FK-terek és végtelen mátrixok

Írta: Rásonyi Miklós

Témavezető: Dr.Czách László

1998.május

Nem irom pennával...

Nem irom pennával,
Fekete téntával,
De szablyám élivel,
Ellenség vérivel
Az én örök hiremet.

Zrínyi Miklós

TARTALOMJEGYZÉK

0.Bevezetés

0.0.A DOLGOZAT TÉMÁJA

E dolgozat célja, hogy végtelen mátrixokkal kapcsolatos szummációs problémák ürügyén mutassa be a topologikus vektorterek elméletének néhány fontos eredményét.

Az 1.fejezetben főleg a Banach-terek elméletére támaszkodva igazolunk tételeket végtelen mátrixokról. A 2.fejezetben a funkcionálanalízis különböző fejezeteiből gyűjtöttünk egybe olyan tényeket, melyek a későbbiekben hasznosnak bizonyulnak. A 3.fejezetben ismertetjük az FK-tér struktúrát, mely legfontosabb eszközünk lesz majd arra, hogy az absztrakt terek elméletét a mátrixok (többé-kevésbé) konkrét világára alkalmazhassuk. A dolgozat leglényegesebb tételei a 4.fejezetben kerülnek bizonyításra. Az eredmények e fejezetbeli egységes megközelítése [KB1]-ből származik. Az 5.fejezet kibővíti az előzőt: újabb eszközökkel további eredményeket bizonyítunk. A 6.fejezet ellenpéldákat tartalmaz. A 7.fejezet pedig olyan alkalmazásokat mutat be, melyek nem a szummációelméletben gyökereznek.

A legfontosabb forrásmunkáim [Wi1],[BK1] és [Wi2] voltak; utóbbi átfogó képet ad a funcionálanalízis alkalmazhatóságáról a végtelen mátrixok szummációelméletében.

0.1.ELMÉLETI HÁTTÉR

A továbbiakban jelölések, definíciók és olyan eredmények következnek, melyek ismeretét a dolgozat hátralévő részében feltételezzük. Először felsoroljuk azokat a fogalmakat, melyeket a továbbiakban minden külön magyarázat nélkül használni fogunk. (Lásd [Cz3]-at, illetve [RR],[Sch],[Wi1] bevezető fejezeteit.)

Alapfogalmak: Topologikus vektortér (mostantól TVT); lokálisan konvex szeparált tér (mostantól LKT); félnorma fogalma; Banach-tér; Frèchet-tér (teljes metrikával metrizálható LKT); konvex, kiegyensúlyozott ('balanced'), abszolút konvex, korlátos és elnyelő halmaz fogalma; halmaz konvex és abszolút konvex burka; hordó-tér; duális pár (mostantól d.p.); halmaz polárisa; kompatibilis topológia; TVT teljessge, szekvenciális teljessége; általánosított sorozat ('net').

Az irodalomban nem egységes definíció miatt most tisztázzuk, hogy mit értünk ebben a dolgozatban pszeudonorma alatt.

Pszeudonorma definíciója: Ha X egy vektortér, egy $p : X \to \mathbf{R}_+$ függvényt *pszeudonormá*nak nevezzük,ha

$$(1)\ \|x\| = 0 \leftrightarrow\ x = 0,$$

$$(2)\ |\lambda| \leq 1 \to \|\lambda x\| \leq \|x\|,$$

$$(3)\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

$$(4)\ Ha\ x \in X, \lambda_n \in \mathbf{C}, \lambda_n \to 0, akkor \|\lambda_n x\| \to 0.$$

Megjegyezzük, hogy $(1),(2),(3),(4)$ ekvivalens $(1),(2),(3),(4')$-vel, ahol $(4')$ a következő:

$$(4')\ Ha\ x_n, x \in X; t_n, t \in \mathbf{C}; t_n \to t; \|x_n - x\| \to 0, akkor\ \|t_n x_n - tx\| \to 0.$$

Jelölési konvenciók: Ha X, Y halmazok, $f : X \to Y$ egy függvény, akkor $f[A]$ jelöli az A-beli elemek képeinek halmazát, $f^{-1}[A]$ pedig a szokásos "visszahúzást". $Z \subset X$ esetén $f|Z$ jelöli az f megszorítását Z-re. Ha r valamilyen, topológiát meghatározó objektum egy X halmazon/vektortéren (pl. metrika, norma, avagy a nyílt halmazok rendszere), akkor $Y \subset X$ esetén $r|Y$ jelöli az r által meghatározott topológia megszorítását. Ha X egy halmaz, akkor $L_\infty(X)$ jelöli az X-en korlátos függvények halmazát.

A nemnegatív egészek halmazát ω jelöli. A valós számok teste $\mathbf{R}$, a kibővített számegyenest $\bar{\mathbf{R}}$ jelöli. $\mathbf{C}$ a komplex számok teste. Az összes komplex sorozatok (vagyis $\omega \to \mathbf{C}$ függvények) vektortere $\mathbf{s}$. Ha $x \in \mathbf{s}$, akkor x^i-vel az x i-edik koordinátáját jelöljük. Emellett $i \in \omega$ esetén $T_i : \mathbf{s} \to \mathbf{C}$ az i-edik koordinátafüggvény. $x \in \mathbf{s}$ esetén $P_n(x)$ az a sorozat, melynek első n koordinátája megegyezik x megfelelő koordinátáival, a többi koordinátája 0. ϕ jelöli a azon sorozatok halmazát, melyeknek csak véges sok nemnulla koordinátájuk van. A $\sum_i$ szimbólum a $\sum_{i=0}^\infty$ rövidítése. $e \in \mathbf{s}$ jelöli azt a sorozatot, melynek minden koordinátája 1, $e_i \in \mathbf{s}$ pedig azt a sorozatot, melynek i-edik koordinátája 1, a többi 0.

Most $\mathbf{s}$ néhány fontos topologizált alterét tekintjük:

$(\mathbf{l}_\infty, \|\cdot\|_\infty)$: A korlátos sorozatok tere a szuprémumnormával.

$\mathbf{c}, \mathbf{c_0}$: A konvergens sorozatok ill. nullsorozatok tere; ezeket mint $\mathbf{l}_\infty$ (zárt) alterét tekintjük.

Legyen $F_p(x) := \sum_i |x^i|^p; 0 < p < \infty; x \in \mathbf{s}$. Nyilván $F_p : \mathbf{s} \to \bar{\mathbf{R}}$.

$\mathbf{l_p} := \{x \in \mathbf{s} : F_p(x) < \infty\}; 0 < p < \infty$. Topologizáljuk ezeket a tereket $p \geq 1$-re az $x \to (F_p(x))^{\frac{1}{p}}$ norma által, $0 < p < 1$ esetén az $x \to F_p(x)$ pszeudonorma által.

$\mathbf{l}_\infty, \mathbf{c}, \mathbf{c_0}, \mathbf{l_p}; 1 \leq p < \infty$ Banach-terek az adott normákkal, $\mathbf{l_p}; 0 < p < 1$ pedig Frèchet-terek a pszeudonormából származtatott metrikával. Ez utóbbi terek nem lokálisan konvexek.

$\mathbf{m} \subset \mathbf{s}$ a csak véges sok értéket felvevő sorozatok tere, azaz a $0-1$ sorozatok lineáris burka. $\mathbf{l}_\infty$ altereként tekintjük, a szuprémumnormával ellátva.

Ha X egy TVT, akkor a topológiai duálisa X', az algebrai duálisa $X^\#$. Ha H egy TVT-ben egy halmaz, akkor $ac(H)$ jelöli a H abszolút konvex burkát. Egy duális párban egy A halmaz polárisát általában A° jelöli.

A későbbi hivatkozásokat megkönnyítendő pontokba szedtünk néhány fontos tényt:

(0.1.0)(Landau-Toeplitz tétel) Ha x olyan sorozat, hogy minden $f \in \mathbf{c_0}$ esetén $\sum_i f^i x^i$ konvergens, akkor $x \in \mathbf{l_1}$.

(0.1.1)(Banach-Steinhaus tétel) Ha X egy hordó-tér, akkor X-en értelmezett operátorok pontonként korlátos halmaza egyenletesen folytonos. Emellett X-en értelmezett folytonos lineáris funkcionálok pontonkénti limesze is folytonos lineáris funkcionál. Speciálisan igazak az előző állítások ha X Frèchet-tér, avagy Banach-tér.

(0.1.2) $\mathbf{c_0}, \mathbf{c}$ duálisai lineárisan izometrikusak $\mathbf{l_1}$-el. $\mathbf{c}'$ azonosítható a $\mathbf{C} \cdot \lim + \mathbf{l_1}$ direkt összeggel, ahol lim a szokványos limeszfunkcionál $\mathbf{c}$-n. Az $e, e_i, i \in \omega$ rendszer Schauder-bázis $\mathbf{c}$-ben.

(0.1.3) $\mathbf{bv} := \{x \in \mathbf{s} | \sum_i |x^{i+1} - x^i| < \infty\}$

$\mathbf{bv_0} := \mathbf{bv} \cap \mathbf{c_0}$

$\mathbf{cs} := \{x \in \mathbf{s} | \sum_i x^i \ konvergens\}$

$\|x\|_{bv} := |\lim x| + \sum_i |x^{i+1} - x^i|; x \in \mathbf{bv}$

bv-t ezzel a normával topologizáljuk. Azt, hogy ez ténylegesen egy (teljes) norma, az 1.1.részben fogjuk bizonyítani.

$\|x\|_{cs} := \sup_k |\sum_{i=0}^{k} x^i|; x \in \mathbf{cs}$.

cs-et pedig a fenti normával látjuk el (lásd az 1.1.részt).

(0.1.4) Mackey topológia definíciója: (X, Y) legyen egy duális pár. Jelölje $\tau(X, Y)$ az Y-beli $\sigma(Y, X)$-kompakt abszolút konvex halmazok polárisai alkotta additív rács generálta topológiát X-en. Ez a legerősebb kompatibilis topológia, melyet Mackey-topológiának hïvunk. Minden $(X, \mathbf{T})$ metrizálható TVT-re $\mathbf{T} = \tau(X, X')$.

(0.1.5) Ha (X, Y) egy d.p., akkor X azonosítható $Y^\#$ egy alterével és viszont. $\sigma(X, Y)$ jelöli a gyenge topológiát, vagyis a leggyengébb olyan topológiát, melyre $Y \subset X^\#$ minden eleme folytonos. Ha $(X, \mathbf{T})$ egy LKT, akkor a $\sigma(X', X)$ topológiát néha *gyenge-*$*$ topológiának hívjuk.

(0.1.6) Ha (X, Y) egy d.p., akkor egy $\mathcal{A}$ Y-beli $\sigma(Y, X)$-korlátos halmazokból álló rendszert *poláris család*nak mondunk, ha minden $A \in \mathcal{A}$-hoz van olyan $B \in \mathcal{A}$, hogy $2A \subset B$. $T_\mathcal{A}$ jelöli azt a topológiát X-en, amit a $\mathcal{A}$-beli halmazok polárisaiból álló additív rács generál. $T_\mathcal{A}$-t a $\mathcal{A}$ generálta poláris topológiának hívjuk. Egy $\mathbf{T}$ topológia X-en *megengedhető*, ha valamely poláris családból származik és $\mathbf{T} \geq \sigma(X, Y)$. A legerősebb megengedhető topológiát $\beta(X, Y)$ jelöli, ezt az Y-beli összes $\sigma(Y, X)$-korlátos halmazból álló poláris család származtatja. Egy $T_\mathcal{A}$ topológia pontosan akkor megengedhető, ha $\cup\{A^{\circ\circ} : A \in \mathcal{A}\} = Y$. Egy megengedhető topológia mindig származtatható olyan poláris családból, melynek elemei abszolút konvex és $\sigma(Y, X)$-zárt halmazok. Egy (X, Y) d.p.-ban $\lambda(X, Y)$ jelöli azt a poláris topológiát X-en, melyet az Y-beli $\sigma(Y, X)$-kompakt halmazok poláris családja származtat.

(0.1.7) Egy (X, Y) d.p.-ra $H \subset X$ pontosan akkor $\sigma(X, Y)$-korlátos, ha minden $f \in Y$ esetén $f[H]$ korlátos $\mathbf{C}$-ben.

(0.1.8) Ha (X, Y) egy d.p., akkor minden $A \subset X$ nemüres halmazra $A^{\circ\circ} = \overline{ac}(A)$, ahol $^-$ a $\sigma(X, Y)$-beli lezárásra utal.

(0.1.9) Teljes TVT-ek szorzata ill. zárt altere teljes TVT.

(0.1.10) Ha X, Y Frèchet-terek, akkor bármely $X \to Y$ zárt gráfú lineáris leképezés folytonos. Ha X TVT, Y Hausdorff TVT, akkor bármely $X \to Y$ folytonos leképezés zárt gráfú.

(0.1.11) Szeparációs tétel: Ha X egy LKT,akkor bármely $A \subset X$ abszolút konvex halmazhoz és $x \notin \bar{A}$ elemhez van olyan $f \in X'$, hogy $|f(x)| > \sup_{a \in A} |f(a)|$.

(0.1.12) Banach-Alaoglu-tétel: Ha (X, Y) egy d.p., akkor minden $U \subset X$ nullkörnyezetre U° $\sigma(Y, X)$-kompakt.

(0.1.13) Ha X egy szeparábilis LKT, akkor minden $U \subset X$ nullkörnyezetre az $U^\circ \subset X'$ halmaz metrizálható a $\sigma(X', X)$ topológiában. Ez azért igaz, mert tekintve egy $F \subset X$

megszámlálható sűrű halmazt,

$$\sigma(X', F)|U^\circ \leq \sigma(X', X)|U^\circ,$$

ahol az első topológia Hausdorff, a második kompakt, ezért megegyeznek (lásd. (0.1.20)-at alább). Az első topológia viszont azonosítható megszámlálható sok számegyenes (metrikus tér) topologikus szorzatának egy alterével, ezért metrizálható.

(0.1.14) Ha egy X vektortéren két vektortopológia konvergens sorozatai ugyanazok, akkor ugyanazok a Cauchy-sorozataik is.

(0.1.15) $\mathbf{s}$-et topologizáljuk az

$$s(x) = \sum_i \frac{1}{2^{i+1}} \cdot \frac{|x^i|}{1+|x^i|}$$

teljes pszeudonormával. A keletkezett topológiát τ_s jelöli. Ha egy $r \in \phi$ véges sorozathoz azt az $\mathbf{s}$-en értelmezett lineáris funkcionált rendeljük, melyre

$$r(x) = \sum_i r^i x^i,$$

akkor egy $(\mathbf{s}, \phi)$ duális pár bilineáris formáját adtuk meg. Könnyen látható, hogy

$$\tau_s = \sigma(\mathbf{s}, \phi).$$

(0.1.16) Ha egy TVT metrizálható, akkor pszeudonormálható. Ha teljesen metrizálható, akkor topológiája származtatható teljes pszeudonormából.

(0.1.17) Egy LKT zárt valódi alterén adott folytonos lineáris funkcionál kiterjed az egész térre, mint folytonos nemnulla funkcionál.

(0.1.18) Egy pszeudonormált tér pontosan akkor teljes, ha benne minden abszolút konvergens sor konvergens.

(0.1.19) Véges dimenziós Hausdorff TVT topológiája mindig származtatható Banach-tér–struktúrából.

(0.1.20) Ha egy halmazon $T \leq S$ topológiák, ahol T Hausdorff, S kompakt; akkor $T = S$.

(0.1.21) Konvex halmazok lezárása ugyanaz bármely kompatibilis topológiában.

(0.1.22) Ha T_1, T_2 kompatibilis topológiák X-en egy (X, Y) d.p.-ben, akkor $A \subset X$ pontosan akkor T_1-korlátos, ha T_2-korlátos.

(0.1.23) Ha X egy normált tér, akkor $\beta(X', X)$ éppen a funkcionálnorma-topológia X'-n.

1.Végtelen mátrixok szummációs problémái

E fejezetben végtelen mátrixokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat tisztázunk, bizonyos mátrixosztályokat karakterizálunk. Ezek után olyan klasszikus problémákat vázolunk föl, amelyeket a későbbi fejezetekben a funkcionálanalízis eszközeivel fogunk megoldani, legtöbbször lényeges általánosításokkal.

1.0.MÁTRIXOK

1.0.0.Definíció Egy $A : \omega \times \omega \to \mathbf{C}$ függvényt *végtelen mátrix*nak nevezünk. Az $A(i,j), j \in \omega$ sorozat a mátrix i-edik sora, $A(i,j), i \in \omega$ a j-edik oszlopa. Egy A mátrix *háromszög*, hogyha $A(i,j) = 0, i < j$ és $A(i,i) \neq 0, i \in \omega$. Legyen $x \in \mathbf{s}$ egy sorozat. Ha minden $i \in \omega$ esetén a $y^i := \sum_j A(i,j)x^j$ sor konvergens, akkor azt mondjuk, hogy A és x szorzata értelmes, és a szorzás eredménye az az y sorozat, melynek i-edik koordinátája éppen y^i. Ezt a sorozatot Ax-szel jelöljük. $\mathbf{s_A}$ azon $\mathbf{s}$-beli elemek halmaza, melyeknek az A mátrixszal vett szorzata értelmes.Ez (nemüres) lineáris altér $\mathbf{s}$-ben.

$\mathbf{c_A} := \{x \in \mathbf{s_A} | Ax \in \mathbf{c}\}$. Ez is lineáris altér $\mathbf{s}$-ben. Nyilvánvaló, hogy $A : \mathbf{s_A} \to \mathbf{s}$ egy lineáris operátort definiál, ez indokolja az Ax jelölést.

A végtelen mátrixok bevezetésének egyik célja az volt, hogy divergens sorozatokhoz valamiféle "limeszt" rendelhessünk. Valóban, minden $x \in \mathbf{c_A}$ esetén legyen

$$lim_A x := \lim_{n\to\infty} (Ax)^n.$$

Ezzel egy lineáris funkcionált definiáltunk $\mathbf{c_A}$-n. A kérdés már csak az, hogyan érhető el, hogy $\mathbf{c_A}$ "nagy" legyen és lim_A ne legyen triviális.

1.0.1.Példák Legyen $A(i,j) := 0, i,j \in \omega$. Ekkor $\mathbf{c_A} = \mathbf{s}$ a lehető legnagyobb, de lim_A azonosan 0. Legyen most $Bx := (x^1, 0, x^1, x^2, 0, x^1, x^2, x^3, 0, ...)$, minden $x \in \mathbf{s}$-re, nyilvánvalóan van olyan B mátrix, mely éppen így hat $\mathbf{s}$-en. Ha egy x sorozat valamely koordinátája 0-tól különböző r szám, akkor Bx-ben mind a 0, mind r végtelen sokszor előfordul, ezért $\mathbf{c_B} = \{0\}$. Végül legyen $M(i,j) := \frac{1}{i+1}, j \le i, M(i,j) := 0, j > i$. Ezt a mátrixot Cesaro-mátrixnak nevezzük. Az elemi analízisből ismeretes, hogy egy konvergens sorozat Cesaro-közepeiből álló sorozat is konvergens, és limesze megegyezik az eredeti sorozat limeszével. Innen $\mathbf{c} \subset \mathbf{c_M}$, és $lim_M|\mathbf{c} = \lim$.

Most olyan feltételeket fogalmazunk meg, melyek teljesülése esetén ésszerű limeszfogalomhoz juthatunk.

1.0.2.Definíció Egy A mátrixot *konzervatív*nak mondunk, ha $\mathbf{c} \subset \mathbf{c_A}$. Ha emellett

$$lim_A|\mathbf{c} = \lim,$$

akkor az A mátrix *reguláris.*

1.0.3.Tétel *A pontosan akkor konzervatív, ha sorai $\mathbf{l_1}$-ben normakorlátos sorozatok, oszlopai konvergens sorozatok és $e \in \mathbf{c_A}$. Ha A konzervatív, akkor minden $x \in \mathbf{c}$-re*

$$lim_A x = \chi_A \lim x + \sum_j \alpha^j x^j,$$

ahol $\alpha^j := \lim_{i\to\infty} A(i,j)$, $\chi_A := lim_A e - \sum_j \alpha^j$.

Bizonyítás: Szükségesség: Ha $\mathbf{c} \subset \mathbf{c_A}$, akkor $e, e_i \in \mathbf{c_A}, i \in \omega$. Innen

$$\lim_{j\to\infty} (Ae_i)^j = \lim_{j\to\infty} A(j,i)$$

létezik, ami éppen azt jelenti, hogy az oszlopok konvergens sorozatok. A (0.1.0) Landau-Toeplitz tétel miatt A sorai $\mathbf{l_1}$-beliek, hisz minden $i \in \omega, g \in \mathbf{c_0}$-ra

$$(*)\ \sum_j A(i,j)g^j$$

konvergens. Ugyanebből azonnal látjuk, hogy az A sorai, mint $\mathbf{c_0}$-on $(*)$ szerint ható lineáris funkcionálok, pontonként korlátosak, hiszen a

$$\{\sum_j A(i,j)g^j\}_{i=0}^{\infty}$$

sorozat konvergens, tehát korlátos bármely $g \in \mathbf{c_0}$ esetén. Akkor a (0.1.1) Banach-Steinhaus tétel szerint A sorai normában is korlátosak.

Elégségesség: A feltételek szerint Ax értelmes minden $x \in \mathbf{l_\infty}$ sorozatra, hiszen ha $A(i,\cdot) \in \mathbf{l_1}$, akkor

$$|\sum_j A(i,j)x^j| \le \sum_j |A(i,j)| \cdot \sup_j |x^j|,$$

sőt, az egyenlőtlenség bal oldala tovább becsülhető a

$$\sup_i \|A(i,\cdot)\|_1 \cdot \|x\|_\infty$$

mennyiséggel, vagyis $Ax \in \mathbf{l_\infty}$ és $A : \mathbf{l_\infty} \to \mathbf{l_\infty}$ folytonos lineáris operátor. Akkor

$$U := A^{-1}[\mathbf{c}]$$

egy zárt altér $(\mathbf{l_\infty}, \|\cdot\|_\infty)$-ben. A feltevés szerint $e \in U$. Az oszloplimeszek létezése éppen azt jelenti, hogy $e_i \in U$, ahogyan azt a szükségesség igazolásánál már láttuk. A legkisebb olyan $\|\cdot\|_\infty$-zárt altér $\mathbf{l_\infty}$-ben, mely e-t és az $e_i, i \in \omega$ sorozatokat tartalmazza, éppen $\mathbf{c}$; tehát $\mathbf{c} \subset U = \mathbf{c_A}$. A lim_A funkcionálról elég belátni, hogy $lim_A \in (\mathbf{c}, \|\cdot\|_\infty)'$, ekkor ugyanis $\mathbf{c}$ duálisának (0.1.2) jellemzéséből adódik a formula. Vegyük észre, hogy lim_A pontonkénti limesze az $\{A(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ $\mathbf{l_1}$-beli elemekből álló sorozatnak, midőn azt, mint $\mathbf{c}'$ elemeit tekintjük. A (0.1.1) Banach-Steinhaus-tételből készen vagyunk. ♠

1.0.4.Definíció Ha A konzervatív, akkor A-t *konull*nak hívjuk, ha a fenti Tételben szereplő $\chi_A = 0$, ellenkező esetben A *koreguláris.*

Mint majd látni fogjuk, a koreguláris és konull mátrixok viselkedése lényegesen különböző. (1.0.3)-ból már könnyű a reguláris mátrixok karakterizációja, Toeplitz nevezetes eredménye:

1.0.5.Tétel *A pontosan akkor reguláris, ha sorai* $\mathbf{l_1}$*-beli normakorlátos sorozatot alkotnak, oszlopai nullsorozatok és* $lim_A e = 1$.

Bizonyítás: (1.0.3) alapján világos, hogy a feltételek szükségesek, hiszen

$$\lim e = 1, \lim e_i = 0, i \in \omega$$

és A reguláris. Másrészt szintén (1.0.3)-ból kapjuk, hogy a feltételek teljesülése esetén

$$\mathbf{c} \subset \mathbf{c_A},$$

valamint

$$lim_A | \mathbf{c} = \lim,$$

mert $lim_A = \lim$ az $e, e_i, i \in \omega$ zárt rendszeren, ez az elégségességet igazolja. ♠

Reguláris mátrixra példa az identitásmátrix $I(i,i) = 1, i \in \omega, I(i,j) = 0, i \neq j$, valamint az (1.0.2)-ben szereplő Cesaro-mátrix.

1.0.6.Megjegyzés Az 1.0.3.Tételben voltaképpen azokat a mátrixokat karakterizáltuk, melyek $\mathbf{c}$-t $\mathbf{c}$-be képezik. Általánosan föltehető a kérdés: mi a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy mátrix X-et Y-ba képezze, ahol $X, Y \subset \mathbf{s}$? Az ilyen tulajdonságú mátrixok halmazát $[X, Y]$-al jelöljük. Konkrét X, Y párokra számos *ad hoc* eredmény ismert. [Wi2] 8.fejezetében szerepel egy viszonylag általános módszer, mellyel a legismertebb sorozatterek (pl. $\mathbf{c}, \mathbf{s}, \mathbf{bv}, \mathbf{cs}, \mathbf{l_p}$) közötti leképezésosztályok majd' mindegyike meghatározható az e dolgozat 3.fejezetében vázolt elmélet segítségével. Mi csak érintjük ezt a témát, belátjuk Schur tételét, majd az 1.1 részben a $[\mathbf{cs}, \mathbf{cs}]$ osztályt jellemezzük.

1.0.7.Lemma *Legyen A egy valós értékkészletű mátrix, melynek sorai* $\mathbf{l_1}$*-ben korlátos halmazt alkotnak, s melyre igaz, hogy minden* x $0-1$*-sorozatra* $Ax \in \mathbf{c_0}$*.Akkor*

$$\lim_{n \to \infty} \|A(n, \cdot)\|_1 = 0.$$

Sőt, a lemma akkor is igaz, ha nem tesszük fel , hogy a sorok $\mathbf{l_1}$*-beliek!*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz. Akkor valamely $i(n)$ részsorozatra

$$\|A(i(n), \cdot)\|_1 \to t, n \to \infty, 0 < t < \infty.$$

Legyen B az a mátrix, melyre $B(i,j) = \frac{A(i(n),k)}{t}$. Elég megmutatni, hogy nincs ilyen B. Láthatóan

$$\lim_{n \to \infty} \|B(n, \cdot)\| = 1.$$

A lemma feltevéseit $e_i, i \in \omega$-ra alkalmazva adódik, hogy

$$(*) \ \lim_{n \to \infty} (Be_i)^n = \lim_{n \to \infty} B(n,i) = 0, i \in \omega.$$

Innen rögtön kapjuk az alábbi összefüggést:

$$(**) \ \lim_{n \to \infty} \sum_{k=m}^{\infty} |B(n,k)| = 1, m \in \omega.$$

Ezek után $r(i), m(i) \in \omega, i \in \omega$ sorozatokat definiálunk. Legyenek $r(0), m(0)$ olyanok, hogy

$$\|A(r(0),\cdot)\|_1 \geq \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{m(0)} |A(r(0),k)| > \frac{1}{2}, \sum_{k=m(1)+1}^{\infty} |A(r(0),k)| < \frac{1}{8}$$

teljesüljenek. $(*), (**)$ miatt ilyen $r(0), m(0)$ létezik. Ha már választottunk $r(i), m(i)$ számokat $i < n$-re, akkor legyen $r(n) > r(n-1)$ olyan, hogy

$$\sum_{k=0}^{m(n-1)} |A(r(n),k)| < \frac{1}{8}, \sum_{k=m(n-1)+1}^{\infty} |A(r(n),k)| > \frac{1}{2},$$

$m(n) > m(n-1)$ pedig olyan, hogy

$$\sum_{k=m(n-1)+1}^{m(n)} |A(r(n),k)| > \frac{1}{2}, \sum_{k=m(n)+1}^{\infty} |A(r(n),k)| < \frac{1}{8}.$$

Ilyen $r(n), m(n)$ létezik $(*), (**)$ szerint. Most definiálunk egy $x \in \mathbf{l}_\infty$ sorozatot:

$$x^k := sgn(A(r(0),k)), k = 0, ..., m(0),$$

$$x^k := sgn(A(r(h),k)), m(h-1)+1 \leq k \leq m(h), h \geq 1.$$

Ez egy $\{-1,+1\}$ értékkészletű sorozat, így az

$$y := \frac{(x+1)}{2}$$

sorozat egy nullsorozat, $x = 2y - e$, tehát

$$Ax = 2Ay - Ae \in \mathbf{c_0}.$$

Másrészt $i \geq 1$-re,

$$|(Ax)^{r(i)}| = |\sum_{k=0}^{m(i-1)} A(r(i),k)x^k + \sum_{k=m(i-1)+1}^{m(i)} |A(r(i),k)| + \sum_{k=m(i)+1}^{\infty} A(r(i),k)x^k| \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{m(i-1)} |A(r(i),k)| - \sum_{k=m(i)+1}^{\infty} |A(r(i),k)| > \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4},$$

ami biztosítja, hogy $Ax \notin \mathbf{c_0}$, ez ellentmondás. Annak bizonyítása, hogy az A soraira vonatkozó feltétel elhagyható, megtalálható [Wil] 253. oldalán, de elemi meggondolással is könnyen adódik.♠

1.0.8.Tétel(Schur) $A \in [\mathbf{l}_\infty, \mathbf{c}]$ *pontosan akkor, ha oszlopai konvergensek, sorai* $\mathbf{l_1}$-*beliek és*

$$\sum_k |A(i,k)|$$

i*-ben egyenletesen konvergál.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $A \in [\mathbf{l}_\infty, \mathbf{c}]$. Akkor konzervatív is, vagyis oszlopai konvergensek. Jelölje a azt a sorozatot, melyre a^j a j-edik oszlop limesze.A

$$\sum_{k=0}^{m} |a^k| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} |A(n,k)| \le \sup_n \|A(n,\cdot)\|_1,$$

becslésből nyilvánvaló, hogy $a \in \mathbf{l_1}$. Először tegyük fel, hogy $a = 0$ és A valós értékkészletű. Akkor az 1.0.7.Lemma szerint

$$\|A(n,\cdot)\| \to 0, n \to \infty,$$

amiből elég nagy N-re,

$$\sum_j |A(l,j)| < \epsilon, l > N,$$

valamint alkalmas M küszöbszámra

$$\sum_{j=g}^{\infty} |A(s,j)| < \epsilon, g > M, 0 \le s \le N,$$

ez pedig azt jelenti, hogy $\sum_j |A(i,j)|$ i-ben egyenletesen konvergál. Ha most A még mindig valós, de $a \ne 0$, akkor a $B(i,j) := A(i,j) - a^j$ mátrixról könnyen látható, hogy $B \in [\mathbf{l}_\infty, \mathbf{c}]$, és B-re a fenti gondolatmenet elismételhető. Ha A tetszőleges (komplex) mátrix, akkor $A = B + iC$, B-re és C-re az előzőekből adódik az állítás, innen A-ra is.

Ha A-ra teljesülnek a feltételek, akkor az $(\mathbf{l}_\infty, \mathbf{l_1})$ duális pár kanonikus bilineáris formájának alakjából (koordinátánkénti szorzás) adódik, hogy $\mathbf{l}_\infty \subset \mathbf{s_A}$. Így egy korlátos x sorozatra

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} A(n,k)x^k$$

n-ben egyenletesen konvergál, tehát az n-el végtelenbe tartva a határátmenetképzés és a szummázás felcserélhető, vagyis a bizonyítás legelején bevezetett $a \in \mathbf{l_1}$-re

$$lim_A x = \sum_j a^j x^j$$

adódik, $Ax \in \mathbf{c}$, ahogyan akartuk. ♠

1.0.9.Definíció Ha A egy mátrix, akkor $A^*(i,j) := \overline{A(j,i)}$ az *adjungált*ja, itt $^-$ komplex konjugálást jelöl. Ha A, B mátrixok, akkor ezek AB szorzata értelmes, ha minden $i \in \omega$-ra A-nak és B i-edik oszlopának, b_i-nek szorzata értelmes. A szorzás eredménye az a mátrix, melynek i-edik oszlopa Ab_i. Hasonlóan értelmezhetők A hatványai, $A^k, k \in \omega$.

Most érdekességként következzen néhány mondat $[\mathbf{l_p}, \mathbf{l_r}]$-ről. Általános (p,r) párra ma sem ismeretes szükséges és elegendő feltétel. Egészen a 70-es évekig még az $[\mathbf{l_2}, \mathbf{l_2}]$ "legszebb" eset sem volt tisztázva! 1971-ben bizonyította Crone híres tételét:

1.0.10.Tétel *$A \in [\mathbf{l_2}, \mathbf{l_2}]$ pontosan akkor, ha az alábbi három feltétel teljesül:*

$$(1)\ A\ \textit{sorai}\ \mathbf{l_2} - \textit{beliek},$$

$$(2)\ (A^*A)^n\ \textit{értelmes minden}\ n > 0\ \textit{egészre},$$

$$(3)\ \sup_n \sup_i |[(A^*A)^n](i,i)|^{\frac{1}{n}} < \infty$$

Bizonyítás: Megtalálható [Cro]-ban.♠

1.1.S-REGULARITÁS

Az alábbiakban egy igen általános szummációs eljárást definiálunk, majd teljesen karakterizáljuk ennek bizonyos értelemben vett regularitását. Ezek után alkalmazásokat mutatunk be a klasszikus analízis területéről, valamint belátjuk a Toeplitz-tétel sorokra vonatkozó analogonját.

1.1.0.Definíció Legyen $(X, \mathbf{T})$ egy topologikus tér, $x_0 \in X$ egy rögzített pont, mely a topologikus térnek torlódási pontja(azaz minden környezetében van tőle különböző pont). Legyen $\bar{X} := X - \{x_0\}$, valamint legyen $a \in \mathbf{s}$ tetszőleges. Azt mondjuk, hogy egy $u = u(t) = \{u_n(t)\}_{n=0}^{\infty}, u_n(t) = u_n \in L_\infty(\bar{X})$ sorozat szummációs sorozat az a-ra nézve, ha

$$(1)\ \textit{minden}\ t \in \bar{X}\ \textit{esetén}\ U(t,a) := \sum_n a^n u_n(t)\ \textit{konvergens},$$

$$(2)\ U(\cdot, a) \in L_\infty(\bar{X}),$$

$$(3)\ \textit{létezik az}\ u\sum a := \lim_{t \to x_0} U(t,a)\ \textit{határérték}.$$

Ekkor az utóbbi határértéket az a sorozat u-összegének nevezzük. Azon $a \in \mathbf{s}$-ek halmazát, melyekre nézve egy adott u szummációs sorozat, u szummációs tartományának hívjuk, jele $dom(u)$. Egy u sorozatot $s - reguláris$ (sor-reguláris) szummációs sorozatnak mondunk, ha $\mathbf{cs} \subset dom(u)$, és minden $a \in dom(u)$ esetén $u \sum a = \sum_i a^i$, vagyis ha egy konvergens sor tagjaiból álló sorozat u-összege megegyezik a sor tényleges összegével.

1.1.1.Állítás $\mathbf{bv}, \mathbf{cs}$ *a (0.1.3)-ben megadott normákkal teljes normált terek. $e_i, i \in \omega$ egy zárt rendszer* $\mathbf{cs}$*-ben.* $\mathbf{bv}$ *izometrikusan izomorf* $\mathbf{cs}$ *duális terével. $b \in \mathbf{bv}$ esetén a hozzárendelt $\hat{b}$ lineáris funkcionálra*

$$\hat{b}(x) = \sum_i x^i b^i,$$

ahol $x \in \mathbf{cs}$ tetszőleges. Ha valamely $b \in \mathbf{s}$-re $\sum_i x^i b^i$ konvergens minden $x \in \mathbf{cs}$-re, akkor $b \in \mathbf{bv}$.

Bizonyítás: Tekintsük azt az $A : \mathbf{s} \to \mathbf{s}$ operátort, melyre

$$(Ax)^i = \sum_{j=0}^{i} x^i.$$

Ez nyilván lineáris bijekció, így $A^{-1}[\mathbf{c}] = \mathbf{cs}$ ellátva a $\|\cdot\|_\infty \circ A|\mathbf{cs}$ normával Banach-tér. Az $e, e_i, i \in \omega$ $\mathbf{c}$-beli Schauder-bázis A^{-1}-képe:

$$A^{-1}(e) = e_0,$$

$$A^{-1}(e_i) = e_i - e_{i+1}, i \in \omega.$$

Láthatóan ezek a $\mathbf{cs}$-beli elemek az $e_i, i \in \omega$ rendszer lineáris burkában vannak, így $e_i, i \in \omega$ valóban egy zárt rendszer $\mathbf{cs}$-ben.

$\mathbf{bv}$ definíciójából rögtön látható, hogy $\mathbf{bv} \subset \mathbf{c}$. Innen $\mathbf{bv} = \mathbf{bv_0} + \mathbf{C} \cdot e$. Definiáljuk azt a $B : \mathbf{s} \to \mathbf{s}$ leképezést, melyre

$$(Bx)^i := x^i - x^{i+1}, i \geq 1,$$

ez is lineáris operátor, mely lineaŕis bijekciót létesít $\mathbf{bv_0}$ és $\mathbf{l_1}$ között. Ekkor $\|\cdot\|_1 \circ B|\mathbf{bv_0}$ egy teljes norma. Innen már látszik, hogy a (0.1.3)-ban szereplő $\|\cdot\|_{bv}$ egy teljes norma $\mathbf{bv}$-n. Ismeretes $\mathbf{c}$ duálisának (0.1.2) szerinti azonosítása $\mathbf{l_1} + \mathbf{C} \cdot \lim$-el. Innen világos, hogy $\mathbf{cs}'$ izometrikusan izomorf $\mathbf{bv}$-vel. Ki kell még számolni, hogyan hat $b \in \mathbf{bv}$ esetén a hozzá tartozó $\hat{b} \in \mathbf{cs}'$ lineáris funkcionál $\mathbf{cs}$-en. Ha $b = b^0 \cdot e + b_1$, ahol $b_1 \in \mathbf{bv_0}, b^0 \in \mathbf{C}$, akkor $x \in \mathbf{cs}$-re:

$$\hat{b}(x) = b_0 \cdot A^{-1}(e) + \sum_i (Bb_1)^i (Ax)^i = b^0 \cdot x^0 + \sum_i (b_1^i - b_1^{i+1}) \cdot \sum_{j=0}^{i} x^j =$$

$$= b^0 \cdot x^0 + \sum_j x^j \cdot \sum_{i \geq j} (b_1^i - b_1^{i+1}) = \sum_i x^i b^i,$$

tekintettel arra, hogy $b_1^0 = 0$ és $\lim_{i \to \infty} b_1^i = 0$.

Az utolsó állítás abból adódik, hogy ha

$$\varphi_k(x) := \sum_{i=0}^{k} b^i x^i$$

konvergens $k \to \infty$ esetén minden $x \in \mathbf{cs}$-re, akkor a φ_k funkcionálsorozat pontonként korlátos, tehát (0.1.1)-ből normában korlátos, azaz

$$\sum_{i=0}^{k} |b^{i+1} - b^i| < M < \infty$$

valamely k-tól független M konstanssal. Ez azt jelenti, hogy $b \in \mathbf{bv}$. ♠

A következő tételben teljesen karakterizáljuk az s-reguláris szummációs sorozatokat.

1.1.2.Tétel *u pontosan akkor s-reguláris, ha*

$$(I)\ \{u_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbf{bv}, t \in \bar{X},$$

$$(II)\ \sup_{t \in \bar{X}} \|u(t)\|_{bv} < \infty$$

$$(III)\ \lim_{t \to x_0} u_n(t) = 1, n \in \omega.$$

Bizonyítás: Elégségesség: Ha (I) igaz, akkor (1.1.1) szerint $U_t = U(t, \cdot), t \in \bar{X}$ folytonos lineáris funkcionálok egy halmaza a **cs** téren. A sorösszegző funkcionál, $l(x) := \sum_i x^i, x \in \mathbf{cs}$ szintén egy folytonos lineáris funkcionál és $U_t \to l, t \to x_0$ pontonként az $e_i, i \in \omega$ zárt rendszeren (III) szerint. (II) miatt $K := \sup \|U(t, \cdot)\|_{bv} < \infty$. Akkor bármely $x \in \mathbf{cs}$ esetén:

$$|U_t(x) - l(x)| \leq |U_t(x) - U_t(y)| + |U_t(y) - l(y)| \leq K|x - y| + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon,$$

ha y az $e_i, i \in \omega$ által kifeszített sűrű altér olyan eleme, mely x-hez elég közel van, valamint t a t_0 egy alkalmasan kis környezetébe esik. Ez igazolja, hogy u s-reguláris.

Szükségesség: A szummációs sorozat definíciójából és (1.1.1)-ből adódik, hogy

$$u(t) \in \mathbf{bv}, t \in \bar{X},$$

vagyis (I) igaz. Mivel az s-regularitás miatt $U(t, \cdot) = U_t \to l$ pontonként, (III) teljesül. Az $U_t, t \in \bar{X}$ funkcionálhalmaz pontonként korlátos a 1.1.0.Definíció (2) pontja szerint, így a (0.1.1) Banach-Steinhaus tételből normakorlátos, ami éppen (II). ♠

1.1.4.Következmény(Riemann-tétel) *Ha a* $\sum_n a^n$ *numerikus sor konvergens, akkor*

$$\lim_{t \to 0} \sum_n a^n \left(\frac{sin(nt)}{nt}\right)^2 = \sum_n a^n.$$

Bizonyítás: Legyen $X := [-1, 1] \subset \mathbf{R}$. $x_0 := 0$. $U(n, t) := u_n(t) := (\frac{sin(nt)}{nt})^2, t \in \bar{X} := X - \{x_0\}$. Az elemi analízisből ismert, hogy

$$\lim_{t \to 0} u_n(t) = 1,$$

valamint $\sum_i \frac{1}{i^2} < \infty$ miatt

$$\sup_t \|U(\cdot, t)\|_{bv} < \infty,$$

ezért az 1.1.3.Tétel feltételei teljesülnek, azaz u_n s-reguláris szummációs sorozat; ami éppen azt adja, amit igazolni akartunk.♠

1.1.5.Következmény(Abel tétele) *Legyen* $S := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$. *Ha* $\sum_n a^n$ *konvergens numerikus sor, akkor*

$$\lim_{z_k \to 1} \sum_n a^n z_k^n = \sum_n a^n,$$

ahol $\{z_k\}_{k=0}^{\infty} \subset S$*; föltéve, hogy* $z_k \to 1$ *nem tangenciálisan, azaz van olyan* $\delta > 0$*, hogy bármely* k *esetén a* z_k*-t 1-el összekötő szakasz* δ*-nál nagyobb szöget zár be az* S *1-beli érintőjével.*

Bizonyítás: Az előzőhöz hasonlóan itt is elemi meggondolások mutatják, hogy $\mathbf{C}$ egy alkalmas tartományán $U(n,z) := z^n$ s-reguláris szummációs sorozat. ♠

Végül következzen a megigért alkalmazás végtelen mátrixokra:

1.1.6.Következmény $A \in [\mathbf{cs}, \mathbf{cs}]$ *akkor és csak akkor, ha* A *sorai* **bv***-beliek és ott normakorlátos sorozatot alkotnak, valamint oszlopai 1-hez tartó konvergens sorozatok.*

Bizonyítás: Jelölje X az ω diszkrét tér Alekszandrov -kompaktifikációját! $x_0 := \infty$ Akkor egy szummációs sorozatot azonosíthatunk egy végtelen mátrixszal. (1.1.3)-at alkalmazva kapjuk állításunkat.♠

1.2.KONZISZTENCIA

Már láttunk példát arra, miképp rendelhetünk általánosított határértéket bizonyos sorozatokhoz. Egy A mátrix esetén minden $x \in \mathbf{c_A}$-beli sorozathoz a $lim_A x$ számot rendeltük. Természetesen merül föl a következő kérdés: Ha adott két mátrix, A és B, akkor $x \in \mathbf{c_A} \cap \mathbf{c_B}$ esetén igaz-e, hogy $lim_A x = lim_B x$? Sajnos, ez még reguláris mátrixokra sem igaz.

1.2.0.Példa Tekintsük azokat az A, B mátrixokat, melyeket a következő definíció értelmez:

$$A(i, 2i+2) = 1, i \in \omega, A(i,j) = 0 \text{ } egyébként,$$

$$B(i, 2i+1) = 1, i \in \omega, B(i,j) = 0 \text{ } egyébként.$$

Ezek mindketten regulárisak (1.1.3) szerint. Legyen x az a sorozat, melynek páros elemei 1-ek, páratlan elemei 0-k. Ekkor $(Ax)^n = 1, (Bx)^n = 0, n \in \omega$, így $lim_B x = 1, lim_A x = 0$.

1.2.1.Definíció Legyenek A, B mátrixok.Ha

$$lim_A|(\mathbf{c_A} \cap \mathbf{c_B}) = lim_B|(\mathbf{c_A} \cap \mathbf{c_B}),$$

akkor e mátrixokat *konzisztens*nek mondjuk. Ha csak

$$lim_A|(\mathbf{c_A} \cap \mathbf{c_B} \cap \mathbf{l_\infty}) = lim_B|(\mathbf{c_A} \cap \mathbf{c_B} \cap \mathbf{l_\infty})$$

teljesül, akkor A, B *korlátosan konzisztens.*

Újrafogalmazva kérdésünket, milyen A, B-re tett megkötések garantálják azok korlátos konzisztenciáját? Az ilyen irányú vizsgálódások gyümölcsözőnek bizonyultak, 1927-ben Mazur az alábbi eredményéért megkapta a lembergi egyetem matematikai díját:

1.2.2.Tétel *Ha A, B olyan reguláris háromszögek, hogy $\mathbf{c_A} \cap \mathbf{l}_\infty \subset \mathbf{c_B}$, akkor A és B korlátosan konzisztensek.* ♠

Figyelemreméltó, hogy Mazur bizonyítása a Banach-terek akkor még újdonságnak számító elméletét használta. Ennek a tételnek lényegesen általánosabb változatát fogjuk belátni a 4.fejezetben.

1.3.TARTALMAZÁSI TÉTELEK

Ezzel a névvel eredmények egy igen széles körét illetjük. A szakirodalomban ezek többnyire 'bigness theorems' illetve 'inclusion theorems' címkék alatt szerepelnek. Hahn 1922-ben már ismerte a következő tényt:

1.3.0.Tétel *Egy mátrix konvergenciatartománya pontosan akkor tartalmazza az összes $0-1$-sorozatot, ha minden korlátos sorozat benne van.*♠

Ezt, és a most következő tételt is lényegesen erősebb formában fogjuk bizonyítani a későbbi fejezetekben.

1.3.1.Tétel *Egy koreguláris mátrix konvergenciatartománya nem tartalmazhatja az összes korlátos sorozatot.*♠

A fenti eredmények egy következményét igazoljuk az alábbiakban, előrebocsátva egy definíciót és egy ahhoz kapcsolódó tételt, melyek mintha csak tévedésből kerültek volna ide:

1.3.2.Definíció Ha $(X, \mathbf{T})$ egy topologikus tér, akkor egy X-en értelmezett függvényt akkor hívunk *Baire-1*–függvénynek, ha előáll valamely, folytonos függvényekből álló sorozat pontonkénti limeszeként.

1.3.3.Tétel(Baire) *Ha X egy lengyel tér, f egy rajta értelmezett* Baire-1–*függvény, akkor van olyan $x \in X$ pont, amelyben f folytonos.*

Bizonyítás: Sokkal több igazolható, mi ezt most nem tesszük meg. Lásd pl. [Kur] 301. oldalát.♠

1.3.4.Tétel *Ha A reguláris mátrix, akkor konvergenciatartománya nem tartalmazhatja az összes $0-1$-sorozatot.*

Bizonyítás: Tekintsük a $X = 2^\omega$ halmazt a szorzattopológiával(a 2 halmazon persze a diszkrét topológiát vettük). Ez egy lengyel tér, és tegyük fel indirekte, hogy A értelmezhető X-en és minden $x \in X$ esetén $Ax \in \mathbf{c}$. Ekkor

$$(Ax)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} A(n,i)x^i,$$

vagyis $(Ax)^n$ olyan függvények pontonkénti határértéke, melyek koordináták véges lineáris kombinációi, s mint ilyenek, folytonosak. Mi több, a $\sum_i |A(n,i)|$ numerikus sor szeletei majorálják az $(Ax)^n$-et előállító sor szeleteit, A regularitása miatt pedig sorai $\mathbf{l_1}$-beliek, tehát a Weierstrass-kritérium alapján ez a konvergencia x-ben egyenletes. Ezért $x \mapsto (Ax)^n$ egy folytonos függvény X-en. $lim_A x = \lim_{n\to\infty}(Ax)^n$, tehát lim_A egy *Baire-1*–függvény, így folytonos egy x_0 pontban.Ekkor

$$lim_{n\to\infty}(P_n(x_0) + e - P_n(e)) = x_0 \text{ és}$$

$$lim_{n\to\infty}P_n(x_0) = x_0$$

az X topológiája szerint. Innen A regularitása és x_0-beli folytonossága miatt $lim_A x_0 = 1$ és $lim_A x_0 = 0$ adódnak, hiszen a két fenti x_0-hoz tartó sorozat véges sok tagtól eltekintve 1-ekből illetve 0-kból áll. Ez pedig lehetetlen.♠

Ha egy x sorozat benne van egy mátrix konvergenciatartományában, ezt néha úgy szokás kifejezni, hogy az adott mátrix *szummázza* x-et. Befejezésképp még három jellemző eredményt elmítünk meg.

1.3.5.Tétel *Ha egy konzervatív mátrix szummáz korlátos divergens sorozatot, akkor szummáz nemkorlátos sorozatot is.*♠

1.3.6.Tétel *Egy konull mátrix szummáz korlátos divergens sorozatot.*♠

1.3.7.Tétel *Ha A, B mátrixokra $\mathbf{c_A} \cap \mathbf{l}_\infty \subset \mathbf{c_B}$ és A konull,akkor B konull.*♠

2.Eredmények a funkcionálanalízisből

2.0.HELLINGER-TOEPLITZ–TÍPUSÚ TÉTELEK

Az elkövetkezőkben bevezetjük a duális operátor fogalmát és belátjuk néhány egyszerű tulajdonságát. Ezek után definiáljuk a Hellinger-Toeplitz topológiákat, és példákat mutatunk rájuk.

2.0.0.Definíció Legyenek $(X,Y),(U,V)$ duális párok, $a : X \to U$ lineáris operátor. Föltehető (0.1.5) miatt, hogy $Y \subset X^{\#}$, $V \subset U^{\#}$, és a duális párhoz tartozó bilineáris függvényt a vektortér és algebrai duálisának egymáson való kanonikus hatása adja meg. Ekkor $a^{\#} : U^{\#} \to X^{\#}$-t értelmezzük úgy, hogy $(a^{\#}(t))(x) = t(a(x))$, minden $x \in X, t \in U^{\#}$. Ha $ran(a^{\#}|V) \subset Y$, akkor azt mondjuk, hogy a-nak létezik duális operátora, $a' : V \to Y$, és $a' := a^{\#}|V$.

2.0.1.Állítás *a-nak pontosan akkor van duális operátora, ha $a : \sigma(X,Y) \to \sigma(U,V)$-folytonos.*

Bizonyítás: Először tegyük föl, hogy $a^{\#} : V \to Y$. Legyen x_δ egy általánosított sorozat X-ben, $x_\delta \to 0$ $(\sigma(X,Y))$. Legyen $v \in V$.Akkor

$$v(a(x_\delta)) = (a^{\#}(v))(x_\delta) \to 0,$$

hiszen $a^{\#}(v) = a'(v) \in Y$. Vagyis a gyengén folytonos. A másik irány igazolásához elég megmutatni, hogy minden $v \in V$-re $a^{\#}(v)$ $\sigma(X,Y)$-folytonos lineáris funkcionál. Az előző részben bevezetett x_δ általánosított sorozattal

$$(a^{\#}(v))(x_\delta) = v(a(x_\delta)) \to 0,$$

mert $a(x_\delta) \to 0$ $(\sigma(U,V))$ az a gyenge folytonosságából.♠

2.0.2.Lemma *$a^{\#} : U^{\#} \to X^{\#}$ $\sigma(U^{\#},U) \to \sigma(X^{\#},X)$-folytonos.Ha létezik a', akkor $\sigma(V,U) \to \sigma(Y,X)$-folytonos.*

Bizonyítás: A második állítás az elsőnek triviális folyománya. Ha $x_\delta \to 0$ $(\sigma(U^{\#},U))$, akkor bármely $k \in X$-re

$$(a(k))(x_\delta) = x_\delta(a(k)) = a^{\#}(x_\delta)(k) = k(a^{\#}(x_\delta)) \to 0,$$

ami éppen azt jelenti, hogy $a^{\#}(x_\delta) \to 0$ $(\sigma(X^{\#},X))$.♠

Vegyük észre, hogy (2.0.1) egyik iránya lényegében ugyanaz, mint (2.0.2) (egymás duálisai).

2.0.3.Lemma *Ha a korábbi jelölésekkel $a : X \to Y$ gyengén folytonos, akkor $A \subset V$ esetén $a^{-1}[A^\circ] = (a'[A])^\circ$.*

Bizonyítás: Legyen $x \in a^{-1}[A^\circ]$, $y \in a'[A]$. Akkor valamely $v \in A$-ra $y = a'(v)$, és

$$|y(x)| = |(a'(v))(x)| = |v(a(x))| \leq 1,$$

vagyis $a^{-1}[A^\circ] \subset (a'[A])^\circ$. Ha pedig $x \in (a'[A])^\circ$, $v \in A$, akkor

$$|v(a(x))| = |(a'(v))(x)| \leq 1,$$

így $a(x) \in A$.♠

2.0.4.Definíció Tekintsünk egy olyan $\alpha(X,Y)$ topológiát, mely "egyöntetűen" van definiálva minden (X,Y) duális párra. α-t Hellinger-Toeplitz-topológiának mondjuk, ha igaz a következő:

Bármely két $(X,Y),(U,V)$ duális párra és bármely T_X, T_U kompatibilis topológiákra ha $L : X \to U$ lineáris operátor $T_X \to T_U$ folytonos, akkor $\alpha(X,Y) \to \alpha(U,V)$ folytonos.

2.0.5.Megjegyzés Lehetséges jelöltek pl.a σ, τ topológiák, ezeket ugyanaz a formula értelmezi minden duális párra (azaz megadhatók halmazelméleti operációként, ami a fenti definíció "egyöntetű" kifejezésének precíz megfogalmazása). Az alábbiakban kiderül, hogy mindkét fenti topológia valóban Hellinger-Toeplitz–féle.

2.0.6.Tétel *A (2.0.0) definícióban szereplő jelölésekkel legyen $a : (X,\mathbf{T}) \to (U,\mathbf{S})$ folytonos, ahol $\mathbf{T},\mathbf{S}$ kompatibilis topológiák. Akkor az a operátor $\sigma(X,Y) \to \sigma(U,V)$ folytonos.*

Bizonyítás: A 2.0.1.Állítás szerint elég igazolni, hogy $a^{\#} : V \to Y$. Legyen

$$v \in V = (U,\mathbf{S})'.$$

Akkor $a^{\#}(v) = v \circ a$ egy $\mathbf{T} \to \mathbf{S}$-folytonos leképezés és egy $\mathbf{S}$-folytonos funkcionál kompozíciója, így maga is $\mathbf{T}$-folytonos funkcionál, s mint ilyen Y-ban van. Ez éppen azt jelenti, hogy $a^{\#}(v) = a'(v) \in Y$.♠

2.0.7.Következmény *σ egy HT-topológia.* ♠

2.0.8.Tétel *τ egy HT-topológia.*

Bizonyítás: Ha, mint az előző tételben, $a : (X,\mathbf{T}) \to (U,\mathbf{S})$ egy folytonos leképezés, akkor a fentiek miatt gyengén folytonos. Legyen $N \subset U$ egy $\tau(U,V)$-nullkörnyezet. Föltehető, hogy $N = A^\circ$, ahol $A \subset V$ egy abszolút konvex $\sigma(V,U)$-kompakt halmaz. Legyen $H := a'[A]$. Ez utóbbi halmaz a 2.0.2.Lemma miatt A-nak $\sigma(V,U) \to \sigma(Y,X)$- folytonos képe, s mint ilyen, abszolút konvex és $\sigma(Y,X)$-kompakt. Ekkor a 2.0.3.Lemma szerint

$$M := a^{-1}[N] = (a'[A])^\circ = H^\circ.$$

A $\tau(X,Y)$ topológia poláris családdal való (0.1.4) előállításából adódik, hogy M egy $\tau(X,Y)$-nullkörnyezet, vagyis az a operátor $\tau(X,Y) \to \tau(U,V)$-folytonos.♠

2.0.9.Tétel *Egy $a : X \to U$ lineáris operátor pontosan akkor $\sigma(X,Y) \to \sigma(U,V)$-folytonos, ha $\tau(X,Y) \to \tau(U,V)$-folytonos.*

Bizonyítás: σ, τ mindeketten HT-topológiák.♠

2.0.10.Megjegyzés Más HT-topológiák is ismeretesek. A fentiekhez hasonlóan igazolható például, hogy β, az erős topológia Hellinger-Toeplitz-féle. Ez lényegesen különbözik σ-tól és τ-tól abban, hogy nem feltétlenül kompatibilis. (Pontosan akkor kompatibilis egy adott párra nézve, ha a páron van kompatibilis hordó-topológia.)

2.1.GROTHENDIECK TÉTELEI

2.1.0.Definíció Legyen X egy TVT. Akkor egy $A \subset X$ halmaz $(X,X^{\#})$ duális párbeli polárisát $A^{\clubsuit}$ jelöli.

2.1.1.Lemma *Legyenek $\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}$ megengedhető topológiák X-en az (X, Y) duális párban melyekre $\mathbf{T_1} \leq \mathbf{T_2}$. Ha $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta} \subset X$ olyan $\mathbf{T_2}$-Cauchy általánosított sorozat mely $\mathbf{T_1}$-konvergens, akkor $\mathbf{T_2}$-konvergens.*

Bizonyítás: A hosszadalmas érvelést elhagyjuk, vázlata megtalálható például [Wi1] 122.oldalán az 5.feladatban. ♠

2.1.2.Tétel *Legyen (X, Y) egy duális pár, $\mathbf{T}$ egy megengedhető topológia X-en, $\mathcal{A}$ pedig egy, a $\mathbf{T}$-t származtató poláris család Y-ban. Legyen*

$$G := \{f \in Y^{\#} : f|A \ \sigma(Y, X)|A \ folytonos \ minden \ A \in \mathcal{A} - ra\}.$$

Akkor G egy alkalmas topológiával $(X, \mathbf{T})$ teljessé tétele, azaz olyan teljes lokálisan konvex tér, melybe $(X, \mathbf{T})$ sűrű altérként beágyazható. Tehát X pontosan akkor teljes, ha minden $f \in G$ funkcionálra $f \in X$.

Bizonyítás: X-et mint $Y^{\#}$ alterét tekintjük, ez (0.1.5) szerint jogosult. Mivel definíció szerint minden $x \in X$ $\sigma(Y, X)$-folytonos Y-on, $X \subset G$. Most igazoljuk, hogy az (Y, G) duális párban $\mathcal{A}$ egy poláris család. Ehhez csak azt kell belátni, hogy bármely $A \in \mathcal{A}$ $\sigma(Y, G)$-korlátos. Feltehető, hogy $\mathcal{A}$ elemei abszolút konvex, zárt halmazok (0.1.6). Legyen

$$f \in G, \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset A.$$

Akkor $\frac{1}{n} a_n \to 0$ $(\sigma(Y, X))$, hiszen A $\sigma(Y, X)$-korlátos. Tehát

$$\frac{1}{n} f(a_n) = f(\frac{1}{n} a_n) \to 0,$$

vagyis $f[A] \subset \mathbf{C}$ korlátos halmaz, ez minden $f \in G$-re igaz, így A $\sigma(Y, G)$-korlátos (0.1.7) szerint. Legyen $\bar{\mathbf{T}}$ az $\mathcal{A}$-ból származtatott poláris topológia G-n. $\bar{\mathbf{T}}|X = \mathbf{T}$, hiszen

$$A^{\clubsuit} \cap G \cap X = A^{\clubsuit} \cap X = A^{\circ}$$

a poláris definíciójából, itt $\circ$ az (Y, G)-beli polárisképzésre utal.

Ezután bizonyítjuk, hogy X sűrű $(G, \bar{\mathbf{T}})$-ban. Legyen $v \in (G, \bar{\mathbf{T}})'$, $v|X = 0$. Akkor

$$A^{\clubsuit} \cap G \subset \{f \in G : |v(f)| \leq 1\}$$

valamely $A \in \mathcal{A}$-ra. A-t mint G' részhalmazát tekintve látjuk, hogy v A-nak a (G, G') duális párbeli bipolárisához tartozik, ami A abszolút konvexitása és a (0.1.8) bipoláris tétel miatt éppen A lezárása $\sigma(G', G)$-ben. Legyen most $a_\delta \to v$ $(\sigma(G', G))$ egy A-ban haladó általánosított sorozat. Ekkor $x \in X$-re $a_\delta(x) \to v(x) = 0$, hiszen $v = 0$ az X-en. Ez azt jelenti, hogy $a_\delta \to 0$ $(\sigma(Y, X))$. Bármely $f \in G$ esetén

$$v(f) = \lim a_\delta(f) = \lim f(a_\delta) = 0,$$

mert f $\sigma(Y, X)$-folytonos A-n. Vagyis $v = 0$ az egész G-n. Ez azt jelenti, hogy X sűrű.

Végül igazoljuk, hogy $(G, \bar{\mathbf{T}})$ teljes TVT. Ha f_δ egy Cauchy-féle általánosított sorozat $\bar{\mathbf{T}}$ szerint, akkor f_δ $\sigma(G,Y)$-Cauchy is, mert ez egy gyengébb topológia. Így $f_\delta \to f \in (Y^\#, \sigma(Y^\#, Y))$ mert ez utóbbi TVT teljes, hisz a $\mathbf{C}^Y$ zárt altere, márpedig $\mathbf{C}$ teljes és teljes terek szorzata, valamint zárt altere teljes (0.1.9). Elég $f \in G$-t bizonyítani, mert $\sigma(G,Y) \leq \bar{\mathbf{T}}$ megengedhetők, és ekkor a 2.1.1.Lemmát alkalmazva $\bar{\mathbf{T}}$ teljessége adódik. Legyen most $A \in \mathcal{A}$ és a_γ egy $\sigma(Y,X)$-konvergens általánosított sorozat A-ban. Feltehetjük, hogy $a_\gamma \to 0$, hiszen $a_\gamma \to b$ esetén (0.1.6) szerint az $a_\gamma - b$ általánosított sorozat $\mathcal{A}$ valamelyik elemében benne foglaltatik, és az alábbi érvelés elmondható. Legyen $\epsilon > 0$.Akkor létezik ξ, hogy $\alpha \geq \xi$, $\beta \geq \xi$ esetén

$$(*)\ (f_\alpha - f_\beta) \in \epsilon(G \cap A^\clubsuit),$$

valamint bármely γ-ra:

$$|f(a_\gamma)| \leq |f(a_\gamma) - f_\xi(a_\gamma)| + |f_\xi(a_\gamma)| = lim_\alpha |f_\alpha(a_\gamma) - f_\xi(a_\gamma)| + |f_\xi(a_\gamma)| \leq \epsilon + |f_\xi(a_\gamma)|.$$

$f_\xi \in G$ miatt $\lim_\gamma f_\xi(a_\gamma) = 0$ a $(*)$ miatt, tehát $\limsup_\gamma |f(a_\gamma)| \leq \epsilon$, azaz $f(a_\gamma) \to 0$, vagyis f $\sigma(Y,X)$-folytonos az A-n. ♠

2.1.3.Lemma *Legyen (X,Y) egy duális pár. Ha $A \subset X, B \subset Y, B \subset F + A^\circ$ valamely $F \subset Y$ halmazra, valamint $A - A \subset F^\circ$; akkor $A - A \subset 3B^\circ$.*

Bizonyítás: Legyen $x \in \frac{B}{3}$. Ekkor a feltételek szerint $3x = f + t$ valamely $f \in F$ és $t \in A^\circ$ elemekre, vagyis $x = \frac{f}{3} + \frac{t}{3}$. Így tetszőleges $a_1, a_2 \in A$ elemekre

$$|x(a_1 - a_2)| = |\frac{1}{3}f(a_1 - a_2) + \frac{1}{3}t(a_1 - a_2)| \leq \frac{1}{3}|(a_1 - a_2)(f)| + \frac{1}{3}|t(a_1)| + \frac{1}{3}|t(a_2)| \leq 3 \cdot \frac{1}{3} = 1,$$

ami éppen azt jelenti, hogy $A - A \subset (\frac{B}{3})^\circ = 3B^\circ$; ez a lemma állítása. ♠

2.1.4.Lemma *Legyen X egy TVT, $S \subset X$ egy halmaz. S pontosan akkor teljesen korlátos, ha minden V nullkörnyezethez létezik olyan $U_0, ..., U_{n(V)}$ rendszer, melyre $\cup_i U_i = S$ és $(U_i - U_i) \subset V, i = 0, ..., n(V)$.*

Bizonyítás: Ha S teljesen korlátos, akkor legyen $V + V \subset U$.Valamely véges F halmazra $S \subset F + V$, legyen

$$S_x = S \cap (x + V), x \in F.$$

Nyilván $S_x, x \in F$ egy, a lemma kimondásában szereplő véges rendszer.

A másik irány: Legyen V egy nullkörnyezet, $S = \cup_i U_i$ a feltételben szereplő felbontás, vagyis $U_i - U_i \subset V$. Feltehető, hogy U_i nem üres, mondjuk $u_i \in U_i$. Akkor $U_i - u_i \subset U_i - U_i \subset V$, vagyis

$$S \subset \cup_i(u_i + V),$$

ami éppen azt jelenti, hogy S teljesen korlátos. ♠

2.1.5.Lemma *Legyen(X, Y) egy duális pár. Ha $A \subset X$ $\sigma(X,Y)$-korlátos, akkor $\sigma(X,Y)$-teljesen korlátos.*

Bizonyítás: A teljes korlátosság feltételét elég egy környezetbázison ellenőrizni. Legyen $\epsilon > 0$,

$$V := \{x \in X | f_i(x) < \epsilon, f_i \in Y, i = 0, ..., n\}.$$

Jelölje $\times_i f_i$ azt a $\mathbf{C}^n$-be képező függvényt, melynek i-edik koordinátafüggvénye f_i. Mivel A korlátos, nyilván $(\times_i f_i)[A] \subset \mathbf{C}^n$ egy korlátos halmaz, mely persze teljesen is korlátos, legyen $S_k, k = 0, ..., N$ egy ϵ-gömbökből álló fedése, s_k az k-adik gömb középpontja. Akkor

$$A \subset \cup\{(\times f_i)^{-1}(s_k) + V | k = 0, ..., N\},$$

ahogyan akartuk. ♠

2.1.6.Tétel(Grothendieck felcserélési tétele) *Legyen (X, Y) egy duális pár, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ X-ben illetve Y-ban lévő poláris családok, melyek megengedhető topológiákat származtatnak. Akkor az alábbiak ekvivalensek:*

(x) minden $A \in \mathcal{A}$ $T_{\mathcal{B}}$-teljesen korlátos,

(y) minden $B \in \mathcal{B}$ $T_{\mathcal{A}}$-teljesen korlátos,

ahol $T_{\mathcal{A}}, T_{\mathcal{B}}$ a poláris családokból származtatott topológiák.

Bizonyítás: Elég $(y) \to (x)$-t igazolni, a másik irány ugyanúgy jön ki. Legyen $B \in \mathcal{B}$ tetszőleges, $A \in \mathcal{A}$ rögzített, $F \subset Y$ olyan véges halmaz, hogy $B \subset F + A^\circ$. Mivel A $\sigma(X, Y)$-korlátos, ezért A $\sigma(X, Y)$-teljesen korlátos a 2.1.5.Lemmából. A 2.1.4.Lemma szerint tehát F°-re, mely $\sigma(X, Y)$-nullkörnyezet, létezik $U_0, ..., U_n \subset X$ rendszer, melyre $A = \cup_i U_i$ és $(U_i - U_i) \subset F^\circ, i = 0, ..., n$. A 2.1.3.Lemma szerint A véges uniója olyan U_i halmazoknak, melyekre $U_i - U_i \subset 3B^\circ$. Minden $B \in \mathcal{B}$-re alkalmazva az okoskodást és megint (2.1.4)-re hivatkozva kapjuk, hogy A $T_{\mathcal{B}}$-teljesen korlátos, hiszen ha $B^\circ, B \in \mathcal{B}$ környezetbázis, akkor $3B^\circ, B \in \mathcal{B}$ is az.♠

2.2.AZ ORLICZ-PETTIS TÉTEL

Előrebocsátunk egy eredményt, melyre a későbbiekben többször hivatkozunk.

2.2.0.Tétel *Legyen $(X, \mathbf{T})$ egy LKT, melyre $\phi \subset X \subset \mathbf{s}$. Tegyük fel továbbá, hogy $\tau_s | X \leq \mathbf{T}$. Akkor X egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha szekvenciálisan kompakt ($\mathbf{T}$- ben). Következésképp ha $\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}$ olyan, a fenti feltételeknek eleget tevő topológiák X-en, hogy konvergens sorozataik megegyeznek, akkor kompakt halmazaik is ugyanazok.*

Bizonyítás: Itt nem térünk ki rá, megtalálható [Gar]-ban.♠

2.2.1.Lemma *$\sigma(\mathbf{l_1}, \mathbf{m}), \sigma(\mathbf{l_1}, \mathbf{l_\infty})$ és $\|\cdot\|_1$ ugyanazokat a konvergens sorozatokat, kompakt halmazokat és Cauchy- sorozatokat definiálják $\mathbf{l_1}$-en.*

Bizonyítás: Elég a sorozatokra vonatkozó részt igazolni, tekintetbe véve az előző tételt és (0.1.14)-et. Nyilván $\sigma(\mathbf{l_1}, \mathbf{m}) \leq \sigma(\mathbf{l_1}, \mathbf{l_\infty}) \leq \|\cdot\|_1$, ezért azt kell megmutatni, hogy ha $x_n \to x$ $(\sigma(\mathbf{l_1}, \mathbf{m}))$, akkor $\|x_n - x\|_1 \to 0$. Ez könnyen adódik az 1.0.7.Lemmából, figyelembe véve, hogy $\mathbf{m}$ a $0-1$-sorozatok lineáris burka (ld.$\mathbf{m}$ definícióját a 0.1.részben). ♠

2.2.2.Lemma *Egy $K \subset \mathbf{l_1}$ halmaz pontosan akkor $\|\cdot\|_1$ relatív kompakt, ha korlátos és*

$$(*) \;\; \lim_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{\infty} |x^j| = 0$$

$x \in K$*-ban egyenletesen.*

Bizonyítás: Először legyen K olyan, hogy $(*)$ teljesül. Mivel $\|\cdot\|_1$ egy teljes metrikus topológia, elég K teljesen korlátos voltát igazolni. E célból rögzítsünk egy $\epsilon > 0$ számot, és azt az $N(\epsilon)$ küszöbindexet, melyre $k > N, x \in K$ esetén

$$\sum_{j=k}^{\infty} |x_j| < \frac{\epsilon}{4}$$

igaz. Mivel K korlátos, a

$$J := \sup_{d \in K} \|d\|_\infty \leq \sup_{d \in K} \|d\|_1$$

mennyiség véges. Legyen $L \subset K$ egy olyan véges halmaz, melyre igaz, hogy minden $x \in K$ esetén van olyan $l \in L$, hogy

$$(\#) \ \max_{i \leq N} |x^i - l^i| \leq \frac{\epsilon}{2N}.$$

Ilyen halmazt kapunk pl.a következő módon: legyen $s \in \omega, s > \frac{2NJ}{\epsilon}$, minden

$$(**) \ t(\cdot), -s \leq t(i) \leq s, t(i) \in \mathbf{Z}, i \in 0, ..., N$$

függvényhez választunk olyan $g(t) \in L$ elemet, melyre

$$\frac{t(i)}{s} \leq g(t)^i \leq \frac{t(i)+1}{s},$$

ha ilyen nincs, legyen $g(t)$ tetszőleges. Akkor

$$L := \{g(t) | t - re \ igaz \ (**)\}$$

megfelelő választás.Ha $x \in K$, akkor valamely $l \in L$-re $(\#)$ teljesül. Így

$$\|l - x\|_1 \leq N \max_{i \leq N} |x^i - l^i| + \sum_{k > N} (|x^i| + |l^i|) \leq \frac{\epsilon}{2} + 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

vagyis az L elemei köré vont ϵ-gömbök tanúsítják K teljes korlátosságát.

Megfordítva, legyen K relatív kompakt, akkor teljesen korlátos. Válasszunk $\frac{\epsilon}{2}$-höz alkalmas véges fedő gömbrendszert, legyenek a gömbök középpontjai $d_i, i = 0, ..., N$. Akkor tetszőleges $x \in K$-ra:

$$\sum_{j=m}^{\infty} |x_j| \leq \sum_{j=m}^{\infty} |x^j - d_i^j| + \sum_{j=m}^{\infty} |d_i^j| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2},$$

hogyha d_i egy, az x-et tartalmazó gömb középpontja, m pedig olyan nagy, hogy $i = 0, ..., N$-re

$$\sum_{j=m}^{\infty} |d_i^j| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Ez éppen a lemmában szereplő feltétel teljesülését jelenti. ♠

2.2.3.Megjegyzés Az elemi analízisből ismeretes Riemann-tétel szerint (lásd pl. [Csá] idevágó fejezetét) ha egy valós numerikus sor feltételesen konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor bármilyen $t \in \bar{\mathbf{R}}$ értékhez létezik a sornak olyan átrendezése, mely t-hez konvergál. Hasonló érveléssel könnyen adódik , hogy ha egy valós numerikus sor tagjai sorozatának bármely részsorozatából alkotott sor konvergens, akkor a sor abszolút konvergens. Ez utóbbi igazolható komplex numerikus sorokra is.

2.2.4.Tétel(Orlicz-Pettis) *Ha (X, Y) egy duális pár, $\{x_j\}_{j=0}^{\infty} \subset X$ egy olyan sorozat, melyre igaz, hogy minden $\{x_{n(k)}\}$ részsorozatra $\sum_k x_{n(k)}$ sor konvergál $\sigma(X, Y)$-ban, akkor a $\sum_j x_j$ sor konvergál $\lambda(X, Y)$-ban.*

Bizonyítás: Bármely $f \in Y$ esetén a $\sum_k f(x_{n(k)})$ numerikus sor konvergens, így a tétel előtti megjegyzés szerint
$$\sum_j |f(x_j)| < \infty.$$
Definiáljuk most a $T : Y \to \mathbf{l_1}$ operátort a
$$(Tf)^k := f(x_k)$$
összefüggéssel. Legyen $\theta \in \mathbf{m}$ egy $0-1$-sorozat. Akkor
$$\sum_j \theta^j (Tf)^j = \sum_j \theta^j f(x_j) = f(\sum_j \theta^j x_j),$$
mert a tétel feltételei miatt $\sum_j \theta^j x_j$ konvergál $\sigma(X, Y)$-ban. Ez éppen azt jelenti, hogy a T operátor $\sigma(X, Y) \to \sigma(\mathbf{l_1}, \mathbf{m})$-folytonos, mert a $0-1$-sorozatok kifeszítik $\mathbf{m}$-et. Legyen $K \subset Y$ egy $\sigma(Y, X)$-kompakt halmaz. Akkor $T(K) \subset \mathbf{l_1}$ $\sigma(\mathbf{l_1}, \mathbf{m})$-kompakt, tehát (2.2.1) szerint $\|\cdot\|_1$-kompakt. Alkalmazva a 2.2.2.Lemmát, adódik, hogy
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in K} \sum_{k=n}^{\infty} |f(x_k)| = 0,$$
amiből nyilván
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in K} \sup_{m\geq n} |\sum_{k=n}^{m} f(x_k)| = 0.$$
Ez utóbbi képlet azt fejezi ki, hogy a sor szeletei Cauchy-sorozatok abban a topológiában (X-en), ami a $\sigma(Y, X)$-kompakt halmazokon való egyenletes konvergencia. Ez definíció szerint $\lambda(X, Y)$. Összefoglalva: a $\sum_j x_j$ sor $\sigma(X, Y)$-konvergens, és az erősebb $\lambda(X, Y)$ megengedhető topológiában Cauchy. (2.2.1) szerint tehát $\lambda(X, Y)$-konvergens. ♠

Befejezésül megemlítjük, hogy Riemann tétele nem marad érvényben végtelen dimenziós Banach-terek esetén, amint azt az alábbi tétel mutatja:

2.2.5.Tétel(Dvoretzky-Rogers) *Ha X egy végtelen dimenziós Banach-tér, akkor létezik olyan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ sorozat, mely feltétel nélkül konvergens (azaz bármely átrendezése konvergens), de nem abszolút konvergens.*

Bizonyítás: Megtalálható például [Sch]-ben.♠

2.3.ZÁRT GRÁF TÉTELEK

Ebben a részben a (0.1.10) zárt gráf tétel három lehetséges erősítését fogalmazzuk meg. Egyikük a későbbiekben kulcsszerepet fog játszani.

2.3.0.Definíció Legyen $(X, \mathbf{T})$ egy LKT. Egy $H \subset Y'$ halmazt *majdnem zárt*nak (röviden m-zártnak) nevezünk, ha minden U X-beli nullkörnyezetre az $U^\circ \cap H \subset X'$ halmaz $\sigma(X', X)$-zárt.

Egy X LKT-t *egészen teljes*nek hívunk, ha X' bármely m-zárt lineáris altere $\sigma(X', X)$-zárt.

Legyenek X, Y LKT-ek, $L : X \to Y$ lineáris leképezés. Ekkor $D := (L^\#)^{-1}[X'] \cap Y'$.

2.3.1.Lemma *Ha L(lásd a definíciót fentebb) zárt gráfú, akkor D sűrű $(Y', \sigma(Y', Y))$-ban.*

Bizonyítás: Először megmutatjuk, hogy D elválaszt Y felett, vagyis $y \in Y$ esetén ha minden $d \in D$-re $d(y) = 0$, akkor $y = 0$. Legyen $y \in Y$ rögzített pont, $y \neq 0$. Ekkor $(0, y) \notin graph(L)$, így vannak olyan V, W nullkörnyezetek X-ben ill. Y-ban, hogy

$$(0, y) + V \times W \cap graph(L) = \emptyset,$$

hiszen a gráf zárt. Tehát bármely $v \in V, w \in W$ esetén

$$(v, y + w) = (0, y) + (v, w) \in (0, y) + V \times W,$$

azaz $(v, y + w) \notin graph(L)$, vagyis $y + w \neq L(v)$, így $y + W \cap L[V] = \emptyset$, $y \notin \overline{L[V]}$. A szeparációs tételből (0.1.11) létezik $g \in Y'$ úgy, hogy $|g(y) > 1, |g(t)| \leq 1, t \in L[V]$. Most $g \in D$-t kell bizonyítanunk.

$|(L'g)(v)| = |g(L(v))| \leq 1, v \in V$, de akkor $L'(g) \in X'$, hiszen korlátos egy 0-környezeten. Vagyis $g \in D$, ahogyan akartuk. $(Y', \sigma(Y', Y))$ egy szeparált LKT, és duálisa azonosítható Y-al. Ahhoz, hogy D sűrűségét belássuk, elég megmutatni, hogy $f \in X$ esetén $f|D = 0$-ból $f = 0$ következik. Vagyis $f(d) = d(f) = 0$ minden $d \in D$-re maga után vonja, hogy $f = 0$. Ez éppen azt jelenti, hogy D elválaszt Y felett, amit fentebb igazoltunk.♠

2.3.2.Lemma *Ha $(X', \sigma(X', X))$ szekvenciálisan teljes, Y pedig szeparábilis, akkor D m-zárt.*

Bizonyítás: Először igazoljuk, hogy D $\sigma(X', X)$ szekvenciálisan zárt. Legyen

$$g_n \in D, n \in \omega, g_n \to g \in Y' \ (\sigma(Y', Y)).$$

A 2.0.2.Állítás szerint $L^\# : Y^\# \to X^\#$ $\sigma(Y^\#, Y) \to \sigma(X^\#, X)$-folytonos, akkor

$$L^\#(g_n) \to L^\#(g) \in (X^\#, \sigma(X^\#, X)).$$

Mivel X' szekvenciálisan teljes, $L^\#(g) \in X'$, vagyis $g \in D$, ami a szekvenciális zártságot igazolja. Ha most U egy Y-beli nullkörnyezet, akkor U° $\sigma(Y', Y)$-kompakt a (0.1.12)

Banach-Alaoglu tétel szerint. Mivel Y szeparábilis, $\sigma(Y',Y)|U^\circ$ metrizálható (0.1.13)! $D \cap U^\circ$ egy metrizálható topológiájú zárt halmaz szekvenciálisan zárt részhalmaza, így zárt, azaz D m-zárt.♠

2.3.3.Tétel(Kalton) *Legyen $(X,\mathbf{T})$ egy Mackey-tér, melyre $(X',\sigma(X',X))$ szekvenciálisan teljes. Legyen továbbá $(Y,\mathbf{S})$ szeparábilis és egészen teljes. Akkor bármely $L : X \to Y$ zárt gráfú operátor folytonos.*

Bizonyítás: Az előző Lemmákból látható, hogy $D \subset Y'$ $\sigma(Y',Y)$-sűrű és m-zárt. Mivel Y egészen teljes, $D = Y'$. Ez azt jelenti, hogy $L' : Y' \to X'$, ami (2.0.1) miatt maga után vonja L $\sigma(X,X') \to \sigma(Y,Y')$-folytonosságát. A 2.0.9.Tétel értelmében L $\tau(X,X') = \mathbf{T} \to \tau(Y,Y')$-folytonos, tehát $\mathbf{T} \to \mathbf{S}$-folytonos, hiszen $\mathbf{S} \leq \tau(Y,Y')$. ♠

A fenti Tétel alkalmazhatóságához szükséges, hogy példákat adjunk egészen teljes terekre. Ez a következő állítás tartalma.

2.3.4.Állítás *Minden Fréchet-tér egészen teljes.*

Bizonyítás: Megtalálható [Sch] 152.oldalán.♠

További két példát mutatunk zárt gráf tételekre, Pták nevezetes eredményét és a kevésbé ismert McIntosh-féle tételt. Ezeket nem bizonyítjuk, mert nem lesz rájuk szükség a későbbiekben.

2.3.5.Tétel(Pták) *Ha X hordó-tér, Y pedig egészen teljes, akkor minden $X \to Y$ zárt gráfú lineáris leképezés folytonos.*♠

2.3.6.Tétel(McIntosh) *Ha X egy LKT, $(X',\sigma(X',X))$ szekvenciálisan teljes, Y pedig egy reflexív Banach-tér, akkor bármely $X \to Y$ zárt gráfú lineáris leképezés folytonos.*

2.3.7.Megjegyzés Röviden rámutatunk a tételek egymáshoz való viszonyára. Ismeretes, hogy minden hordó-tér Mackey-tér, és duálisa gyenge-$*$ szekvenciálisan teljes. Másrészt minden Banach-tér (2.3.4) miatt egészen teljes. Innen látszik, hogy Kalton és McIntosh tételeikben gyöngítették az X-re vonatkozó föltevést, azon az áron, hogy így Y-ra kellett szigorúbb kikötést tenniük. A zárt gráf tételek irodalma igen gazdag, mi itt csak néhány forrásra utalunk:[Wi1], [Sch], [RR].

Most egy olyan példát mutatunk, mely rávilágít arra , hogy bizonyos esetekben nem használható a (korábbról származó) Pták-féle tétel, míg Kalton 1971-es eredménye igen. A 4.fejezetben látjuk majd, hogy éppen az alábbi ellenpéldához kísértetiesen hasonló terekre kell alkalmaznunk (2.3.3)-at; és hogy néha milyen fáradságos a duális szekvenciális teljességének igazolása.

2.3.8.Példa $(X,\tau) := (\mathbf{l}_\infty, \tau(\mathbf{l}_\infty, \mathbf{l}_1))$ nem hordó tér, de $\sigma(X',X)$ szekvenciálisan teljes. $\sigma(X',X)$ éppen $\mathbf{l}_1$ a gyenge topológiájával. (2.2.1) miatt ugyanazok a konvergens sorozatok, mint a normatopológiában, így (0.1.14) szerint ugyanazok a Cauchy-sorozatok. A normatopológia szekvenciálisan teljes, így $\sigma(X',X)$ is az. Másfelől legyen D $\mathbf{l}_\infty$ zárt egységgömbje (a normatopológiában), akkor D abszolút konvex és τ-zárt, mert $\mathbf{l}_1$ egységgömbjének polárisa az $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_\infty)$ duális párban. Így D egy hordó τ-ban. Nem lehet viszont nullkörnyezet, mert ekkor $\tau = \|\cdot\|_\infty = \tau(\mathbf{l}_\infty, \mathbf{l}'_\infty)$ állna fenn, vagyis $\mathbf{l}_1$ kanonikus módon azonosulna $(\mathbf{l}_\infty, \|\cdot\|_\infty)'$-vel, más szavakkal $\mathbf{l}_1$ egy reflexív Banach-tér lenne, ami nagyon nem igaz.

3.FK-terek

3.0.FK-TEREK KONSTRUKCIÓJA

A továbbiakban egy igen speciális stuktúraosztályt definiálunk $\mathbf{s}$ bizonyos alterein. Kiderül majd, hogy bármely végtelen mátrix értelmezési- illetve konvergenciatartománya felruházható az említett struktúrával.

3.0.0.Definíció Legyen $(X, \mathbf{T})$ Fréchet-tér, melyre $X \subset \mathbf{s}$ teljesül. Ha továbbá fönnál, hogy $\mathbf{T}$ erősebb, mint τ_s megszorítása X-re, akkor azt mondjuk, hogy $(X, \mathbf{T})$ egy *FK-tér.*

3.0.1.Példa Tekintsük $(\mathbf{s}, \tau_s)$-et. Ez nyilván példa FK-térre.

3.0.2.Lemma *Legyen $(Y, \mathbf{S})$ egy Fréchet-tér, $(X, \mathbf{T})$ pedig egy FK-tér.Legyen $A : Y \to X$ egy lineáris, $\mathbf{S} \to \tau_s|X$ folytonos leképezés. Akkor A $\mathbf{S} \to \mathbf{T}$ folytonos.*

Bizonyítás: Figyelembe véve (0.1.10)-et, elég belátni, hogy az A leképezés $\mathbf{S} \to \mathbf{T}$ zárt gráfú. Ehhez vegyük észre, hogy A gráfja $\mathbf{S} \times \tau_s|X$ zárt, szintén (0.1.10) miatt. Mivel definíció szerint $\tau_s|X \leq \mathbf{T}$, így A gráfja nyilván $\mathbf{S} \times \mathbf{T}$ zárt.♠

3.0.3.Következmény *Legyenek $(X, \mathbf{T})$, $(Y, \mathbf{S})$ FK-terek, $Y \subset X$.Akkor $\mathbf{T}|Y \leq \mathbf{S}$, egyenlőség pontosan akkor áll fönn, ha Y zárt X-ben. Egy FK-téren pontosan egy FK-topológia adható meg.*

Bizonyítás: Alkalmazzuk az előző Lemmát $i : Y \to X$ beágyazó leképezésre, ebből az első állítás rögtön adódik. $X = Y$ esetén i és i^{-1} mutatják, hogy az FK-topológia egyértelmű. Ha Y zárt X-ben, akkor $(Y, \mathbf{T}|Y)$ egy FK-tér, így az egyértelműségből $\mathbf{T}|Y = \mathbf{S}$. Másrészt $\mathbf{T}|Y = \mathbf{S}$ esetén Y teljes, így zárt részhalmaza X-nek.♠

A fenti Következmény miatt a továbbiakban FK-terek esetében a topológiát nem tüntetjük föl, valahányszor ez nem okoz kétértelműséget. Az X *egy FK-tér* kifejezés tehát azt jelenti, hogy $X \subset \mathbf{s}$ egy olyan altér, mely ellátható (egyértelműen) FK-tér struktúrával.

3.0.4.Megjegyzés A fenti állításokból az is kitűnik, hogy

$$\mathbf{l_p} \subset \mathbf{l_r} \subset \mathbf{c_0} \subset \mathbf{c} \subset \mathbf{l}_\infty \subset \mathbf{s}, 1 \leq p < r < \infty$$

mind FK-terek. Mindegyiküket teljes pszeudonorma adja meg. Könnyen ellenőrizhető, hogy $s(x) \leq \|x\|_\infty, x \in \mathbf{l}_\infty$, ahol s a τ_s-et megadó pszeudonorma (0.1.15). Még azt kellene megmutatni, hogy $1 \leq p < \infty$ esetén $\|\cdot\|_\infty|\mathbf{l_p} \leq \|\cdot\|_p$. Metrikus topológiákról lévén szó, elég sorozatokat, éspedig nullsorozatokat tekinteni. Legyen $\|x_n\|_p \to 0, n \to \infty$. Akkor $|x_n^j| \leq \|x_n\|_p; n, j \in \omega$. Következésképp $sup_{j\in\omega}|x_n^j| \leq \|x_n^j\|_p, n \in \omega$. Vagyis $\|x_n\|_\infty \to 0$.

3.0.5.Megjegyzés Az FK-tér definíciójában nem feltétlenül szükséges a lokális konvexitást megkövetelni. Az elmélet minden alapvető eredménye és bizonyítása szóról-szóra átvihető nem lokálisan konvex terek esetére. Ebben a tágabb értelemben például az $\mathbf{l_p}, 0 < p < 1$ terek is FK-terek. Mivel a későbbiekben mi csak lokálisan konvex FK-terekkel foglalkozunk, ezért ezt a tulajdonságot már a definícióban előírtuk.

A fentebb említett terek jó része Banach-tér volt. Bevezetjük ezért a következő fogalmat:

3.0.6.Definíció Ha egy X FK tér topológiája teljes normából származtatható, akkor X-et BK-térnek (is) nevezzük.

3.0.7.Definíció Legyen $E \subset \mathbf{s}$. Ha létezik olyan $t \in \mathbf{s}$, hogy minden $x \in E$-re $x^n = O(t^n)$, akkor azt mondjuk,hogy az E halmaznak *létezik növekedési sorozata.*

Most a BK-terek egy "belső" jellemzését adjuk.

3.0.8.Tétel *Egy $E \subset \mathbf{s}$ halmaznak pontosan akkor létezik növekedési sorozata, ha van olyan X BK-tér, hogy $E \subset X$.*

Bizonyítás: Nekünk nem lesz szükségünk erre a tényre, megtalálható [Wi2]-ben.♠

A továbbiakban néhány módszert mutatunk arra, hogyan lehet ismert FK-terekből újabbakat készíteni. Mostantól föltesszük, hogy a szóban forgó FK-terek topológiája valamely teljes pszeudonorma által adott. (0.1.16) miatt ez nem jelent korlátozást.

3.0.9.Tétel *Ha $X_n, n \in \omega$ FK-terek egy sorozata, akkor $X := \cap_{n\in\omega} X_n$ FK-tér.*

Bizonyítás: Legyenek $p_n, n \in \omega$ az FK-terekhez tartozó pszeudonormák. Akkor

$$p := \sum_n \frac{1}{2^{n+1}} \frac{p_n}{p_n + 1}$$

szintén egy pszeudonorma, mely a $sup_n\ p_n$ topológiát szolgáltatja X-en. Így csak az a kérdéses, hogy teljes-e ez a tér. E célból legyen $x_m, m \in \omega$ egy Cauchy-sorozat (X, p)-ben. Akkor Cauchy-sorozat lesz bármely X_n-ben, tehát $x_m \to d_n\ (p_n), m \to \infty$. Mivel mindegyik X_n FK-tér, ezért $x_m \to d_n\ (\tau_s), n \in \omega$. Akkor $d_n = d, n \in \omega$ valamilyen d-re, hiszen $\tau_s \leq p_n$ Hausdorff topológia. Ebből $d \in \cap_{n\in\omega} X_n = X$, és $x_n \to d\ (p)$.♠

3.0.10.Lemma *Legyenek (X, p) és (Y, q) FK-terek, $A : X \to \mathbf{s}$ folytonos és lineáris. Legyen $Z := A^{-1}[Y]$. Akkor Z egy FK-tér.*

Bizonyítás: Z-n definiáljuk a topológiát az $r := p + q \circ A$ pszeudonorma által. $p \leq r$ miatt az így kapott topológia erősebb, mint a $p|Z$, így persze erősebb, mint $\tau_s|Z$. Legyen $x_n \in Z, n \in \omega$ egy r-Cauchy sorozat X-ben. Akkor nyilván p-Cauchy is, és $x_n \to a \in X\ (p)$. Hasonlóan x_n $q \circ A$-Cauchy is X-ben, tehát Ax_n q-Cauchy Y-ban, $Ax_n \to b \in Y\ (q)$. A folytonosságából $Ax_n \to Aa\ (\tau_s)$. Mivel Y egy FK-tér, $Ax_n \to b\ (\tau_s)$, és mivel τ_s szeparált, $b = Aa$. Ebből $a \in Z$, és $x_n \to a\ (r)$, hiszen $x_n \to a\ (p)$ és $Ax_n \to Aa\ (q)$.♠

3.0.11.Lemma *Legyen A egy mátrix, $(X, p), Y$ FK-terek úgy, hogy $X \subset \mathbf{s_A}$ és $Ax \in Y$ minden $x \in X$-re. Akkor $A : X \to Y$ (mint lineáris operátor) folytonos.*

Bizonyítás: A 3.0.2.Lemmát figyelembe véve elég igazolni, hogy $A : X \to \mathbf{s}\ p \to \tau_s$ folytonos. τ_s (0.1.15) definíciója szerint ez ekvivalens azzal, hogy minden $i \in \omega$-ra $T_i \circ A : X \to \mathbf{C}$ folytonos lineáris funkcionál. Definíció szerint

$$T_i \circ A(x) = (Ax)^i = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} A(i,k)x^k.$$

A limesz mögötti összeg az $0, ..., m$-edik koordináta-függvények lineáris kombinációja, ami folytonos, hiszen X egy FK-tér. Minden Fréchet-tér hordó, így folytonos funkcionálsorozat pontonkénti határértéke is folytonos a Banach-Steinhaus-tétel (0.1.1) általános alakjából. Ezzel igazoltuk az állítást.♠

Most beváltjuk igéretünket, és megmutatjuk, hogy bármely mátrix értelmezési- illetve konvergenciatartománya FK-tér. Elöljáróban megjegyezzük, hogy **cs** a (3.0.10) szerint egy FK-tér, hiszen a **c** BK-tér visszahúzottja az (1.1.1)-ben szereplő A operátor szerint.

3.0.12.Tétel *Ha M egy mátrix, akkor $\mathbf{s_M}$ egy FK-tér, $\mathbf{c_M}$ egy szeparábilis FK-tér.*

Bizonyítás: Legyen M k-adik sora $a_k \in \mathbf{s}$. Definiáljuk a B_k segédmátrixot a következő módon:

$$B_k(n,n) := a_k^n, n \in \omega, B_k(l,m) := 0, l \neq m, l,m \in \omega.$$

Láthatóan B_k értelmezési tartománya az egész $\mathbf{s}$. Alkalmazzuk a 3.0.10.Lemmát az $A = B_k, X = \mathbf{s}$ és $Y = \mathbf{cs}$ szereposztással. Ez valóban megtehető a 3.0.11.Lemma miatt, így kapunk egy Z_k FK-teret. Minden k-ra elvégezve a konstrukciót, legyen $Z := \cap_k Z_k$, mely megint csak FK-tér a 3.0.9.Lemmából. Vegyük észre, hogy Z azonos az

$$\{x \in \mathbf{s} | \sum_i x^i a_k^i \ létezik, k \in \omega\}$$

halmazzal, ami az a_k-k definícióját figyelembe véve éppen $\mathbf{s_M}$. Ezek után alkalmazzuk ismét a 3.0.10.Lemmát, ezúttal $A = M, X = \mathbf{s_M}, Y = \mathbf{c}$ szereposztással, így kapjuk, hogy $\mathbf{c_M}$ is FK-tér. Azt, hogy $\mathbf{c_A}$ szeparábilis, az 5.0.3.Tételben fogjuk igazolni. ♠

Mostantól valahányszor említésre kerül $\mathbf{c_M}$ vagy $\mathbf{s_M}$, hallgatólagosan föltesszük, hogy már el vannak látva (egyértelműen) FK-topológiával. Következzen még néhány hasznos észrevétel:

3.0.13.Állítás *Ha $X \subset Y \subset Z$ FK-terek, X zárt Z-ben, akkor X zárt Y-ban.*

Bizonyítás: A feltevésből X zárt $(Y, \tau_Z|Y)$-ban, akkor (3.0.3) miatt (Y, τ_Y)-ban is, itt τ_Z, τ_Y a Z ill. Y FK-topológiái.♠

3.0.14.Tétel *Legyen A egy mátrix. Akkor $f \in \mathbf{c'_A}$ esetén*

$$f(x) = \mu \cdot lim_A x + \sum_i a^i x^i + \sum_i t^i (Ax)^i,$$

ahol $t \in \mathbf{l_1}, a \in \mathbf{s}$ rögzített sorozatok, μ egy komplex szám, úgy, hogy az első szumma minden $x \in \mathbf{c_A}$-re értelmes. Ha A konzervatív, akkor van olyan $g \in \mathbf{s}$, hogy minden $x \in \mathbf{c_A} \cap \mathbf{l_\infty}$-re

$$f(x) = \mu \cdot lim_A x + \sum_i g^i x^i.$$

Bizonyítás: A terjedelmes bizonyítást elhagyjuk. Megtallható [Wi2] 66. illetve 68. oldalán.♠

3.1.FK-TEREK ÖSSZEGE

A dolgozat 4.fejezetében FK terek összegei lépnek föl. Fontos lesz számunkra az a tény, hogy ezek maguk is FK-terek. Megjegyezzük, hogy direkt összeg esetén az alábbi konstrukció lényegesen egyszerűbben elvégezhető.

3.1.0.Tétel *Ha X, Y FK-terek, akkor $Z := X + Y$ (komplexusösszeg) egy FK-tér.*

Bizonyítás: Legyenek p, q az X, Y topológiáit szolgáltató pszeudonormák. Definiálja az $r : Z \to \mathbf{R}$ függvényt a következő formula:

$$r(z) := inf\{p(x) + q(y) | x \in X, y \in Y, x + y = z\}.$$

Állítjuk, hogy r egy pszeudonorma. Csak a skalárral való szorzás folytonossága és a szubadditivitás nem triviális. Először legyen $z_i \in Z, i = 1, 2$. Válasszunk $z_i^x \in X, z_i^y \in Y$ elemeket úgy, hogy $z_i = z_i^x + z_i^y, p(z_i^x) + q(z_i^y) < r(z_i) + \epsilon$ Ekkor

$$r(z_1 + z_2) \leq p(z_1^x + z_2^x) + q(z_1^y + z_2^y) \leq p(z_1^x) + p(z_2^x) + q(z_1^x) + q(z_2^y) < r(z_1) + r(z_2) + 2\epsilon,$$

és $\epsilon \to 0$ igazolja a szubadditivitást. A skalárral való szorzás folytonosságának bizonyításához elegendő az alábbi két állítást belátni:

$$(1)\ Ha\ r(z_k) \to 0, t_k \to t, akkor\ r(t_k z_k) \to 0, k \to \infty.$$

$$(2)\ Ha\ t_k \to 0, akkor\ r(t_k z) \to 0, k \to \infty.$$

Itt $t_k, t \in \mathbf{C}; z_k, z \in Z$. Valóban, ekkor $t_k \to t, r(z_k - z) \to 0$ esetén

$$r(t_k z_k - tz) \leq r(t_k(z_k - z)) + r((t_k - t)z) \to 0,$$

amit igazolni akartunk. (1)-hez válasszunk z_k^x, z_k^y sorozatokat úgy, hogy

$$z_k = z_k^x + z_k^y, p(z_k^x) + q(z_k^y) < r(z_k) + \frac{1}{k^2}.$$

Ekkor a feltétel miatt $z_k^x \to 0\ (p), z_k^y \to 0\ (q)$. Viszont p, q pszeudonormák, így tehát $p(t_k z_k^x), q(t_k z_k^y) \to 0$.

$$(*)\ r(t_k z_k) \leq p(t_k z_k^x) + q(t_k z_k^y) \to 0,$$

tehát (1) igaz. (2)-höz alkalmazzuk $(*)$-ot a $z_k := z$ konstans sorozatra.

A következő lépésben megmutatjuk, hogy (Z, r) lokálisan konvex. Elsőként vegyük észre, hogy $r|X$ és $r|Y$ gyengébbek, mint e terek eredeti topológiái. Ez nyilvánvaló abból, hogy pl.$x \in X$ esetén $r(x) \leq p(x) + q(0) = p(x)$. Legyen most U tetszőleges r-nullkörnyezet Z-ben. Válasszunk egy V kiegyensúlyozott r-környezetet úgy, hogy $V + V + V + V \subset U$. Az előbbi megállapításból valamint X, Y lokális konvexitásából van olyan W_X X-beli és W_Y Y-beli abszolút konvex nullkörnyezet, hogy $W_1 \subset V$, $W_2 \subset V$. Tekintve a $H := ac(W_X \cup W_Y)$ halmazt, nyilván $H + H \subset V + V + V + V \subset U$, kellene még, hogy $H + H$ r-nullkörnyezet (az, hogy konvex, világos). Legyenek $\epsilon_X, \epsilon_Y > 0$ olyan számok, hogy a W_X, W_Y tartalmaznak ϵ_X-sugarú p-gömböt illetve ϵ_Y-sugarú q-gömböt. Akkor $H + H$ tartalmaz $\epsilon := min(\epsilon_X, \epsilon_Y)$-sugarú r-gömböt, hiszen $r(z) < \epsilon$ esetén ha valamely $z = x + y$ felbontásra $p(x), q(y) < \epsilon$, akkor $x \in W_X, y \in W_Y$, s így $x + y \in W_X + W_Y \subset H + H$.

Most rátérünk (Z, r) teljességének bizonyítására. (0.1.18) alapján elég megmutatni, hogy az abszolút konvergens sorok konvergensek. Legyen $z_k \in Z, k \in \omega$ olyan sorozat, hogy

$\sum_k r(z_k)$ véges. Válasszunk ugyanolyan z_k^x, z_k^y sorozatokat, mint fentebb, (1) bizonyításában. Ekkor $\sum_k z_k^x, \sum_k z_k^y$ abszolút konvergensek (X, p)-ben illetve (Y, q)-ban, tehát létezik összegük, mondjuk z^x, z^y. Így

$$\sum_{k=0}^{l} z_k = \sum_{k=0}^{l}(z_k^x + z_k^y) \to z^x + z^y \ (r), l \to \infty$$

hiszen egy korábbi észrevétel szerint $r|X, r|Y$ gyengébbek, mint X, Y eredeti topológiái.

Végül belátjuk, hogy $\tau_s|Z \leq r$. Legyen $r(z_k) \to 0, z_k \in Z, k \in \omega$. Akkor az (1)-es igazolásánál használt z_k^x, z_k^y sorozatokra nyilván $z_k^x \to 0\ (p)$ illetve $z_k^y \to 0\ (q)$. Így bármely T_i kordináta-funkcionálra

$$T_i(z_k) = T_i(z_k^x) + T_i(z_k^y) \to 0$$

teljesül, hiszen X, Y-on az FK-tér definíciója szerint folytonos a T_i. Ezzel tételünket teljesen beláttuk.♠

3.1.1.Következmény *Ha a fenti tétel feltételei mellett igaz, hogy X, Y szeparábilisak, akkor ez fönnáll Z-re is.*

Bizonyítás: Legyenek S_X, S_Y megszámlálható sűrű halmazok $(X, p), (Y, q)$-ban. Tekintsük az $S_X + S_Y \subset Z$ halmazt. Legyen $z \in Z$, U pedig egy r-környezete. Akkor valamely ν-re $\{d \in Z | r(z, d) < \nu\} \subset U$.Ha most $z = x + y, x \in X, y \in Y$, akkor alkalmas $s_x \in S_X, s_y \in S_y$ elemekre $p(s_x - x) < \nu, q(s_y - y) < \nu$, így

$$r((s_x + s_y) - z) \leq p(s_x - x) + q(s_y - y) < 2\nu,$$

innen $S_X + S_Y$ egy megszámlálható sűrű halmaz (Z, r)-ben.♠

3.1.2.Megjegyzés Tüzetesebben szemügyre véve a 3.1.0.Tétel bizonyítását, kitűnik, hogy tulajdonképpen az alábbi általános állítást igazoltuk:

Véges sok lokálisan konvex teljes pszeudonormált tér induktív limesze lokálisan konvex teljes pszeudonormált tér.

3.1.3.Tétel *Ha $Z = X + Y$ két FK-tér direkt összege, akkor X, Y zártak Z-ben (ha azt a (3.1.0) konstrukció szerint létező FK-topológiával látjuk el).*

Bizonyítás: Direkt összeg esetében a Z topológiáját generáló r pszeudonorma a következő alakot ölti:

$$r(z) = p(x) + q(y),$$

ahol $z = x + y$ a z egyértelműen létező fölbontása X és Y-beli komponensekre. Ebből X Z-től örökölt relatív topológiáját $r(x) = p(x) + q(0), x \in X$ szolgáltatja, vagyis ez megegyezik X eredeti topológiájával. A 3.0.3.Következmény szerint X zárt Z-ben. Y-ra ugyanez az okoskodás.♠

3.1.4.Következmény *Ha Z egy olyan FK-tér, mely felbomlik $Z = X + Y$ alakban valamely X, Y vektortér-altereire úgy, hogy $X \cap Y = \{0\}$; valamint igaz az, hogy X és Y elláthatók FK-topológiával, akkor X, Y zártak Z-ben.*

Bizonyítás: Az előző tétel szerint Z ellátható olyan FK-topológiával, hogy X, Y zárt alterei legyenek. Másrészt az FK-topológia egyértelmű (3.0.3)-ból, így X, Y zártak Z-ben.♠

3.1.5.Következmény *Legyenek $X \subset Z$ FK-terek, X véges kodimenziós Z-ben.Akkor X zárt Z-ben.*

Bizonyítás: A feltételből X-nek létezik egy Y véges dimenziós algebrai komplementuma. τ_s megszorítása Y-ra egy Hausdorff vektortopológia egy véges dimenziós téren, mely egy ismert eredmény (0.1.19) szerint Banach-tér struktúrával fölruházható. Így Y egy BK-tér, és az előző Következmény alkalmazható.♠

3.2.KOREGULÁRIS ÉS KONULL FK-TEREK

Ebben a részben bizonyos mátrixtulajdonságok megfelelőit keressük meg FK-terekre. Legyen (P) egy mátrixtulajdonság (pl.nem szummáz korlátos divergens sorozatot), és tegyük föl, hogy sikerül valamely, az alábbihoz hasonló tételt igazolnunk:

A pontosan akkor rendelkezik (P)-vel, ha $\mathbf{c_A}$(vagy $\mathbf{s_A}$, vagy $A : X(A) \to Y(A)$ mint lineáris operátor, ahol $X(A), Y(A)$ A-ból definiált FK-terek) rendelkezik (Q)-val.

Itt (Q) valamely tulajdonság (az említett példában $\mathbf{c_A} \cap \mathbf{l_\infty} \subset \mathbf{c}$). Ez esetben *elfeledkezhetünk* a mátrixokról, és nekikezdhetünk az FK-terek és köztük értelmezett lineáris operátorok vizsgálatának valamely (Q) szempont szerint. Ha sikerül bizonyítani, hogy (Q1)→(Q2) valamely FK-terekkel kapcsolatos tulajdonságokra, akkor azonnal konstatálhatjuk, hogy (P1)→(P2), ahol (P1), (P2) a (Q1), (Q2)-nek megfelelő mátrixtulajdonságok. Emellett jóleső érzéssel nyugtázhatjuk, hogy *többet* bizonyítottunk, hiszen számos olyan FK-tér van, melyeket nem mátrixokból származtatunk. Némi szerencsével kiderülhet, hogy a (Q1)→(Q2) implikációnak a szummációelméleten kívüli alkalmazásai is vannak. A dolgozat későbbi fejezeteiben látni fogjuk, hogy ténylegesen ez a helyzet; számos, mátrixokra ismert eredmény átvihető FK-terekre. Az alábbiakban néhány egyszerű összefüggést adunk meg a mátrixok és a sorozatterek világa között.

3.2.0.Definíció Egy X FK-teret *konzervatívnak* mondunk, ha $\mathbf{c} \subset X$.

3.2.1.Tétel *A pontosan akkor konzervatív, ha $\mathbf{c_A}$ konzervatív.*

Bizonyítás: Ez nyilvánvaló.♠

3.2.2.Definíció Egy X konzervatív FK-térről azt mondjuk, hogy *konull*, ha $P_n(e) \to e$ gyengén (azaz $(\sigma(X, X'))$). X *koreguláris*, ha nem konull.

3.2.3.Tétel *Ha A egy konzervatív mátrix, $\mathbf{c_A}$ pontosan akkor konull, ha A konull.*

Bizonyítás: Ha $\mathbf{c_A}$ konull, akkor bármely $f \in \mathbf{c_A}'$ esetén

$$f(e) = \sum_i f(e_i).$$

Speciálisan (1.0.3) figyelembevételével

$$0 = lim_A(e) - \sum_i lim_A(e_i) = \chi_A,$$

azaz A konull.

Megfordítva, a (3.0.14)-ben szereplő előállítást használva

$$(*)\ f(e) - \sum_i f(e_i) = \mu \cdot lim_A e + \sum_i t^i (Ae)^i + \sum_k a^k -$$

$$-\sum_k (\mu \cdot \lim Ae_k + \sum_i t^i (Ae^k)^i + a^k) = \mu \cdot \chi(A) + \sum_i \sum_k t^i A(i,k) - \sum_k \sum_i t^i A(i,k) = 0,$$

mert $\sum_k \sum_i |t^i A(i,k)| \leq \|t\|_1 \cdot \sup_n \|A(n,\cdot)\|_1 < \infty$, hiszen A konzervatív és abszolút konvergens sorok esetén szabad szummát cserélni. ♠

3.2.4.Tétel *Legyenek $X \subset Y$ FK-terek. Ha X konull, akkor Y konull. Ha X koreguláris és zárt Y-ban, akkor Y is koreguláris.*

Bizonyítás: Az $X \to Y$ beágyazó leképezés folytonos (3.0.3) szerint. (2.0.6) miatt gyengén ($\sigma(X, X') \to \sigma(Y, Y')$) is folytonos. Innen a konullitás definícióját figyelembe véve az első állítás adódik. Ha X zárt Y-ban,akkor a beágyazás homeomorfizmus (3.0.3) szerint, akkor inverze folytonos, tehát gyengén folytonos, így ha Y konull, akkor X is az.♠

3.2.5.Következmény *Ha $\mathbf{c} \subset X$ zárt valamely X FK-térben akkor X koreguláris, speciálisan $\mathbf{l}_\infty$ koreguláris.*

Bizonyítás: $\mathbf{c} = \mathbf{c_I}$, az identitásmátrix pedig koreguláris, másrészt $\mathbf{c}$ zárt $\mathbf{l}_\infty$-ben.♠

3.2.6.Tétel *Egy Z konull FK-tér tartalmaz végtelen sok olyan nemkorlátos sorozatot, melyek bármely nemtriviális lineáris kombinációja nemkorlátos.*

Bizonyítás: Az előző Következményből tudjuk, hogy $\mathbf{c}$ nem zárt X-ben. Tegyük fel, hogy az állítás hamis. $X = Z \cap \mathbf{l}_\infty$ egy FK-tér, mely (3.1.5) és az indirekt föltevés miatt zárt Z-ben. Ekkor $\mathbf{c} \subset X \subset \mathbf{l}_\infty$, s (3.0.13) szerint $\mathbf{c}$ zárt X-ben. Innen zárt Z-ben is, ellentmondásra jutottunk.♠

A fenti tétel (1.3.6) erős általánosítása.

3.2.7.Definíció Egy X konzervatív FK-teret *tökéletes*nek mondunk, ha $\bar{\mathbf{c}} = X$, ahol $^-$ az X-beli lezárás. A $\bar{\mathbf{c}} \subset X$ halmaz az FK-tér *tökéletes része*.

3.2.8.Tétel *Ha A koreguláris, akkor $\mathbf{c_A}$ tökéletes része tartalmazza az összes $\mathbf{c_A}$-beli korlátos sorozatot.*

Bizonyítás: Legyen $f \in \mathbf{c_A}', f|\mathbf{c} = 0$. Akkor a 3.2.3.Tétel $(*)$ egyenlősége szerint $\mu = 0$, (3.0.14)-ből pedig

$$f(x) = \sum_i g^i x^i, x \in \mathbf{l}_\infty \cap \mathbf{c_A}.$$

Innen $g^i = f(e_i) = 0$, vagyis $f|(\mathbf{l}_\infty \cap \mathbf{c_A}) = 0$. A (0.1.17) Hahn-Banach-féle kiterjesztési tételből tehát $\mathbf{l}_\infty \cap \mathbf{c_A} \subset \bar{\mathbf{c}}$. ♠

3.2.9.Következmény *Ha egy konzervatív mátrix szummáz korlátos divergens sorozatot,akkor szummáz nemkorlátos sorozatot.*

Bizonyítás: Ha $\mathbf{c_A} \subset \mathbf{l}_\infty$, akkor (3.0.13) miatt $\mathbf{c}$ zárt $\mathbf{c_A}$-ban, hisz $\mathbf{c} \subset \mathbf{c_A} \subset \mathbf{l}_\infty$ és $\mathbf{c}$ zárt $\mathbf{l}_\infty$-ben. (3.2.5) és (3.2.8) szerint $\mathbf{c}$ sűrű is $\mathbf{c_A}$-ban, így $\mathbf{c_A} = \mathbf{c}$. Tehát ha egy konzervatív mátrix nem szummáz nemkorlátos sorozatot, akkor nem szummázhat korlátos divergens sorozatot sem.♠

Ezzel beláttuk (1.3.5)-öt. Befejezésül megemlítjük Berg,Crawford és Whitley tételét, mely jellemzi azon konzervatív mátrixokat, melyek nem szummáznak korlátos divergens sorozatot.

3.2.10.Tétel *Egy A konzervatív mátrixra* $\mathbf{c_A} \cap \mathbf{l}_\infty = \mathbf{c}$ *pontosan akkor, ha az* $A : \mathbf{c} \to \mathbf{c}$ *operátor értékkészlete zárt, magja pedig véges dimenziós.*

Bizonyítás: Megtalálható [GW]-ben.♠

4.Konzisztencia- és tartalmazási tételek

4.0.M SZEKVENCIÁLIS TELJESSÉGE

4.0.0.Definíció Ha $(X, \mathbf{T})$ egy FK-tér, akkor

$$W_X := \{x \in X | P_n(x) \to x \ (\sigma(X, X'))\},$$

$$J_X := \{x \in X | P_n(x) \to x \ (\mathbf{T})\},$$

$$M_X := W_X \cap \mathbf{l}_\infty.$$

Ha $x_n, x \in X \cap \mathbf{l}_\infty$, $x_n \to x \ (\gamma)$ pontosan akkor,ha

$$x_n \to x \ (\mathbf{T}) \ \text{és} \ sup_n \|x_n\|_\infty < \infty.$$

Ezzel egy γ konvergenciastruktúrát definiáltunk.

Ha X egy FK-tér, akkor ρ_X (vagy ha X rögzített, egyszerűen ρ) az a topológia $\mathbf{l_1}$-en, amit az M_X-beli $\lambda(M_X, \mathbf{l_1})$-teljesen korlátos halmazok poláris családja generál a $(\mathbf{l_1}, M_X)$ duális párban. (A bilineáris függvény a "kanonikus" koordinátánkénti szorzás.)

4.0.1.Állítás *Legyen $(X, \mathbf{T})$ egy FK-tér, melyre $\phi \subset X$. Akkor az alábbi két kijelentés ekvivalens:*

$$(a) \ \mathbf{c_0} \subset X$$

$$(b) \ \sum_i |f(e_i)| \ \text{véges minden} \ f \in X' - re.$$

Bizonyítás: $(a) \to (b)$ A (3.0.3) gondolatmenetét alkalmazva a normatopológia $\mathbf{c_0}$-on erősebb, mint $\mathbf{T}|\mathbf{c_0}$. E szerint $f \in X'$ folytonos $(\mathbf{c_0}, \|\cdot\|_\infty)$-n. $\mathbf{c_0}$ duálisának (0.1.2) karakterizációjából adódik az állítás.

$(b) \to (a)$ Legyen $i : \phi \to X$ a természetes beágyazás. (b) szerint $f \in X'$ $\mathbf{l_1}$ valamely elemével azonosítható. $\sigma(X, X')$ szokásos környezetbázisának i-ősképét tekintve világos, hogy i $\sigma(\phi, \mathbf{l_1}) \to \sigma(X, X')$-folytonos. (2.0.9)-ből $\tau(\phi, \mathbf{l_1}) \to \tau(X, X')$-folytonos is. $\tau(\mathbf{c_0}, \mathbf{l_1})|\phi$ metrizálható, így szükségképpen megegyezik a $\tau(\phi, \mathbf{l_1})$ Mackey-topológiával (0.1.4). Így $\tau(\mathbf{c_0}, \mathbf{l_1})$ éppen $\tau(\phi, \mathbf{l_1})$ teljessé tétele (ami egyébként közvetlen számolással is igazolható lett volna). Ha i kiterjesztése a teljessé tett térre továbbra is az identitásleképezés, akkor készen vagyunk. Jelölje e kiterjesztést is i. $x_n \to x \ (\tau(\mathbf{c_0}, \mathbf{l_1}))$ esetén $x_n \to x \ (\tau_s|\mathbf{c_0})$, persze $i(x_n) \to i(x) \ (\mathbf{T})$, de akkor $i(x_n) \to i(x) \ (\tau_s|X)$, és τ_s Hausdorff, innen $i(x) = x$. ♠

Mostantól rögzítünk egy X FK-teret, melyre $\mathbf{c_0} \subset X$. M_X helyett egyszerűen M-et, J_X helyett J-t, W_X helyett W-t írunk.

4.0.2.Állítás $\mathbf{c_0} \subset J \subset W$

Bizonyítás: A (0.1.10) Frèchet-terek közti zárt gráf tétel szerint az $i : \mathbf{c_0} \to X$ beágyazás $\|\cdot\|_\infty \to \tau$ folytonos, mert a (3.0.2) gondolatmenete szerint zárt gráfú; vagyis $\mathbf{c_0} \subset J$ bizonyításához elég belátni, hogy $P_n(x) \to x, x \in \mathbf{c_0}$ $(\|\cdot\|_\infty)$. Ez a nullsorozat fogalmából nyilvánvaló. $J \subset W$ a definíciókból világos. ♠

4.0.3.Állítás *Ha* $x_n \to x\ (\gamma)$*, akkor* $x_n \to x\ (\sigma(\mathbf{l}_\infty, \mathbf{l_1}))$.

Bizonyítás: Legyen $B_r = \{y \in \mathbf{l}_\infty |\ \|y\|_\infty \leq r\}$. Akkor B_r $\sigma(\mathbf{l}_\infty, \mathbf{l_1})$-kompakt a Banach-Alaoglu tételből (0.1.12). Így B_r-en ez a topológia megegyezik a gyengébb $\sigma(\mathbf{l}_\infty, \phi)$ Hausdorff-topológiával (0.1.20) szerint. Ha $x_n \to x\ (\gamma)$, akkor $x_n \in B_r, n \in \omega$ valamely $r > 0$-ra. $x_n \to x\ (\sigma(\mathbf{l}_\infty, \phi))$, hisz X egy FK-tér és így koordinátafüggvények véges lineáris kombinációi (vagyis a tekintett duális párokban ϕ elemei) folytonosak a $\mathbf{T}$-re nézve. Mivel $\sigma(\mathbf{l}_\infty, \phi)|B_r = \sigma(\mathbf{l}_\infty, \mathbf{l_1})|B_r$, $x_n \to x\ (\sigma(\mathbf{l}_\infty, \mathbf{l_1}))$ következik. ♠

4.0.4.Tétel *Az alábbi három állítás ekvivalens bármely* $x \in X$*-re:*

$$(a)\ x \in W \cap \mathbf{l}_\infty$$

$$(b)\ Van\ olyan\ x_n \in \phi, n \in \omega, hogy\ \|x_n\|_\infty \leq \|x\|_\infty, és\ x_n \to x\ (\tau)$$

$$(c)\ Van\ olyan\ x_n \in \mathbf{c_0}, n \in \omega\ sorozat, hogy\ x_n \to x\ (\gamma).$$

Bizonyítás:$(a) \to (b)$ Legyen $C = \{P_n(x) | n \in \omega\}$. Legyen $\mathcal{C}$ a C konvex burka. W definíciója folytán x a $\mathcal{C}$ gyenge lezárásában van. Ez ugyanaz, mint a $\mathbf{T}$-lezárás, hiszen konvex halmazról van szó (0.1.21), emellett $\mathbf{T}$ metrizálható, ezért van olyan $\{x_n\} \subset \mathcal{C}$ sorozat, melyre $x_n \to x(\tau)$. P_n és a konvex burok lezárásának definíciójából világos, hogy $\|x_n\|_\infty \leq \|x\|_\infty$

$(b) \to (c)$ Ez triviális.

$(c) \to (a)$ A (c) feltételből minden $f \in (X, \mathbf{T})'$-re $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. A 4.0.2.Állításból $f(x_n) = \sum_i x_n^i f(e_i)$. A 4.0.3. illetve 4.0.1.Állítások felhasználásával

$$\lim_{n\to\infty} \sum_i x_n^i f(e_i) = \sum_i x^i f(e_i).$$

Innen $x \in W;x \in \mathbf{l}_\infty$, hiszen a (γ)-t úgy definiáltuk. ♠

4.0.5.Definíció Legyen (θ) egy konvergenciastruktúra valamely X vektortéren. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $\mu \geq \mu^*$ lokálisan konvex vektortopológiák X-en, hogy μ-nek létezik μ^*-zárt halmazokból álló környezetbázisa. Azt mondjuk,hogy θ egy *bitopologikus konvergencia*, hogyha $x_n \to x\ (\theta)$ pontosan akkor, ha $x_n \to x\ (\mu^*)$ és x_n egy μ-korlátos sorozat.

4.0.6.Állítás $\mathbf{T}|M \leq \|\cdot\|_\infty|M$ *és* γ *egy bitopologikus konvergencia.*

Bizonyítás: Ha p egy $\mathbf{T}$-folytonos félnorma X-en, akkor a $\mathbf{c_0} \to X$ beágyazás (4.0.2) bizonyítása szerint folytonos, így

$$p(x) \leq K\|x\|_\infty, x \in \mathbf{c_0},$$

ahol K az x-től független konstans. Ha $x \in M$, akkor (4.0.4) szerint van olyan $x_n \in \phi, n \in \omega$ sorozat, hogy $x_n \to x\ (\mathbf{T})$ és $\|x_n\|_\infty \leq \|x\|_\infty$. Innen

$$p(x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n) \leq K \sup_n \|x_n\|_\infty \leq K\|x\|_\infty,$$

vagyis p $\|\cdot\|_\infty$-folytonos M-en, $\mathbf{T}|M \le \|\cdot\|_\infty$ rögtön adódik. Tekintettel γ definíciójára, elég lenne belátni, hogy a $B_r \cap M$ halmazok $\mathbf{T}|M$-zártak. Először igazoljuk, hogy B_r τ_s-zárt $\mathbf{s}$-ben. $\tau_s = \sigma(\mathbf{s}, \phi)$, tehát (0.1.7) miatt csak azt kell ellenőrizni, hogy $T_i[B_r] \subset \mathbf{C}$ zàrt, $i \in \omega$, ami triviális. Ezek után $X \cap B_r$ $\tau_s|X$-zárt, ahonnan $\mathbf{T}$-zárt, mert ez egy FK-topológia. Akkor persze $B_r \cap M$ $\mathbf{T}|M$-zárt, ahogyan akartuk.♠

4.0.7.Állítás $\beta(M, \mathbf{l_1}) = \|\cdot\|_\infty|M$

Bizonyítás: β definíciója szerint azt kell igazolni, hogy $\sigma(\mathbf{l_1}, M)$ ugyanazokat a korlátos halmazokat definiálja $\mathbf{l_1}$-en, mint $\|\cdot\|_\infty$. Mivel (4.0.2) szerint $\mathbf{c_0} \subset M$, elég belátni, hogy $\sigma_1 := \sigma(\mathbf{l_1}, \mathbf{c_0})$ korlátos halmazai $\sigma_2 := \sigma(\mathbf{l_1}, \mathbf{l_\infty})$-korlátosak, hiszen a korlátosság fogalma (0.1.22) szerint ugyanaz bármely kompatibilis topológiában. Tegyük fel, hogy F σ_1-korlátos, de nem σ_2-korlátos. Akkor alkalmas $a_n \in \mathbf{l_1}, n \in \omega$ sorozatra és $d \in \mathbf{l_\infty}$ elemre $\{d(a_n) : n \in \omega\}$ nem korlátos $\mathbf{C}$-ben. Másképpen fogalmazva, az $a_n \in \mathbf{c_0'} = \mathbf{l_1}$ sorozat $\mathbf{c_0}$-on korlátos, de az $a_n(d), n \in \omega$ halmaz nem korlátos. A Banach-Steinhaus tétel szerint a_n normakorlátos, ám ekkor bármely $d \in \mathbf{l_\infty}$ esetén:

$$\sup_n |a_n(d)| \le \|d\|_\infty \cdot \sup_n \|a_n\|_1,$$

ami ellentmondás az előzőekkel. ♠

A következő lemma kimondása előtt megjegyezzük, hogy a benne szereplő λ topológia definíciója (0.1.6)-ban található.

4.0.8.Lemma *Ha* $x_n \in \phi, n \in \omega$ *és* $x_n \to x$ (γ), *akkor* $x_n \to x$ $(\lambda(M, \mathbf{l_1}))$.

Bizonyítás: A 4.0.4.Tétel szerint $x \in M$. Tegyük most föl, hogy az állítás hamis. Akkor létezik olyan sorozat, hogy $y_n \in \phi, n \in \omega, y_n \to x(\gamma)$, valamint x-nek egy olyan U λ-környezete, hogy $y_n \notin U, n \in \omega$. Legyen $sup_n\|y_n\|_\infty = M$. Mivel $y_n \to x$ (τ) és τ erősebb, mint a koordinátánkénti konvergencia (ami éppen τ_s megszorítását indukálja), fönnáll $y_n^j \to x^j$. Akkor létezik egész számoknak olyan szigorúan növő $n_k, k \in \omega$ sorozata, hogy

$$|y^j - y_{n_k}| < \frac{1}{k}, 1 \le j \le k, k \in \omega.$$

Most definiáljuk a $z_n \in \phi, n \in \omega$ sorozatot a következő módon:

$$z_0 = 0$$

$$1 \le j \le k : \; z_k^j := x^j$$

$$j > k \quad : \; z_k^j = y_{n_k}^j, k \in \omega.$$

Nyilván $z_k - y_{n_k} \to 0$ $(\|\cdot\|_\infty)$. A 4.0.7.Állításból tudjuk, hogy $\|\cdot\|_\infty|M = \beta(M, \mathbf{l_1})$. A 4.0.6.Állításból következik, hogy $z_k - y_{n_k} \to 0(\tau)$ és a z_k konstrukciójából látszik $sup_k\|z_k\|_\infty \le M$, tehát $z_k \to x(\gamma)$. Az is nyilvánvaló, hogy z_k semmilyen részsorozata sem tarthat x-hez λ-ban, mert akkor $\lambda \le \beta$ miatt y_n valamely részsorozata x-hez tartana λ-ban, ami feltevéseink szerint nem lehetséges. Mivel $(X, \mathbf{T})$ Frèchet-tér, topológiáját egy p_n monoton nvő félnormacsaládból származtathatjuk. Most definiálunk egy ω-beli szigorúan monoton növő sorozatot:

$$m_0 := 0$$

$$z^i_{m_k} = 0, m_{k+1} \leq i$$

$$p_k(z_r - z_s) < \frac{1}{2^k}$$

Ilyen $m_k, k \in \omega$ létezik, hiszen $z_k \in \phi$ és z_k τ-konvergens, tehát τ-Cauchy.

$u_k := z_{m_{k+1}} - z_{m_k}$-t tekintve

$$\sum_k p_n(u_k) < \infty, n \in \omega.$$

adódik. $(X, \mathbf{T})$ teljes, vagyis u_k bármely v_k rszsorozatára $\sum_k v_k$ $\mathbf{T}$- konvergens. Az alábbi becslsből kapjuk, hogy a sor γ-ban is konvergens:

$$|\sum_{k=0}^n v^i_k| \leq \sum_k |u^i_k| == |z^i_{m_j}| + |z^i_{m_{j+1}} - z^i_{m_j}| \leq 3M, ha\ m_j \leq i < m_{j+1}.$$

A 4.0.4.Tételből $\sum_k v_k \in M$. Sőt, $\sum_k v_k$ $\sigma(M, \mathbf{l_1})$-ben is konvergál a 4.0.3.Lemma szerint. Az Orlicz-Pettis tétel (2.2.4) biztosítja, $\sum_k u_k$ konvergál λ-ban. Ismét a 4.0.3.Lemmára hivatkozva $\sum_{k=0}^n u_k = z_{m_k} \to x(\sigma(M, \mathbf{l_1}))$. Akkor a $\sum u_k$ összeg szükségszerűen x a λ topológiában, azaz $z_{m_k} \to x$ (λ), ami ellentmond z_n választásának.♠

4.0.9.Állítás *Ha f egy γ-szekvenciálisan folytonos lineáris funkcionál, azaz*

$$\{x_n\}_{n=0}^\infty \subset \phi,\ x_n \to x\ (\gamma)$$

esetén $f(x_n) \to f(x)$ áll fönn; akkor

$$f(x) = \sum_k l^k x^k, x \in M,$$

valamely $l \in \mathbf{l_1}$ sorozatra.

Bizonyítás: Legyen $l^i := f(e_i)$. A 4.0.2.Állítás szerint $P_n(x) \to x$ (γ) minden $x \in \mathbf{c_0}$-ra, vagyis $\sum_i x^i f(e_i)$ konvergál. Innen $l \in \mathbf{l_1}$, a Landau-Toeplitz tétel (0.1.0) változatából. Ha $x \in M$, akkor létezik $x_n \in \phi, n \in \omega, x_n \to x$ (γ) sorozat, ez a 4.0.4.Tétel tartalma. A 4.0.3.Lemma szerint

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) == \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^\infty l^k x^k_n = \sum_k l^k x^k,$$

ahogyan akartuk. Megjegyezzük, hogy az utolsó lépésben fölhasználtuk, hogy ϕ elemeinek csak véges sok nemnulla koordinátája van.♠

4.0.10.Állítás $(\mathbf{l_1}, \rho(\mathbf{l_1}, M))$ *teljes TVT.*

Bizonyítás: Legyen f egy lineáris funkcionál M-en, aminek a $\lambda(W \cap \mathbf{l}_\infty, \mathbf{l_1})$-teljesen korlátos halmazokra való megszorításai λ-folytonosak. Grothendieck teljességi tétele (2.1.2) szerint elég megmutatni, hogy f megfeleltethető valamely $l \in \mathbf{l_1}$-nek, ahol $\mathbf{l_1}$-et mint M

algebrai duálisának alterét tekintjük. A 4.0.8.Lemma szerint $f(x_n) \to f(x)$ valahányszor $x_n \in \phi, n \in \omega$ és $x_n \to x$ (γ). A 4.0.9.Állításból készen vagyunk.♠

4.0.11.Tétel $(\mathbf{l_1}, \sigma(\mathbf{l_1}, M))$ *szekvenciálisan teljes.*

Bizonyítás: Legyen $K \subset \mathbf{l_1}$ $\sigma(\mathbf{l_1}, M)$-kompakt. ρ definíció szerint a λ-teljesen korlátos halmazok generálta poláris topológia, így Grothendieck felcserélési tétele (2.1.6) és λ definíciója miatt K ρ-teljesen korlátos. A 4.0.10.Állításból tudjuk, hogy ρ teljes, ezért K ρ-relatív kompakt. $\sigma \leq \rho$ miatt $\rho|\bar{K} = \sigma|\bar{K}$ (0.1.20) szerint, ahol $\bar{K}$ a K ρ-lezárása. Tekintsünk most egy σ-konvergens sorozatot, $u_n, n \in \omega$-t. Az $\{u_n | n \in \omega\} \cup \{\lim u_n\}$ halmaz nyilván σ-kompakt, így a korábbiak szerint u_n ρ-konvergens. (0.1.14)-ből ρ és σ Cauchy-sorozatai is ugyanazok. Innen a tétel állítása adódik.♠

4.0.12.Állítás $M \neq \mathbf{c}$

Bizonyítás: Azt igazoljuk, hogy $\nu := \sigma(\mathbf{l_1}, \mathbf{c})$ nem szekvenciálisan teljes. $e_i \in \mathbf{l_1}, i \in \omega$ és bármely $d \in \mathbf{c}$-re $d(e_i) = d^i$ konvergens. Tehát e_i ν-Cauchy. Nyilván $e_i \to 0$ $(\sigma(\mathbf{l_1}, \mathbf{c_0}))$, hisz ekkor $d^i \to 0$ minden $d \in \mathbf{c_0}$ esetén. Tételezzük fel, hogy $e_i \to u$ (ν) valamely $u \in M$-re. Akkor a fenti észrevétel szerint u nem lehet más, mint 0, hiszen a $\sigma(\mathbf{l_1}, \mathbf{c_0})$ Hausdorff-topológia gyengébb, mint ν. Ekkor azonban $e(e_i) = 1 \to 0, i \to \infty$, ami képtelenség.♠

4.0.13.Tétel *M-en az alábbi három konvergenciastruktúra megegyezik:*

$$(1)\ (\gamma)$$

$$(2)\ (\tau(M, \mathbf{l_1}))$$

$$(3)\ (\lambda(M, \mathbf{l_1})).$$

Bizonyítás: Megjegyezzük, hogy ebben a bizonyításban kivételesen szakítunk egyik konvenciónkkal, és x_n^m-el *nem* az x_n m-edik koordinátáját jelöljük. Definíció szerint $\tau \leq \lambda$. Másrészt Wiweger egy tétele szerint (lásd.[Wiw]-ben) minden bitopologikus konvergenciához van olyan lokálisan konvex topológia, melynek éppen ő a konvergenciastruktúrája. Legyen a γ-t származtató topológiák egyike $\bar{\gamma}$. (4.0.9) szerint e topológia duális tere szűkebb $\mathbf{l_1}$-nél, így $\bar{\gamma} \leq \tau(M, \mathbf{l_1})$. Nyilván készen leszünk, ha megmutatjuk, hogy a γ-konvergens sorozatok nincsenek többen,mint a λ-konvergens sorozatok. E célból tegyük fel indirekte, hogy valamely $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset M$ sorozatra. $x_n \to x$ (γ), de valamely U abszolút konvex λ-környezetre a sorozat az $x + U$ halmazon kívül halad. Válasszunk olyan, a (4.0.4) szerint létező $x_n^m \in \phi$ sorozatokat,hogy

$$x_n^m \to x_n\ (\gamma), m \to \infty, x_n^m \in \phi, n, m \in \omega$$

$$\sup_m \|x_n^m\|_\infty \leq \|x_n\|_\infty.$$

A 4.0.8.Lemma szerint ekkor

$$\lim_{m \to \infty} x_n^m = x^n\ (\lambda), n \in \omega.$$

Ha az X FK-topológiáját adó (egyik) metrikát d jelöli,akkor van olyan szigorúan növő $\{m_n\}_{m=0}^{\infty} \subset \omega$ sorozat,hogy

$$x_n - x_n^{m_n} \in \frac{1}{2}U,$$

$$d(x_n, x_n^{m_n}) \leq \frac{1}{n},$$

Akkor nyilván $d(x, x_n^{m_n}) \to 0$, hiszen $d(x_n, x) \to 0$. Hasonlóan

$$\sup_n \|x_n^{m_n}\|_\infty \leq \sup_{n,m} \|x_n^m\|_\infty \leq \|x_n\|_\infty < \infty,$$

vagyis $x_n^{m_n} \to x$ (γ), a 4.0.8.Lemma miatt $x_n^{m_n} \to x$ (λ). Ekkor valamely k-ra:

$$x - x_k^{m_k} \in \frac{1}{2}U,$$

tehát $x_k \in U$, ami ellentmond feltevésünknek. ♠

4.1.TARTALMAZÁSI TÉTELEK

4.1.0.Lemma *Az alábbi feltételek ekvivalensek:*

$$(a)\ \mathbf{c_0}\ \textit{zárt}\ (X, \mathbf{T}) - \textit{ben}$$

$$(b)\ M = \mathbf{c_0}.$$

Bizonyítás: $(a) \to (b)$ Definíció szerint $W \subset \bar{\phi}$ (X, $\mathbf{T}$)-ben, így $W \subset \mathbf{c_0}$, mert $\mathbf{c_0}$ zárt. Az ellenkező irányú tartalmazás a 4.0.2.Állítás. Innen (b) igaz. (Sőt, $W = \mathbf{c_0}$.)

$(b) \to (a)$ Ekkor $\tau(M, \mathbf{l_1}) = \tau(\mathbf{c_0}, \mathbf{l_1})$, ami a normatopológia $\mathbf{c_0}$-on. A 3.0.3.Következmény szerint $\mathbf{T}$ megszorítása gyengébb, mint ez a normatopológia, és pontosan akkor egyenlőek, ha $\mathbf{c_0}$ zárt $(X, \mathbf{T})$-ben. Tegyük fel, hogy $\mathbf{T}|\mathbf{c_0} < \|\cdot\|_\infty$. Akkor létezik olyan sorozat, $u_n \in \mathbf{c_0}, n \in \omega$, hogy $u_n \to 0$ $(\mathbf{T})$ de $\|u_n\| = 1$ minden n-re. Innen $u_n \to 0$ (γ). Azonban a 4.0.13.Tétel szerint a γ-konvergencia $M = \mathbf{c_0}$-on ugyanaz, mint $(\tau(M, \mathbf{l_1}))$, vagyis a normakonvergencia. Ez ellentmondás.♠

Mostantól nemcsak az X rögzített FK-térrel dolgozunk, ezért ismét kiírjuk az M, W halmazok alsó indexeit (ld. a 4.0.0.Definíciót).

4.1.1.Lemma *Ha E, F FK-terek, E zárt $E + F$-ben, ahol az összeget (3.1.0) szerint topologizáltuk, akkor $E \cap F$ zárt F-ben.*

Bizonyítás:A (3.1.0) igazolása során kiderült, hogy az $i : F \to E + F$ beágyazás folytonos. Jelölje $\overline{E \cap F}^F$ az $E \cap F$ F-beli lezárását. Akkor

$$\overline{E \cap F}^F \subset \overline{E \cap F}^{E+F} \cap F \subset E \cap F,$$

amiből a lemma állítása adódik. ♠

4.1.2.Tétel(Meyer-König—Zeller) *Ha X egy FK-tér és $\mathbf{c_0}\cap X$ nem zárt X-ben, akkor X tartalmaz korlátos divergens sorozatot.*

Bizonyítás: Az előző lemma szerint $\mathbf{c_0}$ nem zárt $\mathbf{c_0}+X$-ben. Akkor a 4.1.0.Lemmából adódik, hogy $\mathbf{c_0}$ valódi részhalmaza $W_{c_0+X}\cap \mathbf{l}_\infty$-nek. Ha belátjuk, hogy M nem lehet $\mathbf{c}$, akkor készen vagyunk, hisz $\mathbf{c_0}$ 1-kodimenziós $\mathbf{c}$-ben. Ez viszont éppen a 4.0.12.Állítás. ♠

4.1.3.Következmény *Ha X egy konzervatív FK-tér és $\mathbf{c}$ nem zárt X-ben, akkor X tartalmaz korlátos divergens sorozatot.*

Bizonyítás: $\mathbf{c_0}$ sem zárt X-ben, hiszen egy zárt és egy véges dimenziós altér összege zárt, s így $\mathbf{c}$ is zárt lenne. Így az előző tételből következik állításunk. ♠

(3.2.5) figyelembevételével kiderül,hogy egy konull FK-térben $\mathbf{c}$ nem lehet zárt. Ezért egy konull mátrix szummáz korlátos divergens sorozatot, igazoltuk (1.3.6)-ot. (3.2.9) szerint akkor szummáz nemkorlátos sorozatot is, amit már (3.2.6)-ban bizonyítottunk, méghozzá erősebb formában.

Sok más Meyer-König–Zeller-típusú eredmény létezik. Itt illusztrációként bemutatunk néhányat.

4.1.4.Tétel *Legyen X egy FK-tér.Akkor*

(1) $X\cap \mathbf{l}_\infty\subset \mathbf{c_0}$ *esetén* $X\cap\mathbf{c_0}$ *zárt* X$-$*ben,*

(2) $X\cap \mathbf{c_0}\subset \mathbf{bv_0}$ *esetén* $X\cap\mathbf{bv_0}$ *zárt* X$-$*ben,*

(3) $X\cap \mathbf{cs}\subset \mathbf{l_1}$ *esetén* $X\cap\mathbf{l_1}$ *zárt* X$-$*ben,*

(4) $1\le p<q<\infty$ *és* $X\cap \mathbf{l_q}\subset \mathbf{l_p}$ *esetén* $X\cap\mathbf{l_p}$ *zárt* X$-$*ben.*

Bizonyítás: (1) éppen a 4.1.3.Következmény. (2), (3) és (4) közös általánosítása megtalálható [Sn1]-ben. ♠

4.1.5.Tétel *Legyen $(X,\mathbf{T})$ egy FK-tér mely tartalmazza $\mathbf{c_0}$-t. Legyen $(Y,\mathbf{S})$ egy szeparábilis FK-tér, melyre $W_X\cap \mathbf{l}_\infty\subset Y$.Akkor $W_X\cap\mathbf{l}_\infty\subset W_Y$.*

Bizonyítás: Tekintsük az $i:M_X\to Y$ beágyazó leképezést. Ez nyilván folytonos, hogyha mindkét vektorteret τ_s megszorításával látjuk el. Akkor i szükségképpen $\tau_s|M_X\to\tau_s|Y$ zárt gráfú (0.1.10). Állítjuk, hogy i zárt gráfú $\nu:=\tau(M_X,\mathbf{l_1})\to\mathbf{S}$, mivel ezek a topológiák erősebbek τ_s-nél. Ez $\mathbf{S}$-re igaz, mert Y egy FK-tér, másrészt (0.1.15) szerint $\tau_s=\sigma(\mathbf{s},\phi)$, ennek M_X-re vett leszűkítése durvább, mint ν, mert $\phi\subset\mathbf{l_1}$ és egy Mackey topológia mindig erősebb, mint az ugyanazon duálishoz tartozó gyenge topológia. A 4.0.9.Tétel szerint (M_X,ν) duálisa gyenge-$*$ szekvenciálisan teljes. (2.3.4) figyelembevételével $(Y,\mathbf{S})$ egészen teljes. Emiatt Kalton zárt gráf tétele (2.3.3) alkalmazható; tehát i folytonos ezen topológiákra nézve. (2.0.6) szerint i gyengén folytonos. Vagyis ha $P_n(x)\to x$ $(\sigma(M_X,\mathbf{l_1}))$ M_X-ben, akkor $P_n(x)\to x$ $(\sigma(Y,Y'))$. W_Y definícióját szem előtt tartva készen leszünk, ha belátjuk, hogy $P_n(x)\to x$ $(\sigma(M_X,\mathbf{l_1}))$ minden $x\in M_X$ esetén. Vagyis igazolandó, hogy bármely $l\in\mathbf{l_1}$-re:

$$l(x-P_n(x))=\sum_{i=n+1}^{\infty} l^i x^i\to 0, n\to\infty.$$

Ez pedig magától értetődik, hiszen x korlátos sorozat.♠

4.1.6.Következmény *Legyen X egy konull FK-tér, Y egy szeparábilis FK-tér. Ekkor $X \cap \mathbf{l}_\infty \subset Y$ esetén Y konull.*

Bizonyítás: $P_n(e) \to e$ $(\sigma(X, X'))$, vagyis $e \in W_X$. Az előző tételből $e \in W_Y$, azaz $P_n(e) \to e$ $(\sigma(Y, Y'))$. ♠

4.1.7.Következmény *Ha Y egy szeparábilis FK-tér, $\mathbf{l}_\infty \subset Y$, akkor Y konull.*

Bizonyítás: Az előző Következmény feltételei teljesülnek pl.$X := \mathbf{s}$ választással. ♠

(3.2.3) és (3.0.12) figyelembevételével a fenti Következmények általánosítják (1.3.1)-et és (1.3.7)-et.

4.2.A MAZUR-ORLICZ TÉTEL

4.2.0.Lemma *Legyen A egy mátrix,melyre $\mathbf{c_0} \subset \mathbf{c_A}$, $x \in \mathbf{c_A} \cap \mathbf{l}_\infty$. $x \in W_{c_A}$ pontosan akkor,ha $lim_A x = \sum_i a^i x^i$,ahol a^i az A i-edik oszlopának limesze.*

Bizonyítás: Az (1.0.3) bizonyítása szerint az oszlopok valóban konvergensek. Legyen $x \in W = W_{\mathbf{c_A}}$, és alkalmazzuk W definícióját a lim_A funkcionálra, mely (3.0.14) szerint eleme $\mathbf{c}'_\mathbf{A}$-nak. Azt kapjuk, hogy

$$lim_A x = \sum_k x^k lim_A e_k = \sum_k x^k a^k,$$

ahogyan akartuk. Megfordítva,ha

$$(*)\ \sum_k x^k a^k = lim_A x,$$

akkor bármely $f \in \mathbf{c}'_\mathbf{A}$ esetén (3.0.14) szerint

$$f(x) = \chi \cdot lim_A x + \sum_k g^k x^k$$

valamely $g \in \mathbf{s}$-re. $(*)$ figyelembevételével:

$$f(x) = \chi \cdot \sum_k x^k a^k + \sum_k x^k g^k = \sum_k x^k (\chi a^k + g^k) == \sum_k x^k f(e_k),$$

ami azt jelenti, hogy $x \in W$. ♠

4.2.1.Tétel *Legyenek $A, B \in [\mathbf{c_0}, \mathbf{c}]$ mátrixok úgy, hogy $M_{c_A} \subset \mathbf{c_B}$. Akkor igazak az alábbiak:*

$$(i)\ lim_B\ \sigma := \sigma(M_{c_A}, \mathbf{l_1}) - folytonos\ funkcionál.$$

$$(ii)\ lim_B x = \sum_i r^i x^i, x \in M_{c_A},$$

ahol r^i a B i-edik oszlopának limesze.

$$(iii)\ M_{c_A} \subset W_{c_B}.$$

Bizonyítás: (i) Legyen r_i a B i-edik sora. (4.0.2) szerint $\mathbf{c_0} \subset \mathbf{c_B}$, akkor a Landau-Toeplitz (0.1.0) tétel szerint $r_i \in \mathbf{l_1}$. Mivel $M_{c_A} \subset \mathbf{c_B}$, ezért $r_i, i \in \omega$ $\sigma(\mathbf{l_1}, M_{c_A})$-Cauchy, és (4.0.11) szerint $r_i \to r$ $(\sigma(\mathbf{l_1}, M_{c_A}))$ valamely $r \in \mathbf{l_1}$-re. Ekkor

$$lim_B x = \lim_{i\to\infty} r_i(x) = r(x),$$

ami lim_B folytonosságát igazolja,hisz $r \in \mathbf{l_1}$.

(ii) Az, hogy az r_i-k léteznek, (i) bizonyításából látszik, sőt, az is adódik, hogy $lim_B x_k = \sum_i r^i x^i$, hiszen $\mathbf{l_1}$ elemei éppen így hatnak M_{c_A}-n.

(iii) Ez (4.2.0) és (ii) közvetlen folyománya. ♠

Most belátjuk a Mazur-Orlicz tétel egy erős alakját, (1.2.2) általánosítását.

4.2.2.Tétel *Ha A, B koreguláris mátrixok, $lim_A|\mathbf{c} = lim_B|\mathbf{c}$, valamint $\mathbf{c_A} \cap \mathbf{l_\infty} \subset \mathbf{c_B}$, akkor A, B korlátosan konzisztensek.*

Bizonyítás: Legyen $z \in \mathbf{c_A} \cap \mathbf{l_\infty}$. Először tekintsük azt az esetet, amikor $lim_A z = \sum_k z^k a^k$, ahol a^k az A k-adik oszlopának limesze,mely nyilván létezik, hisz A konzervatív. Ekkor $z \in W_{c_A}$ (4.2.0) szerint. A (4.2.1) (iii) pontját felhasználva ismét csak (4.2.0)-ból adódik,hogy

$$lim_B z = \sum_k z^k b^k.$$

Azonban $a^k = lim_A e_k = lim_B e_k = b^k$ a feltevések szerint,mert $e_k \in \mathbf{c}, k \in \omega$.

Általános z esetén legyen

$$t(z) := \frac{lim_A z - \sum_k a^k z^k}{lim_A e - \sum_k a^k e^k},$$

ahol persze $e^k = 1, k \in \omega$, mert e minden koordinátája 1. Ez utóbbi kifejezés értelmes, mert a nevezőben lévő szám éppen az a χ ami (1.0.3)-ban fellép, s a koregularitás az (1.0.4) definíció szerint éppen azt jelenti, hogy $\chi \neq 0$! Legyen $y := z - t(z)e$, erre persze

$$lim_A y = \sum_k a^k y^k,$$

tehát az előző esetből $lim_A y = lim_B y$. Mivel a feltevések szerint A, B konzisztensek $\mathbf{c}$-n és $e \in \mathbf{c}$, ezért $lim_A z = lim_B z$, vagyis a tételt teljesen bebizonyítottuk. ♠

A 4.2.2.Tétel bizonyításban nyilvánvalóan használhattuk volna (4.2.1) (iii) pontja helyett az erősebb 4.1.5.Tételt, a fenti módon azonban elkerülhető a Kalton-tétel használata.

5.További eredmények a funkcionálanalízisből

5.0.NÉHÁNY TOPOLÓGIAI MEGFONTOLÁS

5.0.0.Lemma *Megszámlálható sok szeparábilis topologikus tér topologikus szorzata szeparábilis. Egy szeparábilis metrikus tér bármely altere szeparábilis.*

Bizonyítás: Lásd [Dug]-ot és [Be1] 199.oldalát.♠

5.0.1.Lemma *Ha $X_n, n \in \omega$ LKT-k olyan sorozata, hogy minden i-re $(X_i', \beta(X_i', X))$ szeparábilis, akkor a $Z := \times_i X_i$ topologikus szorzatra $(Z', \beta(Z', Z))$ szeparábilis.*

Bizonyítás: Megtalálható [Be1] 200. oldalán. ♠

5.0.2.Lemma *Legyen X olyan LKT, hogy $(X', \beta(X', X))$ szeparábilis. Akkor bármely $Y \subset X$ alterére $(Y', \beta(Y', Y))$ szeparábilis.*

Bizonyítás: Legyen G egy megszámlálható $\beta(X', X)$-sűrű halmaz X'-ben. Ha $f \in Y'$, akkor legyen $\bar{f}$ a (0.1.17) szerint létező (egyik) kiterjesztése X-re. Akkor valamely $\{g_\delta, \delta \in \Delta\} \subset G$ általánosított sorozatra $g_\delta \to \bar{f}$ $(\beta(X', X))$. Vagyis bármely $H \subset X$ $\sigma(X, X')$-korlátos halmazon $g_\delta|H \to \bar{f}|H$ egyenletesen. Egy $H \subset Y$ halmaz azonban pontosan akkor $\sigma(X, X')$-korlátos, ha $\sigma(Y, Y')$-korlátos, megint csak (0.1.17) miatt! Tehát $g_\delta|Y \to \bar{f}$ $(\beta(Y', Y))$, vagyis a $G_Y := \{g|Y : g \in G\}$ halmaz egy megszámlálható $\beta(Y', Y)$-sűrű halmaz Y'-ben.♠

5.0.3.Tétel *Bármely A mátrixra $\mathbf{c_A}$ egy szeparábilis FK-tér, melyre $\mathbf{c'_A}$ szeparábilis az erős topológiában.*

Bizonyításvázlat: (3.0.12)-t és előzményeit figyelmesen végigkövetve látható, hogy $\mathbf{c_A}$ FK-topológiáját az alábbi félnormák családja generálja:

$$x \to |x^i|, i \in \omega,$$

$$x \to \sup_n |\sum_{j=0}^{n} A(i,j)x^j|, i \in \omega,$$

$$x \to \|Ax\|_\infty.$$

Mivel $Ax \in \mathbf{c}, x \in \mathbf{c_A}$, ezért az

$$x \to (x, \{\sum_{j=0}^{n} A(0,j)x^j\}_{n=0}^{\infty}, \{\sum_{j=0}^{n} A(1,j)x^j\}_{n=0}^{\infty}, \ldots, Ax)$$

leképezés egy lineáris homeomorfizmus $\mathbf{c_A}$ és az $\mathbf{s} \times \mathbf{c}^\omega \times \mathbf{c}$ topologikus szorzat egy altere között. Így az (5.0.0),(5.0.1) és (5.0.2) eredményekből következik az állítás.♠

5.1.ÚJABB TARTALMAZÁSI TÉTELEK

5.1.0.Lemma *Legyenek $c_0, ..., c_n \in \mathbf{C}$; akkor*

$$\sup_{J \in \mathcal{N}} |\sum_{i \in J} c_i| \geq \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{n} |c_i|,$$

ahol $\mathcal{N}$ jelöli a $\{0,1,2,...,n\}$ halmaz összes részhalmazainak rendszerét.

Bizonyítás: Lásd [Wi1] 235.oldalát.♠

Emlékeztetünk arra, hogy a véges értékkészletű sorozatok vektorterét $\mathbf{m}$-el jelöljük.

5.1.1.Tétel *Ha X egy szeparábilis FK-tér, melyre $\phi \subset X$ és $\mathbf{m} \subset X + \mathbf{c_0}$, akkor $\mathbf{l}_\infty \subset X$.*

Bizonyítás: A feltevés szerint $\mathbf{m} \subset (X \cap \mathbf{l}_\infty) + \mathbf{c_0}$, innen $X \cap \mathbf{l}_\infty$ sűrű $\mathbf{l}_\infty$-ben a normatopológia szerint. Most megmutatjuk, hogy $\sigma(\mathbf{l_1}, X \cap \mathbf{l}_\infty)$ és $\|\cdot\|_1$ konvergens sorozatai ugyanazok. Az utóbbi topológia erősebb, így elég megmutatni, hogy az

$$(*)\ a_n \to 0\ \sigma(\mathbf{l_1}, X \cap \mathbf{l}_\infty), \inf_n \|a_n\|_1 = 1$$

indirekt föltevés ellentmondásra vezet. Rekurzívan definiáljunk $m^k, n^k \in \omega, k \in \omega$ sorozatokat úgy, hogy $m_k < n_k < m_{k+1}, 1 \leq k$ teljesüljön. Legyen $m_0 = n_0 = 0$ és tegyük fel, hogy $n_0, n_1, ..., n_{k-1}, m_0, m_1, ..., m_k$-t már megadtuk, legyen most n_k olyan, hogy

$$(**)\ \sum_{i=1}^{m_k} |a^i_{n_k}| < \frac{1}{k},$$

ilyen létezik, hiszen legyen G azon sorozatok halmaza, melyeknek első m_k koordinátája egységnyi abszolút értékű komplex szám, többi koordinátája 0. $G \subset \phi \subset X \cap \mathbf{l}_\infty$ nyilván igaz, így $(*)$-ból, és abból, ahogyan $G \subset \mathbf{l}_\infty$ elemei hatnak $\mathbf{l_1}$-en, látható, hogy elég nagy n_k-ra $(**)$ tényleg igaz lesz. Ha $k < 19$, akkor legyen $m_{k+1} > n_k$ tetszőleges, különben válasszunk olyan $m_{k+1} > n_k$-t, hogy

$$\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} |a^i_{n_k}| > \frac{18}{19} \|a_{n_k}\|_1$$

fönnáljon, ez $(*), (**)$ miatt elérhető. Vegyük észre, hogy a konstrukciót minden k-ra elvégezve, $19 \leq k$ esetén

$$\sum_{i=m_{k+1}+1}^{\infty} |a^i_{n_k}| < \frac{1}{19} \|a_{n_k}\|_1.$$

Most definiálunk egy $x \in \mathbf{m}$ sorozatot. Ha $m_k < i \leq m_{k+1}$, akkor válasszuk meg x^i-t úgy, hogy

$$\frac{1}{6} \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} |a^i_{n_k}| \leq |\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} x^i a^i_{n_k}|$$

teljesüljön, ez az 5.1.0.Lemma miatt lehetséges. $x = y + z$ legyen egy olyan felbontás, melyre $y \in X \cap \mathbf{l}_\infty, z \in \mathbf{c_0}$, k pedig olyan, hogy $|z^j| < \frac{1}{19}, m_k \leq j$. Akkor $k > 19$ esetén

$$|y(a_{n_k})| = |\sum_i y^i a^i_{n_k}| \geq |\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} x^i a^i_{n_k}| - \sum_{i=0}^{m_k} |x^i a^i_{n_k}| - \sum_{i=m_{k+1}+1}^{\infty} |x^i a^i_{n_k}| -$$

$$-\sum_{i=0}^{m_k}|z^i a^i_{n_k}| - \sum_{m_k+1}^{\infty}|z^i a^i_{n_k}| \geq \frac{1}{6}\cdot\frac{18}{19}\|a_{n_k}\|_1 - \frac{1}{k} - \frac{\|a_{n_k}\|_1}{19} - \frac{\|z\|_\infty}{k} - \frac{\|a_{n_k}\|_1}{19},$$

vagyis

$$\liminf_{k\to\infty}|y(a_{n_k})| \geq \frac{1}{19} > 0,$$

azaz $(*)$-al ellentmondásra jutottunk. Most (0.1.14.) és Garling (2.2.0) tétele miatt a $\sigma(\mathbf{l_1}, X\cap\mathbf{l}_\infty)$ és az $\|\cdot\|_1$ topológiák Cauchy-sorozatai és kompakt halamazai ugyanazok. Ebből σ szekvenciálisan teljes. Ismeretes, hogy egy duális pár esetében a Mackey-topológia egy környezetbázisát a duális tér abszolút konvex és gyenge-$*$ kompakt halmazainak polárisaként állíthatjuk elő. Tudjuk azt is, hogy $\sigma(\mathbf{l_1}, \mathbf{l}_\infty)$-ben és $\|\cdot\|_1$-ben a konvex halmazok lezárása ugyanaz (0.1.21)-ből, így

$$\tau(X\cap\mathbf{l}_\infty, \mathbf{l_1}) = \tau(\mathbf{l}_\infty, \mathbf{l_1})|X\cap\mathbf{l}_\infty.$$

A már ismert érvelés szerint az

$$i:(X\cap\mathbf{l}_\infty, \tau(X\cap\mathbf{l}_\infty, \mathbf{l_1}))\to(X,\mathbf{T})$$

beágyazó leképezés zárt gráfú, így Kalton (2.3.3) tételéből folytonos. Mivel $\tau(\mathbf{l}_\infty, \mathbf{l_1})$ éppen $\tau(X\cap\mathbf{l}_\infty, \mathbf{l_1})$ teljessé tétele, ezért i kiterjed $\mathbf{l}_\infty$-re. jelölje ezt a kiterjesztést $\bar{i}$. Ha ez még mindig az identitásleképezés, akkor készen leszünk, hiszen ekkor $\mathbf{l}_\infty\subset X$. Vegyük észre, hogy $\bar{i}$ $\mathbf{s}$ bizonyos alterei közti lineáris operátor. Legyen $v\in\mathbf{l}_\infty, v_n\in X\cap\mathbf{l}_\infty, n\in\omega$ és $v_n\to v$ $(\|\cdot\|_\infty)$. Akkor $v_n\to v$ (τ_s). Másrészt $\bar{i}(v_n)\to\bar{i}(v)$ $(\mathbf{T})$, s mivel $\mathbf{T}$ egy FK-topológia, $\bar{i}(v_n)\to\bar{i}(v)$ (τ_s). Mivel τ_s Hausdorff, $\bar{i}(v)=v$, ezt kellett bizonyítanunk.♠

5.1.2.Tétel *Legyen Y egy szeparábilis FK-tér, melyre $\phi\subset Y$. Tegyük fel, hogy $Y\cap\mathbf{l}_\infty$ sűrű $(\mathbf{l}_\infty, \|\cdot\|_\infty)$-ben. Akkor $\mathbf{l}_\infty\subset Y$.*

Bizonyítás: Legyen $(X,\mathbf{T}) := Y+\mathbf{c_0}$. A 3.1.1.Következmény szerint ez egy szeparábilis FK-tér, melyre $X\cap\mathbf{l}_\infty$ sűrű $\mathbf{l}_\infty$-ben. Megmutatjuk, hogy $\sigma(\mathbf{l_1}, X\cap\mathbf{l}_\infty)$ és $\|\cdot\|_1$ konvergens sorozatai ugyanazok. Ha ez nem így volna, létezne $\{a_n\}_{n=0}^\infty\subset\mathbf{l_1}$ sorozat, melyre $a_n\to 0$ $(\sigma(\mathbf{l_1}, X\cap\mathbf{l}_\infty))$, de $\|a_n\|\geq 1, n\in\omega$. Nyilván $a_n\to 0$ $(\sigma(\mathbf{l_1}, \mathbf{c_0}))$, akkor $a_n, n\in\omega$ $\sigma(\mathbf{l_1}, \mathbf{c_0})$-korlátos, de akkor $\|\cdot\|_1$-korlátos is (4.0.7) érvelése szerint, $F:=\sup_n\|a_n\|$. Legyen $x\in\mathbf{l}_\infty$ tetszőleges.

$$\sum_{i=N}^{K}a^i_n x^i = \sum_{i=N}^{K}a^i_n(x^i-u^i) + \sum_{i=N}^{K}a^i_n u^i < (\frac{\epsilon}{2F}\cdot F) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

igaz akkor, ha $u\in X\cap\mathbf{l}_\infty$ olyan, hogy $\|u-x\|_\infty < \frac{\epsilon}{2F}$, és $N<K$ elég nagyok. Innen adódik, hogy a_n egy $\sigma(\mathbf{l_1}, \mathbf{l}_\infty)$-Cauchy sorozat, így (2.2.1) szerint $\|\cdot\|_1$-Cauchy, vagyis $a_n\to a$ $(\|\cdot\|_1)$ valamely $a\in\mathbf{l_1}$-re. Akkor $a_n\to a$ $(\sigma(\mathbf{l_1}, X\cap\mathbf{l}_\infty))$, mert ez egy gyengébb topológia. Azonban $\phi\subset X$ miatt ez utóbbi topológia szeparált, tehát $a=0$, ami ellentmond feltevéseinknek. Az előző tétel bizonyításához hasonlóan (2.2.0) Tétel felhasználásával levonhatjuk a következtetést, hogy

$$\tau(X\cap\mathbf{l}_\infty, \mathbf{l_1}) = \tau(\mathbf{l}_\infty, \mathbf{l_1})|X\cap\mathbf{l}_\infty,$$

valamint az $\mathbf{l_1}$ normatopológiájának teljessége miatt $\sigma(\mathbf{l_1}, X \cap \mathbf{l}_\infty)$ szekvenciálisan teljes. Az

$$i : X \cap \mathbf{l}_\infty \to X$$

beágyazó leképezés a már többször használt érveléssel Kalton (2.3.3) zárt gráf tétele szerint $\tau(X \cap \mathbf{l}_\infty, \mathbf{l_1}) \to \mathbf{T}$- folytonos. Ha most $x \in \mathbf{l}_\infty$, akkor elemi számolással

$$P_n(x) \to x \ (\tau(\mathbf{l}_\infty, \mathbf{l_1})),$$

így $P_n(x)$ $\tau(X \cap \mathbf{l}_\infty, \mathbf{l_1})$-Cauchy, innen $i(P_n(x)) = P_n(x)$ $\mathbf{T}$-Cauchy X-ben, X teljes, így e sorozat tart valamihez, de ez nem lehet más, mint x. Azaz $x \in X$. Innen

$$\mathbf{l}_\infty \subset X = Y + \mathbf{c_0},$$

tehát az 5.1.1.Tételből $\mathbf{l}_\infty \subset Y$. ♠

5.1.3.Következmény *Ha X egy szeparábilis FK-tér, melyre $\mathbf{m} \subset X$, akkor $\mathbf{l}_\infty \subset X$.*

Bizonyítás: Azt kell csak észrevenni, hogy $\mathbf{m}$ sűrű $(\mathbf{l}_\infty, \|\cdot\|_\infty)$-ben.♠

Innen persze már következik (1.3.0) állítása.

5.2.HORDÓ TEREK

Ebben a részben a hordó-terek elméletének felhasználásával tetszőleges X FK-térre általánosítjuk (5.1.3)-at.

5.2.0.Tétel(G.Bennett és N.J.Kalton) *Legyen (Y, p) egy Frèchet-tér, S egy sűrű altere. Akkor az alábbiak ekvivalensek:*

(a) S hordó-tér a relatív topológiával.

(b) Bármely $X \subset Y$, $(X, \mathbf{T})$ lokálisan konvex Frèchet-térre, melyre $S \subset X$ és $\mathbf{T} \geq p|X$ igazak; $X = Y$ teljesül.

Bizonyítás: Megtalálható [Wi1] 253.oldalán.♠

5.2.1.Tétel *Ha Y egy FK-tér, S pedig sűrű altere, akkor S pontosan akkor hordó-tér, ha bármely X FK-térre $S \subset X$-ből következik $Y \subset X$.*

Bizonyítás: Elegendőség: Ha a feltétel teljesül, akkor speciálisan (5.2.0) (b) része is igaz, tehát (a) igaz, vagyis S hordó-tér.

Szükségesség: (3.0.9) szerint $X \cap Y$ egy FK-tér, (3.0.3) szerint topológiája erősebb, mint Y relatív topológiája. Ha S hordó-tér, akkor (5.2.0)-ban (a) teljesül, így (b) is, az előző észrevételek szerint tehát $Y \subset X \cap Y$. Tehát még inkább $Y \subset X$. ♠

5.2.3.Tétel *Ha egy X FK-tér tartalmazza $\mathbf{m}$-et, akkor tartalmazza $\mathbf{l}_\infty$-t.*

Bizonyítás: Tekintsük $\mathbf{m} \subset \mathbf{l}_\infty$-t a relatív topológiával. Ez hordó-tér (lásd. [Wi1] 249.oldalát). Az 5.2.1.Tételből adódik állításunk.♠

Érdekes, hogy $(\mathbf{m}, \|\cdot\|_\infty)$ olyan hordó- tér,mely önmagában első kategóriájú! Valóban, $\mathbf{m}$ a véges sok értéket felvevő sorozatok tere, így $\mathbf{m} = \cup_{i \geq 1} H_i$, ahol H_i a pontosan i értéket felvevő sorozatok halmaza. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a H_i-k zártak, és $int(H_i) = \emptyset, i \in \omega$.

6.Negatív eredmények

6.0.MI LEHET $\mathbf{c_A}$ *?*

Az eddigi vizsgálódások nagyrészt a mátrixok konvergenciatartományaira irányultak. Gondosan kerültük azonban azt az alapvető kérdést, hogy ténylegesen mi lehet $\mathbf{c_A}$?

$\mathbf{s}$ mely alterei állnak elő konvergenciatartományként? Egy FK-térre nézve mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy ő $\mathbf{c_A}$ legyen valamely A mátrixra? Noha ezek az elmélet talán legizgalmasabb kérdései, a válaszok nem ismeretesek. Ebben a részben ezért arra mutatunk példát, mi *nem* lehet $\mathbf{c_A}$.

6.0.0.Megjegyzés $\mathbf{bv}$ (1.1.1) szerint izometrikusan izomorf $\mathbf{l_1}$-el, így duális tere $\mathbf{l_\infty}$-vel izometrikusan izomorf. Az, hogy BK-tér, a következő módon igazolható: (3.1.0) alapján elég belátni, hogy $\mathbf{bv_0}$ egy BK-tér, hiszen $\mathbf{bv} = \mathbf{bv_0} + \mathbf{C}\cdot e$. $x \in \mathbf{bv_0}$ esetén

$$x^n = \sum_{k=n}^{m}(x^k - x^{k+1}) + x^{m+1},$$

az egyenlet jobb oldala $\sum_{k=n}^{\infty}(x^k - x^{k+1})$-hez tart, ezért az $|x^n| \leq \|x\|_{bv}$ becslés érvényes. Innen a koordinátafüggvények folytonosak, ami (0.1.15) szerint biztosítja, hogy

$$\|\cdot\|_{bv}|\mathbf{bv_0} \geq \tau_s.$$

6.0.1.Tétel *Nem létezik olyan A mátrix, melyre* $\mathbf{l_1}$ *vagy* $\mathbf{bv}$ *zárt altere lenne* $\mathbf{c_A}$*-nak.*

Bizonyítás: Ezen normált terek duálisa $\mathbf{l_\infty}$-vel azonosítható, mely nem szeparábilis a normatopológiában. Márpedig egy normált tér duális terén a normatopológia éppen az erős topológia (0.1.23). Ha $\mathbf{bv}$ vagy $\mathbf{l_1}$ valamely A-ra $\mathbf{c_A}$ zárt altere, akkor a relatív topológia (3.0.3) szerint megegyezik e terek eredeti BK-topológiájával. (5.0.2) és (5.0.3) szerint tehát nincs ilyen A mátrix. ♠

6.0.2.Tétel *Sem* $\mathbf{l_\infty}$*, sem annak sűrű alterei nem lehetnek konvergenciatartományok.*

Bizonyítás: (5.0.3) szerint bármely mátrix konvergenciatartománya szeparábilis FK-tér. Ha $D \subset \mathbf{l_\infty}$ sűrű altérre és valamely A mátrixra $D = \mathbf{c_A}$, akkor $D \neq \mathbf{l_\infty}$, hiszen a korlátos sorozatok tere egy BK-tér (3.0.4), mely nem szeparábilis, az FK-topológia pedig (3.0.3) szerint egyértelmű. Ugyancsak (3.0.3) szerint D FK-topológiája erősebb, mint a $\mathbf{l_\infty}$-től örökölt altértopológia, tehát ha D szeparábilis lenne, akkor $\mathbf{l_\infty}$ is szeparábilis lenne, ami nem lehet.♠

6.0.3.Megjegyzés Az, hogy $\mathbf{l_\infty}$ ϕ-t tartalmazó valódi sűrű alterei nem lehetnek konvergenciatartományok, rögtön adódik (5.1.2)-ből.

6.0.4.Tétel $1 \leq p \leq \infty$*-re* $\mathbf{l_p}$ *nem lehet konvergenciatartomány zárt altere.*

Bizonyítás: Megtalálható [Be2]-ben.♠

6.1.INKONZISZTENCIA

Ebben a rövid részben példát mutatunk arra, hogy a Mazur-Orlicz tétel (4.2.2) nem igaz konull mátrixokra.

6.1.0.Példa Legyen $p_k := 2^{-k}, k \in \omega$. Definiáljuk a P mátrixot a következő módon:

$$P(0,\cdot) := (p_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$
$$P(1,\cdot) := (1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$
$$P(2,\cdot) := (1, -1, p_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$
$$P(3,\cdot) := (1, -1, p_3, p_4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$
$$P(4,\cdot) := (p_1, p_2, p_3, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$
$$P(5,\cdot) := (p_1, p_2, p_3, 1, -1, p_6, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$
$$P(6,\cdot) := (p_1, p_2, p_3, 1, -1, p_6, p_7, 0, 0, 0, \ldots)$$
$$P(7,\cdot) := (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, 1, -1, 0, 0, \ldots)$$

és így tovább. Legyen Q az a mátrix, melynek minden sora a $p_k, k \in \omega$ sorozat. Azonnal látszik (1.0.3)-ból, hogy ezek konzervatív mátrixok. Ha $x \in \mathbf{c}$, akkor

$$|(Px)^k - (Qx)^k| \leq |x^{k-2} - x^{k-1}| + \sum_{i=k-2}^{\infty} |x^i p_i| \to 0, k \to \infty,$$

azaz $lim_Q|\mathbf{c} = lim_P|\mathbf{c}$. Q definíciója folytán $\mathbf{c_Q} = \mathbf{l}_\infty$, akkor nyilván $\mathbf{c_P} \cap \mathbf{l}_\infty \subset \mathbf{c_Q}$. Legyen most

$$x := (1, -1, 0, 1, -1, 0, \ldots).$$

Persze $x \in \mathbf{l}_\infty$, és könnyen látható, hogy $lim_P x = 2 + \sum_i p_i x_i$. Viszont $lim_Q x = \sum_i p_i x_i$, és a két mennyiség szemmel láthatóan különbözik.

7.Alkalmazások

Az FK-terek elmélete a végtelen mátrixokkal kapcsolatos szummációs problémák kezelésére fejlődött ki. A kifejlesztett módszerek azonban a matematika számos más területén is alkalmazhatónak bizonyultak. Dolgozatunk végén ezekből az alkalmazásokból nyújtunk ízelítőt.

7.0.HARDY TEREK

Az e részben igazolás nélkül említett tételek részletes hivatkozásai megtalálhatók [Be2]-ben és [BK2]-ben.

7.0.0.Definíció Legyen $0 < p < \infty$. Jelölje H a komplex nyílt egységkörön analitikus függvények halmazát. Ezek után definiáljuk az $F_p : H \to \bar{\mathbf{R}}$ függvényeket a következő módon:

$$F_p(f) := \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta, f \in H.$$

Legyen most

$$H_p := \{f \in H | F_p(f) < \infty\}.$$

Legyen továbbá

$$H_\infty := \{f \in H | \sup_{|z|<1} |f(z)| < \infty\}.$$

A H_p halmazt a p-edik *Hardy-osztály*nak hívjuk.

Legyen $0 < p < 1$-re $\| \cdot \|_p := F_p$; $1 \leq p < \infty$-re $\| \cdot \|_p := (F_p)^{\frac{1}{p}}$; végül legyen

$$\|f\|_\infty := \sup_{|z|<1} |f(z)|,$$

ha $f \in H_\infty$.

7.0.1.Megjegyzés Ismeretes, hogy $1 \leq p \leq \infty$-re $(H_p, \| \cdot \|_p)$ Banach- tér, valamint hogy $0 < p < 1$-re $(H_p, \| \cdot \|_p)$ Frèchet- tér, melynek topológiája nem származtatható teljes normából. Definiálható viszont a

$$B_p := \{f \in H : \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{p}-2} (\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta) dr < \infty\}$$

burkoló Banach- tér (a norma éppen a definícióban szereplő mennyiség), melyre $H_p \subset B_p$ sűrű altér. (Az is igazolható, hogy az altértopológia megegyezik a H_p pszeudonormájából származtatott topológiával.)

7.0.2.Definíció Legyen $0 < p < 1$, $E \subset \mathbf{s}$. Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathbf{s}$ sorozat a *H_p(ill.B_p) multiplikátora E szerint*, hogyha minden $f(z) = \sum_i a^i z^i \in H_p(ill.B_p)$ függvény esetén az $x \cdot f := \{x^i a^i\}_{i=0}^\infty$ szorzatra $x \cdot f \in E$ teljesül.

A Hardy-tereken ($0 < p < 1$) végzett vizsgálatok arra mutattak, hogy H_p és B_p multiplikátorai mindig ugyanazok. Az FK-terek elméletének fölhasználásával G.Bennett 1973-ban igazolta a következőt:

7.0.3.Tétel *Ha E egy FK-tér, akkor $0 < p < 1$-re H_p és B_p E szerinti multiplikátorai ugyanazok.*

Bizonyításvázlat: Azonosítva B_p elemeit 0-középpontú Taylor- soruk együtthatóival, B_p-t tekinthetjük sorozattérnek. Igazolható, hogy ez egy BK-tér. Megmutatható az is, hogy H_p a B_p-től örökölt altértopológiával hordó-tér. Szintén látható, hogy $x \in \mathbf{s}$ esetén

$$E_x := \{y \in \mathbf{s} | \{x^n y^n\}_{n=0}^{\infty} \in E\}$$

halmaz FK-tér. (5.2.1) szerint ez akkor és csak akkor tartalmazza H_p-t, ha B_p-t tartalmazza.♠

7.0.4.Definíció Legyen $1 \leq p \leq \infty$. Egy $z_n \in \mathbf{C}, |z_n| < 1, n \in \omega$ komplex sorozatot *p-interpolálónak* mondunk, ha minden $x \in \mathbf{l}_\infty$ esetén

$$(*) \ \textit{létezik} \ f \in H_p, f(z_i) = x^i, i \in \omega.$$

W.K.Heyman már 1958-ban belátta, hogy z_i pontosan akkor ∞-interpoláló, ha $(*)$ teljesül a minden $x \in \mathbf{m}$-re. Kalton és Bennett 1972-ben igazolták a következőt:

7.0.5.Tétel *Legyen $1 \leq p \leq \infty$. Egy z_i sorozat pontosan akkor p-interpoláló, ha minden $x \in \mathbf{m}$-re $(*)$ teljesül.*

Bizonyításvázlat: Legyen

$$H^p(\{z_n\}) := \{x \in \mathbf{s} | \textit{van olyan } f \in H_p, \textit{hogy } f(z_n) = x^n, n \in \omega\}.$$

Belátható, hogy $H^p(\{z_n\})$ azonosítható a

$$H_p / \{f \in H_p | f(z_n) = 0, n \in \omega\}$$

faktor–Banach-térrel, és ez egy BK-tér (lásd. [Sn2]-t). Ezek után (5.2.3)-at alkalmazva látható, hogy $\mathbf{m} \subset H^p(\{z_n\})$ esetén $\mathbf{l}_\infty \subset H^p(\{z_n\})$. Ez pedig éppen a tétel állítása. ♠

Forrásmunkák

[Be1] G.Bennett: A representation theorem for summability domains;Proc. London Math. Soc. 24(1972)

[Be2] G.Bennett: Some inclusion theorems for sequence spaces;Pacific J. Math. 46(1973)

[BK1] G.Bennett, N.J.Kalton: FK spaces containing $\mathbf{c_0}$;Duke Math. J. 39(1972)

[BK2] G.Bennett, N.J.Kalton: Inclusion theorems for K-spaces;Canadian. J. Math. 25(1973)

[Cro] L.Crone: A characterization of matrix operators on $\mathbf{l_2}$;Math.Zeit. 128(1972)

[Csá] Császár Á.: Valós analízis II. ;Tankönyvkiadó(1989)

[Cz1] Czách L.: Funkcionálanalízis(Jegyzet)

[Cz2] Czách L.: Szummációs módszerek(Kézirat)

[Cz3] Czách L.: Topologikus vektorterek(Jegyzet)

[Dug] J.Dugundji: Topology;Allyn and Bacon,Boston(1966)

[Gar] D.J.H.Garling: On topological sequence spaces ;Proc. Camb. Phil. Soc. 63(1967)

[GW] D.J.H.Garling, A.Wilansky: On a summability theorem of Berg, Crawford and Whitley;Proc. Camb. Phil. Soc. 71(1972)

[Kur] C.Kuratowski: Topologie, Volume I;Warszawa(1958)

[Mad] I.Maddox: Infinite Matrices of Operators;Springer-Verlag(1980)

[RR] A.P.Robertson, W.J.Robertson: Topological vector spaces;Cambr. Univ. Press(1964)

[Sch] Schaeffer: Topological vector spaces;Springer-Verlag(1971)

[Sn1] A.K.Snyder: An embedding property of sequence spaces...;Indiana Univ. Math. J. 35,number 3(1986)

[Sn2] A.K.Snyder: Sequence spaces and interpolation problems for analytic functions;Stud. Math. 39(1971)

[Wi1] A.Wilansky: Modern methods for topological vector spaces;McGraw-Hill(1978)

[Wi2] A.Wilansky: Summability through functional analysis;North-Holland(1984)

[Wiw] A.Wiweger: A topologization of Saks spaces;Bull. Acad. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 5(1957)

[Zr] Zrínyi Miklós: Összes versei;Unikornis kiadó(1995)