Ruzsa Zoltán

Euklideszi terek fedése kis halmazokkal

szakdolgozat

Témavezető: Keleti Tamás

ELTE, Budapest

2001

Tartalomjegyzék.

Előzetes.

Legyen κ egy számosság. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^n$-beli halmazt κ-kicsinek, ha κ darab elmozgatottja páronként diszjunktan elhelyezhető $\mathbb{R}^n$-ben. Ez – a józan paraszti ész szerint – valami olyasmit jelent, hogy a halmaz $\mathbb{R}^n$-nek kevesebb mint $1/\kappa$ része. Jogos tehát az alábbi kérdések felvetése:

(1) Vajon lefedhető-e $\mathbb{R}^n$ egy κ-kicsi halmaz kevesebb mint κ példányával? És ha igen, hánnyal?

(2) És esetleg kevesebb mint κ darab, egyenként κ-kicsi halmazzal? És ha igen, hánnyal?

Az első fejezetben a számegyenesen vizsgáljuk meg a kérdést. Kiderül, hogy (1)-re nem a válasz, és (2)-re is, ha κ megszámlálható. Viszont belátjuk, hogy ω_0 darab kontinuum-kicsi halmazzal lefedhető $\mathbb{R}$.

A második fejezetben megmutajuk, hogy viszonylag szép halmazokkal is történhetnek furcsa dolgok: véletlen konstrukcióval elkészítjük Borel halmazok megszámlálható, felszálló rendszerét (A_n) úgy, hogy $\bigcup A_n = \mathbb{R}$, de egyetlen A_n megszámlálhatóan sok példányával se lehet lefedni $\mathbb{R}$-t.

A harmadik fejezetben megnézünk néhány olyan halmazt, amelyeknek csak kontinuum sok példányával lehet $\mathbb{R}$-t lefedni. Például a Cantor-halmaz ilyen lesz.

A negyedik fejezetben újra az (1) és (2) kérdésekkel foglalkozunk, de a síkon. Ha κ megszámlálható, akkor még mindkét kérdésre nem a válasz, de megmutatjuk, hogy van olyan kontinuum-kicsi halmaz a síkon (sőt, fügvénygrafikon is van ilyen), amelynek racionális elforgatottjai fedik a síkot.

Az utolsó fejezetben megmutajuk, hogy $n \geq 3$ esetén $\mathbb{R}^n$-ben (1)-re és (2)-re is igen a válasz. Egy olyan halmazt fogunk konstruálni, amelynek tetszőleges $2 \leq \kappa \leq c$ számosságra κ példányával diszjunktan lehet lefedni $\mathbb{R}^n$-t.

Ezzel sikerül teljes választ kapni a két fenti kérdésre $\mathbb{R}^n$-ben.

A dolgozatban szereplő tételek több szerző friss eredményeit tartalmazzák. Ezek bármelyikét már régebben is felfedezhették, de – ilyen formában – nem találkoztunk velük az irodalomban.

Jelölések.

λ_n	az n-dimenziós Lebesgue mérték
λ_n^*	az n-dimenziós Lebesgue külső mérték
c	kontinuum számosság, ami egyben a kontinuum kezdőrendszám is
$\lambda \in \kappa,\ \lambda < \kappa$	a λ rendszám kisebb mint κ
$\mathcal{P}(X)$	X hatványhalmaza
$\mathrm{P}(A)$	Az A esemény valószínűsége
$\|A\|$	az A halmaz számossága
$\dim_{\mathrm{H}}(E)$	az $E \subset \mathbb{R}^n$ halmaz Hausdorff-dimenziója
$\overline{\dim}_{\mathrm{M}}(E)$	az $E \subset \mathbb{R}^n$ halmaz felső Minkowski (vagy box) dimenziója
$\underline{\dim}_{\mathrm{M}}(E)$	az $E \subset \mathbb{R}^n$ halmaz alsó Minkowski (vagy box) dimenziója
$\overline{\dim}_{\mathrm{P}}(E)$	az $E \subset \mathbb{R}^n$ halmaz felső pakolási dimenziója
$\underline{\dim}_{\mathrm{P}}(E)$	az $E \subset \mathbb{R}^n$ halmaz alsó pakolási dimenziója
$A + B$	$\{\ a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$
$A - B$	$\{\ a - b \mid a \in A,\ b \in B\}$
$G(A)$	$\{\ gA \mid g \in G\}$
$B(x, r)$	az x közepű, r sugarú zárt gömb
$\pi_E(A)$	az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz merőleges vetítése az E hipersíkra
SG_n	$\mathbb{R}^n$ mozgáscsoportja, azaz az irányítástartó egybevágóságok csoportja
SO_n	$\mathbb{R}^n$-ben az origó körüli forgatások csoportja
S^n	$\mathbb{R}^{n+1}$ egységgömbjének a felülete
C	Cantor-halmaz
ZFC	a Zermelo-Fraenklin axiómarendszer + kiválasztási axióma

1. κ-Kicsi halmazok a számegyenesen.

1.1. Definíció. Legyen κ egy számosság. Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmazt κ-*kicsi*nek nevezünk, ha $\mathbb{R}$-ben páronként diszjunktan elhelyezhető A-nak κ darab eltoltja.

A definícióból látszik, hogy ha az A halmaz κ-kicsi, és $\lambda < \kappa$, akkor A λ-kicsi is. Mivel $\mathbb{R}$ számossága kontinuum, ha $\kappa > c$, akkor κ-kicsi halmaz csak egy van, az üreshalmaz. Így halmazok κ-kicsiségéről csak $\kappa \leq c$ esetén érdemes beszélni. Azt szeretnénk megvizsgálni, hogy halmazok κ-kicsisége mennyire jelent szemléletünk szerinti „kicsiséget", nevezetesen, hogy hány κ-kicsi halmaz kell a teljes számegyenes lefedéséhez.

1.2. Tétel. *Ha A κ-kicsi, és A-nak λ darab eltoltjával lefedhető $\mathbb{R}$, akkor $\lambda \geq \kappa$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $A - x_k$ $(k \in \kappa,\ x_k \in \mathbb{R})$ halmazok diszjunktak, és vannak olyan $y_l \in \mathbb{R}$ $(l \in \lambda)$ számaink, hogy minden $x \in \mathbb{R}$-hez van egy $j \in \lambda$ rendszám, amelyre $x \in A + y_j$. Az x_k $(k \in \kappa)$ számokhoz is vannak ilyen $j \in \lambda$ indexek (esetleg több is), így az

$$f : \kappa \to \lambda$$

$$f(k) = \min\{\ j \mid x_k \in A + y_j\}$$

függvény minden $k \in \kappa$-ra értelmezve van. Ha $f(k) = f(k') = j$ lenne, akkor

$$x_k \in A + y_j, \qquad \text{illetve} \qquad x_{k'} \in A + y_j.$$

Az egyenleteket átrendezve

$$-y_j \in A - x_k, \qquad \text{illetve} \qquad -y_j \in A - x_{k'}$$

adódik, azaz $-y_j \in (A - x_k) \cap (A - x_{k'})$. Az $A - x_i$ halmazok diszjunktsága miatt ez csak $k = k'$ esetén lehetséges, így az $f : \kappa \to \lambda$ függvény injektív, tehát $\lambda \geq \kappa$. ■

A következő kérdés az, hogy mennyiben változik a helyzet, ha nem egy fix κ-kicsi halmaz eltoltjaival próbáljuk lefedni a számegyenest, hanem λ darab κ-kicsi halmazzal. Mint hamarosan látni fogjuk, ha κ véges vagy megszámlálhatóan végtelen, akkor továbbra is $\lambda \geq \kappa$ szükséges, $\kappa > \omega_0$ esetén viszont $\lambda \geq \omega_0$-nál több nem mondható.

1.3. Állítás. *ω_0 darab c-kicsi halmazzal lefedhető $\mathbb{R}$.*

Bizonyítás. Vegyünk egy h_α $(\alpha \in c)$ Hamel-bázist. Minden $n \in \mathbb{N}$-re legyen

$$A_n = \left\{ \sum_{\alpha \in c} q_\alpha h_\alpha \;\middle|\; q_\alpha \in \mathbb{Q},\ |q_\alpha| < n,\ q_\alpha \text{ véges sok kivétellel } 0 \right\}.$$

$\bigcup A_n = \mathbb{R}$, hisz tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ egyértelműen írható $x = \sum q_\alpha h_\alpha$ $(q_\alpha \in \mathbb{Q})$ alakba, ahol a q_α együtthatók véges sok kívételével mind nullák. Így $k = \max|q_\alpha|$ véges, és $x \in A_{[k]+1}$.

A_n (rögzített n-re) c-kicsi, ugyanis az $A_n^\alpha = A_n + 2nh_\alpha$ $(\alpha \in c)$ halmazok páronként diszjunktak. (Hiszen tetszőleges $\alpha \in c$-re az A_n^α minden elemének pontosan egy n-nél nagyobb abszolútértékű koordinátája van, éppen az α-adik.) ■

A célunk most az, hogy véges λ-ra is megvizsgáljuk, mely κ-ra lehet λ darab κ-kicsi halmazzal lefedni $\mathbb{R}$-t. Előbb azonban további eszközökre lesz szükségünk.

1.4. Definíció. Egy $\langle G, \cdot \rangle$ csoportot *amenábilis*nek nevezünk, ha létezik egy μ végesen additív valószínűségi mérték G-n, amely a teljes $\mathcal{P}(G)$-n értelmezve van, és balinvariáns, azaz $\mu(gA) = \mu(A)$ minden $g \in G, A \subseteq G$-re.

1.5. Tétel. *Minden $\langle G, + \rangle$ kommutatív csoport amenábilis.*

Bizonyítás. Megtalálható a függelék I.3 tételénél. ■

1.6. Tétel. *Ha $\kappa \leq \omega_0$, és A_l $(l \in \lambda)$ olyan λ darab κ-kicsi halmaz, hogy $\bigcup A_l = \mathbb{R}$, akkor $\lambda \geq \kappa$.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy κ véges számosság. Mivel $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ kommutatív, az előző tétel szerint amenábilis, azaz létezik egy olyan $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ halmazfüggvény, amely $\mathbb{R}$ minden részhalmazán értelmezve van, végesen additív, eltolás-invariáns, és $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = 1$. Mivel A_l-nek κ darab diszjunkt eltoltja elfér $\mathbb{R}$-ben és κ véges számosság, minden $(l \in \lambda)$-re

$$\mu(A_l) \leq \frac{1}{|\kappa|}, \tag{1}$$

de mivel $\bigcup A_l = \mathbb{R}$,

$$\sum_{l \in \lambda} \mu(A_l) = 1. \tag{2}$$

Az (1)-ben szereplő becslést behelyettesítve (2)-be

$$\sum_{l \in \lambda} \frac{1}{|\kappa|} \geq 1,$$

ahonnét $\lambda \geq \kappa$ adódik.

A $\kappa = \omega_0$ eset egyszerűen következik a már belátott $\kappa < \omega_0$ esetből, ugyanis a κ-kicsiség definíciójából nyílvánvaló, hogy tetszőleges $\alpha < \omega_0$ számosságra minden ω_0-kicsi halmaz egyben α-kicsi is. A már belátott véges esetet alkalmazva $\kappa = \alpha$ -ra azt kapjuk, hogy $\lambda \geq \alpha$, ahol α tetszőleges ω_0-nál kisebb számosság. ■

2. $\mathbb{R}$ lefedése kicsi Borel halmazokkal.

Az 1.3 tételben definiált

$$A_n = \left\{ \sum_{\alpha \in c} q_\alpha h(\alpha) \;\middle|\; q_\alpha \in \mathbb{Q},\ |q_\alpha| < n,\ q_\alpha \text{ végessok kivétellel } 0 \right\}.$$

halmazrendszer, ahol $n \in \mathbb{N}$ és h_α ($\alpha \in c$) Hamel-bázis, rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy $\bigcup A_n = \mathbb{R}$, de egyik A_n megszámlálható eltoltjaival se fedhető le $\mathbb{R}$. Az 1.3 tételben ugyanis láttuk, hogy $\bigcup A_n = \mathbb{R}$, emellett A_n (rögzített n-re) c-kicsi, és így az 1.2 tétel szerint $\mathbb{R}$ csak A_n kontinuum sok eltoltjával fedhető le.

Ezek az A_n halmazok nem túl szépek, ugyanis definíciójukban Hamel-bázist használunk. Most megmutatjuk, hogy ez a jelenség már Borel halmazok körében is fellép.

2.1. Lemma. *Van egy n tagú $0-1$ sorozatunk, és jelöljük az első k elem átlagát S_k-val. Tegyük fel, hogy alkalmas $t < 1/4$-el $S_n < 1-2t$. A sorozatot véletlen számjegyekkel folytatjuk, egymástól függetlenül $1/2 - 1/2$ valószínűséggel választva a 0 és az 1 között. Ekkor létezik egy (csak n-től függő) $p_n \to 0$ számsorozat, hogy*

$$\mathrm{P}\left(\sup_i S_{n+i} > 1-t\right) < p_n.$$

Bizonyítás. Legyen a ζ_n valószínűségi változó n darab egymástól független, $1/2 - 1/2$ valószínűséggel 0-t vagy 1-et felvevő valószínűségi változó átlaga. A nagy számok erős törvénye [7] szerint ζ_n 1-valószínűséggel tart $1/2$-hez, így rögzített $\varepsilon > 0$-ra

$$\mathrm{P}\left(\sup_{m>n} \zeta_m > \frac{1}{2} + \varepsilon\right) \to 0. \tag{1}$$

Mivel $S_n < 1-2t$, és S_n n darab 0 vagy 1 átlaga, ezért $S_{n+i} > 1-t$ leghamarabb $i = n$-re fordulhat elő. Tehát ahhoz, hogy valamely i-re $S_{n+i} > 1-t$ bekövetkezzen, $i \geq n$ kell hogy legyen, emellett a véletlen számjegyek átlagának (a sorozat első n, fix tagja nélkül) legalább $1-t$-nek kell lennie. Mivel $t < 1/4$ volt, $1-t > 3/4$, azaz

$$\mathrm{P}\left(\sup_i S_{n+i} > 1-t\right) < \mathrm{P}\left(\sup_{m>n} \zeta_m > 1-t\right) < \mathrm{P}\left(\sup_{m>n} \zeta_m > \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) =: p_n.$$

Viszont mint (1)-ben láttuk, $p_n \to 0$. ∎

2.2. Tétel. (Kun Gábor [2]) *Létezik Borel halmazok bővülő A_n sorozata úgy, hogy $\bigcup A_n = \mathbb{R}$, de egyik A_n megszámlálható eltoltjaival se fedhető le $\mathbb{R}$.*

Bizonyítás. Először megkonstruáljuk az A_n halmazokat. Ehhez a számegyenes számait kettes számrendszerben írjuk föl, a kétféleképp is felírható számoknak azt az alakját választva, amelyik valahonnan kezdve csupa 0-ból áll. (Választhatnánk a másikat is.) Jelölje $S_i(x)$ az $x \in \mathbb{R}$ szám kettes számrendszerbeli első i számjegyének az átlagát. Legyen

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \limsup S_i(x) = 1 \text{ vagy } \limsup S_i(x) < 1 - \frac{1}{n} \right\}.$$

A definícióból közvetlenül adódik, hogy $A_n \subset A_{n+1}$.

Az is világos, hogy $\bigcup A_n = \mathbb{R}$, hiszen tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\limsup S_n(x)$ vagy 1, és akkor x mindegyik halmazban benne van, vagy alkalmas $n \in \mathbb{N}$ -el $\limsup S_i(x) \le 1 - 1/n$, és akkor $x \in A_n$.

A_n Borel halmaz, hiszen $B_m(c) = \{x \in \mathbb{R} \mid S_m(x) \le c\}$ néhány intervallum egyesítése, és

$$A_n = \left(\bigcup_{d=1}^{\infty} \bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcap_{m=M}^{\infty} B_m\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{d}\right) \right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcap_{M=1}^{\infty} \bigcup_{m=M}^{\infty} \left(B_m\left(1 - \frac{1}{i}\right)\right)^c \right).$$

Végül azt kell még belátni, hogy egyetlen A_k megszámlálható eltoltjaival se fedhető le a számegyenes. Tekintsünk egy rögzített A_k halmazt, és ennek $(-x_n)$-ekkel ($n \in \mathbb{N}$) való eltoltjait. Olyan $x \in \mathbb{R}$ számot szeretnénk mutatni, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ -re $x \notin A_k - x_n$.

Legyen y_n az x_m elemeiből álló olyan sorozat, amelyben minden egyes x_m végtelen sokszor szerepel. Elég lenne egy olyan $x \in \mathbb{R}$ számot konstruálni, hogy minden n-re, alkalmas $s(n) \to \infty$ sorozattal

$$1 - \frac{1}{k} \le S_{s(n)}(x + y_n) \tag{1}$$

álljon fenn, továbbá, hogy $i > s(n)$ esetén

$$S_i(x + y_n) \le 1 - \frac{1}{3k} \tag{2}$$

teljesüljön. Ekkor ugyanis (1) miatt – mivel az y_n sorozatban minden x_m végtelen sokszor szerepel – tetszőleges $i \in \mathbb{N}$-re

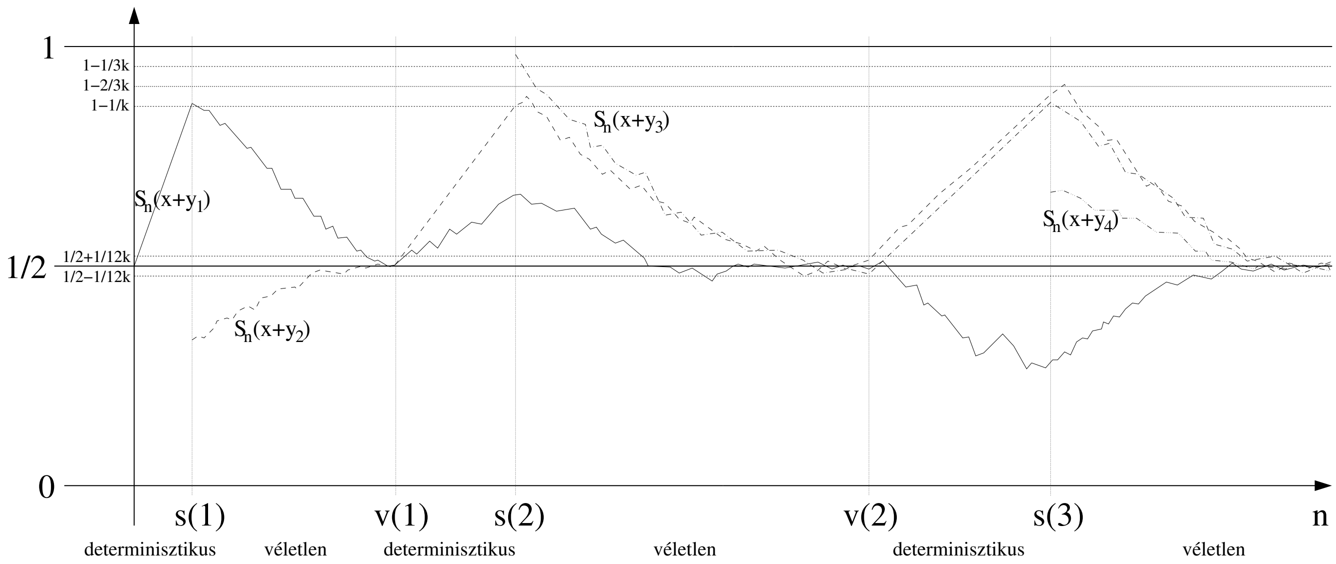
$$\limsup S_n(x + x_i) \ge 1 - \frac{1}{k},$$

illetve (2) miatt minden $i \in \mathbb{N}$-re

$$\limsup S_n(x + x_i) \le 1 - \frac{1}{3k} < 1,$$

azaz tetszőleges i-re $x + x_i \notin A_k$, és így $x \notin A_k - x_i$, $(i \in \mathbb{N})$, mint bizonyítani szeretnénk.

Ennek az x-nek a számjegyeit fogjuk megkonstruálni sorban úgy, hogy az egyszer már megválasztott számjegyeket nem bántjuk többé. A számjegyeket felváltva determinisztikusan, illetve véletlen választással fogjuk elkészíteni. A determinisztikus szakaszon egy kiválasztott i-re, és a hozzá választott $s(i)$-re az $S_{s(i)}(x+y_i)$ átlagot fogjuk $1-\frac{1}{k}$ fölé felvinni, ám ahhoz, hogy eközben $j<i$-re $S_n(x+y_j)$ ne nőjjön $1-\frac{1}{3k}$ fölé, előtte egy csomó számjegyet véletlenszerűen választunk. A véletlen számjegyek után ugyanis az összes $S_k(x+y_j)$ átlag $(j<i)$ elég nagy valószínűséggel $\frac{1}{2}$ közelébe kerül, tehát ha az $S_{s(i)}(x+y_i)$-t a lehető leggyorsabban növeljük $1-\frac{1}{k}$ fölé, akkor ez alatt a többi átlag is maximum ugyanennyit növekszik, és így kisebb marad mint $1-\frac{1}{3k}$.



Mielőtt rátérnénk x konstrukciójának részletes tárgyalására, egy technikai problémát kell meggondolnunk. Nevezetesen, ha gondosan beállítjuk x első n számjegyét úgy, hogy $x+y_i$ első n számjegye valamely előre megkövetelt sorozat legyen, azzal még nem biztosítottuk, hogy ezek a számjegyek a további jegyek megválasztása után is ugyanazok maradnak. Az $x+y_i$ összeadás elvégzésekor ugyanis esetleg az $n+1$-edik számjegynél maradék keletkezik, és ez végigsöpör az előtte álló számjegyeken, összekuszálva a megválasztott számjegysorozatunkat.

A problémát úgy küszöböljük ki, hogy x-nek az $n+1$-edik számjegyét is megválasztjuk, méghozzá azonosra y_i-nek az $n+1$-edik számjegyével. Ekkor ugyanis – függetlenül attól, hogyan folytatódik x – meg tudjuk mondani, hogy keletkezik-e maradék az $n+1$-edik jegyek összeadásakor: Ha a kérdéses számjegy x-ben és y_1-ben is 0 akkor nem, ha mindkettőben 1 akkor igen. Ezután a keletkező maradék függvényében már megválaszthatjuk x első n számjegyét úgy, hogy $x+y_i$ első n számjegye az előre megkövetelt legyen. Mivel a konstrukció során ez az n mindig nagyon nagy lesz, feltesszük, hogy ez az $n+1$-edik „védő számjegy” a számjegyátlagot csak elhanyagolható mértékben változtatja meg.

Szintén ehhez kapcsolódva bevezetünk egy jelölést. A konstrukció során számtalanszor előfordul az, hogy x első néhány számjegyét már megkonstruáltuk, és ezeknek valamilyen tulajdonságát szeretnénk mint az x szám tulajdonságát megfogalmazni. Ekkor azonban x mint szám még nem létezik, hiszen csak végessok számjegyét ismerjük. Jelöljük tehát

$x^{(n)}$-el azt a számot, amely úgy keletkezik x már megkonstruált, első n számjegyeiből, hogy a megkonstruált jegyeket csupa 0-val kiegészítjük.

Nézzük akkor most x konstrukcióját. Először válasszuk meg x első néhány, mondjuk $s(1)$ számjegyét, illetve az $s(1)+1$-edik „védő” számjegyet is úgy, hogy $x+y_1$-ben az első $s(1)$ számjegy átlagára – bárhogy is folytatódjon x az $s(1)+1$-edik számjegy után,

$$1-\frac{1}{k}<S_{s(1)}(x+y_1)<1-\frac{2}{3k}$$

teljesüljön. (A szereplő $s(1)$ egy később megválaszott szám lesz.) A következő néhány számjegyet, egészen az $s(2)+1$-edikig, úgy szeretnénk megválasztani, hogy – bárhogy folytassuk is x-et

$$1-\frac{1}{k}<S_{s(2)}(x+y_2)<1-\frac{2}{3k}$$

legyen érvényes. Szeretnénk közben még biztosítani, hogy $n>s(1)$-re $S_n(x+y_1)$ értéke $1-\frac{1}{3k}$ alatt maradjon.

Tehát úgy kéne az $S_{s(2)}(x+y_2)$ átlagot $1-(1/k)$ fölé emelni, hogy közben $S_i(x+y_1)$-et ($i>s(1)$) kordában tartjuk. Ezt úgy érjük el, hogy az $s(1)+2$-edik számjegytől kezdve egy csomó számjegyet véletlenszerűen választunk, $1/2$ – $1/2$ valószínűséggel döntve a 0 és az 1 között. A nagy számok erős törvénye szerint eközben mind az $S_n(x+y_1)$, mind az $S_n(x+y_2)$ sorozat 1 valószínűséggel $1/2$-hez tart ($n\to\infty$), azaz létezik egy $v(1)\in\mathbb{N}$ küszöb, hogy ha legalább a $v(1)$-edik számjegyig választottunk véletlenszerűen, és a $v(1)+1$-edik illetve a $v(1)+2$-edik szémjeggyel „megvédjük” az első $v(1)$ számjegyet $x+y_1$-ben és $x+y_2$-ben, akkor – bárhogy is folytassuk x-et további számjegyekkel

$$\mathrm{P}\left(\left|\, S_{v(1)}(x+y_i)-\frac{1}{2}\,\right|>\frac{1}{12k}\right)<\frac{1}{8}\qquad (i=1,\ 2).$$

Emellett, ha $s(1)$ elég nagy volt, akkor a lemma szerint még az is teljesül, hogy

$$\mathrm{P}\left(\sup_{s(1)<j\le v(1)} S_j(x+y_1)>1-\frac{1}{3k}\right)<\frac{1}{4}.$$

A $v(1)+2$-edik számjegy után a további számjegyeket úgy választjuk, hogy $x+y_2$-ben a $v(1)+2$-edik után minden számjegy 1 legyen, egészen addig, amíg az $x+y_2$-ben a számok átlaga $1-\frac{1}{k}$ fölé nem nő. Legyen ez az átlag $1-\frac{1}{k}+\delta$. Itt $\delta\le\frac{1}{v(1)}$, azaz választható olyan nagy $v(1)$, hogy $\delta<\frac{1}{6k}$ legyen. Mivel a véletlenül választott számjegyek után legalább $1-\frac{2}{8}$ valószínűséggel $x+y_1$-ben és $x+y_2$-ben a számjegyek átlaga $\frac{1}{6k}$-nál közelebb volt egymáshoz, és $x+y_2$-ben a számjegyátlag a lehető legnagyobb mértékben nőtt, a számjegyek átlaga legalább ugyanekkora valószínűséggel $x+y_1$-ben kevesebb marad mint $1-\frac{1}{k}+\delta+\frac{1}{6k}<1-\frac{2}{3k}$. Legyen $s(2)$ a legutoljára választott számjegy sorszáma. Feltehető, hogy van még egy $s(2)+1$-edik „védő” számjegyünk is úgy, hogy a számot akárhogy folytatva $x+y_2$ első $s(2)$ számjegye nem változik.

Így annak a valószínűsége, hogy az első $s(2)+1$ számjegy megválasztásával már megszegtük a megkívánt feltételeket, kevesebb mint $1/8+1/8+1/4=\frac{1}{2}$, tehát létezik

x első $s(2)+1$ számjegyének a feltételeinket kielégítő választása. Rögzítsük le ennek megfelelően x első $s(2)+1$ számjegyét.

A konstrukció általános, n. lépése:
Tegyük fel, hogy a konstrukcióban már az $n-1$-edik lépéssel megvagyunk, azaz megvannak már az $s(i) \in \mathbb{N}$ számaink ($i = 1,\ 2,\ \ldots\ n-1$), és x első $s(n-1)+1$ számjegye úgy, hogy:

(1) $S_{s(i)}(x+y_i) > 1 - \frac{1}{k}$, $(i = 1,\ 2,\ \ldots\ n-1)$ bárhogy is egészítsük ki a meglévő számjegyeket újakkal,

(2) akárhogy is folytassuk x számjegyeit, minden $i = 1,\ 2,\ \ldots\ n-1$ -re fennáll, hogy

$$S_{s(i)+j}(x+y_i) < 1 - \frac{1}{3k}, \qquad (j = 0,\ 1,\ \ldots\ (s(n-1) - s(i) + 1))$$

(3) akárhogy is folytassuk x számjegyeit, minden $i = 1,\ 2,\ \ldots\ n-1$ -re

$$S_{s(n-1)}(x+y_i) < 1 - \frac{2}{3k},$$

(4) $s(n-1)$ elég nagy ahhoz, hogy ha x további számjegyeit véletlenszerűen választanánk, akkor teljesülne hogy

$$\mathrm{P}\left((\forall i \leq n-1)\left(\sup_j S_{s(n-1)+j}(x+y_i) > 1 - \frac{1}{3k}\right)\right) < \frac{1}{4}.$$

Ekkor választhatunk egy $s(n)$-t, és megválaszthatjuk x számjegyeit az $s(n-1)+2$-ediktől kezdve az $s(n)+1$-edikig úgy, hogy a fenti 4 feltétel legalább $1/2$ valószínűséggel továbbra is teljesüljön, de $n-1$ helyett már n-re is. Nevezetesen:

Az $s(n-1)+1$-edik számjegy után véletlenszerűen ($1/2$ – $1/2$ valószínűséggel döntve a 0 illetve az 1 között) választunk további számjegyeket egészen odáig, hogy az utolsó jegyet $v_0(n-1)$-el jelölve

$$\mathrm{P}\left(\left| S_{v_0(n-1)}(x^{(v_0(n-1))} + y_i) - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{12k}\right) < \frac{1}{4n} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots\ n),$$

teljesüljön. A nagy számok törvénye [7] szerint ez megtehető, és ekkor igaz, hogy

$$\mathrm{P}\left((\forall i \leq n)\left(\left| S_{v_0(n-1)}(x^{(v_0(n-1))} + y_i) - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{12k}\right)\right) < \frac{1}{4}. \tag{5}$$

Vegyünk még egy olyan nagy $v(n-1) \geq v_0(n-1)$-et, és további véletlen számjegyeket a $v(n-1)$-edikig úgy, hogy ha egy tetszőleges $s \geq v(n-1)$-re

$$S_s(x^{(s)} + y_i) < 1 - \frac{2}{3k} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots\ n) \tag{6}$$

teljesülne, akkor x számjegyeit véletlenül folytatva, minden $i = 1,\ 2,\ \ldots\ n$-re

$$\mathrm{P}\left(\sup_j S_{s+j}(x+y_i) > 1 - \frac{1}{3k}\right) < \frac{1}{4n}$$

is fennállna. A lemma értelmében ez is megtehető, és ekkor

$$\mathrm{P}\left((\forall i \le n)\left(\sup_j S_{s+j}(x+y_i) > 1 - \frac{1}{3k}\right)\right) < \frac{1}{4} \tag{7}$$

is teljesül. Erre azért van szükség, mert majd $s(n) > v(n-1)$ olyan lesz, amelyre $s = s(n)$ választással (6) teljesül, és ekkor igaz lesz (7), azaz a konstrukció n-edik lépésének elvégzése után a (4) feltétel továbbra is érvényben lesz. Vegyünk még n darab további számjegyet a $v(n-1)$-edik után úgy, hogy „megvédjék" rendre az $x + y_1,\ \ldots\ x + y_n$ összegek első $v(n-1)$ számjegyét. (Ennek következtében az előző összegekben esetleg megváltoznak az előző számjegyek, de ettől még véletlen számjegyek maradnak.) Mivel n nagyon kicsi $v(n-1)$-hez képest, felteszzük, hogy az átlagokat ez az n számjegy nem befolyásolja lényegesen.

Mint (5)-ben láttuk, legalább $1 - \frac{1}{4}$ valószínűséggel $S_{v(n-1)}(x + y_i)$ minden ($i = 1,\ 2,\ \ldots\ n$)-re az $\frac{1}{2}$-nek az $\frac{1}{12k}$ sugarú környezetében van, bárhogy is folytassuk x számjegyeit:

$$P\left(\bigcap_{i\le n}\left(\left|S_{v(n-1)}(x^{(v(n-1))}+y_i) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{12k}\right)\right) > 1 - \frac{1}{4}. \tag{8}$$

(4) értelmében a véletlen számjegyválasztás során legalább $1 - \frac{1}{4}$ valószínűséggel az összes számjegyátlag $1 - \frac{1}{3k}$ alatt maradt, azaz

$$P\left(\bigcap_{i\le n-1}\ \bigcap_{l=s(n-1)+1}^{v(n-1)}\left(S_l(x^{(v(n-1))}+y_i) < 1 - \frac{1}{3k}\right)\right) > 1 - \frac{1}{4}. \tag{9}$$

Most határozzuk meg $s(n)$-t. Legyen $s(n) > v(n-1)$ az a legkisebb szám, amelyre $x + y_n$-nek a $v(n-1) + n$-edik és az $s(n)$-edik közé eső összes számjegyét 1-re állítva a számjegyek átlaga $1 - \frac{1}{k}$ fölé kerül. Állítsuk x-nek az $s(n) + 1$-edik számjegyét is be úgy, hogy megvédje az előtte álló számjegyeket az összeadásnál keletkező maradéktól.

A $v(n-1) + n$-edik számjegy és az $s(n) + 1$-edik jegy közé eső számjegyeket úgy választjuk, hogy $x^{(s(n))} + y_n$-ben minden számjegy 1 legyen (a $v(n-1) + n$-edik és az $(s(n) + 1)$-edik között). Így

$$S_{s(n)}(x + y_n) > 1 - \frac{1}{k}$$

lesz, bárhogy is folytassuk x-et az $s(n) + 1$-edik számjegy után, azaz (1) teljesül n-re is. Ez alatt a többi $x + y_i$ ($i = 1,\ 2,\ \ldots\ n-1$) átlag is maximum ugyanennyivel nőtt, hiszen $x + y_n$-ben a számjegyek átlagát a lehető leggyorsabban növeltük $1 - \frac{1}{k}$ fölé, így:

- ha az összes $S_{v(n-1)}(x^{(s(n))}+y_i)$ átlag az $\frac{1}{2}$-nek $\frac{1}{12k}$ sugarú környezetében volt, azaz bekövetkezett a (8)-ban szereplő esemény, akkor az összes $S_{s(n)}(x^{(s(n))}+y_i)$ átlag $1-\frac{2}{3k}$ alatt marad, azaz teljesülni fog (3) az n-edik lépés után is,
- az, hogy (3) igaz az n-edik lépés után pontosan azt jelenti, hogy fennál (6) az $s=s(n)$ választással, és így mint láttuk teljesül (4) az n-edik lépés után is,
- ha bekövetkezett mind a (8)-ban mind a (9)-ben szereplő esemény, akkor (2) is fennáll az n-edik lépés után is.

Tehát ahhoz, hogy a konstrukció az n-edik lépés során ne romoljon el, az kell, hogy a (8)-ban és a (9)-ben szereplő esemény együttesen bekövetkezzen. (8) és (9) alapján ennek legalább 1/2 a valószínűsége, azaz megválaszthatók x számjegyei az $s(1)+1$-edikig úgy, hogy a megkövetelt feltételek továbbra is fennálljanak.

A fenti konstrukció lépéseivel x-nek egyre több számjegyét rögzítjük le, azaz a konstrukció konvergál egy $x\in\mathbb{R}$ számhoz. Mivel a bizonyítás elején eldöntöttük, hogy azokat a számokat, melyek kétféleképp is írhatók 2-es számrendszerbe, úgy írjuk, hogy valahonnan kezdve csupa 0 legyen, gondoskodnunk kell arról is, hogy az elkészített x szám nehogy egy kétféleképp is írható szám másik alakja legyen, azaz ne álljon valahonnan kezdve csupa 1-ből. Ehhez a fenti konstrukciót annyiban kell módosítani, hogy x-be elég ritkán (pl. az $s(n)+1$-edik számjegy után) beírunk még egy-egy extra 0-t is. ■

2.3. Következmény. *Megadható $B_n\subset\mathbb{R}$ Borel halmazokból álló csökkenő sorozat, hogy $\bigcap B_n=\emptyset$, de bármelyik B_n-be bármely megszámlálható halmaz beletolható.*

Bizonyítás. Vegyük az előző tétel által biztosított A_n halmazokat, és legyen

$$B_n=A_n^c \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Mivel $\bigcup A_n=\mathbb{R}$ volt, nyilván $\bigcap B_n=\emptyset$ teljesül. Válasszuk ki az egyik halmazt, mondjuk B_k-t, és egy tetszőleges Q megszámlálható halmazt. Az előző tétel értelmében $A_k-Q\neq\mathbb{R}$, azaz létezik egy $x\notin(A_k-Q)$ elem. Az $x+Q$ halmaz diszjunkt A_k-tól, hiszen egy közös y elem esetén $y-x\in Q$ miatt $x=(y-(y-x))\in A_k-Q$ lenne. Mivel $B_k=A_k^c$, ez azt jelenti, hogy $x+Q\subset B_k$. ■

3. Halmazok, melyeknek csak kontinuum sok eltoltjával fedhető le $\mathbb{R}$.

Nem nehéz olyan halmazt találni, amelyek csak kontinuum sok eltoltjával lehet a számegyenest lefedni, például a $\{0\}$ ilyen. Ebben a fejezetben olyan halmazokra mutatunk példát, amelyek azért nagyobbak, de mégis kontinuum sokra van belőlük szükség $\mathbb{R}$ lefedéséhez. Végül belátjuk, hogy pozitív mértékű ilyen halmazt nem érdemes keresnünk.

3.1. Tétel. (G. Gruenhage, 2000) *A Cantor-halmaznak csak kontinuum sok eltoltjával lehet lefedni a számegyenest.*

Bizonyítás. (U. Darji, Keleti Tamás [1]) Legyen C a Cantor-halmaz. Egy olyan nem üres P perfekt halmazt fogunk konstruálni, hogy minden $t \in \mathbb{R}$-re $|(C+t) \cap P| \leq 2$ lesz. Ha ez sikerül, az bizonyítja az állítást, hisz már P lefedéséhez is kontinuum sok eltolt kell. Olyan P_n $(n \in \mathbb{N})$ halmaz-sorozatot fogunk készíteni, hogy

(1) P_n végessok, maximum $1/n$ hosszú zárt intervallum egyesítése,

(2) $P_{n+1} \subset P_n$, és P_n minden intervalluma két P_{n+1}-beli intervallumot tartalmaz,

(3) akárhogy veszünk P_n három különböző intervallumából 1–1 pontot, nem lehet őket eltolni úgy, hogy mindhárom C-be kerüljön.

Legyen $P_1 = [0,1] \cup [2,3]$. Ez nyílván teljesíti (1)-et, (2)-ről egyelőre nem érdemes beszélni, és (3) is teljesül, hiszen P_1-ben egyáltalán nincs három különböző intervallum.

Tegyük fel, hogy a sorozat P_{n-1}-ig már megvan, és teljesíti a kirótt feltételeket. Válasszunk minden intervallumból 2–2 pontot véletlenszerűen, egyenletes eloszlással, egymástól függetlenül. Legyen ez a halmaz (amely valójában egy valószínűségi változó) Q_n.

Számoljuk ki a $\mathrm{P}(\ \exists t \in \mathbb{R} : \ |(C+t) \cap Q_n| \geq 3)$ valószínűséget! Ehhez legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$ három rögzített szám, és nézzük meg, hogy mi kell ahhoz, hogy alkalmas $t \in \mathbb{R}$-re $a+t, b+t, c+t \in C$ teljesüljön.

$$a+t,\ b+t,\ c+t \ \in \ C$$
$$\Updownarrow$$
$$(a+t, b+t, c+t) \ \in \ C^3$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{Az } (1,1,1) \text{ irányvektorú, } (a,b,c)\text{-n átmenő egyenes metszi } C^3\text{-t}$$
$$\Updownarrow$$
$$\pi_E(a,b,c) \in \pi_E(C^3)$$

Ahol π_E a $(1,1,1)$ normálvektorú, origón átmenő E síkra való merőleges vetítés.

Most megmutatjuk, hogy $\pi_E(C^3)$ nulla Lebesgue mértékű. (Lebesgue mérték alatt itt az E síkon értelmezett, 2 dimenziós λ_2 Lebesgue mértéket értjük.) Ehhez tekintsük a Cantor-halmaz szokásos $C = \bigcap C_n$ perfekt-sémás előállítását. (Tehát $C_0 = [0,1]$, és C_n úgy keletkezik C_{n-1}-ből, hogy a C_{n-1}-ben szereplő összes intervallumból elhagyjuk a középső nyílt harmadát.) Ekkor persze $C^3 = \bigcap C_n^3$, illetve $\pi_E(C^3) = \bigcap \pi_E(C_n^3)$ is fennáll. Mivel a C_n halmaz 2^n darab, egyenként $1/3^n$ hosszú intervallum egyesítése, C_n^3 éppen 8^n darab $1/3^n$ élhosszúságú kocka úniója. Egy-egy ilyen kocka testátlója $\sqrt{3}/3^n$ hosszú, azaz a kocka belefér egy ekkora átmérőjű gömbbe. A kockák vetületének a mértéket becsüljük felülről ezen gömbök vetületének mértékével:

$$\lambda_2\left(\pi_E(C^3)\right) \leq \lambda_2\left(\pi_E(C_n^3)\right) \leq 8^n \cdot \left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{3^n}\right)^2 \cdot \pi.$$

Itt a jobb oldali kifejezés $n \to \infty$ mellett nullához tart, azaz $\lambda_2(\pi_E(C^3)) = 0$ tényleg teljesül.

Térjünk vissza most P_{n-1}-re. Jelöljük P_{n-1} intervallumait I_1, I_2, $\ldots$ I_N-el. Legyenek $\xi^i, \zeta^j, \varrho^k$ véletlenszerűen választott pontok rendre I_i, I_j, I_k-ból.

$$\mathrm{P}\left(\ \exists t \in \mathbb{R}:\ |(C+t) \cap Q_n| \geq 3\right) \leq \sum_{i,j,k} \mathrm{P}\left(\ \exists t \in \mathbb{R}:\ \xi^i, \zeta^j, \varrho^k \in C+t\right) =$$

$$= \sum_{i,j,k} \mathrm{P}\left(\pi_E(\xi^i, \zeta^j, \varrho^k) \in \pi_E(C^3)\right) \tag{4}$$

Rögzített (i,j,k)-ra a $(\xi^i, \zeta^j, \varrho^k)$ vektor $I_i \times I_j \times I_k$-ból kerül kiválasztásra, az $I_i \times I_j \times I_k$-n értelmezett, 1-re normált Lebesgue-mérték szerint. $\pi_E(\xi^i, \zeta^j, \varrho^k)$-re tekinthetünk úgy is, mintha a $\pi_E(I_i \times I_j \times I_k)$-ból véletlenszerűen választott, 2 dimenziós valószínűségi vektorváltozó lenne, ahol a $\pi_E(I_i \times I_j \times I_k)$-n a valószínűségi mérték az $I_i \times I_j \times I_k$-ról örökölt. Ez nem pontosan a síkon értelmezett 1-re normált Lebesgue-mérték lesz, de legalább abszolút folytonos lesz arra nézve.

Mivel $\pi_E(C^3)$ nulla Lebesgue mértékű, és $\pi_E(\xi^i, \zeta^j, \varrho^k)$ egy pozitív mértékű halmazból kerül kiválasztásra a Lebesque-mértékre abszolút folytonos mérték szerint, $P\left(\pi_E(\xi^i, \zeta^j, \varrho^k) \in \pi_E(C^3)\right) = 0$, és így (4) jobb oldala, és akkor persze a bal oldala is 0.

Tehát beláttuk, hogy az intervallumokból véletlenül kiválasztott pontokból álló Q_n halmazra 1 valószínűséggel teljesül, hogy bármely $t \in \mathbb{R}$-re $|(C+t) \cap Q_n| \leq 2$. Emellett azt – az ezzel ekvivalens dolgot – is láttuk, hogy ha Q_n pontjaiból az összes lehetséges módon kiveszünk három különbözőt, és ezekből mint koordinátákból egyetlen $\mathbb{R}^3$ beli pontot csinálunk, akkor az ezen pontok egyesítéseként létrejövő $Q_n^{(3)}$ halmazra

$$\pi_E(Q_n^{(3)}) \cap \pi_E(C^3) = \emptyset$$

teljesül 1-valószínűséggel. Mivel C kompakt, C^3 is az, és $\pi_E(C^3)$ is. Emellett $\pi_E(Q_n^{(3)})$ végessok pont egyesitése, így $\pi_E(Q_n^{(3)})$ pontjait egy kis zárt környezetükkel helyettesítve még mindig $\pi_E(C^3)$-tól diszjunkt halmazt kapunk. Ez viszont azt jelenti, hogy az eredeti Q_n halmazzal is megcsinálhatjuk ezt, azaz pontjait zárt intervallum-környezetükkel helyettesíthetjük úgy, hogy a kapott $\overline{P}_n$ halmaz 3 különböző intervallumából alkotott $\mathbb{R}^3$-beli direkt szorzat π_E-képe diszjunkt legyen $\pi_E(C^3)$-tól. Feltehető még az is, hogy $\overline{P}_n$ intervallumai rövidebbek mint $1/n$. $\overline{P}_n$ esetleg még kilóghat P_{n-1} intervallumaiból, úgyhogy legyen

$$P_n = P_{n-1} \cap \overline{P}_n.$$

A konstrukció miatt erre 1-valószínűséggel teljesülnek a megkívánt feltételek, így létezik P_n sorozat a megkövetelt (1), (2), (3) tulajdonságokkal.

Legyen

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n.$$

(1) és (2) miatt P nem üres perfekt halmaz, másrészt (1) és (3) miatt olyan, hogy a Cantor-halmaz bármely eltoltja legfeljebb 2 pontban metszi. ■

A bizonyítás során a Cantor halmazról valójában csak azt használtuk ki, hogy kompakt, és hogy $\lambda_2(\pi_E(C^3)) = 0$. Most vizsgáljuk meg, hogy mely további H halmazok rendelkeznek a $\lambda_2(\pi_E(H^3)) = 0$ tulajdonsággal.

Ehhez szükségünk lesz egy $E \subset \mathbb{R}^n$ halmaz $\dim_{\mathrm{H}}(E)$ Hausdorff dimenziójára, illetve a $\overline{\dim}_{\mathrm{P}}(E)$ felső pakolási dimenzióra. Ezeknek a fogalmaknak a definíciója megtalálható a II. függelékben.

3.2. Állítás.
(b) $\overline{\dim}_{\mathrm{P}}(A \times B) \leq \overline{\dim}_{\mathrm{P}}(A) + \overline{\dim}_{\mathrm{P}}(B)$.
(c) *Vetítés során* $\overline{\dim}_{\mathrm{P}}(A)$ *nem nő.*
(d) *Ha* $\overline{\dim}_{\mathrm{P}}(A) < n$, *akkor* $\lambda_n^*(A) = 0$, *ahol* λ_n^* *az* n*-dimenziós Lebesgue külső mérték.*

Bizonyítás. Megtalálható a függelék II.6 állításánál. ■

Felhasználva az előbb kimondott technikai állítást, a 3.1 tétel erősebb formában is kimondható.

3.3. Tétel. (U. Darji, Keleti Tamás [1]) *Ha* A *olyan kompakt halmaz, hogy* $\overline{\dim}_{\mathrm{P}}(A) < 1$, *akkor* A*-nak csak kontinuum sok eltoltjával fedhető le* $\mathbb{R}$.

Bizonyítás. A 3.1 tétel bizonyítása a kompaktságon kívül csak azt használná A-ról, hogy $\lambda_2(\pi_E(A^3)) = 0$, így most elég lenne csak ezt belátni. Ez persze nem feltétlenül lesz igaz, de nézzük, mit mondhatunk helyette! Ha $\overline{\dim}_{\mathrm{P}}(A) < 1$, akkor alkalmas $N \in \mathbb{N}$ számmal

$$N \cdot \overline{\dim}_{\mathrm{P}}(A) < N - 1$$

teljesül. Ekkor hasonlóan a 3.1 tétel bizonyításához, konstruálható egy P perfekt halmaz, hogy minden $t \in \mathbb{R}$-re $|(A+t) \cap P| \leq N-1$. Ehhez a bizonyítást csak annyiban kell módosítani, hogy P_n pont-N-eseiből alkotott $\mathbb{R}^N$ beli pontokat és A^N-t kell levetíteni az E, origón átmenő hipersíkra. Mivel $N \cdot \overline{\dim}_{\mathrm{P}}(A) < N-1$, a 3.2 állítás (b) része szerint $\overline{\dim}_{\mathrm{P}}(A^N) < N-1$. A 3.2 állítás (c) pontja szerint $\overline{\dim}_{\mathrm{P}}(\pi_E(A^N)) < N-1$, és a (d) pontja szerint $\lambda^*_{N-1}(\pi_E(A^N)) = 0$, azaz a bizonyítás működik. ■

A továbbiakban az a célunk, hogy megvizsgáljuk, mikor lehet egy halmaz kevesebb mint kontinuum eltoltjával lefedni a számegyenest.

3.4. Lemma. *Ha $M \subset \mathbb{R}$ pozitív mértékű mérhető, $L \subset \mathbb{R}$ pozitív külső mértékű halmaz, akkor $M + L$ tartalmaz intervallumot.*

Bizonyítás. A Lebesgue tétel szerint M-nek és L-nek majdnem minden pontja sűrűségi pontja, és mivel M pozitív mértékű illetve L pozitív külső mértékű, mindkettőnek van is sűrűségi pontja. Legyenek ezek rendre m illetve l. Válasszunk egy olyan $\varepsilon > 0$ számot, hogy m-nek és l-nek az ε sugarú környezetében nagyobb legyen a sűrűség mint 9/10:

$$\frac{\lambda(M \cap B(m,\varepsilon))}{\lambda(B(m,\varepsilon))} > \frac{9}{10}, \qquad \frac{\lambda^*(L \cap B(m,\varepsilon))}{\lambda(B(m,\varepsilon))} > \frac{9}{10},$$

azaz, hogy

$$\lambda\left(M \cap B\left(m,\varepsilon\right)\right) > \frac{18}{10}\varepsilon, \qquad \lambda^*\left(L \cap B\left(l,\varepsilon\right)\right) > \frac{18}{10}\varepsilon$$

teljesüljön. Vezessük be az

$$M_0 = \left(M \cap B\left(m,\varepsilon\right)\right) - m, \qquad \text{illetve az} \qquad L_0 = \left(L \cap B\left(l,\varepsilon\right)\right) - l$$

jelölést. Elég megmutatnunk, hogy $M_0 + L_0 \supset B(0, \frac{\varepsilon}{10})$.

Indirekt tegyük fel, hogy $x \in B(0, \frac{\varepsilon}{10})$, de $x \notin M_0 + L_0$. Ez azt jelenti, hogy $M_0 - x$ és $-L_0$ diszjunktak, hiszen egy közös y elem esetén $x + y \in M_0$ volna, és $x = (x+y) - y \in M_0 + L_0$ lenne, pedig az ellenkezőjét tettük fel. Ha viszont $M_0 - x$ és $-L_0$ diszjunktak, akkor $-L_0 \subset (M_0 - x)^c$, sőt, mivel $-L_0 \subset B(0,\varepsilon)$, ezért

$$-L_0 \subset \left((M_0 - x)^c \cap B(0,\varepsilon)\right) \tag{5}$$

is teljesül. Mivel $\lambda\left(M \cap B\left(m,\varepsilon\right)\right) > \frac{18}{10}\varepsilon$-ből és M mérhetőségéből $\lambda(M_0^c \cap B(0,\varepsilon)) < \frac{2}{10}\varepsilon$ következik, és $|x| < \frac{\varepsilon}{10}$, ezért

$$\lambda\left((M_0 - x)^c \cap B(0,\varepsilon)\right) < \frac{2}{10}\varepsilon + \frac{1}{10}\varepsilon = \frac{3}{10}\varepsilon,$$

pedig (5)-ben azt láttuk, hogy $(M_0 - x)^c \cap B(0, \varepsilon)$ lefed egy legalább $\frac{18}{10}\varepsilon$ külső mértékű halmazt, ami lehetetlen. ■

3.5. Lemma. *ZFC-ben konzisztens, hogy létezik pozitív külső mértékű, kontinuumnál kisebb számosságú halmaz a számegyenesen.*

Bizonyítás. Itt nem bizonyítjuk. Részletes bizonyítás található például [3]-ban. ■

3.6. Tétel. (G. Gruenhage) *Ha M pozitív mértékű mérhető halmaz, akkor ZFC-ben konzisztens, hogy kevesebb mint kontinuum eltoltjával lefedhető $\mathbb{R}$.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint ZFC-ben konzisztens, hogy létezik egy L pozitív külső mértékű, kontinuumnál kisebb számosságú halmaz. Legyen ez a számosság κ. A 3.4 tétel szerint $M + L$, azaz M-nek a κ számosságú L halmaz elemeivel való eltoltja tartalmaz intervallumot, így $M + L$-nek ω_0 eltoltjával már lefedhető $\mathbb{R}$. Összesen tehát $\mathbb{R}$ fedéséhez M-nek $\omega_0 \cdot \kappa = \kappa$ eltoltjára volt szükség. ■

4. κ-kicsi halmazok a síkon.

A továbbiakban azt szeretnénk megvizsgálni, hogy az 1. fejezet eredményei mennyiben maradnak érvényben $\mathbb{R}^n$-ben. Az általánosításra két kézenfekvő út kínálkozik. Az első az, hogy $\mathbb{R}^n$ halmazait nézzük, és az $\mathbb{R}^n$-beli eltolásokat. Így azonban továbbra is egy

$$\langle \textit{kontinuum számosságú alaptér; rajta hat önmaga, mint kommutatív csoport} \rangle$$

típusú strukturát kapunk, azaz az eredményeink és a bizonyításaink szó szerint elmondhatóak maradnak.

Izgalmasabb lehetőség, hogy az $\mathbb{R}^n$-en ható csoportnak az SG_n mozgáscsoportot vesszük. Ezt a tengely körüli elforgatások és az eltolások generálják, és már $n = 2$ esetre sem kommutatív. Most lássuk a κ-kicsiség ennek megfelelő definícióját.

4.1. Definíció. Legyen κ egy számosság. Egy $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazt *κ-kicsi*nek nevezünk, ha $\mathbb{R}^n$-ben páronként diszjunktan elhelyezhető A-nak κ darab (SG_n-beli elemekkel való) elmozgatottja.

4.2. Megjegyzés. Mivel SG_1 az $\mathbb{R}$ eltoláscsoportja, ezért a definíció $n = 1$-re visszaadja az 1.1 definíciót.

Mint már megjegyeztük, SG_2 nem kommutatív, így ahhoz, hogy a síkon boldoguljunk, az 1.5 tétel egy általánosítására van szükségünk.

4.3. Tétel. *Ha a $\langle G, \cdot \rangle$ csoport feloldható, akkor amenábilis.*

Bizonyítás. Megtalálható a függelék I.4 tételénél. ■

Az 1. fejezet során az alaptér és a rajta ható csoport „azonos” volt, nevezetesen az alaptér a valós számok halmaza, a csoport a valós számok csoportja volt. Ott tehát az $\mathbb{R}$ csoporton létrejövő, a csoport hatására invariáns, végesen additív valószínűségi mérték rögtön biztosított egy ugyanilyen mértéket az $\mathbb{R}$ alaphalmazon is, az identikus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megfeleltetés által. A két dimenziós esetben az $\mathbb{R}^2$ alaphalmaz és a rajta ható SG_2 csoport között nincs ilyen természetes megfeleltetés, így készítenünk kell egyet.

4.4. Állítás. *Tegyük fel, hogy a $\langle G, \cdot \rangle$ amenábilis csoport hat X-en. Ekkor megadható X-en egy végesen additív valószínűségi mérték, amely G hatásaira invariáns.*

Bizonyítás. Legyen μ a G-n egy invariáns, végesen additív valószínűségi mérték. Válasszunk egy tetszőleges $x \in X$ elemet. Egy $A \subset X$ halmazra legyen

$$\nu(A) = \mu\left(\left\{g \in G \,\middle|\, g(x) \in A\right\}\right).$$

Könnyen látható, hogy $\nu : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ végesen additív, G-invariáns valószínűségi mérték. ∎

4.5. Megjegyzés. Látható, hogy az előbb definiált mérték tartója éppen x orbitja lesz, így megtörténhet, hogy a kapott mérték függ x választásától. Viszont belátható, hogy $X = \mathbb{R}^n$, $G = SG_n$ szereposztással ez nem fordul elő.

4.6. Tétel. *Ha $\kappa \leq \omega_0$, és A_l $(l \in \lambda)$ olyan λ darab κ-kicsi halmaz, hogy $\bigcup A_l = \mathbb{R}^2$, akkor $\lambda \geq \kappa$.*

Bizonyítás. A sík mozgáscsoportja feloldható, hiszen

$$\{e\} \triangleleft SO_2 \triangleleft SG_2$$

kompozíciólánca SG_2-nek, és SO_2 kommutatív. Az SG_2/SO_2 faktorcsoport $\mathbb{R}^2$ eltoláscsoportja, amely szintén kommutatív. Ekkor viszont a 4.3 tétel értelmében amenábilis is, és a 4.4 tétel biztosít egy μ végesen additív, SG_2-invariás valószínűségi mértéket $\mathbb{R}^2$-n. Ezt a mértéket felhasználva az 1.6 tétel bizonytása megismételhető. ∎

A 4.6 tétel eredménye még összhangban volt a számegyenesen kapott eredménnyel. Az 1.2 tétel bizonyítása síkon már nem működik, hiszen a bizonyítás kulcslépése – egy egyenlet átrendezése – a mozgáscsoport kommutatívitását haszálta ki. A sík mozgáscsoportja, SG_2 nem kommutatív, de mint láttuk, amenábilis. Azt gondolhatnánk, hogy hasonlóan az előző tételhez, az amenábilitást felhasználva átmenthetnénk az 1.2 tételt is a síkra, ám meglepő módon a tétel végtelen számosságokra nem igaz.

4.7. Tétel. (Mátrai Tamás) *Tegyük fel, hogy igaz a kontinuum-hipotézis. Ekkor van olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy a grafikonjának megszámlálhatóan sok origó körüli elforgatottja lefedi a síkot.*

Bizonyítás. Olyan $X \subset \mathbb{R}^2$ halmazt szeretnénk konstruálni, amely minden függőleges egyenesről pontosan egy pontot tartalmaz, de az origó körüli, racionális szöggel terténő elforgatottjai lefedik a síkot. Osszuk $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pontjait ekvivalenciaosztályokra az alapján, hogy racionális szöggel való elforgatásokkal egymásba vihetőek-e. Azaz a racionális elforgatások halmazát Φ-vel jelölve:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \exists(\varphi \in \Phi)(x = \varphi(y)).$$

Jelöljük az ekvivalenciaosztályokat M_α-val ($\alpha \in c$), és az $x \in \mathbb{R}^2$ pont ekvivalenciaosztályát $M(x)$-el. Látható, hogy egy ekvivalenciaosztály egy origó körüli kör megszámlálható sok pontjából áll, és hogy összesen kontinuum sok ekvivalenciaosztályunk van. Minden osztályból legalább egy elemet kellene választanunk úgy, hogy egy függőleges egyenesre ne essen egynél több pont. Jelöljük $E(x)$-el az $x \in \mathbb{R}$ ponton átmenő függőleges egyenest. Ha $H \subset R^2$ tetszőleges halmaz, akkor legyen

$$Q(H) = \bigcup \Big\{ E(h_1) \cap \varphi(E(h_2)) \;\Big|\; h_1, h_2 \in H,\ \varphi \in \Phi,\ E(h_1) \neq \varphi(E(h_2)) \Big\}.$$

Látható, hogy ha H megszámlálható számosságú, akkor $Q(H)$ is megszámlálható marad, továbbá $Q(Q(H)) = Q(H)$.

Az $X = \bigcup X_\alpha$ halmazt transzfinit indukcióval fogjuk felépíteni, az α-adik lépésben az M_α osztály egy pontját X_α-ba rakva, vigyázva arra, nehogy egy függőleges egyenesről egynél több pontot válasszunk be. Az építkezés során segítségünkre lesz az Y_α segédhalmaz, amellyel számon tartjuk, hogy mely ekvivalenciaosztályból válaszottuk már pontot X_α-ba.

Legyen $Y_0 = \{(0,0)\}$, $X_0 = \{(0,0)\}$.

Tegyük fel, hogy α megszámlálható rendszám, és minden $\beta < \alpha$-ra megvannak az $Y_\beta \subset \mathbb{R}^2$ és $X_\beta \subset \mathbb{R}^2$ halmazaink, melyekre teljesül, hogy

(a) Alkalmas $\xi_i \in M_i$ ($i \in \beta$) elemekkel $Y_\beta = Q(\{(0,0)\} \cup \bigcup_{i\in\beta}\{\xi_i\})$,

(b) Ha $y \in Y_\beta$, akkor X_β tartalmaz $M(y)$-beli pontot,

(c) X_β minden függőleges egyenesről maximum csak 1 pontot tartalmaz.

Készítsük el az Y_α és az X_α halmazokat úgy, hogy minden $\beta < \alpha$-ra $X_\alpha \supset X_\beta$ és $Y_\alpha \supset Y_\beta$ legyen, és a fenti feltételek teljesüljenek rájuk is! E célból válasszunk egy $\xi_\alpha \in M_\alpha$ pontot, és definiáljuk Y_α-t

$$Y_\alpha = Q\left(\bigcup_{\beta\in\alpha} Y_\beta \cup \{\xi_\alpha\}\right) = Q\left(\bigcup_{\beta\in\alpha} \{\xi_\beta\} \cup \{\xi_\alpha\}\right)$$

alakban. A definícióból azonnal adódik, hogy Y_α kielégíti az (a) feltételt. Kezdetnek legyen $X'_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} X_\beta$. Vegyük sorban a megszámlálható Y_α halmaz y_i elemeit, és próbáljunk meg a hozzájuk tartozó $M(y_i)$ enkvivalenciaosztályokból egy-egy elemet rekurzíven X'_α-ba választani úgy, hogy közben ne sértsük meg (c)-t. Ehhez nézzük meg, hogy $M(y_i)$ hány $E(x)$ ($x \in \bigcup_{\beta\in\alpha} X_\beta$) egyenesbe metsz bele. Legyen ez a szám m_i.

Ha $m_i \geq 2$, akkor ez azt jelenti, hogy alkalmas $\beta < \alpha$-ra van két olyan $x_1, x_2 \in X_\alpha$ pontunk, hogy $M(y_i)$ metszi $E(x_1)$-et és $E(x_2)$-t is. A metszéspontokat jelöljük rendre c_1, c_2-vel. Mivel $c_1, c_2 \in M(y_i)$, ezért c_1-et racionális szögű elforgatás viszi c_2-be, és mivel Y_β (a) miatt zárt Q-ra, a $c_1 = E(x_1) \cap \varphi(E(x_2))$ pont már Y_β-ban is szerepelt. Így $c_1 \in M(y_1)$ miatt az y_i pont kapcsán nincs további tennivalónk, hiszen egy $M(y_i)$-beli pontot (b) miatt már X_β is tartalmazott.

Ha $m_i \leq 1$, akkor $M(y_i)$ még végtelen sok olyan függőleges egyenesbe metsz bele, amelyből X'_α még nem tartalmaz pontot. (Azaz valójában csak $m_i < \infty$-t használjuk.) Az

$y_1, y_2, \dots y_{i-1}$ pontok számára ebből a végtelen sok szabad egyenesből legfeljebb $i-1$-et foglaltunk le, tehát még továbbra is marad olyan, még szabad függőleges egyenes, amelybe $M(y_i)$ belemetsz. Válasszunk erről az egyenesről egy $M(y_i)$-be eső x_i pontot.

Legyen
$$X_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} X_\beta \cup \left\{ x_i \;\middle|\; m_i \leq 1,\ i = 1, 2, \dots \right\}.$$
Erre nyilván teljesülni fog (c), hiszen úgy konstruáltuk. Mivel y_i $(i = 1, 2, \dots)$ végigfut az összes Y_α-beli ponton, (b) is igaz lesz. Végezetül, mint ígértük, $\beta < \alpha$-ra $X_\alpha \supset X_\beta$ és $Y_\alpha \supset Y_\beta$ is teljesül.

Ez a transzfinit rekurzió megszámlálható α rendszámokra működik, azaz minden $\alpha \in \omega_1$ rendszámhoz létrejönnek az X_α és Y_α halmazok. A kontinuum hipotézis értelmében $c = \omega_1$, így az, hogy minden $\alpha \in c$-re az X_α, Y_α halmazpárra igaz (a), (b), (c), azt jelenti, hogy az
$$X = \bigcup_{\alpha\in c} X_\alpha$$
halmaz megfelel a megkívánt feltételeknek. (Ugyanis (c) miatt minden függőleges egyenesről maximum csak 1 pontot tartalmaz, így függvénygrafikon. Az (a) és (b) feltétel miatt az origó körüli, racionális elforgatottjai lefedik $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$-t, de az $X_0 = \{(0,0)\}$ miatt a teljes síkot is.) ■

4.8. Következmény. *Tegyük fel, hogy igaz a kontinuum-hipotézis. Ekkor van olyan $X \subset \mathbb{R}^2$ kontinuum-kicsi halmaz, amelynek megszámlálható sok elforgatottja lefedi a síkot.*

Bizonyítás. Az előző tétel X halmaza jó lesz. Azt láttuk, hogy az origó körüli, racionális szögekkel való elforgatottjai lefedik a síkot, és mivel X egy függvény grafikonja, az összes függőleges eltoltja diszjunkt, bizonyítva a c-kicsiséget. ■

4.9. Következmény. *Tegyük fel a kontinuum-hipotézist. Ekkor van olyan halmaz a síkon, amely minden origó körüli körről legfeljebb csak egy pontot tartalmaz, ám megszámlálható sok eltoltja a teljes síkot lefedi.*

Bizonyítás. Ismételjük meg a 4.8 tétel bizonyítását a

függőleges egyenesek $\to$ *origó körüli körök*
racionális elforgatások $\to$ *racionális eltolások*

szerepcseréjével. ■

4.10. Megjegyzés. Komjáth Péter és Mátrai Tamás egymástól független, friss eredménye szerint a 4.8 tétel, és így a 4.9, 4.10 következmények a kontinuum-hipotézis nélkül is igazolhatóak. A dolgozat elkészültéig még nem sikerült egyik bizonyítást se ellenőriznem.

5. κ-kicsi halmazok $\mathbb{R}^n$-ben ($n \geq 3$).

A tér mozgáscsoportja, SG_3 nem feloldható, de ettől még lehetne amenábilis. Látni fogjuk, hogy nem az. Például a Banach-Tarski paradoxon [9] egy lehetséges konstrukciója egy olyan $B \subset S^2$ halmazt állít elő, melynek megszámlálható sok elforgatottjai diszjunktan elhelyezhetőek S^2-n, de már négy elforgatottjával is fedhető S^2. Ezt a B halmazt az origóból $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ pontjaira „kivetítve" egy olyan halmazt kapunk, amelynek megszámlálható sok diszjunkt elforgatottja elfér a térben, ám már öt elmozgatottjával lefedhető $\mathbb{R}^3$. (Az ötödik példány az origó lefedéséhez kell.) Ám az ott bevezetett apparátus felhasználásával még élesebb eredmény kapható: hamarosan bebizonyítjuk, hogy minden $n \geq 3$-ra létezik egy olyan $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz, hogy tetszőleges $2 \leq \lambda \leq c$ számosságra $\mathbb{R}^n$ előáll mint az A halmaz λ darab példányának diszjunkt úniója. Ez speciálisan azt jelenti, hogy A egy olyan c-kicsi halmaz, amelynek már két elmozgatottjával is lefedhető $\mathbb{R}^n$.

Először az egyenletrendszer fogalmának egy absztrakt általánosítására lesz szükségünk.

5.1. Definíció. Legyen κ, λ egy-egy tetszőleges számosság, A_i $(i \in \lambda)$ halmaz-változók, $L_\alpha, R_\alpha \subseteq \lambda$ $(\alpha \in \kappa)$ halmazpárok sorozata. Tekintsük az

$$\bigcup_{i \in L_\alpha} A_i \simeq \bigcup_{i \in R_\alpha} A_i \qquad (\alpha \in \kappa)$$

relációhalmazt. Ha egyik R_α vagy L_α halmaz se üres, és az egyik R_α vagy L_α halmaz se egyenlő $\{1, \ldots, \lambda\}$-el akkor a relációhalmazt *nemtriviális kongruenciarendszer*nek nevezzük.

A definícióban szereplő α-adik reláció egy olyan „egyenlet", amelynek az A_i változói helyébe halmazokat helyettesíthetünk, és az egyenlőségjel helyett szereplő absztrakt $\simeq$ reláció egy, a későbbiekben megválasztott, halmazokon értelmezett reláció lesz. Ám az egyenletek felállításában az a tény, hogy még nem ismerjük konkrétan a $\simeq$ relációt, nem zavar bennünket.

Ennek ellenére előre megjegyezzük, hogy $\simeq$ a továbbiakban egy csoport hatása által egymásba vihető halmazokat fog tartalmazni. Ha a G csoport hat egy alaphalmazon (ami lehet akár önmaga is), akkor jelöljük $A \simeq_G B$-vel azt, hogy $(\exists g \in G)(gA = B)$. Ha $gA = B$, azt $A \simeq_g B$-vel jelöljük.

5.2. Tétel. *Legyen κ, λ egy-egy számosság, és legyen adva egy*

$$\bigcup_{i \in L_\alpha} A_i \simeq \bigcup_{i \in R_\alpha} A_i \qquad (\alpha \in \kappa)$$

nemtriviális kongruenciarendszer ($L_\alpha \subset \lambda$, $R_\alpha \subset \lambda$). Tegyük fel, hogy az F csoportot szabadon generálják a φ_α ($\alpha \in \kappa$) elemek. Ekkor az F felosztható diszjunkt F_α ($\alpha \in \lambda$) halmazokra, amelyekre

$$\bigcup_{i\in L_\alpha} F_i \simeq_{\varphi_\alpha} \bigcup_{i\in R_\alpha} F_i \qquad (\alpha \in \kappa) \tag{1}$$

teljesül.

Bizonyítás. Az (1) kongruenciarendszer minden egyes kongruenciáját bontsuk szét egy vele ekvivalens párra:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha\left(\bigcup_{i\in L_\alpha} F_i\right) &\subseteq \bigcup_{i\in R_\alpha} F_i \\ \varphi_\alpha^{-1}\left(\bigcup_{i\in R_\alpha} F_i\right) &\subseteq \bigcup_{i\in L_\alpha} F_i. \end{aligned} \tag{2}$$

F elemei olyan véges hosszúságú szavak, melyek a $\{\varphi_1, \varphi_1^{-1}, \varphi_2, \varphi_2^{-1}, \ldots\}$ halmazból építkeznek. Írjuk F elemeit tovább nem egyszerűsíthetően $\psi = \psi_1\psi_2\cdots\psi_n$ alakba, ahol $\psi_i \in \{\varphi_1, \varphi_1^{-1}, \varphi_2, \varphi_2^{-1}, \ldots\}$. Most beosztjuk a $\psi \in F$ elemeket az F_i halmazokba, a ψ szó hosszára vonatkozó rekurzióval. A 0 hosszúságú szót, azaz F egységelemét rakjuk mondjuk F_1-be.

Tegyük fel, hogy már minden, maximum n hosszú szót beosztottunk az F_i halmazokba úgy, hogy ezek a szavak nem sértik meg (2) kongruenciáit, azaz a (2)-ben a bal oldalon előálló maximum n hosszú szavak szerepelnek a jobb oldalon is. Vegyünk egy tetszőleges, n hosszú ψ szót, és próbáljuk meg $\varphi_1\psi$-t elhelyezni valamelyik F_i-be. Ha ψ első betűje φ_1^{-1}, akkor a szó első két betűje $\varphi_1\varphi_1^{-1} = 1$ miatt kiegyszerűsödik, így a szó csak $n-1$ hosszú, így már szerepel az egyik F_i halmazban. Ha $\varphi_1\psi$ tényleg $n+1$ hosszú, akkor vegyük szemügyre a

$$\varphi_1\left(\bigcup_{i\in L_1} F_i\right) \subseteq \bigcup_{i\in R_1} F_i \tag{3}$$

$$\varphi_1^{-1}\left(\bigcup_{i\in R_1} F_i\right) \subseteq \bigcup_{i\in L_1} F_i. \tag{4}$$

kongruenciákat, hiszen csak ezek ronthatják el a kongruenciarendszert a $\varphi_1\psi$ szó elhelyezésekor. Ha $\psi \in \bigcup_{i\in L_1} F_i$, akkor $\varphi_1\psi$-nek (3) jobb oldalán levő egyik F_i-ben szerepelnie kell, tegyük bele hát az egyik ott szereplő, tetszőleges F_i-be. Ilyen F_i van, mivel a rendszer nemtriviális. Ha $\psi \notin \bigcup_{i\in L_1} F_i$, akkor $\varphi_1\psi$ (4) bal oldalán nem lehet jelen, válasszunk tehát egy olyan F_i-t $\varphi_1\psi$ számára, amely nincs jelen (4) baloldalában. A rendszer nemtrivialitása miatt ilyennek is lennie kell.

Az eljárást ismételve helyezzük el sorban a $\varphi_1^{-1}\psi$, $\varphi_2\psi$, $\varphi_2^{-1}\psi$, $\ldots$ $\varphi_\kappa\psi$, $\varphi_\kappa^{-1}\psi$ elemeket. Mikor ezzel végzünk, az összes maximum $n+1$ hosszú szót beosztottuk az F_i ($i \in \lambda$) halmazok valamelyikébe, tehát a rekurzió folytatható. ∎

5.3. Tétel. *Legyen κ, λ egy-egy számosság, és legyen adva egy*

$$\bigcup_{i\in L_\alpha} A_i \simeq \bigcup_{i\in R_\alpha} A_i \qquad (\alpha\in\kappa)$$

nemtriviális kongruenciarendszer ($L_\alpha \subset \lambda$, $R_\alpha \subset \lambda$). Tegyük fel, hogy a G csoport hat X-en, és hogy a $\varphi_\alpha \in G$ ($\alpha\in\kappa$) elemek szabadon generálnak egy olyan $F < G$ részcsoportot, hogy X-ben nincs fix pontja F egyik nemtriviális elemének se. Ekkor X partícionálható olyan X_i ($i\in\lambda$) halmazokra, amelyek kielégítik a kongruenciarendszert, pontosabban

$$\bigcup_{i\in L_\alpha} X_i \simeq_{\varphi_\alpha} \bigcup_{i\in R_\alpha} X_i \qquad (\alpha\in\kappa) \tag{5}$$

teljesül.

Bizonyítás. Vegyük fel az előző tétel által biztosított F_i ($i\in\lambda$) halmazokat. Keressük meg X-ben az

$$x\sim y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists\varphi\in F)(\varphi(x)=y)$$

reláció ekvivalenciaosztályait, és válasszunk ki mindegyikből egy-egy pontot. Az így kiválasztott pontok alkossák az M halmazt. Legyen

$$X_i = F_i(M) = \bigcup_{\varphi\in F_i} \varphi(M) \qquad (i\in\lambda).$$

Mivel egyik nemtriviális $\varphi\in F$-nek sincs fix pontja, ezért két különböző $\sigma_1,\sigma_2\in F$ tetszőleges $x\in X$-et különböző pontokba visz. Így minden $x\in X$-hez pontosan egy olyan $\varphi\in F$ tartozik, amelyre $x\in\varphi(M)$, ami épp azt jelenti, hogy az X_i halmazok diszjunktak, és $\bigcup_{i\in\lambda} X_i = X$. Másrészt teljesül az (5)-ben megkövetelt kongruencia, hiszen

$$\bigcup_{i\in L_\alpha} X_i = \bigcup_{i\in L_\alpha} F_i(M) = \left(\bigcup_{i\in L_\alpha} F_i\right)(M) \simeq_{\varphi_\alpha} \left(\bigcup_{i\in R_\alpha} F_i\right)(M) = \bigcup_{i\in R_\alpha} X_i$$

teljesül minden $\alpha\in\kappa$ -ra. ∎

5.4. Tétel. *Legyen $n\geq 3$. Ekkor SG_n-ben megadható kontinuum sok független elem úgy, hogy az általuk szabadon generált részcsoport nemtriviális elemeinek nincs fix pontja $\mathbb{R}^n$-ben.*

Bizonyítás. Itt nem bizonyítjuk. Egy részletes bizonyítás megtalálható [9]-ben. ∎

5.5. Tétel. *Legyen $n\geq 3$. Ekkor létezik egy olyan $E\subset\mathbb{R}^n$ halmaz, hogy tetszőleges $2\leq\kappa\leq c$ számosságra $\mathbb{R}^n$ előáll*

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{\alpha\in\kappa} g_\alpha E \qquad (g_\alpha\in SG_n)$$

alakban úgy, hogy a szereplő $g_\alpha E$ $(\alpha \in \kappa)$ halmazok páronként diszjunktak.

Bizonyítás. Írjuk fel az alábbi kongruenciarendszert:

$$\begin{aligned} A_1 &\simeq A_\alpha && (2 \leq \alpha \leq c) \\ A_1 &\simeq \bigcup_{\alpha \leq \beta \leq c} A_\beta && (2 \leq \alpha \leq c). \end{aligned}$$

Az 5.3 és az 5.4 tétel szerint $\mathbb{R}^n$-t A_α $(\alpha \in c)$ halmazokra lehet partícionálni, és lehet olyan $g_\alpha, g'_\alpha \in SG_n$ $(\alpha \in c)$ elemeket találni, hogy

$$A_1 \simeq_{g_\alpha} A_\alpha \qquad (2 \leq \alpha \leq c) \tag{6}$$

$$A_1 \simeq_{g'_\alpha} \bigcup_{\alpha \leq \beta \leq c} A_\beta \qquad (2 \leq \alpha \leq c) \tag{7}$$

teljesüljön. Legyen $E = A_1$. Ekkor, ha $2 \leq \kappa \leq c$ tetszőleges számosság, akkor

$$\mathbb{R}^n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{\kappa-1} \cup \left(\bigcup_{\kappa \leq \beta \leq c} A_\beta \right)$$

nyilván $\mathbb{R}^n$-nek κ darab diszjunkt részre való felbontása. A (6)-ban szereplő első $\kappa - 1$ darab kongruencia miatt az $A_1, A_2, \ldots, A_{\kappa-1}$ halmazok E-nek $g_1, g_2, \ldots, g_{\kappa-1}$-el való elmozgatottjai, és a (7)-ben szereplő, $\alpha = \kappa$-ra adódó konruencia szerint $(\bigcup_{\kappa \leq \beta \leq c} A_\beta)$ is E-nek g'_α-val való elmozgatottja. ■

5.6. Következmény. *Minden $n \geq 3$-ra van olyan $E \subset \mathbb{R}^n$ c-kicsi halmaz, melynek már két elmozgatott példányával lefedhető $\mathbb{R}^n$.* ■

Az 5.5 tétel valami olyasmit mond, hogy $\mathbb{R}^n$-ben $(n \geq 3)$ létezik egy olyan E halmaz, hogy E az $\mathbb{R}^n$-nek a fele, a harmada, a negyede is, $\ldots 1/\omega_0$-ad része is, sőt, még $1/c$-ad része is. Tehát ha létezne $\mathbb{R}^n$-en $(n \geq 3)$ egy μ végesen additív, SG_n-invariáns valószínűségi mérték, akkor $\mu(E) = \frac{1}{2}$, $\mu(E) = \frac{1}{3}$, $\ldots$ $\mu(E) = \frac{1}{n}$, $\ldots$ teljesülne, ami képtelenség.

5.7. Következmény. *Az SG_n mozgáscsoport $n \geq 3$ esetén nem amenábilis.* ■

I. Függelék. Amenábilis csoportok.

I.1. Definíció. Egy $\langle G, \cdot \rangle$ csoportot *amenábilisnek* nevezünk, ha létezik egy μ végesen additív valószínűségi mérték G-n, amely a teljes $\mathcal{P}(G)$-n értelmezve van, és balinvariáns, azaz $\mu(gA) = \mu(A)$ minden $g \in G, A \subseteq G$-re.

I.2. Megjegyzés. Bár az előbb csak a mérték balinvarianciáját követeltük meg, az alábbiakban megmutatjuk, hogy ha G amenábilis, akkor van rajta egy, a fenti definíciónak eleget tévő olyan ν mérték is, amely mindkét oldalról invariáns.

Ha μ a fenti definíció által biztosított balinvariáns mérték, akkor a $\mu^*(A) = \mu(A^{-1})$ nyílván jobbinvariáns lesz. Legyen

$$\nu(A) = \int \mu(Ag^{-1}) d\mu^*(g).$$

Mivel az integrált függvény – nevezetesen μ – balinvariáns, ν is az. Emellett

$$\nu(Ah) = \int \mu(Ahg^{-1}) d\mu^*(g) = \int \mu\left(A(gh^{-1})^{-1}\right) d\mu^*(g) =$$
$$= \int \mu\left(A(ghh^{-1})^{-1}\right) d\mu^*(gh) = \int \mu(Ag^{-1}) d\mu^*(g) = \nu(A),$$

azaz ν jobbinvariáns is. Másrészt ν valószínűségi mérték, hiszen

$$\nu(G) = \int \mu(Gg^{-1}) d\mu^* = \int \mu(G) d\mu^* = \int 1 d\mu^* = 1.$$

Végül ha $A \cap B = \emptyset$, akkor kihasználva μ végesen additív voltát és azt, hogy ha $A \cap B = \emptyset$, akkor teljesül $Ag \cap Bg = \emptyset$ is:

$$\nu(A \cup B) = \int \mu((A \cup B)g^{-1}) d\mu^* = \int \mu(Ag^{-1} \cup Bg^{-1}) d\mu^* =$$
$$= \int \mu(Ag^{-1}) d\mu^* + \int \mu(Bg^{-1}) d\mu^* = \nu(A) + \nu(B),$$

bizonyítva ν végesen additivitását is.

Ezt felhasználva amenábilis csoportokon tekinthetünk mindkét oldalról invariáns mértéket is, bár a definícióban az általánosság kedvéért erről szó se volt.

I.3. Tétel. *Minden $\langle G, + \rangle$ kommutatív csoport amenábilis.*

Bizonyítás. Az, hogy μ invariáns $(+g)$-re azzal egyenértékű, hogy bizonyos $G \to \mathbb{R}$ függvények μ szerinti integrálja 0. Ezek a függvények azok, amelyek pozitív részét eltolva g-vel épp a függvény negatív részét kapjuk, azaz azok, amelyekre $f^+(x) - f^-(x + g)$

az azonosan 0 függvény. (f^+ és f^- az f függvény pozitív illetve negatív része, azaz $f = f^+ - f^-$.) A $\mu(G) = 1$ pedig $\int 1 d\mu = 1$ -el ekvivalens. Legyen

$$N = \left\{ f : G \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ korlátos; } \exists g \in G,\ \exists c_f \in \mathbb{R} :\ \forall x \in G\ f^+(x) - f^-(x+g) = c_f \right\}.$$

Azt szeretnénk, hogy azon $f \in N$ függvényekre, amelyek $c_f = 0$ jogon kerültek be N-be, $\int f d\mu = 0$ legyen. Az azonosan 1 függvény is N-ben van, és $c_1 = 1$. Legyen M az N által generált lineáris altér:

$$M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i \;\middle|\; f_i \in N \right\}$$

és ezen definiáljuk az s funkcionált $s(f) = \sum c_i$ -ként. Eme s az M-en pozitív lineáris funkcionál, és a korlátos függvények terére szeretnénk kiterjeszteni hasonlóan. Előbb azonban be kell látnunk, hogy s definíciója jogos volt, azaz ha $f \in M$, és

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{k} f_i' \qquad (f_i, f_i' \in N)$$

két előállítás, akkor $\sum c_{f_i} = \sum c_{f_i'}$.

A $\sum f_i = \sum f_i'$ egyenlőséget egy oldalra rendezve, és a $-f_i'$ függvényeket az f_i-k közé véve azt kapjuk, hogy elég azt belátni, hogy ha $\sum f_i = 0$, akkor $\sum c_{f_i} = 0$ szintén.

Indirekt, tegyük fel, hogy $\sum c_{f_i} \neq 0$. Bevezetve a $h_i = f_i - c_{f_i}$ jelölést, olyan h_i-ket kapunk, amelyekre $c_{h_i} = 0$, de $\sum h_i \neq 0$. Feltesszük, hogy $\sum h_i > \alpha > 0$. (Ha $\sum h_i < 0$ lenne, akkor a h_i-k helyett áttérhetnénk (-1)-szeresükre.) Mivel

$$h_i(x) = h_i^+(x) - h_i^-(x),$$

és $c_{h_i} = 0$ miatt

$$0 = h_i^+(x) - h_i^-(x + g_{h_i}),$$

az első egyenletből kivonva a másodikat

$$h_i(x) = h_i^-(x + g_{h_i}) - h_i^-(x)$$

adódik. Az indirekt feltevés szerint, ha bevezetjük az $F(x) = \sum h_i(x)$ jelölést:

$$0 < \alpha < F(x) = \sum_{i=1}^{n} (h_i^-(x + g_{h_i}) - h_i^-(x)).$$

Ez igaz minden $x \in G$-re, úgyhogy adjunk össze néhány ilyet egy (később megválasztandó) véges $A \in G$ halmazra:

$$\sum_{x \in A} F(x) > \alpha |A|. \tag{1}$$

Másrészt a szummákat felcserélve:

$$\sum_{x\in A} F(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x\in A} (h_i^-(x+g_{h_i}) - h_i^-(x)).$$

Itt rögzített i-re $x+g_{h_i}$ végigfut $A+g_{h_i}$-n míg x az A-n, azaz a belső összegnél az A és az $A+g_{h_i}$ szimmetrikus differenciáján kívül eső tagok kiesnek. A szimmetrikus differencia elemszáma $2|(A+g_{h_i})\setminus A|$. A h_i függvények közös korlátját K-val jelölve az előző képlet így folytatható:

$$\sum_{x\in A} F(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x\in A} (h_i^-(x+g_{h_i}) - h_i^-(x)) \le 2K \sum_{i=1}^{n} |(A+g_{h_i})\setminus A|. \tag{2}$$

Az (1) és (2) eredményeket egybevetve:

$$\alpha|A| < 2K \sum_{i=1}^{n} |(A+g_{h_i})\setminus A|. \tag{3}$$

Most szeretnénk A-t úgy megválasztani, hogy ellentmondásba keveredjünk. Legyen

$$A_R = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i g_{h_i} \;\middle|\; r_i \in \mathbb{Z}\,; 0 \le r_i \le R \right\}.$$

A definícióból azonnal kapjuk, hogy

$$|A_R| < (R+1)^n. \tag{4}$$

Viszont írjuk be A_R-t (3)-ba. A jobb oldalon szereplő $(A_R+g_{h_i})$ minden i-re része A_{R+1}-nek, így

$$\alpha|A_R| < 2K \sum_{i=1}^{n} |(A_R+g_{h_i})\setminus A_r| \le 2K|A_{R+1}| - 2K|A_R|.$$

Az egyenlőtlenség két szélét átrendezve

$$\left(\frac{\alpha+2K}{2K}\right)|A_R| < |A_{R+1}|$$

adódik, azaz $|A_R|$ mint R függvénye legalább exponenciális, (és az alap nagyobb mint 1) pedig (4)-ben azt láttuk, hogy legfeljebb polinomiális.

Kiderült, hogy az $s : M \to \mathbb{R}$ funkcionál definíciója jogos volt. Jelölje B a korlátos $G \to \mathbb{R}$ függvények vektorterét, ezen $S(f) = \sup(f)$ pozitív, homogén, szubadditív funkcionál. $M \subseteq B$ altér, az M-en $s < S$, így a Banach-Hahn tétel szerint s kiterjeszthető a teljes B-re $\widehat{s}$ pozitív lineáris funkcionálként. Legyen $\mu(A) = \widehat{s}(\chi_A)$, erre épp teljesülnek a megkívánt feltételek. ■

I.4. Tétel. *Ha a $\langle G, \cdot \rangle$ csoport feloldható, akkor amenábilis.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy ha $H \triangleleft G$, és mind H és G/H amenábilis, akkor G is az. Ehhez legyen μ illetve ν végesen additív, mindkét oldalról invariáns valószínűségi mérték H-n illetve G/H-n, amelyek H illetve G/H összes részhalmazán értelmezve vannak. Először kiterjesztjük μ-t G-nek a H szerinti mellékosztályaira:

$$\mu(gA) = \mu(A) \qquad\qquad (g \in G,\ A \subset H).$$

A definíció értelmes, ugyanis ha egy halmaz előáll $g_1 A_1 = g_2 A_2$ alakokban, akkor $g_2^{-1} g_1 A_1 = A_2$, és mivel A_1 és A_2 is a H normálosztó része, ezért $g_2^{-1} g_1 \in H$ teljesül. Mivel μ invariáns a H elemeivel való szorzásra,

$$\mu(A_1) = \mu(g_2^{-1} g_1 A_1) = \mu(A_2).$$

Legyen $\varphi : G \to G/H$ a természetes homomorfizmus. Egy $x \in G/H$ elem $\varphi^{-1}(x)$ ősképe az xH mellékosztály lesz, és ezekre a mellékosztályokra már kiterjesztettük μ-t. Tetszőleges $A \subset G$ halmazra legyen

$$\gamma(A) = \int\limits_{G/H} \mu\left(A \cap \varphi^{-1}(x)\right) d\nu(x).$$

A definícióból, illetve μ és ν végesen additív voltából következik hogy γ is végesen additív. Igaz, hogy

$$\gamma(G) = \int \mu\left(G \cap \varphi^{-1}(x)\right) d\nu(x) = \int 1 d\nu(x) = 1,$$

azaz γ valószínűségi mérték, végül μ és ν invarianciáját felhasználva

$$\gamma(gA) = \int \mu\left(gA \cap \varphi^{-1}(x)\right) d\nu(x) = \int \mu\left(gA \cap g\varphi^{-1}(g^{-1}x)\right) d\nu(x) =$$
$$= \int \mu\left(g(A \cap \varphi^{-1}(x))\right) d\nu(\varphi(g^{-1})x) = \int \mu\left(A \cap \varphi^{-1}(x)\right) d\nu(x) = \gamma(A)$$

bizonyítja egy tetszőleges $g \in G$-vel történő szorzásra való balinvarianciát.

Most legyen G feloldható csoport. Ekkor G kompozíciólánca,

$$\{e\} \triangleleft G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft \cdots \triangleleft G_n = G$$

olyan, hogy mind G_1, mind a G_i/G_{i-1} faktorok kommutatívak. Az I.3 tétel szerint tehát amenábilisek is, így a bizonyítás első felében belátott állítás ismételt alkalmazásával G amenábilitása adódik. ■

Amenábilis csoportok részletes vizsgálata [9]-ben megtalálható.

II. Függelék. Dimenzió fogalmak $\mathbb{R}^n$-ben.

II.1. Definíció. Legyen $E \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz. Egy $\delta > 0$ számra fedjük le E-t megszámlálható sok, maximum δ átmérőjű E_i $(i \in \mathbb{N})$ halmazzal. Az E halmaz *s-dimenziós Hausdorff-mértéke*:

$$\mu_s(E) = \lim_{\delta \to 0} \left(\inf \left\{ \sum_i \operatorname{diam}(E_i) \,\middle|\, E \subset \bigcup_i E_i \right\} \right).$$

Könnyen látható, hogy minden $E \subset \mathbb{R}^n$ végtelen halmazra, ahogy s növekszik, az $s \to \mu^s(E)$ függvény egy darabig ∞, majd hirtelen leesik 0-ra. Az az s ahol ez bekövetkezik, E Hausdorff-dimenziója:

$$\dim_{\mathrm{H}}(E) = \sup \left\{ s \geq 0 \,\middle|\, \mu^s(E) > 0 \right\} = \inf \left\{ s \geq 0 \,\middle|\, \mu^s(E) = 0 \right\}.$$

II.2. Definíció. Legyen $E \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz. Egy $\delta > 0$ számra fedjük le E-t (pontosan) δ sugarú gömbökkel, és nézzük meg, hogy minimum hány gömbre van szükségünk:

$$N_\delta(E) = \min \left\{ k \,\middle|\, E \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \delta), \quad x_i \in \mathbb{R}^n \right\},$$

ahol $B(x_i, \delta)$ az x_i közepű, δ sugarú zárt gömböt jelöli. Az E halmaz *felső*, illetve *alsó Minkowski dimenzó*ja:

$$\overline{\dim}_{\mathrm{M}}(E) = \inf \left\{ s \,\middle|\, \limsup_{\delta \to 0} N_\delta(E)\delta^s = 0 \right\},$$

$$\underline{\dim}_{\mathrm{M}}(E) = \inf \left\{ s \,\middle|\, \liminf_{\delta \to 0} N_\delta(E)\delta^s = 0 \right\}.$$

A Minkowski dimenziót szokás *box dimenzió*nak is nevezni.

II.3. Megjegyzés. Könnyen látható, hogy minden $E \subset \mathbb{R}^n$ halmazra, ahogy s növekszik, az

$$s \longmapsto \limsup_{\delta \to 0} N_\delta(E)\delta^s$$

függvény egy darabig ∞, majd hirtelen leesik 0-ra, azaz

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_{\mathrm{M}}(E) &= \inf \left\{ s \,\middle|\, \limsup_{\delta \to 0} N_\delta(E)\delta^s < \infty \right\} \\ &= \sup \left\{ s \,\middle|\, \limsup_{\delta \to 0} N_\delta(E)\delta^s = \infty \right\} \\ &= \sup \left\{ s \,\middle|\, \limsup_{\delta \to 0} N_\delta(E)\delta^s > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Hasonló mondható $\underline{\dim}_{\mathrm{M}}(E)$ -re is.

Az alsó és felső Minkowski dimenzió még nem olyan, mint amilyennek egy „rendes" dimenzó fogalmat elképzelünk, ugyanis – a Hausdorff dimenzióval ellentétben – nem feltétlenül igaz hogy

$$\dim\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sup\left\{\dim(A_i) \;\middle|\; i = 1,\ 2,\ \ldots\right\}.$$

(Például az $A = \{\ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ halmazt, ha $\frac{1}{n^2}$ átmérőjű gömbökkel akarjuk lefedni, akkor az $\{\ \frac{1}{k} \mid k = 1, 2, \ldots n-1\}$ halmaz minden pontjának lefedéséhez külön gömb kell, összesen legalább $n-1$. A még kimaradó $[0, \frac{1}{n}]$-be eső pontokhoz további, minimum n darab gömb szükséges, tehát az A halmaz lefedéséhez legalább $2n-1$ darab gömbre van szükségünk, és ennyi elég is. A definícióból látható, hogy $\underline{\dim}_{\mathrm{M}}(A) = \overline{\dim}_{\mathrm{M}}(A)$ az az s szám lesz, amelyre a

$$(2n-1)\left(\frac{1}{n^2}\right)^s$$

kifejezés határértéke „átfordul" 0-ból ∞-be, azaz $\underline{\dim}_{\mathrm{M}}(A) = \overline{\dim}_{\mathrm{M}}(A) = \frac{1}{2}$.)

Azonban könnyen továbbfejleszthetjük a Minkowski dimenziót úgy, hogy eleget tegyen a fenti feltételnek is:

II.4. Definíció. Egy tetszőleges $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz *felső* illetve *alsó pakolási dimenzió*ján az alábbi számokat értjük:

$$\overline{\dim}_{\mathrm{P}}(A) = \inf\left\{\sup_i \overline{\dim}_{\mathrm{M}}(A_i) \;\middle|\; A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \text{ korlátos}\right\},$$
$$\underline{\dim}_{\mathrm{P}}(A) = \inf\left\{\sup_i \underline{\dim}_{\mathrm{M}}(A_i) \;\middle|\; A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \text{ korlátos}\right\}.$$

II.5. Megjegyzés. A felső pakolási dimenziót közvetlenül is definiálhatjuk. Legyen $s \geq 0$ egy rögzített valós szám. Egy $\delta > 0$ számra az $E \subset \mathbb{R}^n$ halmazba az összes lehetséges módon pakoljunk be megszámlálhatóan sok, maximum δ sugarú D_i diszjunkt gömböt úgy, hogy középpontjuk a halmazba essen. Legyen

$$\overline{\mu}^s_\delta(E) = \sup\left(\sum(\mathrm{diam}\ D_i)^s\right),$$

és

$$\overline{\mu}^s(E) = \inf_{\delta>0} \overline{\mu}^s_\delta(E).$$

Ez a $\overline{\mu}^s$ halmazfüggvény még nem σ-szubadditív (pl. $\overline{\mu}^1(\mathbb{Q}) = \infty$, de $\overline{\mu}^1(\{q_i\}) = 0$), úgyhogy azzá tesszük:

$$\mu^s(E) = \inf_{E \subset \bigcup E_i} \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}^s(E_i).$$

Ez a μ^s az *s-dimenziós pakolási mérték.*

Könnyen látható, hogy tetszőleges $E \subset \mathbb{R}$ végtelen halmazra ahogy s növekszik $\mu^s(E)$ egy darabig ∞, majd hirtelen 0-ra ugrik. Az az s ahol ez bekövetkezik, E *pakolási dimenziója*:

$$\dim_{\mathrm{P}}(E) = \sup\{\, t \geq 0 \mid \mu^t(E) = \infty\}.$$

Belátható, hogy ez a pakolási dimenzió megegyezik az előtte definiált felső pakolási dimenzióval [6].

II.6. Állítás.

(a) $\overline{\dim}_{\mathrm{M}}(A \times B) \leq \overline{\dim}_{\mathrm{M}}(A) + \overline{\dim}_{\mathrm{M}}(B)$.

(b) $\overline{\dim}_{\mathrm{P}}(A \times B) \leq \overline{\dim}_{\mathrm{P}}(A) + \overline{\dim}_{\mathrm{P}}(B)$.

(c) *Vetítés során* $\overline{\dim}_{\mathrm{P}}(A)$ *nem nő.*

(d) *Ha* $\overline{\dim}_{\mathrm{P}}(A) < n$, *akkor* $\lambda_n^*(A) = 0$, *ahol* λ_n^* *az n-dimenziós Lebesgue külső mérték.*

Bizonyítás.

(a) Legyenek $a > \overline{\dim}_{\mathrm{M}}(A)$, $b > \overline{\dim}_{\mathrm{M}}(B)$, és $\varepsilon > 0$ tetszőlegesek. Elég lenne azt belátni, hogy van egy d küszöb, hogy minden $0 < \delta < d$ esetén $N_\delta(A \times B)\delta^{a+b} < \varepsilon$. Mivel $a > \overline{\dim}_{\mathrm{M}}(A)$ és $b > \overline{\dim}_{\mathrm{M}}(B)$, ezért tetszőleges, később megválasztandó $\varepsilon_0 > 0$ -hoz van egy olyan d_0 küszöb, hogy minden $0 < \delta < d_0$-ra $N_\delta(A)\delta^a < \varepsilon_0$ és $N_\delta(B)\delta^b < \varepsilon_0$ egyszerre teljesül, azaz minden δ-hoz A-nak és B-nek létezik egy, az előző követelménynek megfelelő fedése δ sugarú A_i illetve B_j gömbrendszerekkel $(i = 1, 2, \ldots N_\delta(A))$, $(j = 1, 2, \ldots N_\delta(B))$. Ekkor az $A_i \times B_j$ halmazok száma éppen $N_\delta(A)N_\delta(B)$, egyesítésük lefedi $A \times B$-t, de nem gömbök. Vegyünk hát helyettük őket fedő, az átmérőjükkel megegyező átmérőjű gömböket. Ezek sugara nem δ, hanem $\delta \cdot q$, ahol q csak az alapterek Euklideszi dimenziójától függő konstans. Tehát megkaptuk, hogy $N_{\delta q}(A \times B) \leq N_\delta(A)N_\delta(B)$. Összegezve az eddigieket:

$$N_{\delta q}(A \times B)(\delta q)^{a+b} \leq N_\delta(A)N_\delta(B)\delta^a\delta^b q^{a+b} < \varepsilon_0^2 q^{a+b}.$$

Ha tehát ε_0-t olyannak választjuk, hogy $\varepsilon_0^2 q^{a+b} < \varepsilon$ teljesüljön, akkor $d = qd_0$ -ra teljesülnek a megkívánt feltételek.

(b) Az, hogy $a = \overline{\dim}_{\mathrm{P}}(A)$ azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra A lefedhető $A_i \quad (i \in \mathbb{N})$ halmazokkal úgy, hogy $\overline{\dim}_{\mathrm{M}}(A_i) < a + \varepsilon$ minden $i \in \mathbb{N}$ -re teljesül. Hasonló mondható $b = \overline{\dim}_{\mathrm{P}}(B)$ kapcsán is, kezünkbe adva a $B_i \quad (i \in \mathbb{N})$ halmazokat. Az $A_i \times B_j \quad (i, j \in \mathbb{N})$ rendszer lefedi $A \times B$-t, és mint (a)-ban láttuk, minden egyes $i, j \in \mathbb{N}$ -re $\overline{\dim}_{\mathrm{M}}(A_i \times A_j) < a + b + 2\varepsilon$. Ez igaz tetszőleges pozitív ε-ra, igazolva hogy $\overline{\dim}_{\mathrm{P}}(A \times B) \leq a + b$.

(c) Mivel vetítésnél egy r sugarú gömb képe r sugarú gömb lesz, ez triviális.

(d) Ismert, hogy az n dimenziós Lebesgue mérték és az n dimenziós Hausdorff mérték egymás konstans-szorosai [5], így ha $dimH(A) < n$, akkor $\lambda_n(A) = 0$. Az, hogy $\overline{\dim}_{\mathrm{P}}(A) < n$, a definíció szerint azt jelenti, hogy az A halmaznak van egy olyan $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ felosztása, amelyben alkalmas $\varepsilon > 0$-val minden $i \in \mathbb{N}$-re $\overline{\dim}_{\mathrm{M}}(A_i) < n - \varepsilon$ teljesül. Viszont $\overline{\dim}_{\mathrm{M}}(A_i)$ és $\dim_{\mathrm{H}}(A_i)$ definíciójából nyílvánvaló, hogy $dimH(A_i) \leq \overline{\dim}_{\mathrm{M}}(A_i)$, így igaz, hogy

$$\dim_{\mathrm{H}}(A) = \sup\left\{\dim_{\mathrm{H}}(A_i) \;\middle|\; i \in \mathbb{N}\right\} \leq \sup\left\{\overline{\dim}_{\mathrm{M}}(A_i) \;\middle|\; i \in \mathbb{N}\right\} \leq \overline{\dim}_{\mathrm{P}}(A) < n,$$

bizonyítva az állítást. ■

A különböző dimenzió fogalmak részletes vizsgálata [6]-ban megtalálható.

Irodalomjegyzék.

[1] U. Darji, Keleti Tamás, szóbeli közlés alapján.

[2] Kun Gábor, szóbeli közlés alapján.

[3] K. Kuratowski, A. Mostowski, *Set Theory*, North-Holland (Amsterdam, 1968)

[4] Laczkovitch Miklós, *Paradoxes in Measure Theory*, kézirat.

[5] Laczkovitch Miklós, *Valós függvénytan* ELTE egyetemi jegyzet (Budapest, 1995).

[6] P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambridge University Press (Cambridge, 1995).

[7] Rényi Alfréd, *Valószínűségszámítás*, 2. kiadás, Tankönyvkiadó (Budapest, 1968).

[8] Riesz Frigyes, Szőkefalvi-Nagy Béla, *Funkcionálanalízis*, Tankönyvkiadó (Budapest, 1988).

[9] S. Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press (Cambridge, 1993).