \varphi_j(t), z_0)$ egy $(n-1)$-dimenziós nyílt golyó, és (r_0, z_0) ε-környezetében

$$\Phi^*(r,z) = \frac{1}{2}\left(2\pi - \sum_{j=1}^{2M}(-1)^j \Phi_j(r,z)\right), \tag{2.4}$$

ahol $\Phi^*(r,z)$ a $K(z,r) \cap [u^* = t] \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ pont φ-koordinátája, $\Phi_j(r,z)$ pedig $K(z,r) \cap C_j$-é. Tehát ebben a környezetben

$$u(r, \Phi_j(r,z), z) = u^*(r, \Phi^*(r,z), z) = t$$

Valamint $\Phi_j(r_0, z_0) = \varphi_j(t)$ és $\Phi^*(r_0, z_0) = \varphi^*(t)$. Parciálisan differenciálva r és $z_1, \ldots, z_{n-2}$ szerint u ezen parciálisaira kapunk kifejezéseket, amelyekkel

$$\begin{aligned}
H(t) &= \sum_{j=1}^{2M} F\left[\left(1 + \sum_{\nu=0}^{n-2} a_{j\nu}^2\right)^{1/2} b_j^{-1}\right] b_j \\
H^*(t) &= \frac{1}{2} F\left\{\left[1 + \sum_{\nu=0}^{n-2}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2M}(-1)^{j+1} a_{j\nu}\right)^2\right]^{1/2} \left(\frac{2}{\sum_{j=1}^{2M} b_j}\right)\right\} \sum_{j=1}^{2M} b_j
\end{aligned}$$

ahol $F(t) = t^p$ $(t \geq 0)$ a p-hatványra emelés, és

$$\begin{aligned}
a_{j0} &= r_0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial r}(r_0, \phi_j(t), z_0) \qquad a_{j\nu} = r_0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial z_\nu}(r_0, \phi_j(t), z_0) \quad (1 \leq \nu \leq n-2) \\
b_j &= r_0 |\varphi_j'(t)| = r_0 (-1)^{j+1} \varphi_j'(t)
\end{aligned}$$

$H^*(t)$ kifejezésében felhasználva (2.4)-t is.

Az $\left((-1)^{j+1}, a_{j0}, a_{j1}, \ldots, a_{jn-2}\right)$ $(j = 1, 2, \ldots, 2M)$ vektorokra alkalmazzuk a Minkowski-egyenlőtlenséget, nevezetesen, $(-1)^{j+1}$ szerinti előjeles összegükre a $\|\cdot\|_2$ norma háromszög-egyenlőtlenségét.

$$\left[(2M)^2 + \sum_{\nu=0}^{n-2}\left(\sum_{j=1}^{2M}(-1)^{j+1} a_{j\nu}\right)^2\right] \leq \sum_{j=1}^{2M}\left(1 + \sum_{\nu=0}^{n-2} a_{j\nu}^2\right)^{1/2}$$

Ebből – felhasználva még, hogy F monoton nő és konvex – kapjuk a kívánt egyenlőtlenséget.

$$2H^*(t) \le F\left\{\left[\sum_{j=1}^{2M}\left(1+\sum_{\nu=0}^{n-2}a_{j\nu}^2\right)^{1/2}\right]\left(\sum_{j=1}^{2M}b_j\right)^{-1}\right\}\sum_{j=1}^{2M}b_j \le$$
$$\sum_{j=1}^{2M}F\left[\left(1+\sum_{\nu}a_{j\nu}^2\right)^{1/2}b_j^{-1}\right]b_j = H(t)$$

2.3. Extremális gyűrűk

A szimmetrizációs egyenlőtlenség lehetőséget ad, hogy szimmetrikus feltételekkel kitűzött feladatokra megadjuk az extremális megoldást. Például a Grötzsch és Teichmüller gyűrűk nemcsak a síkon, de magasabb dimenzióban is extremálisak.

Grötzsch és Teichmüller gyűrűk. A következő $R = R(C_0, C_1)$ gyűrűk közül keressük a legkisebb modulusút

- (Grötzsch feladat) C_0 az egységgolyó és $se_1, \infty \in C_1$ $(s > 1)$, a *Grötzsch gyűrű* (jel. $R_{G,n}(s)$) az, amelyre C_1 az $[se_1, \infty]$ sugár.
- (Teichmüller feladat) $0, -e_1 \in C_0$ és $P, \infty \in C_1$, ahol $|P| = s$ $(s > 0)$. A *Teichmüller gyűrű* (jel. $R_{T,n}(s)$) esetén $C_0 = [-e_1, 0]$ és $C_1 = [se_1, \infty]$ az e_1 tengely szakaszai.

2.3. tétel. *A Grötzsch és Teichmüller gyűrűk extremálisak – a maguk feladatára nézve.*

Bizonyítás. Sorra $(n-1)$-szer alkalmazzunk 1-dimenziós szférikus szimmetrizációt az e_1 tengelyen átmenő $\{e_1, \dots, e_n\}\setminus\{e_i\}$ $(i > 1)$ által kifeszített $(n-1)$-dimenziós alterekre. Végül olyan gyűrűket kapunk, melyek továbbra is teljesítik a kitűzött feltételeket, és a megadott speciális gyűrűk részei. Mivel a szimmetrizáció során a modulus csak csökkent, ez a kívánt extremalitást biztosítja.

Szoros kapcsolat van a két gyűrű modulusa között. A síkon ez könnyen látható, ehhez képezzük le konform módon a Grötzsch gyűrűt egy közönséges gyűrűre. Ezt tükrözve az egységkörre olyan konform leképezést kapunk, ami egy Teichmüller típusú gyűrűt képez a kétszer olyan széles körgyűrűre.

A kapcsolat kifejtéséhez vezessük be a következő függvényeket

$$\begin{aligned}\gamma_n(s) = \mathsf{M}(R_{G,n}(s)) &= \omega_{n-1}\log^{1-n}\Phi(s)\\ \tau_n(s) = \mathsf{M}(R_{T,n}(s)) &= \omega_{n-1}\log^{1-n}\Psi(s)\end{aligned}$$

A Φ ill. Ψ függvények közönséges $\{x : a < |x| < b\}$ gömbgyűrű esetén b/a-t adnának.

2.6. állítás. *Fennáll a következő függvény-egyenlet*

$$\begin{aligned}\Psi(s-1) &= \Phi(\sqrt{s})^2 \quad (s > 1), \quad \textit{másszóval}\\ \gamma_n(s) &= 2^{n-1}\tau_n(s^2-1) \quad (s > 1)\end{aligned}$$

Bizonyítás. Tekintsük a T Teichmüller típusú gyűrűt, amit $C_0 = [0, \frac{1}{s}e_1]$ és $C_1 = [se_1, \infty]$ definiál. Ez az $R_{T,n}(s^2-1)$-hez hasonló, így modulusa $\tau_n(s^2-1)$. Az egységgömb két s paraméterű Grötzsch gyűrűre vágja ($G = R_{G,n}(s)$), amelyek egymás inverzió általi képei. Ezek görbeseregei szeparáltak, és minorálják T görbeseregét, ezért az 1.2 állítás szerint $\tau_n(s^2-1) \leq 2^{1-n}\gamma_n(s)$. A másik irány igazolásához legyen ϱ megengedett T görbeseregére nézve. Jelöljük az inverziót $\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$-vel. A $\sigma(x) = \varrho(x) + \frac{\varrho(\tilde{x})}{|x|^2}$ (itt $\frac{1}{|x|^2}$ az inverzió deriváltjának normája) megengedett a G gyűrűre nézve, ugyanis legyen γ az egységgömböt $[se_1, \infty]$-vel összekötő görbe, ekkor $\gamma + \tilde{\gamma}$ T komplementerének két komponensét köti össze ($\tilde{\gamma}$ γ inverzió általi képe),

$$\int_\gamma \sigma \,\mathrm{d}s = \int_\gamma \varrho(x) \,\mathrm{d}s + \int_\gamma \frac{\varrho(\tilde{x})}{|x|^2} \,\mathrm{d}s = \int_{\gamma+\tilde{\gamma}} \varrho(x) \,\mathrm{d}s \geq 1$$

Természetesen a megengedettséghez feltehető, hogy σ G-re koncentrált, azaz $\int_G \sigma^n(x) \,\mathrm{d}m$-et kell vizsgálnunk, azonban ez átírható az egész téren vett integrállá: σ definíciója alapján $\sigma(\tilde{x}) = |x|^2\sigma(x)$, $\int_{\mathbb{R}}^n \sigma^n(x) \,\mathrm{d}m = 2\int_G \sigma^n(x) \,\mathrm{d}m$. Továbbá a Minkowski-egyenlőtlenség szerint

$$\left(\int \sigma^n(x) \,\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int \varrho^n(x) \,\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\int \frac{\varrho(\tilde{x})}{|x|^2} \,\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{n}} = 2\left(\int \varrho^n(x) \,\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{n}}$$

Ez adja a még hiányzó $\mathsf{M}(G) \leq 2^{n-1}\mathsf{M}(T)$ egyenlőtlenséget.

A következőkben $\gamma_n(s)$, $\tau_n(s)$ aszimptotikáját vizsgáljuk ($s \to \infty$) $\Phi(s)$ illetve $\Psi(s)$ nyelvén. Természetesen mind γ_n és τ_n monoton fogy. Először is jegyezzük meg a

$$\lim_{s\to 1+} \gamma_n(s) = \infty, \qquad \lim_{s\to\infty} \gamma_n(s) = 0$$
$$\lim_{s\to 0+} \tau_n(s) = \infty, \qquad \lim_{s\to\infty} \tau_n(s) = 0$$

határértékeket. A két függvény közti kapcsolat alapján elegendő az egyikkel foglalkozni. A ∞-beli határérték egyszerűen adódik abból, hogy $R_{G,n}(s)$-t minorálja a $\{x : 1 < |x| < s\}$ gömbgyűrű (ez Φ-re azt jelenti, hogy $\Phi(s) \geq s$). A 0-beli határérték pedig az 1.5 tételből következik: az $S^{n-1}(t)$ gömb metszi $R_{T,n}(s)$ komplementumának mindkét komponensét ($s < t < 1$), $\tau_n(s) \geq c_n \log(1/s)$.

2.7. lemma. $\frac{\Phi(s)}{s}$ *monoton nő.*

Bizonyítás. Legyenek $1 < t < s$. Az $R = R_{G,n}(s)$ gyűrűt a t sugarú $S(t)$ gömb egy közönséges gömbgyűrűre ($[1 < |x| < t]$) és egy Grötzsch típusú gyűrűre vágja (s/t paraméterű). Megintcsak az 1.2 állítás szerint $\log\Phi(s) \geq \log t + \log\Phi(s/t)$, azaz $\log\Phi(s) - \log s \geq \log\Phi(s/t) - \log(s/t)$, $\Phi(s)/s$ valóban monoton nő.

Ezek szerint létezik a következő határérték $\log\lambda_n = \lim_{s\to\infty}\Phi(s)/s$, λ_n-et Grötzsch gyűrű konstansnak nevezzük. A későbbiekben megmutatjuk, hogy ez véges. Ez adja a $\Phi(s) \leq \lambda_n s$ felső becslést. A függvényegyenlettel és a korábbi triviális $s \leq \Phi(s)$-sel együtt,

2.8. lemma. *A* λ_n *Grötzsch gyűrű konstanssal*

$$\begin{aligned} s \leq \;& \Phi(s) &\leq \lambda_n s \qquad & (s > 1) \\ s+1 \leq \;& \Psi(s) &\leq \lambda_n^2(s+1) \qquad & (s > 0) \end{aligned}$$

A Grötzsch gyűrű konstans becslése

A gyűrű e_1 tengely körüli szimmetriájának köszönhetően visszavezetjük a feladatot egy síkbeli feladatra – ahol már konform leképezéssel áttérhetünk közönséges körgyűrűre.

2.4. tétel. *$\lambda_2 = 4$, $\quad 4 \le \lambda_n \le 4e^{\bar{c}_n}$, ahol*

$$\bar{c}_n = \frac{\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}} \int_0^\pi \int_0^1 \frac{\sin^{n-2}\varphi}{t} \left[\left(\frac{\sqrt{1+t^4-2t^2\cos(2\varphi)}}{1-t^2} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} - 1 \right] \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\varphi$$

Bizonyítás. Valamivel egyszerűbbek lesznek a számolások, ha inkább a Grötzsch gyűrű invertáltját vizsgáljuk, ez G az egységgolyó bemetszve a $[0, se_1]$ szakasszal ($0 < s < 1$), $\mathsf{M}(G) = \gamma_n(1/s)$.

Az e_1-n átmenő (2-dimenziós) síkokat $S^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ paraméterezi ($\mathbb{R}^{n-1} = \{x : x_1 = 0\}$ az e_1 tengely ortogonális kiegészítője), eltekintve attól, hogy két átellenes pont ugyanazt a síkot adja. Vezessük be $\mathbb{R}^{n-1}$-en az r (a sugár, amit most negatívnak is megengedünk – ezért a kétszeres multiplicitás), $v \in S^{n-2}$ polárkoordinátákat. Ezzel a térfogat szerinti integrál így írható

$$2\int_{\mathbb{R}^n} \varrho^n \,\mathrm{d}m_n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S^{n-2}} \int_{-\infty}^{\infty} |r|^{n-2} \varrho^n(x_1, rv)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x_1 =$$
$$\int_{S^{n-2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |r|^{n-2} \varrho^n(x_1, rv)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}v$$

G-re megengedett ϱ-val – csak e_1 átmenő síkon haladó görbékre alkalmazva a megengedettséget – a belső kettős integrál legalább M, kapjuk, hogy $\int \varrho^n \,\mathrm{d}m \ge \frac{\omega_{n-2}}{2} M$. Itt M-mel a következő síkbeli feladat megoldását jelöljük

$$M = \inf_{\varrho} \int |y|^{n-2} \varrho^n(x,y)\,\mathrm{d}m_2, \tag{2.5}$$

ϱ a síkbeli $\{z : |z| < 1\} \setminus [0, s]$ Grötzsch gyűrű megengedett függvényein fut. A síkot a komplex síknak képzeljük ($z = x + iy$). Tehát $\mathsf{M}(G) \ge \frac{\omega_{n-2}}{2} M$.

Másrészt megmutatjuk, hogy itt valójában egyenlőség áll. Vegyünk egy ϱ függvényt a síkbeli feladatból, ezt terjesszük ki v-től függetlenül, n-edik hatványának térfogat-integrálja a fentiek szerint $\frac{\omega_{n-2}}{2} M \int |y|^{n-2} \varrho^n(x,y)\,\mathrm{d}m_2$. Csak azt kell belássuk, az n-dimenziós térre kiterjesztett függvény megengedett G-re nézve. Azaz azt, hogy egy, a G komplementumának két komponensét összekötő görbe mentén, az ívhossz szerinti integrálja legalább 1. No de v megváltozásától eltekintve is, az integrál már legalább 1.

Tekintsük a $k(z) = \frac{z}{(1+z)^2}$ Koebe-függvényt, ez az egységkört konforman képezi le az $[1/4, +\infty]$-nel bemetszett síkra. Emellett $k(0) = 0$, $k'(0) = 1$, így origó körüli kört infinitezimálisan origó körüli körbe visz a sugár megtartásával. Még alkalmazva a reciprok függvényt és $s/4$-szeres nagyítást, a $[0, s]$ szakasszal bemetszett síkra képez. A kompozíció $f(z) = \frac{s}{4}\frac{(1+z)^2}{z}$ az R gyűrűt a kívánt síkbeli Grötzsch gyűrűre képezi, ahol $R = \{z : |z| < 1\} \setminus k^{-1}(\{w : |w| \le s/4\})$. A k-nál vett őskép majdnem az origó körüli $s/4$ sugarú körlap, úgy értve, hogy tartalmazza $\bar{B}(0, \Delta_1)$-et, és belefoglalható $\bar{B}(0, \Delta_2)$-be, és mind $\Delta_1 = \Delta_1(s)$, $\Delta_2 = \Delta_2(s)$ aszimptotikusan $s/4$ ($s \to 0$). Valójában ez mutatja, hogy $\lambda_2 = 4$.

A fenti f konform leképezés segítségével átírjuk a (2.5) feladatot az R gyűrűre. Egy (2.5)-beli ϱ-nak áttérve R-re $\tilde{\varrho}(z) = \varrho(f(z))|f'(z)|$ felel meg, ezekre ugyanazt jelenti a megengedettség a két gyűrűn. Az integráltranszformáció

$$\int |\Im(w)|^{n-2}\varrho^n(w)\,\mathrm{d}m_2 = \int |\Im(f(z))|^{n-2}\,\varrho^n(f(z))|f'(z)|^2\,\mathrm{d}m_2 = \int \left|\frac{\Im(f(z))}{f'(z)}\right|^{n-2}\tilde{\varrho}^n(z)\,\mathrm{d}m_2$$

alapján feladatunk tehát az $M = \inf\limits_{\varrho}\int h^{n-2}(z)\varrho^n(z)\,\mathrm{d}m_2$ (ϱ megengedett R-re nézve) becslése, $h(z) = \left|\frac{\Im(f(z))}{f'(z)}\right|$. Számítsuk ki $h(z)$-t, $z = te^{i\varphi}$-vel

$$\frac{4}{s}|\Im f(z)| = |\sin\varphi|\left(\frac{1}{t} - t\right), \qquad \frac{4}{s}|f'(z)| = \left|1 - \frac{1}{z^2}\right| = \sqrt{1 + \frac{1}{t^4} - \frac{2}{t^2}\cos(2\varphi)}$$

Innen

$$h(z) = h_\varphi(t) = |\sin\varphi| t \frac{1 - t^2}{\sqrt{1 + t^4 - 2t^2\cos(2\varphi)}}$$

Először alsó becslést adunk a kérdéses infimumra. Legyen ϱ megengedett az R gyűrűre, ekkor méginkább megengedett a bővebb $B(0,1)\setminus\bar{B}(0,\Delta_1)$ gyűrű görbeseregére. Ezt is csak ezen közönséges gyűrű sugár irányú görbéire alkalmazzuk. Rögzített $\varphi \in [0, 2\pi)$ szögű sugáron tekintve a megengedettségből a Hölder-egyenlőtlenség a következőt adja

$$1 \le \left(\int_{\Delta_1}^1 \varrho_\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)^n \le \int_{\Delta_1}^1 t h_\varphi^{n-2}(t)\varrho_\varphi^n(t)\,\mathrm{d}t \left(\int_{\Delta_1}^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{n-1}} h_\varphi^{\frac{n-2}{n-1}}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{n-1} \tag{2.6}$$

A jobb oldal második integráljából a $|\sin\varphi|$ tényezőt ki lehet emelni, a maradék

$$\int_{\Delta_1}^1 \frac{1}{t}\left(\frac{\sqrt{1 + t^4 - 2t^2\cos(2\varphi)}}{1 - t^2}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}\,\mathrm{d}t$$

logaritmikusan tart ∞-hez: $\le \log\frac{1}{\Delta_1} + c_\varphi$. Ahol

$$c_\varphi = \int_0^1 \frac{1}{t}\left[\left(\frac{\sqrt{1 + t^4 - 2t^2\cos(2\varphi)}}{1 - t^2}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} - 1\right]\,\mathrm{d}t$$

véges pozitív konstans. Az, hogy véges – ha máshogy nem – későbbi számításainkból látszódni fog. A (2.6)-ben alkalmazva ezeket, majd átosztva

$$\frac{|\sin\varphi|^{n-2}}{(c_\varphi - \log\Delta_1)^{n-1}} \le \int_{\Delta_1}^1 t h_\varphi^{n-2}(t)\varrho_\varphi^n(t)\,\mathrm{d}t$$

adódik. Most integráljunk $\varphi \in [0, 2\pi)$ szerint, így a jobb oldalon a becsülni kívánt mennyiség jelenik meg. Míg a bal oldalt tovább becsülhetjük a konvex $x^{-(n-1)}$ $(x > 0)$ függvényre és a $\sin\varphi$ sűrűségfüggvényű mértékre alkalmazván a Jensen-egyenlőtlenséget.

$$\frac{\int_0^{2\pi}|\sin\varphi|^{n-2}\,\mathrm{d}\varphi}{(\bar{c} - \log\Delta_1)^{n-1}} \le \int_0^{2\pi}\frac{|\sin\varphi|^{n-2}}{(c_\varphi - \log\Delta_1)^{n-1}}\,\mathrm{d}\varphi \le \int_{B(0,1)\setminus\bar{B}(0,\Delta_1)} h^{n-2}(z)\varrho^n\,\mathrm{d}m_2$$

$\bar{c} = \bar{c}_n$ a c_φ-k átlaga: $\bar{c} = \frac{\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}} \int_0^\pi c_\varphi \sin^{n-2}\varphi \,\mathrm{d}\varphi$, azt is felhasználva, hogy $\int_0^\pi \sin^{n-2} \mathrm{d}\varphi = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-2}}$. Ez tehát az M-re kapott alsó becslés, ami $\mathsf{M}(G) = \frac{\omega_{n-2}}{2} M$ figyelembevételével

$$\frac{\omega_{n-1}}{(\bar{c} - \log \Delta_1)^{n-1}} \le \mathsf{M}(G) = \gamma_n(1/s) = \frac{\omega_{n-1}}{\log^{n-1} \Phi(1/s)}$$

alsó becsléshez vezet. Φ-re a következő adódik

$$s\Phi(1/s) \le s\frac{e^{\bar{c}}}{\Delta_1} \to 4e^c \quad (s \to 0)$$

Összevetve $\bar{c}$ és c_φ definíciójával ez adja λ_n-re a felső becslést.

Az ellenkező irányú becsléshez elegendő az R gyűrűre felírt feladatban egy megengedett ϱ függvényt találni. Vegyük a szűkebb $K = B(0,1) \setminus \bar{B}(0, \Delta_2)$ közönséges körgyűrű extremális függvényét $\varrho_\varphi(t) = \log^{-1}(\frac{1}{\Delta_2})\frac{1}{t}\chi_K$, ez R-re nézve méginkább megengedett. Felhasználva a triviális $h_\varphi(t) \le t|\sin\varphi|$ becslést

$$\int h^{n-2}(z)\varrho^n(z)\,\mathrm{d}m_2 = \frac{1}{\log^n \frac{1}{\Delta_2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 t h_\varphi^{n-2}(t) \frac{1}{t^n} \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi \le \frac{\int_0^{2\pi} |\sin\varphi|^{n-2}\,\mathrm{d}\varphi}{\log^{n-1}\frac{1}{\Delta_2}}$$

Ugyanúgy mint az imént – áttérve G modulusára – $s\Phi(1/s) \ge s/\Delta_2 \to 4$ $(s \to 0)$, kapjuk $\lambda_n \ge 4$.

Most a $\bar{c}$-t definiáló integrált becsüljük meg, hogy explicit becslést kapjunk λ_n-re.

2.5. tétel. *$\bar{c}_n \le n + \frac{1}{n} - \frac{3}{2} - \log 2$, így $\lambda_n \le 2\exp(n + \frac{1}{n} - \frac{3}{2})$*

Bizonyítás. $\bar{c}$ a c_φ-k átlaga, ezek közül $c_{\pi/2}$ a legnagyobb (jelöljük most I_n-nel), először ezt becsüljük meg.

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{t}\left[\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} - 1\right]\mathrm{d}t = \int_1^\infty \frac{u^{\frac{n-2}{n-1}} - 1}{u^2 - 1}\,\mathrm{d}u$$

az $u = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ transzformációval. Csempésszünk be $(n-1)$-et $u^{-\frac{n}{n-1}}$ integráljaként.

$$I_n - (n-1) = \int_1^\infty \frac{u^{-\frac{n}{n-1}} - 1}{u^2 - 1}\,\mathrm{d}u \nearrow \int_1^\infty \frac{u^{-1} - 1}{u^2 - 1}\,\mathrm{d}u = -\int_1^\infty \frac{1}{u(u+1)}\,\mathrm{d}u = -\log 2$$

Integrálható majoráns az első tag $(n = 2)$ abszolútértéke $1/u^2$. Vagyis $I_n \le n - 1 - \log 2$.

Most megnézzük, hogy c_φ mennyivel kisebb $c_{\pi/2}$-nél. Ehhez $a^\alpha - b^\alpha$ típusú mennyiséget kell becsülnünk ($a = 1 + 2t^2 + t^4$, $b = 1 - 2t^2\cos(2\varphi) + t^4$, $\alpha = \frac{1}{2}\frac{n-2}{n-1}$). Ezt megtehetjük a Lagrange középérték-tétel alapján: $a^\alpha - b^\alpha \ge \alpha a^{\alpha-1}(a - b)$ $(a \ge b,\ \alpha < 1)$. Ez azért hasznos, mert így becsülve a $c_{\pi/2} - \bar{c}$ különbséget adó kettős integrált, az felbomlik φ és t szerinti integrálokra, melyeket kiintegrálva kapjuk: $c_{\pi/2} - \bar{c} \ge 1/2 - 1/n$. Összevetve $c_{\pi/2}$ felső becslésével adódik az állítás.

A Grötzsch gyűrű konstansra kapott felső becslés megegyezik az [5]-belivel, ez az legjobb ismert korlát.

Megjegyezzük, hogy a síkbeli Grötzsch gyűrű extremalitásának egyszerű következménye a Koebe-1/4 tétel.

2.6. tétel. *Legyen f konform az egységkörben, $f(0) = 0$, $|f'(0)| = 1$ normálással. Ekkor f felveszi a teljes $\{w : |w| < 1/4\}$ kört.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f kihagy egy w értéket. Ekkor a $\{z : s < |z| < 1\}$ körgyűrű képe egy olyan $R = R(C_0, C_1)$ gyűrű, amelyre $C_0 = f([|z| \le s])$ és $w \in C_1$. C_0 tartalmazza $\bar{B}(0, m(s))$-t ($m(s) = \min\{|f(z)| : |z| = s\}$). A normálásnak köszönhetően $m(s) \sim s$ ($s \to 0$). A konform invariancia és a Grötzsch gyűrű extremalitása miatt

$$2\pi \log^{-1}(1/s) = \mathsf{M}(R) \ge \gamma_2(\frac{|w|}{m(s)}) = 2\pi \log^{-1} \Phi\left(\frac{|w|}{m(s)}\right)$$

Azaz $\frac{1}{s} \le \Phi\left(\frac{|w|}{m(s)}\right) \le \lambda_2 \frac{|w|}{m(s)}$, vagyis $|w| \ge 1/4 \frac{m(s)}{s}$, és $s \to 0$ adja, hogy $|w| \ge 1/4$.

Az $1/4$ konstans éles, mint azt a már fellépő Koebe-függvény bizonyítja.

3. fejezet

Kvázikonform leképezések

3.1. A definíció

Legyen $f : D \to D'$ homeomorfizmus. Megállapodásunk szerint beleértjük, hogy $D, D' \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ tartományok és f ráképezés. Belső és külső *dilatációi* mérik, hogy mennyire torzul a görbeseregek modulusa.

$$K_I(f) = \sup \frac{\mathsf{M}(f\Gamma)}{\mathsf{M}(\Gamma)}, \qquad K_O(f) = \sup \frac{\mathsf{M}(\Gamma)}{\mathsf{M}(f\Gamma)}$$

ahol Γ a D-beli görbeseregeken fut, kivéve azokat, melyekre $\mathsf{M}(\Gamma)$ és $\mathsf{M}(f\Gamma)$ egyszerre 0 vagy ∞. A konstans görbét tartalmazó görbeseregek tehát nem számítanak a dilatáció szempontjából, ezentúl eleve ki is zárjuk ezeket a görbesereg fogalmából.

Definíció. $f : D \to D'$ homeomorfizmus belső dilatációja $K_I(f)$, külső dilatációja $K_O(f)$ és maximális dilatációja $K(f) = \max\{K_I(f), K_O(f)\}$. Ha $K(f) \le K < \infty$, akkor f K-kvázikonform, azaz ha

$$\frac{1}{K}\mathsf{M}(\Gamma) \le \mathsf{M}(f\Gamma) \le K\mathsf{M}(\Gamma)$$

minden Γ D-beli görbeseregre. f kvázikonform, ha alkalmas K-val K-kvázikonform, vagyis $K(f) < \infty$.

K_I vagy K_O legalább 1 (valójában mindkettő), így $K \ge 1$. Konform f-re természetesen $K(f) = K_I(f) = K_O(f) = 1$, konform leképezés 1-kvázikonform. A megfordítás is igaz, nevezetesen teljesül a Liouville tétel általánosítása: csak a Möbius transzformációk 1-kvázikonformak ($n \ge 3$).

Számos más definíció létezik a kvázikonformanciára (analitikus, metrikus), pl. elegendő a modulus torzítást gyűrűkre megkövetelni.

A definíció azonnali következményei

3.1. állítás.
- *$K_I(f^{-1}) = K_O(f), \quad K_O(f^{-1}) = K_I(f), \quad K(f^{-1}) = K(f)$*
- *$K_I(f \circ g) \le K_I(f)K_I(g), \quad K_O(f \circ g) \le K_O(f)K_O(g), \quad K(f \circ g) \le K(f)K(g)$*
- *f K-kvázikonform $\Rightarrow$ f^{-1} K-kvázikonform*
- *f K_1-kvázikonform, g K_2-kvázikonform $\Rightarrow$ $f \circ g$ K_1K_2-kvázikonform*

Eszerint a tartományok közötti kvázikonform ekvivalencia valóban ekvivalencia reláció.

Definíció. $A \in GL(n)$ lineáris transzformációra definiáljuk rendre belső, külső és lineáris dilatációit

$$H_I(A) = \frac{|\det A|}{\ell(A)^n}, \quad H_O(A) = \frac{\|A\|^n}{|\det A|}, \quad H(A) = \frac{\|A\|}{\ell(A)}$$

ahol $\ell(A) = \min\{|Ax| : |x| = 1\}$.

Geometriai jelentésük a következő: A az egységgolyót egy E ellipszoidra képezi, legyenek B_I és B_O a beírt ill. köréírt golyók. Ekkor $H_I = \frac{m(E)}{m(B_I)}$, $H_O = \frac{m(B_O)}{m(E)}$ és $H^n = \frac{m(B_O)}{m(B_I)}$. Ha E féltengelyeit $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ jelöli, akkor $\|A\| = a_1$, $\ell(A) = a_n$, $|\det A| = a_1 \ldots a_n$, így

$$H = \frac{a_1}{a_n}, \quad H_I = \frac{a_1 \ldots a_n}{a_n^{n-1}}, \quad H_O = \frac{a_1^{n-1}}{a_2 \ldots a_n}$$

$n = 2$ esetén $H_I = H_O = H$, általában pedig

$$H^n = H_I H_O, \quad H_I \leq H_O^{n-1}, \quad H_O \leq H_I^{n-1}$$

Egyszerű tulajdonságok:

3.2. állítás.

- $H_I(A^{-1}) = H_O(A), \quad H_O(A^{-1}) = H_I(A), \quad H(A^{-1}) = H(A)$
- $H_I(AB) \leq H_I(A)H_I(B), \quad H_O(AB) \leq H_O(A)H_O(B), \quad H(AB) \leq H(A)H(B)$

Kvázikonform diffeomorfizmusok

Diffeomorfizmus esetén – a lineáris derivált leképezések segítségével – könnyen meghatározhatjuk a dilatációkat.

3.1. tétel. *Legyen $f : D \to D'$ diffeomorfizmus ($D, D' \subset \mathbb{R}^n$). Ekkor dilatációi*

$$K_I(f) = \sup_{x \in D} H_I(f'(x)), \quad K_O(f) = \sup_{x \in D} H_O(f'(x))$$

Bizonyítás. Elegendő például a második egyenlőtlenséget bizonyítani, mert a másik következik ebből azt az inverz függvényre alkalmazva. $K_O(f) \leq \sup H_O(f'(x))$ igazolásához feltehető, hogy $\sup H_O(f'(x)) = K < \infty$, vagyis $\mathsf{M}(\Gamma) \leq K\mathsf{M}(f\Gamma)$ a bizonyítandó tetszőleges D-beli Γ görbeseregre. Vigyünk át a szokásos módon egy $\varrho' \in F(f\Gamma)$ függvényt D-re: $\varrho(x) = \varrho'(f(x))\|f'(x)\|$ D-n, azonkívül 0. $\varrho \in F(\Gamma)$ ugyanis egy $\gamma \in \Gamma$ lokálisan rektifikálható görbére $\int_\gamma \varrho \, \mathrm{d}s \geq \int_{f\gamma} \varrho' \, \mathrm{d}s \geq 1$ a 0.2 tétel szerint. Ebből

$$\mathsf{M}(\Gamma) \leq \int \varrho^n \, \mathrm{d}m = \int_D \varrho'^n(f(x))\|f'(x)\|^n \, \mathrm{d}m(x) \leq K \int_D \varrho'^n(f(x))|J_f(x)| \, \mathrm{d}m(x) = K \int_{D'} \varrho'^n \, \mathrm{d}m$$

Ez tetszőleges $\varrho' \in F(f\Gamma)$-ra igaz, így $\mathsf{M}(\Gamma) \leq K\mathsf{M}(f\Gamma)$.

A másik irány igazolásához azt kell belássuk, hogy tetszőleges $a \in D$ pontra $H_O(f'(a)) = \frac{\|f'(a)\|^n}{|J_f(x)|} \leq K_O(f)$. Az f függvény, csupán a-beli differenciálhatósága szerint, az a körüli golyó képe infinitezimálisan $f(a)$ körüli ellipszoid. Az egyszerűség kedvéért feltehető, hogy $a = 0, f(a) = 0$ és $f'(0)e_i = a_i e_i$, ahol $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$. Ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenség

$$a_1^n \leq K_O(f) a_1 \ldots a_n \tag{3.1}$$

Természetesen $a_1 > 0$ feltehető, legyen $0 < \varepsilon < a_1/2$ és $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_i < \delta\}$ egy kocka, hogy $\bar{Q} \subset D$ és $|f(x) - f'(0)x| \leq \varepsilon\delta$ $(x \in \bar{Q})$. Legyen E és F Q két szemközti $x_1 = 0$ és $x_1 = \delta$ lapja. A kocka modulusa 1, $\Gamma = \Delta_Q(E, F)$-vel $\mathsf{M}(\Gamma) = 1$. Becsüljük meg $\mathsf{M}(f\Gamma)$-t. $f(E)$ az $x_1 = \pm\varepsilon\delta$ hipersíkok között, míg $f(F)$ az $x_1 = (a_1 \pm \varepsilon)\delta$ hipersíkok között fekszik. Tehát minden $\gamma \in f\Gamma$ görbe hossza legalább $(a_1 - 2\varepsilon)\delta$. Másrészt $f(Q)$ része az $\{x : -\varepsilon\delta \leq x_i \leq (a_i + \varepsilon)\delta\}$ téglának. A modulus triviális felső becslése alapján (1.3 állítás) $\mathsf{M}(f\Gamma) \leq (a_1 + 2\varepsilon) \ldots (a_n + 2\varepsilon)(a_1 - 2\varepsilon)^{-n}$, vagyis

$$(a_1 - 2\varepsilon)^n \leq \frac{\mathsf{M}(\Gamma)}{\mathsf{M}(f\Gamma)}(a_1 + 2\varepsilon) \ldots (a_n + 2\varepsilon)$$

$\frac{\mathsf{M}(\Gamma)}{\mathsf{M}(f\Gamma)} \leq K_O(f)$ és $\varepsilon \to 0$-ból következik (3.1).

Néhány közvetlen következmény:

3.3. állítás. *Egy $f : D \to D'$ diffeomorfizmus pontosan akkor K-kvázikonform, ha*

$$\frac{\|f'(x)\|^n}{K} \leq |J_f(x)| \leq K\ell(f'(x))^n \qquad (x \in D)$$

3.4. állítás. *Ha egy f kvázikonform differenciálható egy a pontban, akkor $J_f(x) = 0$ esetén $f'(a) = 0$.*

3.5. állítás. *Egy $f : D \to D'$ diffeomorfizmusra*

$$1 \leq K_I(f) \leq K_O(f)^{n-1}, \quad 1 \leq K_O(f) \leq K_I(f)^{n-1}$$

Valójában az utóbbi tetszőleges homeorfizmusra is igaz.

Példák

Az előbbiek alapján néhány speciális leképezésre kiszámoljuk a dilatációkat.

Lineáris leképezés. $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris bijekcióra $A'(x) = A$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, így $K_I(A) = H_I(A)$ és $K_O(A) = H_O(A)$. Azaz A kvázikonform.

Sugármenti leképezés. Legyen $a \neq 0$ valós szám, $f(x) = |x|^{a-1}x$ egy $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ diffeomorfizmus. Kiterjeszthető $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ homeomorfizmussá: $f^*(0) = 0$, $f^*(\infty) = \infty$ $a > 0$, illetve $f^*(0) = \infty$, $f^*(\infty) = 0$ $a < 0$ esetén.

Az $f'(x)$-hez tartozó ellipszoid féltengelyei $|a||x|^{a-1}, |x|^{a-1}, \ldots, |x|^{a-1}$. Vagyis

$$\begin{aligned} K_I(f) &= |a|, & K_O(f) &= |a|^{n-1} & &\text{ha } |a| \geq 1 \\ K_I(f) &= |a|^{1-n}, & K_O(f) &= |a|^{-1} & &\text{ha } |a| \leq 1 \end{aligned}$$

Tehát f kvázikonform. Mivel egy rögzített ponton átmenő görbék serege nulla modulusú, f^* dilatációi megegyeznek f dilatációival, f^* is kvázikonform.

Az $a = -1$ esetben konform leképezést kapunk, az egységgömbre vonatkozó inverziót.

Összehajtás. Legyen $x = (r, \varphi, z)$ cilindrikus koordinátákkal, azaz $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}^{n-2}$ és

$$x_1 = r\cos\varphi, \qquad x_2 = r\sin\varphi, \qquad x_i = z_{i-2} \quad (3 \leq i \leq n)$$

Egy $0 < \alpha \leq 2\pi$ szögre jelöljük a $0 < \varphi < \alpha$ tartományt D_α-val. Két ilyen tartományt természetes módon egymásba hajt az $f : D_\alpha \to D_\beta$ $f(r, \varphi, z) = (r, \frac{\beta}{\alpha}\varphi, z)$ diffeomorfizmus.

Most az ellipszoid féltengelyei $\frac{\beta}{\alpha}, 1, \ldots, 1$. Feltéve, hogy $\alpha \leq \beta$

$$K_I(f) = \beta/\alpha, \qquad K_O(f) = (\beta/\alpha)^{n-1},$$

f kvázikonform. $\alpha = \pi$, $\beta = 2\pi$ esetből látható, hogy a féltér kvázikonform ekvivalens egy olyan tartománnyal aminek nincs külseje.

Kúpok. Legyen (R, φ, θ) szférikus koordináták $\mathbb{R}^3$-ban, azaz $x \in \mathbb{R}^3$ $(R \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi)$

$$x_1 = R\sin\theta\cos\varphi \quad x_2 = R\sin\theta\sin\varphi \quad x_3 = R\cos\theta$$

$C_\alpha = [\theta < \alpha]$ egy α szögű kúp $(0 < \alpha \leq \pi)$. Két kúp közti természetes leképezés az $f : C_\alpha \to C_\beta$ $f(R, \varphi, \theta) = (R, \varphi, \frac{\beta}{\alpha}\theta)$. Most az $f'(x)$-hez tartozó ellipszis féltengelyei

$$\frac{\beta}{\alpha},\ 1,\ \frac{\sin(\theta\frac{\beta}{\alpha})}{\sin\theta}$$

Feltéve, hogy $\alpha \leq \beta$ a dilatációk

$$K_I(f) = \max\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}, \frac{\beta\sin^2\alpha}{\alpha\sin^2\beta}\right), \qquad K_O(f) = \frac{\beta^2\sin\alpha}{\alpha^2\sin\beta}$$

Láthatjuk, hogy f kvázikonform, ha $\beta < \pi$. $\beta = \pi$ esetén pedig más leképezés sem tud kvázikonform lenni: később belátjuk, hogy a féltér és egy sugár komplementere nem kvázikonform ekvivalens.

3.2. Torzítási tételek

A Teichmüller gyűrű extremalitása folytán

3.6. állítás. *Tegyük fel, hogy az $R = R(C_0, C_1)$ gyűrű olyan, hogy $a, b \in C_0$ és $c, \infty \in C_1$. Ekkor*

$$\mathsf{M}(R) \geq \tau_n\left(\frac{|c-a|}{|b-a|}\right)$$

Ez alapján, ha C_0 és C_1 sem elfajult, akkor a modulus pozitív, másrészt az egy ponton átmenő összes görbék modulusa nulla, így:

3.7. állítás. *$R = R(C_0, C_1)$ gyűrű modulusa pontosan akkor nulla, ha C_0 vagy C_1 egyetlen pont.*

3.2. tétel. *Létezik olyan monoton növő* $\Theta = \Theta_{K,n} : (0,1) \to \mathbb{R}$ *függvény,* $\lim_{r\to 0} \Theta(r) = 0$, $\lim_{r\to 1} \Theta(r) = \infty$ *határértékekkel, hogy a következő teljesül.*

Legyen $f : D \to D'$ *K-kvázikonform leképezés a* $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ *valódi résztartományok között. Ha* $x, y \in D$ *olyanok, hogy* $0 < |y-x| < \mathrm{d}(x, \partial D)$, *akkor*

$$\frac{|f(y)-f(x)|}{\mathrm{d}(f(x),\partial D')} \quad \textit{és} \quad \frac{|f(y)-f(x)|}{\mathrm{d}(f(y),\partial D')} \quad \textit{mindegyike legfeljebb} \quad \Theta\left(\frac{|y-x|}{\mathrm{d}(x,\partial D)}\right)$$

Tehát $\mathrm{d}(f(x),\partial D')$ csak úgy lehet kicsi, ha $|f(y)-f(x)|$ is kicsi, azaz egy pont csak úgy kerülhet közel a határhoz, ha egy teljes – a ponttól független – környezete is közel kerül.

Bizonyítás. Rövidítsük a távolságokat következőképp: $d = \mathrm{d}(x,\partial D)$, $d' = \mathrm{d}(f(x),\partial D')$ és $d'' = \mathrm{d}(f(y),\partial D')$. $A = \{z : |y-x| < |z-x| < d\} \subset D$ közönséges gömggyűrű képe $R(C_0, C_1)$ gyűrű, $C_0 = f(\bar{B}(x, |y-x|))$ és $C_1^c = f(B(x,d))$. Itt C_0 tartalmazza $f(x)$-t és $f(y)$-t, míg C_1 ∞-t és olyan $b', b'' \in \partial D'$ pontokat, hogy $|f(x)-b'| = d'$ és $|f(y)-b'| = d''$. Tehát a 3.6 állítás szerint $\mathsf{M}(fA) \geq \tau_n(d'/|f(x)-f(y)|)$, valamint $\mathsf{M}(fA) \geq \tau_n(d''/|f(x)-f(y)|)$. Mivel f K-kvázikonform $\mathsf{M}(fA) \leq K\mathsf{M}(A)$,

$$\tau_n\left(\frac{d'}{|f(x)-f(y)|}\right) \leq K\omega_{n-1}\log^{1-n}\left(\frac{d}{|y-x|}\right)$$

A monoton fogyó τ_n általánosított inverzével ($\tau_n^{-1}(t) = \sup\{r : \tau_n(r) > t\}$)

$$\frac{d'}{|f(x)-f(y)|} \geq \tau_n^{-1}\left(K\omega_{n-1}\log^{1-n}\left(\frac{d}{|y-x|}\right)\right)$$

Azaz $\Theta(r) = 1/\tau_n^{-1}\left(K\omega_{n-1}\log^{1-n}(1/r)\right)$ függvény megfelelő. Kvalitatív tulajdonságai τ_n tulajdonságaiból következnek. A másik egyenlőtlenséget ugyanígy kapjuk d''-vel.

Az egységgolyóra specializálva kapjuk a „kvázikonform Schwarz-lemmát”

3.3. tétel. *Létezik olyan monoton növő* $\theta = \theta_{K,n} : [0,1) \to [0,1)$ *függvény,* $\lim_{r\to 0}\theta(r) = 0$, $\lim_{r\to 1}\theta(r) = 1$ *határértékekkel, hogy minden* $f : B^n \to B^n$, $f(0) = 0$ *K-kvázikonform leképezésre*

$$|f(x)| \leq \theta(|x|), \qquad (x \in B^n)$$

Bizonyítás. Az előző tételt alkalmazzuk $x = 0$-ra. Most $\mathrm{d}(f(y),\partial B^n) = 1 - |f(y)|$, kapjuk $|f(y)|/(1-|f(y)|) \leq \Theta(|y|)$, vagyis

$$|f(y)| \leq \frac{\Theta(|y|)}{1+\Theta(|y|)} = \theta(|y|)$$

3.4. tétel. *Ha* $f : B^n \to B^n$, $f(0) = 0$ *K-kvázikonform leképezés, akkor*

$$|f(x)| \leq \lambda_n |x|^\alpha,$$

ahol $\alpha = K^{\frac{1}{1-n}}$ *és* λ_n *a Grötzsch gyűrű konstans.*

Bizonyítás. Az $\{y : |x| < |y| < 1\}$ közönséges gyűrű képe olyan gyűrű, ami komplementerének korlátos komponense tartalmazza 0 és $f(x)$ pontokat, míg a másik komponens az egységgolyó komplementere. Tehát a képgyűrű modulusa legalább $\gamma_n(1/|f(x)|)$, másrészt legfeljebb a közönséges gyűrű K-szorosa.

$$K\omega_{n-1}\log^{1-n}\left(\frac{1}{|x|}\right) \geq \gamma_n(1/|f(x)|) = \omega_{n-1}\log^{1-n}\Phi\left(\frac{1}{|f(x)|}\right)$$

Ahonnan a $\Phi(s) \leq \lambda_n s$ becslésből (2.8 lemma) a kívánt

$$|f(x)| \leq \lambda_n |x|^\alpha$$

állítás adódik.

A fenti Hölder folytonosság szerint f folytonosan kiterjed $\bar{B}^n$-re. Hasonló kérdésekkel a következő részben foglalkozunk. Tetszőleges kvázikonform leképezésre is beláthatunk lokális Hölder folytonosságot.

Idézzük fel τ_n becslését (2.8 lemma): $\tau_n(s) = \omega_{n-1}\log^{1-n}\Psi(s)$, $\quad \Psi(s) \leq \lambda_n^2(s+1)$. Az $\{s \geq 1\}$ halmazon $\Psi(s) \leq a_n s$. A 3.2 tétel bizonyításában szereplő mennyiségekre vezessük be a következő jelöléseket: $r = |y-x|/d$, $s = |f(y)-f(x)|/d'$. Elég kis r-re $s \leq \Theta(r) \leq 1$, így

$$\omega_{n-1}\log^{1-n}(a_n/s) \leq \tau_n(1/s) \leq K\omega_{n-1}\log^{1-n}(1/r)$$

Ahonnan $s \leq a_n r^\alpha$. Kapjuk, hogy kis r-re $\Theta(r) = a_n r^\alpha$ választható.

3.3. Kiterjesztés a határra

Caratheodory tétele szerint síkbeli Jordan tartományok közötti konform leképezés folytonosan kiterjed a határra. Ebben a kvázikonformitás játssza a lényeges szerepet. Magasabb dimenzióban bonyolultabb a helyzet – nem ismert, hogy fennáll-e a Caratheodory tétel megfelelője – bizonyos feltételek mellett azonban belátjuk a kiterjeszthetőséget: például ha az egyik Jordan tartomány a golyó.

Definíció. Egy $f : D \to \bar{\mathbb{R}}^n$ leképezésre $b \in \partial D$ esetén jelöljük $C_f(b)$-vel azon pontokat, ahova f torlódhat b-ben.

$$C_f(b) = \{\lim f(x_n) : x_n \to b\}$$

Ez sohasem üres, hiszen $\bar{\mathbb{R}}^n$ kompakt. Az, hogy f-nek határértéke van b-ben azt jelenti, hogy $C_f(b)$ egyetlen pont. Egy $A \subset \partial D$ halmazra pedig így definiáljuk

$$C_f(A) = \bigcup_{b \in A} C_f(b)$$

Természetesen egy $f : D \to D'$ homeorfizmus esetén $C_f(b)$ része $\partial D'$-nek.

Izolált szingularitás megszüntethető:

3.5. tétel. *Legyen $f : D \to D'$ kvázikonform leképezés. Tegyük fel, hogy $b \in \partial D$ a határ izolált pontja. Ekkor f-nek (b') határértéke van b-ben, b' $\partial D'$ izolált pontja, a kiterjesztett függvény $f^* : D \cup \{b\} \to D' \cup \{b'\}$ kvázikonform. Továbbá a dilatációk sem változnak: $K_I(f^*) = K_I(f)$, $K_O(f^*) = K_O(f)$.*

Bizonyítás. Legyen U b körüli golyó, hogy $\bar{U} \cap \partial D = \{b\}$. Az $A = U \setminus \{b\}$ gyűrű modulusa nulla. Így az fA gyűrű – melynek határkomponensei $f(\partial U)$ és $C_f(b)$ – modulusa szintén nulla. A 3.7 állítás szerint $C_f(b)$ egyetlen b' pontból áll. Mivel $\mathrm{q}(b', \partial D' \setminus \{b'\}) \geq \mathrm{q}(b', f(\partial U) > 0$, b' $\partial D'$ izolált pontja, $D \cup \{b\}$ tartomány. $f^* : D \cup \{b\} \to D' \cup \{b'\}$ folytonos az inverzével együtt, homeomorfizmus. Egy ponton átmenő görbesereg modulusa nulla, ezért f és f^* dilatációi megegyeznek, f^* is kvázikonform.

Következményként kapjuk,

3.6. tétel. *$\mathbb{R}^n$ nem lehet kvázikonform ekvivalens valódi résztartományával.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to D' \subset \mathbb{R}^n$ kvázikonform leképezés. Az előzőek szerint kiterjed $f^* : \bar{\mathbb{R}}^n \to D' \cup \{b'\}$ homeomorfizmussá. Azaz a $D' \cup \{b'\}$ tartomány kompakt, csak $\bar{\mathbb{R}}^n$ lehet. Vagyis $b' = \infty$, $D' = \mathbb{R}^n$.

Definíció. A $D \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ tartomány a $b \in \partial D$ határpontban

- lokálisan összefüggő, ha b-nek van tetszőleges kis U környezete, hogy $U \cap D$ összefüggő
- végesen összefüggő, ha b-nek van tetszőleges kis U környezete, hogy $U \cap D$-nek csak véges sok komponense van.

A második tulajdonság természetesen erősebb.

A Caratheodory tétel bizonyítása azon múlik, hogy a síkon a D Jordan tartomány rendelkezik a következő tulajdonsággal: két összefüggő E és F részhalmazára $\mathsf{M}(\Delta_D(E, F)) = \infty$, amennyiben $\bar{E} \cap \bar{F} \neq \emptyset$. Ez magasabb dimenzióban nincs feltétlenül így, ezért nevezzük el P_1 tulajdonságnak.

Definíció. A D tartomány b határpontjában

- rendelkezik a P_1 tulajdonsággal, ha $\mathsf{M}(\Delta_D(E, F)) = \infty$ minden $E, F \subset D$ összefüggő halmazokra, hacsak $b \in \bar{E} \cap \bar{F}$.
- rendelkezik a P_2 tulajdonsággal, ha minden $b_1 \in \partial D$ b-től különböző határponthoz van $F \subset D$ kompakt halmaz és $\delta > 0$ konstans, hogy $\mathsf{M}(\Delta_D(E, F)) \geq \delta$, hacsak E olyan összefüggő része D-nek, hogy $b, b' \in \bar{E}$.
- lokálisan kvázikonforman gallérozott, ha van b-nek olyan U környezete és $g : U \cap \bar{D} \to \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_n \geq 0\}$ homeomorfizmus, hogy $g|_{U \cap D}$ kvázikonform. Topológiából tudjuk, hogy $U \cap \partial D$ a peremre, B^{n-1}-re képződik.

3.7. tétel. *Ha D lokálisan kvázikonforman gallérozott b-ben, akkor itt lokálisan összefüggő és rendelkezik a P_1 és P_2 tulajdonságokkal is.*

Bizonyítás. A b pont azon U környezete, amely a lokálisan kvázikonforman gallérozott tulajdonságban szerepel, tetszőlegesen kicsinek választható és az is feltehető, hogy $g(b) = 0$. Jelölje $B^n_+ = \{x \in B^n : x_n > 0\}$. Mivel U homeomorf B^n_+-nel, D valóban lokálisan összefüggő b-ben.

A P_1 és P_2 tulajdonságokat pedig – áttérve a g leképezéssel – elegendő lesz igazolni a B^n_+ tartományra és az origóra. Mindkettő alapja a gömbsapka egyenlőtlenség.

A P_1 tulajonsághoz g kvázikonformanciája és a modulus monotonitása alapján valóban elegendő igazolni, hogy $E, F \subset B^n_+$ összefüggő halmazokra $0 \in \bar{E} \cap \bar{F}$ esetén $\mathsf{M}(\Delta_{B^n_+}(E,F)) = \infty$. Jelöljük a fellépő görbesereget Γ-val és legyen $\Gamma_t = \Delta_{S_+(t)}(E,F)$ $(S_+(t) = S^{n-1}(t) \cap B^n_+)$. Tegyük fel, hogy $\varrho \in F(\Gamma)$, ekkor $\varrho|_{S(t)} \in F(\Gamma_t)$. Egy $\varepsilon > 0$ számra mind $E \cap S_+(t)$ és $F \cap S_+(t)$ nemüres $(0 < t < \varepsilon)$. Így az 1.3 tétel szerint

$$\int \varrho^n \,\mathrm{d}m \geq \int_0^\varepsilon \int_{S(t)} \varrho^n \,\mathrm{d}m_{n-1} \,\mathrm{d}t \geq \int_0^\varepsilon \mathsf{M}_n^{S(t)}(\Gamma_t) \,\mathrm{d}t \geq b_n \int_0^\varepsilon \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t = \infty$$

Vagyis $\mathsf{M}(\Gamma) = \infty$, amint állítottuk.

P_2: Legyen $b_1 \in \partial D$, $b_1 \neq b$. Válasszuk U-t olyan kicsire, hogy $b_1 \notin U$. Megmutatjuk, hogy az $F = g^{-1}J$ kompakt halmaz megfelelő a P_2 tulajdonsághoz, ahol $J = \{x : x_1, \ldots, x_{n-1} = 0, 1/4 \leq x_n \leq 1/2\}$ szakasz. Legyen E olyan összefüggő halmaz, amelyre $b, b_1 \in \bar{E}$. $\mathsf{M}(\Delta_D(E,F))$-re kell alsó korlátot találnunk. Ezt megintcsak g kvázikonformitása és a modulus monotonitása miatt elegendő a $\Gamma = \Delta_{B^n_+}(g(E \cap U), J)$ görbeseregre igazolni. Ugyanúgy a gömbsapka egyenlőtlenség szerint $\varrho \in F(\Gamma)$-ra

$$\int \varrho^n \,\mathrm{d}m \geq \int_{1/4}^{1/2} \int_{S(t)} \varrho^n \,\mathrm{d}m_{n-1} \,\mathrm{d}t \geq b_n \log 2$$

Ami az $\mathsf{M}(\Gamma) \geq b_n \log 2$ alsó korlátot adja.

3.8. tétel. *Legyen D egy tartomány, $b \in \partial \bar{D}$. Tegyük fel, hogy b-nek van olyan U környezete, hogy $U \cap \partial D$ egy $(n-1)$-dimenziós C^1-sokaság. Ekkor D lokálisan kvázikonforman gallérozott b-ben.*

Bizonyítás. Legyen T ∂D érintőhipersíkja b-ben, és $P : \partial D \to T$ a merőleges vetítés T-re. P homeomorfizmus b egy ∂D-beli V környezetében. Jelölje e T normálvektorát. Ekkor $g(x + te) = P(x) + te$ $(x \in V,\ t \in \mathbb{R})$ diffeomorfizmus b környezetében, és így kvázikonform egy kisebb környezetben. Található tehát egy U környezet, hogy g $U \cap \bar{D}$-t egy félgolyóra képezi. Hogy valóban csak a félgolyóra képezzen, ki kellett kössük $b \in \partial \bar{D}$.

Az előző tételben fontos kikötés a határ simasága, mint azt a következő példa mutatja. A példából az is látható lesz, hogy egy Jordan tartomány nem feltétlen rendelkezik a P_1 tulajdonsággal, mint már említettük.

Legyen $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0, |x_3| < x_1^a\}$ tartomány $(a > 1)$. Belátjuk, hogy D nem rendelkezik a P_1 tulajdonsággal az $x_1 = x_3 = 0$ élen. A megfelelő E és F halmazok ezen él egy b pontjából kiinduló, az $x_3 = 0$ síkon fekvő egységnyi hosszú szakaszok lesznek. Szögük legyen mondjuk derékszög. Ezek tehát b-ben érintkeznek, megmutatjuk, hogy mégis $\mathsf{M}(\Delta_D(E,F))$ véges. Nyugodtan feltehető, hogy b az origó.

Először tekintsük az egészet csak az $x_3 = 0$ síkon. x_1, x_2 mellett vezessük be az r, φ polárkoordinátákat. Itt megengedett a $\varrho(x_1, x_2) = c/r$ $(x_1 > 0)$ függvény, ahol $c = 2/\pi$, ugyanis „$\mathrm{d}s \geq r\,\mathrm{d}\varphi$” szerint

$$\int_\gamma \frac{1}{r} \,\mathrm{d}s \geq \int_\gamma 1 \,\mathrm{d}\varphi \geq \frac{\pi}{2}$$

a két szögszárat összekötő γ görbére. Mivel E és F egységnyi hosszúak, az is feltehető, hogy ϱ az $\{|r| < e\}$-re van koncentrálva ugyanis, ha γ elhagyja ezt a környezetet, akkor $\int_\gamma \varrho \chi_{\{|r|<e\}} \,\mathrm{d}s \geq \int_1^e 1/r \,\mathrm{d}r = 1$. Legyen tehát $\varrho(x_1, x_2) = c/r$ $(x_1 > 0, |r| < e)$.

Terjesszük ki ϱ-t most már a térre: $\tilde{\varrho}(x_1, x_2, x_3) := \varrho(x_1, x_2)\chi_D$. Ez megengedett függvény, mert $\int_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varrho}\, \mathrm{d}s \geq \int_\gamma \varrho\, \mathrm{d}s$, ahol $\tilde{\gamma}$ a két szögszárat D-ben összekötő görbe és γ az $x_3 = 0$ síkra vetítettje. Vagyis a modulus legfeljebb

$$\int \tilde{\varrho}^3\, \mathrm{d}m = \int\int 2x_1^a \varrho^3(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^e 2x_1^a \frac{c^3}{r^3} r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi \leq 2\pi c^3 \int_0^e r^{a-2}\, \mathrm{d}r < \infty$$

3.9. tétel. *Legyen $f : D \to D'$ kvázikonform leképezés. Tegyük fel, hogy D P_1 tulajdonságú $b \in \partial D$-ben. Ekkor $C_f(b)$-nek legfeljebb egy olyan pontja van, ahol D' végesen összefüggő.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy D' két különböző $b_1', b_2' \in C_f(b)$ pontban végesen összefüggő. Válasszunk a két ponthoz diszjunkt golyó környezeteket (U_1, U_2). Legyen az $(x_j) \subset D$ sorozat olyan, hogy $x_j \to b$, $f(x_j) \to b_1'$, az (y_j) sorozat pedig ugyanilyen b_2'-höz.

A végesen összefüggőség miatt létezik b_1'-nek olyan $V \subset U_1$ környezete, hogy $V \cap D'$-nek véges sok komponense van. Kiválasztható hát – a b_1'-höz tartó – $(f(x_j))$ sorozatból egy részsorozat, ami $V \cap D'$ és méginkább $U_1 \cap D'$ egy komponensében halad.

Legyen tehát E_1 $U_1 \cap D'$-nek olyan komponense, amely tartalmazza az $(f(x_j))$ egy részsorozatát. Hasonlóan E_2 legyen $U_2 \cap D'$ egy komponense, amely tartalmazza $(f(y_j))$ egy részsorozatát.

Tekintsük a $\Gamma = \Delta_D(f^{-1}E_1, f^{-1}E_2)$ és $f\Gamma = \Delta_{D'}(E_1, E_2)$ görbeseregeket. Itt $b \in \overline{f^{-1}E_1} \cap \overline{f^{-1}E_2}$, a P_1 tulajdonság szerint $\mathsf{M}(\Gamma) = \infty$. Másrészt $f\Gamma$ kevesebb, de hosszabb, mint Γ_A $(f\Gamma > \Gamma_A)$, ahol Γ_A az $A = R(\bar{U}_1, \bar{U}_2)$ gyűrűhöz tarozó görbesereg. Azaz $\mathsf{M}(f\Gamma) \leq \mathsf{M}(\Gamma_A) < \infty$ véges, minthogy egy gyűrűmodulus mindig véges. Az ellentmondás f kvázikonformitásával bizonyítja a tételt.

Ha például $\partial D'$ a teljes határán végesen összefüggő, akkor f-nek limesze van b-ben. A következő tétel a P_2 tulajdonságot kapcsolja össze a kiterjeszthetőséggel.

3.10. tétel. *Legyen $f : D \to D'$ kvázikonform leképezés. Tegyük fel, hogy D lokálisan összefüggő $b \in \partial D$-ben és hogy D' P_2 tulajdonságú $C_f(b)$ egy pontjában. Ekkor f-nek határértéke van b-ben.*

Bizonyítás. Legyen $b_1' \in C_f(b)$ olyan pont, ahol D' rendelkezik a P_2 tulajdonsággal. Tegyük fel indirekt, hogy van egy másik $b_2' \in C_f(b)$ pont is. A P_2 tulajdonság definíciója alapján b_2'-hez rögzítsünk F kompakt halmazt és δ számot.

D lokálisan összefüggősége miatt, választhatunk b-nek olyan $U_1, U_2, \ldots$ környezeteit, hogy $U_j \cap D$ összefüggő és átmérőjük $\mathrm{q}(U_j) \to 0$. Tekintsük a $\Gamma_j = \Delta_D(U_j \cap D, f^{-1}F)$ és $f\Gamma_j = \Delta_{D'}(f(U_j \cap D), F)$ görbeseregeket. Mivel $C_f(b) \subset \overline{f(U_j \cap D)}$, mind b_1'-t, mind b_2'-t tartalmazza $\overline{f(U_j \cap D)}$. A P_2 tulajdonság szerint $\mathsf{M}(f\Gamma_j) \geq \delta$. Másrészt világos, hogy Γ_j minorálható olyan közönséges gyűrűvel, melynek belső sugara tart 0-hoz, a külső pedig rögzített. Vagyis $\mathsf{M}(\Gamma_j) \to 0$, ami ellentmond f kvázikonformitásának.

A két utóbbi tételt összerakva kapunk feltételt a homeomorfizmussá való kiterjeszthetőségre.

3.11. tétel. *Legyen D_0 lokálisan kvázikonforman gallérozott a határán. Tegyük fel, hogy D és D' lokálisan összefüggőek a határaikon és kvázikonform ekvivalensek D_0-hoz. Ekkor minden $f : D \to D'$ kvázikonform leképezés kiterjed $f^* : \bar{D} \to \bar{D}'$ homeomorfizmussá.*

Bizonyítás. Vezessük át f-et D_0-n: $f = h \circ g$, ahol $g : D \to D_0$ és $h : D_0 \to D'$ kvázikonform leképezések. A 3.7 tétel szerint D_0 rendelkezik mind a P_1, mind a P_2 tulajdonsággal a teljes határán. Az utóbbi miatt alkalmazhatjuk a 3.10 tételt: g-nek határértéke van ∂D minden pontjában. Míg a P_1 tulajdonság szerint alkalmazhatjuk a 3.9 tételt: h-nak határértéke van ∂D_0 minden pontjában. Vagyis f-nek a határ minden pontjában létezik a limesze. Mindez f^{-1}-ről is elmondható. Innen már egyszerű topológiai megfontolás adja az állítást.

Definíció. Egy $D \subset \mathbb{R}^n$ tartomány Jordan tartomány, ha ∂D homeomorf S^{n-1}-gyel.

Egy Jordan tartomány nem kell, hogy B^n-nel homeomorf legyen ($n \geq 3$), s még ha homeomorf is nem feltétlenül kvázikonform ekvivalens. Mint a bevezetőben említettük, nem ismert, hogy két Jordan tartomány közötti kvázikonform leképezés automatikusan kiterjed-e a határra. Ha azonban az egyik a golyó, akkor igen:

3.12. tétel. *Egy $f : B^n \to D'$ kvázikonform leképezés pontosan akkor terjed ki $f^* : \bar{B}^n \to \bar{D}'$ homeomorfizmussá, ha D' Jordan tartomány.*

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló. Az elégségességhez az előző kiterjeszthetőségi tételt alkalmazzuk. Egyfelől B^n lokálisan kvázikonforman gallérozott. A másik feltételt pedig Wilder eredménye ([7]) biztosítja: minden Jordan tartomány lokálisan összefüggő a határán.

A síkon a fenti tételt két tetszőleges Jordan tartomány közti leképezésre is kimondhatjuk, tekintve, hogy mindegyik konform ekvivalens az egységkörrel. Beláttuk a „kvázikonform Caratheodory tételt":

3.13. tétel. *Ha D és D' síkbeli Jordan tartományok, akkor minden $f : D \to D'$ kvázikonform leképezés kiterjed $f^* : \bar{D} \to \bar{D}'$ homeomorfizmussá.*

A kiterjeszthetőségi tétel lehetőséget ad arra is, hogy számos tartományról bebizonyítsuk: nem lehet a golyóval kvázikonform ekvivalens. Ugyanis egy D, a határán lokálisan összefüggő tartományról az egységgolyóra képező kvázikonform leképezés a 3.11 tétel alapján kiterjed lezártjaik közti homeomorfizmussá – biztosan nem létezhet a leképezés, ha D nem Jordan tartomány. Az alábbiak mind erre példák:

- $\mathbb{R}^n$ (ezt már láttuk korábban)
- B^n bemetszve egy sugárral ($n \geq 3$)
- $\mathbb{R}^n$ bemetszve egy félegyenessel ($n \geq 3$)
- két párhuzamos sík közti tartomány ($n = 3$)

Befejezésül levezetünk egy érdekes síktopológiai tételt. Legyen D a sík egyszeresen összefüggő valódi résztartománya, és legyen lokálisan összefüggő a határán. A Riemann alaptétel szerint ez konform módon leképezhető az egységkörre és a 3.11 tétel szerint a leképezés a határok között is ad egy homeomorfizmust, azaz D Jordan tartomány. Összefoglalva: az jellemzi a Jordan tartományokat az egyszeresen összefüggő tartományok közt, hogy lokálisan összefüggők a határon.

3.4. Konvergens sorozatok

Ekvifolytonosság

A torzítási tételekből látható, hogy az $f : D \to D'$ $f(x_0) = y_0$ K-kvázikonform függvények családja ($D, D' \subset \mathbb{R}^n$ valódi résztartományok) ekvifolytonos x_0-ban, sőt x_0 egy környezetében mindegyik Hölder folytonos egy univerzális konstanssal és $K^{1/(1-n)}$ kitevővel.

Általánosabban,

3.14. tétel. *Legyen $D \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ tartomány. Legyen W olyan D-n értelmezett K-kvázikonform függvények családja, hogy minden $f \in W$ kihagy két a_f, b_f értéket és $\mathrm{q}(a_f, b_f) \geq r$. Itt $r > 0$ f-től független, q a gömbi metrika $\bar{\mathbb{R}}^n$-n.*

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in D$, $0 < \varepsilon < r$. Válasszunk x_0-nak olyan U és V golyó-környezeteit, hogy $\bar{U} \subset V \subset D$. Ekkor az $A = V \setminus \bar{U}$ gömbgyűrű képe $f(A) = R(C_0, C_1)$, $C_0 = f(\bar{U})$ és $C_1^c = f(V)$. Vagyis $\mathrm{q}(C_1) \geq \mathrm{q}(a_f, b_f) \geq r$. Másrészt $\mathrm{q}(C_0) \geq \mathrm{q}(f(x), f(x_0))$ tetszőleges $x \in U$-ra. Az 1.7 tételbeli κ_n függvénnyel $K\mathsf{M}(\Gamma_A) \geq \mathsf{M}(\Gamma_{f(A)}) \geq \kappa_n(t)$, ahol $t = \min\{r, \mathrm{q}(f(x), f(x_0))\}$. Ha U-t olyan kicsire választjuk, hogy $K\mathsf{M}(\Gamma_A) \leq \kappa_n(\varepsilon)$, akkor $\kappa_n(t) \leq \kappa_n(\varepsilon)$, κ_n monotonitásából $t \leq \varepsilon$. $\varepsilon < r$ miatt $\mathrm{q}(f(x), f(x_0)) = t \leq \varepsilon$ minden $x \in U$ és $f \in W$-re. Ami a W függvénycsalád ekvifolytonosságát jelenti x_0-ban.

3.15. tétel. *Álljon W D tartományon értelmezett K-kvázikonform leképezésekből. A W függvénycsalád ekvifolytonos, ha az egyik feltétel teljesül*

- *Vannak olyan $x_1, x_2 \in D$ pontok és $r > 0$ szám, hogy mindegyik $f \in W$ kihagy egy a_f értéket: $\mathrm{q}(a_f, f(x_i)) \geq r$ $(i = 1, 2)$.*
- *Vannak olyan $x_1, x_2, x_3 \in D$ pontok és $r > 0$ szám, hogy mindegyik $f \in W$-re $\mathrm{q}(f(x_i), f(x_j)) \geq r$ $(i \neq j)$.*

Bizonyítás. Az első: legyen $D_1 = D \setminus \{x_1\}$. Mindegyik $f|_{D_1}$ kihagyja az a_f és $f(x_1)$ értékeket. Az előző tétel szerint az $f|_{D_1}$ függvények családja ekvifolytonos. Ez azt jelenti, hogy a W függvénycsalád ekvifolytonos az x_1 pont kivételével mindenütt. Azonban x_1-ben is, mert a fentiek elmondhatók x_2-vel is.

A második: most D-ből két x_i pontot hagyunk ki. Megintcsak az előző tétel szerint kapjuk, hogy W függvénycsalád ekvifolytonos mindenütt kivéve esetleg a két kihagyott pontot. Mindhárom lehetséges módon kihagyva két pontot kapjuk, hogy valójában mindenütt ekvifolytonos.

Konvergencia

A 3.14 tétel szerint egy D tartomány K-kvázikonform leképezései, amelyek kihagynak két rögzített értéket, ekvifolytonosak. Az Arzela–Ascoli tétel szerint ezek közül kiválasztható lokálisan egyenletesen konvergens sorozat. Bebizonyítjuk, hogy a limesz-leképezés homeomorfizmus vagy konstans. Az első esetben valójában még az is igaz, hogy K-kvázikonform.

3.16. tétel. *Legyen $f_j : D \to D_j$ K-kvázikonform leképezések sorozata, mely pontonként konvergál egy $f : D \to \bar{\mathbb{R}}^n$ leképezéshez. Három lehetőség van:*

- *f homeomorfizmus D' tartományra, a konvergencia lokálisan egyenletes*
- *f pontosan két értéket vesz fel, az egyiket csak egyszer, a konvergencia nem lokálisan egyenletes*
- *f konstans*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy f pontosan két értéket vesz fel: $b_1 = f(a_1)$, $b_2 = f(a_2)$. Ekkor $\mathrm{q}(f_j(a_1), f_j(a_2)) \geq r > 0$. A 3.14 tétel szerint az $\{f_j\}$ függvénycsalád ekvifolytonos $D \setminus \{a_1, a_2\}$-ben. Az Arzela–Ascoli tétel (bizonyítása) szerint $f_j \to f$ lokálisan egyenletesen $D \setminus \{a_1, a_2\}$-ben. Ezért $f(D \setminus \{a_1, a_2\})$ nem más, mint $\{b_1\}$ vagy $\{b_2\}$. A konvergencia nem lehet lokálisan egyenletesen folytonos, mert f nem folytonos. Ez a második lehetőség.

Elegendő bebizonyítani, hogy ha f legalább három értéket felvesz, akkor az első alternatíva teljesül. Legyenek ezek $b_1 = f(a_1)$, $b_2 = f(a_2)$, $b_3 = f(a_3)$. Mivel $\mathrm{q}(f_j(a_i), f_j(a_k)) \geq r > 0$ $(i \neq k)$ minden j-re a 3.15 tétel szerint az $\{f_j\}$ függvénycsalád ekvifolytonos. Az Arzela–Ascoli tétel szerint a konvergencia lokálisan egyenletes, f folytonos. Topológiai okok miatt elegendő megmutatni, hogy f injektív.

Tegyük fel hát, hogy két különböző $z_1, z_2 \in D$ pontban $f(z_1) = f(z_2)$. Először megmutatjuk, hogy z_1 minden U környezete tartalmaz egy $x_0 \neq z_1$ pontot, ahol $f(z_1) = f(x_0)$. Legyen $S \subset U$ gömb, ami szeparálja a z_1 és z_2 pontokat. Ekkor $f(S)$ szeparálja $f_j(z_1)$-t és $f_j(z_2)$-t minden j-re. Van tehát $x_j \in S$, hogy $\mathrm{q}(f_j(x_j), f_j(x_1)) \leq \mathrm{q}(f_j(z_2), f_j(z_1))$. Egy részsorozatra áttérve feltehető, hogy $x_j \to x_0 \in S$.

$$\mathrm{q}(f_j(x_j), f(x_0)) \leq \mathrm{q}(f_j(x_j), f_j(x_0)) + \mathrm{q}(f_j(x_0), f(x_0)) \to 0 \quad (j \to \infty)$$

felhasználva $\{f_j\}$ ekvifolytonosságát x_0-ban. x_j választása alapján tehát $\mathrm{q}(f(x_0), f(z_1)) \leq \mathrm{q}(f(z_2), f(z_1)) = 0$.

Most belátjuk, hogy minden $x_0 \in D$-nek van olyan U környezete, hogy $f|_U$ injektív vagy konstans. Ebből D összefüggősége alapján kapjuk az ellentmondást. Az ekvifolytonosság szerint létezik x_0-nak olyan U golyó-környezete, hogy $\mathrm{q}(f_j(x), f_j(x_0)) < 1/2$ hacsak $x \in U$, minden j-re. Ha U-n f nem lenne sem injektív sem konstans, akkor választhatnánk olyan különböző $u_1, u_2, u_3 \in U$ pontokat, hogy $f(u_1) \neq f(u_2) = f(u_3)$. Kössük össze u_1-t és u_2-t egy $J_0 \subset U$ ívvel. Valamint J_1 ív $(J_0 \cap J_1 \neq \emptyset)$ kösse össze u_3-t egy $u_4 \in \partial U$ határponttal U-ban $(J_1 \setminus U = \{u_4\})$.

Legyen $A = U \setminus (J_0 \cup J_1)$ gyűrű, képe $f_j(A) = R(C_0^j, C_1^j)$, ahol $C_0^j = f_j(J_0)$ és $(C_1^j)^c = f_j(U \setminus J_1)$. Itt

$$\mathrm{q}(C_0^j) \geq \mathrm{q}(f_j(u_1), f_j(u_2)), \quad \mathrm{q}(C_1^j) \geq \mathrm{q}((f_j(U))^c) \geq 1 \quad \text{és} \quad \mathrm{q}(C_0^j, C_1^j) \leq \mathrm{q}(f_j(u_2), f_j(u_3))$$

Az 1.8 tétel $\kappa_n(r,t)$ függvényével kapjuk, hogy $\mathsf{M}(f_j(A)) \geq \kappa_n(r_j, t_j)$, ahol $r_j = \mathrm{q}(f_j(u_1), f_j(u_2)) \to \mathrm{q}(f(u_1), f(u_2)) > 0$ és $t_j = \mathrm{q}(f_j(u_2), f_j(u_3)) \to \mathrm{q}(f(u_2), f(u_3)) = 0$. Az 1.8 tétel szerint $\mathsf{M}(f_j(A)) \to \infty$, viszont $\mathsf{M}(f_j(A)) \leq K\mathsf{M}(A) < \infty$, ellentmondás.

Irodalomjegyzék

[1] J. Väisälä: *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., Vol. 229, Springer-Verlag, 1971.

[2] F. W. Gehring: *Symmetrization of rings in space*, Trans. Amer. Math. Soc. 101 (1961), 499–519.

[3] J. Sarvas: *Symmetrization of condensers in n-space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 522 (1972), 1–44.

[4] M. Vuorinen: *Conformal geometry and quasiregular mappings*, Lecture Notes in Math., Vol. 1319, Springer-Verlag, 1988.

[5] G. D. Anderson: *Extremal rings in n-space for fixed and varying n* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I 575 (1976), 1–21.

[6] W. P. Ziemer: *Extremal length and p-capacity*, Michigan Math. J. 16 (1969), 43–51.

[7] R. L. Wilder: *Topology of manifolds*, Amer. Math. Soc. Colloquium Series 32, 1949.

[8] B. Fuglede: *Extremal length and functional completion*, Acta Math. 98 (1957), 171–219.