Mérték, kategória és szigma-porozitás

SIKOLYA ESZTER

Diplomamunka

Témavezető: DR. PETRUSKA GYÖRGY

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikus Szak

2000.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az analízisben kitüntetett szerepük van azoknak a halmazoknak, amelyeket valamilyen értelemben „kicsinek” tekinthetünk. A sehol sem sűrű halmazokban például lyukak vannak, így ezek geometriai szempontból „elhanyagolhatóak”. A megszámlálható unióikból képezett első kategóriájú halmazok nem tartalmaznak ugyan lyukakat, viszont a bennük lévő hézagok (Baire-terekben) sűrű halmazt alkotnak. Ettől lényegesen különböző kishalmaz-fogalom $\mathbb{R}^n$-ben a (Lebesgue-) nullmértékűség. Az ilyen halmazok metrikus értelemben kicsik, „nincsen térfogatuk”.

Tetszőleges metrikus térben definálhatjuk a porózus halmaz fogalmát. Az ilyen halmazok azon túl, hogy sehol sem sűrűek (és $\mathbb{R}^n$-ben nullmértékűek), minden pontjukhoz tetszőlegesen közel tartalmaznak bizonyos értelemben „nagy” lyukakat. A számegyenes porózus részhalmazait és az azok megszámláható unióiból képzett σ-porózus halmazokat Dolženko [3] kezdte vizsgálni 1967-ben. Egyes kivételes halmazokról megmutatta, hogy azok nemcsak nullmértékűek és első kategóriájúak, hanem egy szűkebb családhoz, a σ-porózus halmazok σ-ideáljához is tartoznak. Belátható, hogy ez a σ-ideál valódi részosztálya a nullmértékű és első kategóriájú halmazok σ-ideáljának. Alaposabb vizsgálata azért is kapott fontos szerepet, mert gyakran könnyebb megmutatni egy halmazról, hogy σ-porózus, mint külön bizonyítást adni a kategóriára és külön a nullmértékűségre vonatkozóan.

Jelen dolgozatban áttekintjük a σ-porózus halmazokkal kapcsolatos eddigi vizsgálatok eredményeit – kitérve a fent említett másik σ-ideál lényeges tulajdonságaira is –, majd vizsgálódásainkat a klasszikus Fubini-tétel σ-porózus halmazokra vonatkozó analógjára koncentrálva példát adunk $\mathbb{R}^n$-ben olyan Borel-mértékre, amely szinguláris a Lebesgue-mértékre és nullát vesz fel a σ-porózus halmazokon.

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Petruska Györgynek, hogy ráirányította figyelmemet erre az érdekes témára, és mindig bizalommal fordulhattam hozzá segítségért.

1.

A szigma-porózus halmazokról

1.1 Porozitás

A porozitás fogalmát tetszőleges (P, ρ) metrikus térben Zajiček [14], [24], Foran [5] és Zelený [29] a következőképpen definiálja (adott $x \in P, r > 0$ esetén a dolgozatban végig $B(x, r)$ jelöli az x körüli r sugarú nyílt gömböt):

1.1.1 Definíció (porozitás)
Legyen $M \subseteq P, x \in P, R > 0$. *Jelölje*

$$\gamma(x, R, M) = \sup\{r > 0 : \exists z \in P, B(z, r) \subseteq B(x, R), B(z, r) \cap M = \varnothing\}.$$

Azt mondjuk, hogy az M halmaz porózus *x-ben, ha*

$$\limsup_{R \to 0+} \gamma(x, R, M)/R > 0.$$

Ettől kissé eltérő, de a fentivel ekvivalens definíciót ad Preiss és Zajiček [15]:

1.1.2 Definíció (porozitás)
(A fenti feltételekkel) M porózus *x-ben, ha $\exists c > 0$, hogy $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y \in P$ és $\exists r > c \cdot \rho(x, y)$, hogy $\rho(x, y) < \varepsilon$ és $B(y, r) \cap M = \varnothing$.*

Természetesen adódnak a következő definíciók:

1.1.3 Definíció (porózus halmaz)
Az $M \subseteq P$ halmazt porózus halmaznak *nevezzük, ha minden pontjában porózus.*

1.1.4 Definíció (σ-porózus halmaz)
Egy $M \subseteq P$ *halmaz* σ-porózus, *ha előáll megszámlálható sok porózus halmaz uniójaként.*

Az alábbi állításban a (σ-)porózus halmazok leglényegesebb tulajdonságait foglaljuk össze.

1.1.5 Állítás
(i) *Ha* $M \subseteq P$ *porózus, akkor* M *sehol sem sűrű.*
(ii) *Ha* $M \subseteq \mathbb{R}$ *porózus, akkor* M *Lebesgue-nullmértékű.*
(iii) *Ha* $M \subseteq P$ σ*-porózus, akkor* M *első kategóriájú.*
(iv) *A* σ*-porózus halmazok* σ*-ideált alkotnak.*
(v) *A számegyenes* σ*-porózus halmazainak* σ*-ideálja része a nullmértékű és első kategóriájú halmazok* σ*-ideáljának, és tartalmazza a megszámlálható halmazokat.*

Bizonyítás:
(i) és (iv) a definícióból nyilvánvaló, (i)-ből következik (iii), (ii) és (iii)-ből következik (v) első része, a második rész pedig abból, hogy $\mathbb{R}$-en az egypontú halmazok nyilvánvalóan porózusak.
A (ii) a Lebesgue-sűrűségi tételből könnyen látható. □

1.1.6 Megjegyzés
Az állítás (v) *pontjában megfogalmazott tartalmazás valódi, vagyis létezik olyan nullmértékű és első kategóriájú halmaz, amely nem-*σ*-porózus (a későbbiek során erre fogunk látni példát, ld. [21], [22], [24], [25]).*

Az alábbiakban tekintsük át a számegyenes nullmértékű és első kategóriájú valamint σ-porózus halmazai közötti legalapvetőbb hasonlóságokat ([6]):

1.1.7 Állítás
A. Minden nullmértékű és első kategóriájú halmaz benne van egy nullmértékű és első kategóriájú $G_{\delta\sigma}$*-ban.*
B. Létezik olyan nullmértékű és első kategóriájú halmaz, mely nincs benne első kategóriájú G_δ*-ban.*
C. Létezik olyan nullmértékű és első kategóriájú halmaz, mely nincs benne nullmértékű F_σ*-ban.*

Bizonyítás:
A. következik abból, hogy minden első kategóriájú halmaz benne van egy első

kategóriájú F_σ-ban, és minden nullmértékű halmaz benne van egy nullmértékű G_δ-ban.

B.-re példa $\mathbb{Q}$.

C. belátásához tekintsünk egy pozitív mértékű $\tilde{C}$ Cantor-halmazt (ld. később, a Cantor-típusú halmazokról szóló fejezetben), mely metrikusan is sűrű, vagyis minden belemetsző nyílt intervallumban is pozitív mértékű; és vegyünk ebben egy nullmértékű sűrű G_δ-halmazt. Ez megfelel. Ugyanis ha le van fedve egy $K = \cup_n F_n$ F_σ-halmazzal, akkor K is sűrű $\tilde{C}$-ban, sőt második kategóriájú $\tilde{C}$-ban (hiszen tartalmaz egy reziduális halmazt), tehát valamely n-re F_n is második kategóriájú $\tilde{C}$-ban. Ez az F_n sűrű valamely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $(a,b) \cap \tilde{C}$-ban, így $F_n = \mathrm{cl}\left((a,b) \cap \tilde{C}\right)$, ahol a lezárást $\tilde{C}$-ban mint altérben értjük. Mivel a feltétel szerint $(a,b) \cap \tilde{C}$ pozitív mértékű, azért F_n, így K is pozitív mértékű. □

1.1.8 Állítás

A'. Minden σ-porózus halmaz benne van egy σ-porózus $G_{\delta\sigma}$-ban.

B'. Létezik olyan σ-porózus halmaz, mely nincs benne első kategóriájú G_δ-ban.

C'. Létezik olyan σ-porózus halmaz, mely nincs benne nullmértékű F_σ-ban (így σ-porózus F_σ-ban sem).

Bizonyítás:

A'. : Nyilván elég adott E porózus halmazra bizonyítani. Jelölje az (1.1.1) definícióval $f_k(x) \doteq \gamma(x, 1/k, E)$. Ekkor f_k folytonos függvény. Legyen $g_k(x) \doteq \sup_{i \geq k}\{i \cdot f_i(x)\}$, ez Baire-1 függvény, $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ korlátos, monoton fogyó függvénysorozat. A $g(x) = \lim_{k \to \infty} g_k(x)$ jelöléssel a kapott $g(x)$ függvény Baire-2, $E \subseteq g^{-1}(0, +\infty)$, ahol $g^{-1}(0, +\infty)$ $G_{\delta\sigma}$, így $F \doteq g^{-1}(0, +\infty) \cap \overline{E}$ megfelel.

B'.-re példa $\mathbb{Q}$.

C'. bizonyítása hosszadalmas, ezért itt nem térünk ki rá. □

1.1.9 Humke felveti azt a problémát is, hogy létezik-e olyan porózus halmaz, mely nincs benne σ-porózus G_δ-ban. Ezt Tkadlec [21] válaszolja meg pozitívan; arra pedig, hogy ez milyen eszközökkel látható be, a (3.2.5) megjegyzésben ki fogunk térni. A harmadik fejezetben konstruálunk egy olyan S perfekt halmazt, amely rendelkezni fog azzal a tulajdonsággal, hogy ha azon pontjait, melyekben porózus ($P(S)$-et) tartalmazza valamely U-val jelölt G_δ-halmaz, akkor U nem lehet σ-porózus. Ebből következik, hogy $P(S)$ megfelel a kívánalmaknak.

1.2 Cantor-típusú halmazok

Zajiček [25] a fenti (1.1.1) definíciótól eltérően a

$$p(M,x) = \limsup_{R\to 0+} 2\gamma(x,R,M)/R$$

mennyiséget használja, így biztosítva, hogy a porozitás esetén pozitív $p(M,x)$ szám (az M halmaz x pontbeli *porozitása*) ≤ 1 legyen, ha $x \in \overline{M}$. A továbbiakban mi is minden esetben ezt a számot fogjuk érteni az M halmaz x pontbeli porozitásán. Zajiček vezeti be a legismertebb perfekt nullmértékű halmaz, a *Cantor-halmaz* porozitásának vizsgálatához szükséges alábbi fogalmakat. $M \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ esetén jelölje (az előbbit kissé átfogalmazva)
$p(M,x) \doteq \limsup_{h\to 0+} \frac{\lambda(M,(x-h,x+h))}{h}$;
$p^+(M,x) \doteq \limsup_{h\to 0+} \frac{\lambda(M,(x,x+h))}{h}$;
$p^-(M,x) \doteq \limsup_{h\to 0+} \frac{\lambda(M,(x-h,x))}{h}$,
ahol $M \subseteq \mathbb{R}$ és tetszőleges $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum estén $\lambda(M,I)$ jelöli az I-ben fekvő legnagyobb, M-től diszjunkt részintervallum hosszát.

1.2.1 Megjegyzés

Könnyen látható, hogy
(i) $0 \leq p^+(M,x) \leq 1, 0 \leq p^-(M,x) \leq 1,$ *és ha* $x \in \overline{M}$, *akkor* $0 \leq p(M,x) \leq 1$ *(különben* $p(M,x) = 2$*),*
(ii) $p(M,x) = p\left(\overline{M},x\right), p^+(M,x) = p^+\left(\overline{M},x\right), p^-(M,x) = p^-\left(\overline{M},x\right)$

1.2.2 Definíció (jobbról ill. balról porozitás)

Azt mondjuk, hogy az $M \subseteq \mathbb{R}$ *halmaz* jobbról (balról) porózus *x-ben, ha (a fenti jelölésekkel)* $p^+(M,x) > 0$ $(p^-(M,x) > 0)$.

1.2.3 Definíció (kétoldali porozitás)

Az $M \subseteq \mathbb{R}$ *halmaz* kétoldalian porózus *x-ben, ha ott jobbról és balról is porózus.*

1.2.4 Definíció (erős porozitás)

Az $M \subseteq \mathbb{R}$ *halmaz*
(i) erősen porózus *x-ben, ha* $p(M,x) \geq 1$,
(ii) jobbról (balról) erősen porózus *x-ben, ha* $p^+(M,x) = 1$ $(p^-(M,x) = 1)$,
(iii) kétoldalian erősen porózus *x-ben, ha ott jobbról és balról is erősen porózus.*

1.2.5 Megjegyzés

Az erősen porózus halmaz*, a* kétoldalian porózus halmaz*, a* kétoldalian erősen porózus halmaz*, az* erősen σ-porózus halmaz*, a* kétoldalian σ-porózus halmaz*, a* kétoldalian erősen σ-porózus halmaz *fogalma a megfelelő módon értelmezhető.*

1.2.6 Példa

A Cantor-féle triadikus halmazról (a továbbiakban: C) könnyen látható, hogy $\forall x \in C$ $p(C,x) \geq 1/2$, *tehát C porózus halmaz.*

1.2.7 Ha $C(\alpha)$-val jelöljük az $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozathoz tartozó szimmetrikus perfekt, Cantor-típusú halmazt (amelyet tehát ugyanúgy konstruálunk, mint a Cantor-halmazt, azzal a kivétellel, hogy az n-edik lépésben a maradék 2^{n-1} zárt intervallum mindegyikéből a vele koncentrikus, α_n-szeres hosszúságú nyílt intervallumot töröljük), akkor könnyen látható, hogy $C(\alpha)$ pontosan akkor nullmértékű, ha $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$. (A továbbiakban az $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozathoz tartozó halmazra a $C(\alpha)$ és a $C(\alpha_n)$ jelölést is használjuk.)

Könnyen igazolható a következő állítás:

1.2.8 Állítás

Ha $\alpha_n \to 0$, akkor $C(\alpha)$ azon pontjai, amelyekben nem porózus, sűrűn vannak $C(\alpha)$-ban.

Thomson [20] látja be az alábbi két általános tételt Cantor-típusú halmazokra:

1.2.9 Tétel

A $C(\alpha)$ szimmetrikus perfekt halmaz pontosan akkor nem-σ-porózus, ha $\alpha_n \to 0$.

1.2.10 Következmény

Az $\alpha_n = 1/(n+1)$ sorozatból képezett $C(\alpha)$ perfekt, nullmértékű halmaz nem-σ-porózus.

1.2.11 Tétel

A $C(\alpha)$ szimmetrikus perfekt halmaz pontosan akkor nem erősen σ-porózus, ha $\limsup \alpha_n < 1$.

Evans és Humke [4] tovább erősítik a fenti eredményeket. Bevezetnek egy újfajta porozitás-fogalmat:

1.2.12 Definíció (szimmetrikus porozitás)
Adott $M \subseteq \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, R > 0$ esetén jelölje

$$\lambda(x, R, M) \doteq \sup\{h > 0 \quad : \quad \exists t > 0, t + h < R, \\ (x - t - h, x - t) \cup (x + t, x + t + h) \subseteq M^c\}.$$

Azt mondjuk, hogy az M halmaz szimmetrikusan porózus *valamely x pontban, ha* $\limsup_{R \to 0+} \lambda(x, R, M)/R > 0$. *(A* $\limsup_{R \to 0+} \lambda(x, R, M)/R$ *számot nevezzük a halmaz adott pontbeli* szimmetrikus porozitásá*nak.)*

1.2.13 Megjegyzés
A korábbiakhoz hasonlóan definiálható a szimmetrikusan porózus halmaz *és a* -szimmetrikusan σ-porózus halmaz *fogalma.*

Az említett szerzők belátják, hogy ez a fogalom nem esik egybe a kétoldali porozitás fogalmával:

1.2.14 Tétel
Létezik olyan kétoldalian erősen porózus halmaz a számegyenesen, mely nem szimmetrikusan σ-porózus.

Bizonyítás:
Legyen $\alpha_n = 1/(4n+3)$, és jelölje E_n az $E = C(\alpha_n)$ konstrukciójában az n-edik lépésben kapott 2^n darab diszjunkt zárt intervallum uniójából képezett halmazt. Az n-edik lépésben kitörölt nyílt intervallumokat jelölje rendre (balról jobbra haladva) $I_{n,1}, I_{n,2}, ..., I_{n,2^{n-1}}$. Tetszőleges $x \in E_n$ esetén legyen I_{n,j_x} az $I_{n,1}, I_{n,2}, ..., I_{n,2^{n-1}}$ intervallumok közül az x-hez legközelebbi. Ha I_{n,j_x} intervallum x középpontú tükörképe belemetsz $\cup_{m=1}^{n-1} \cup_{j=1}^{2^{m-1}} I_{m,j}$-be, akkor szükségképpen $2\,\mathrm{dist}(x, I_{n,j_x}) + |I_{n,j_x}| \geq \frac{4n+3-1}{2} |I_{n,j_x}|$, tehát $\mathrm{dist}(x, I_{n,j_x}) \geq n |I_{n,j_x}|$, így

$$\frac{|I_{n,j_x}|}{\mathrm{dist}(x, I_{n,j_x})} \leq \frac{|I_{n,j_x}|}{n |I_{n,j_x}|} = 1/n,$$

amiből már következik, hogy E szimmetrikus porozitása minden pontjában 0. Egy, Thomson [20] könyvében is leírt, Denjoy-tól származó tétel szerint a számegyenes tetszőleges perfekt, sehol sem sűrű részhalmazának azon pontjai, melyekben kétoldalian erősen porózus, reziduálisak az adott halmazban. Legyen S az E azon pontjainak halmaza, melyekben E kétoldalian erősen porózus. Tegyük fel indirekt, hogy S szimmetrikusan σ-porózus, vagyis $S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$, ahol minden S_n

szimmetrikusan porózus. Mivel S reziduális halmaz E-ben, azért létezik I nyílt intervallum, n_0 természetes szám, hogy $I \cap E$ nemüres és S_{n_0} sűrű $I \cap E$-ben. Ha $x \in S_{n_0} \cap I \cap E$, akkor S_{n_0} szimmetrikus porozitása x-ben pozitív, míg E szimmetrikus porozitása x-ben 0, viszont S_{n_0} sűrű $E \cap I$-ben, ezért ez ellentmondás. $\square$

A Cantor-típusú halmazok szimmetrikus porozitásáról igen sokat tudunk mondani Evans és Humke [4] cikke nyomán. Tételeik bizonyításához szükségünk lesz a következő terminológia bevezetésére.

1.2.15 A továbbiakban az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz egydimenziós Lebesgue-mértékét $\lambda(A)$-val jelöljük, ha pedig A intervallum, akkor $|A|$-el. Jelölje Σ az összes véges $0-1$ sorozatok halmazát, $\sigma \in \Sigma$ hosszát $|\sigma|$ és σ elemeit $\sigma(1)\,\sigma(2)\ldots\sigma(n)$. Ha $0 < \alpha_n < 1$ $\forall n$, akkor a $C(\alpha_n)$ konstrukciójában szereplő intervallumokat a következő módon jelölhetjük. Legyen $I_\varnothing = (1/2 - \alpha_1/2, 1/2 + \alpha_1/2)$, J_0 és J_1 az $I_\varnothing$ komplementerének bal ill. jobb oldali komponense; I_0 ill. I_1 a J_0-ból ill. J_1-ből elhagyott $\alpha_2(1-\alpha_1)/2$ hosszúságú intervallum, stb. Ekkor

$$C(\alpha_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{|\sigma|=n} J_\sigma,$$

és az I_σ-k alkotják ezen Cantor-típusú halmaz kiegészítő intervallumait. Megjegyezzük, hogy $|J_\sigma| = \prod_{n=1}^{|\sigma|} \frac{1-\alpha_n}{2}$ és $|I_\sigma| = \alpha_{|\sigma|+1}\,|J_\sigma|$.

1.2.16 **Állítás**

Ha $0 < \alpha_n < 1, \alpha = \limsup \alpha_n$, akkor $C(\alpha_n)$ szimmetrikus porozitása minden pontjában legfeljebb $\frac{4\alpha}{3\alpha+1}$.

Bizonyítás:

Legyen $\sigma \in \Sigma$ és $|\sigma| = n$. Ha $x \in \mathbb{R}$ balra fekszik I_σ-tól, jelölje

$$\begin{aligned} s(x,\sigma) = \sup\{1-\delta \ : \ & \exists h, (x+\delta h, x+h) \subseteq I_\sigma \text{ és} \\ & (x-h, x-\delta h) \subseteq I_\tau \text{ valamely } |\tau| \le |\sigma|\}. \end{aligned}$$

Ha p a $J_{\sigma 0}$ középpontja, akkor

$$s(p,\sigma) \le \frac{|I_\sigma|}{\operatorname{dist}(p, I_\sigma) + |I_\sigma|} = \frac{4\alpha_{n+1}}{3\alpha_{n+1}+1}.$$

Ha $x < p$, akkor

$$s(p,\sigma) \le \frac{|I_\sigma|}{\operatorname{dist}(x, I_\sigma) + |I_\sigma|} \le \frac{|I_\sigma|}{\operatorname{dist}(p, I_\sigma) + |I_\sigma|} = \frac{4\alpha_{n+1}}{3\alpha_{n+1}+1}.$$

Ha $x > p$, akkor

$$s(p,\sigma) \leq \frac{|I_\sigma| - 2(x-p)}{\operatorname{dist}(x, I_\sigma) + |I_\sigma|} \leq \frac{|I_\sigma| - 2(x-p)}{\operatorname{dist}(p, I_\sigma) - (x-p) + |I_\sigma|} \leq \frac{4\alpha_{n+1}}{3\alpha_{n+1}+1}.$$

Az I_σ jobb oldalán analóg módon definiálva $s(x,\sigma)$-t és a számolást elvégezve kapjuk, hogy $C(\alpha_n)$ szimmetrikus porozitása minden pontjában legfeljebb $\frac{4\alpha}{3\alpha+1}$.
□

1.2.17 Következmény
Ha $0 < \alpha_n < 1, \lim \alpha_n = 0$, *akkor* $C(\alpha)$ *egyetlen pontjában sem szimmetrikusan porózus.*

1.2.18 Tétel
Ha $\limsup \alpha_n = 1$, *akkor* $C(\alpha_n)$ *erősen szimmetrikusan porózus.*

Bizonyítás:
Tegyük fel, hogy $\alpha_{n_k} \to 1$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, σ pedig olyan, hogy $|\sigma| = n_k - 1$, ahol $\frac{1-\alpha_{n_k}}{2\alpha_{n_k}} < \varepsilon$ (ilyen azért létezik, mert elég nagy k-ra $\alpha_{n_k} > 1/(2\varepsilon+1)$). Ekkor $|J_{\sigma 0}| = \frac{1-\alpha_{n_k}}{2\alpha_{n_k}} |I_\sigma| < \varepsilon |I_\sigma|$. Legyen I_τ $(|\tau| < |\sigma|)$ egy J_σ-hoz csatlakozó intervallum, feltehető, hogy J_σ-tól balra fekvő. Tetszőleges A halmazra és x pontra jelölje

$$\operatorname{spr}(A,x,h) = \sup\{1-\delta : (x-h, x-\delta h) \cup (x+\delta h, x+h) \subseteq A^c\}.$$

Könnyen látható, hogy az A halmaz x-beli szimmetrikus porozitása

$$\operatorname{sp}(A,x) = \limsup_{h \to 0+} \operatorname{spr}(A,x,h)$$

(Ha egyértelmű, milyen A halmazról van szó, az $\operatorname{spr}(x,h)$ ill. $\operatorname{sp}(x)$ jelölést alkalmazzuk.) Most két esetet különböztetünk meg:
1. Ha $|I_\tau| \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} |J_{\sigma 0}|$, akkor $x \in J_{\sigma 0}$ esetén $L = \min\{|I_\tau|, |I_\sigma|\}$ jelöléssel

$$\begin{aligned}\operatorname{spr}(x,h) &\geq \frac{L - 2|J_{\sigma 0}|}{L + |J_{\sigma 0}|} \geq \min\{\frac{|I_\tau| - 2\sqrt{\varepsilon}|I_\tau|}{|I_\tau| + \sqrt{\varepsilon}|I_\tau|}, \frac{|I_\sigma| - 2\varepsilon|I_\sigma|}{|I_\sigma| + \varepsilon|I_\sigma|}\} \\ &= \min\{\frac{1-2\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1-2\varepsilon}{1+\varepsilon}\},\end{aligned}$$

ugyanis $|J_{\sigma 0}| \leq \min\{\sqrt{\varepsilon}|I_\tau|, \varepsilon|I_\sigma|\}$, h-t pedig mérjük fel x-ből az I_τ és I_σ rövidebbikének x-től távolabb fekvő végpontjáig.
2. Ha $|I_\tau| < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} |J_{\sigma 0}|$, akkor legyen $J_{\sigma'}$ az a J intervallum, mely balról csatlakozik

I_τ-hoz, és $|\sigma| = |\sigma'|$. Ha $x \in J_{\sigma 0}$, akkor h-t x-ből az I_σ jobb oldali végpontjáig felmérve kapjuk, hogy

$$\operatorname{spr}(x,h) \geq \frac{|I_\sigma| - |J_{\sigma 0}| - |I_\tau| - |J_{\sigma' 1}|}{|I_\sigma| + |J_{\sigma 0}|} \geq \frac{|I_\sigma| - 2\,|J_{\sigma 0}| - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,|J_{\sigma 0}|}{|I_\sigma| + \varepsilon\,|I_\sigma|} \geq \frac{1 - 2\varepsilon - \sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}.$$

Mindkét esetben arra a következtetésre juthatunk, hogy $\operatorname{sp}(x) = 1$, amivel a tételt beláttuk. □

1.2.19 Tétel

Ha $0 < \alpha = \alpha_n < 1$ $\forall n$, akkor $C(\alpha)$ szimmetrikus porozitása minden pontjában legalább $\frac{2\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{\xi(\alpha)}$, ahol $\xi(\alpha)$ jelöli a legkisebb olyan egész számot, melyre $\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{\xi(\alpha)} \leq \frac{\alpha}{2}$.

Bizonyítás:

Legyen $\sigma \in \Sigma$ adott és definiáljuk $k(\sigma) = \sigma 011...1$-t, ahol $|k(\sigma)| - |\sigma| = \xi(\alpha)$. Ebből következik, hogy $2\left|J_{k(\sigma)}\right| = 2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{\xi(\alpha)}|J_\sigma| \leq \alpha\,|J_\sigma| = |I_\sigma|$. Legyen I tetszőleges $|I_\sigma|$ hosszúságú intervallum. Megmutatjuk, hogy $I \setminus C(\alpha)$ tartalmaz $\left|I_{k(\sigma)}\right|$ hosszúságú intervallumot. Legyen τ olyan, hogy $|\tau| = |k(\sigma)| + 1$. Ekkor

$$|J_\tau| = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{|k(\sigma)|+1} = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\left|J_{k(\sigma)}\right| < \frac{|I_\sigma|}{2}.$$

Ha I metszi J_τ-t és $J_{\tau'}$-t, ahol $\tau \neq \tau'$ és $|\tau| = |\tau'| = |k(\sigma)| + 1$, akkor I nyilvánvalóan tartalmaz kívánt hosszúságú intervallumot. Ha legfeljebb egy ilyen J_τ intervallumot metsz, akkor $I \setminus C(\alpha)$ tartalmaz egy legalább $\frac{|I| - |J_\tau|}{2}$ hosszúságú intervallumot, és

$$\begin{aligned}
\frac{|I| - |J_\tau|}{2} &= \frac{|I_\sigma| - |J_\tau|}{2} = \frac{1}{2}\left(\alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{|\sigma|} - \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{|k(\sigma)|+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{|k(\sigma)|}\left(\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{|\sigma| - |k(\sigma)|} - \frac{1-\alpha}{2\alpha}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\left|I_{k(\sigma)}\right|\left(\frac{2}{\alpha} - \frac{1-\alpha}{2\alpha}\right) \geq \left|I_{k(\sigma)}\right|.
\end{aligned}$$

Ebből a kívánt intervallum létezése következik. Legyen most $x \in J_{\sigma 0}$ és tekintsünk egy olyan x körüli I_x intervallumot, melyre $|I_x| = |I_\sigma|$ és $I_x \cap \left(\cup_{|\tau| \leq |k(\sigma)|} I_\tau\right)$ tartalmaz $\left|I_{k(\sigma)}\right|$ hosszúságú intervallumot. Ekkor létezik (x-től és σ-től függő) h és t, hogy $(x+h, x+h+t) \cup (x-h-t, x-h) \subseteq [0,1] \setminus C(\alpha)$, és

$$\frac{|(x+h, x+h+t)|}{|(x, x+h+t)|} \geq \frac{\left|I_{k(\sigma)}\right|}{|J_{\sigma 0}| + |I_\sigma|} = \frac{2\alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{|k(\sigma)| - |\sigma|}|J_\sigma|}{(1+\alpha)\,|J_\sigma|} = \frac{2\alpha}{\alpha+1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{\xi(\sigma)},$$

amiből a tétel következik. □

1.3 A különböző értelemben porózus halmazok tulajdonságai

A fentiekben már láttuk, hogy (a számegyenesen) a közönséges porozitáson túl sokféle porozitás-fogalmat definiálhatunk (erős, (két)oldali, szimmetrikus stb.), amelyek segítségével még jobban karakterizálhatjuk a vizsgált halmaz tulajdonságait. A továbbiakban újabb porozitás-fogalmakkal ismerkedünk meg, kitérve ezek hasonlóságára-eltérésére. Minden esetben adott halmaz adott pontbeli porozitását definiáljuk, a megfelelő típusú porózus halmaz, σ-porózus halmaz stb. az eddigiekhez hasonlóan értelmezhető.

1.3.1 Először tetszőleges (P, ρ) metrikus térben értelmezzük a szimmetrikus porozitás analogonját és Vallin [23] cikke alapján megvizsgáljuk az ilyen tulajdonságú halmazok jellemzőit. Ehhez bevezetjük az következő jelölést: adott $x \in P$, $0 < r_1 < r_2$ esetén legyen

$$S_x(r_1, r_2) = B(x, r_2) \setminus \overline{B(x, r_1)}$$

az x pont körüli r_1,r_2 sugarú *héj*.

1.3.2 Definíció (héjszerű porozitás)

Adott $M \subseteq P$, $x \in P$, $R > 0$ esetén jelölje

$$\Lambda(x, R, M) \doteq \sup\{h > 0 : \exists t > 0, t + h < R, S_x(t, t + h) \cap M = \varnothing\}$$

Azt mondjuk, hogy az $M \subseteq P$ halmaz héjszerűen porózus *x-ben, ha* $p^s(M, x) = \limsup_{R \to 0+} \Lambda(x, R, M)/R > 0$.

1.3.3 Megjegyzés

Könnyen látható, hogy $P = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$ $(x, y \in \mathbb{R})$ esetén a héjszerű porozitás ekvivalens a szimmetrikus porozitással.

1.3.4 Könnyen igazolható, hogy ha egy metrikus teret egymással ekvivalens metrikákkal látunk el, a közönséges porozitás-fogalom nem függ attól, hogy a definícióban melyik ekvivalens metrikát használjuk. Az erős porozitás viszont függ a metrikától.

1.3.5 Példa

Létezik a síkon olyan halmaz, mely a 0 pontban az euklideszi metrikát tekintve erősen porózus, a maximum-metrikában viszont nem erősen porózus.

Bizonyítás:

Legyen $h_n = 1/n, r_n = (1-h_n)/n$, $z_n = (0, h_n)$, $B_n = B(z_n, r_n)$, és válasszunk a természetes számoknak egy olyan (n_k) részsorozatát, hogy $B_{n_j} \cap B_{n_k} = \varnothing$ legyen, ha $j \neq k$. Legyen $E = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\cup_j B_{n_j}\right\}$. Ekkor (1.2) jelölésével az euklideszi metrikában

$$p(E;(0,0)) = \lim_{j\to+\infty} \frac{2r_{n_j}}{h_{n_j}+r_{n_j}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2(1-1/n)}{2-1/n} = 1,$$

ahol a legnagyobb „lyuk” a $h_{n_j}+r_{n_j}$ sugarú környezetben a B_{n_j} gömb. A maximum-metrikában viszont

$$p_m(E;(0,0)) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}(1-1/n)}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-1/n)} = \frac{2}{1+\sqrt{2}} < 1,$$

ugyanis a legnagyobb „lyuk” a $h_{n_j}+r_{n_j}$ sugarú környezetben a B_{n_j} gömbbe írt $\sqrt{2}(1-1/n)$ oldalú négyzet. □

Hasonlóan, a héjszerű porozitás fogalma is függ attól, milyen metrikában tekintjük a definícióban szereplő gömböt ill. héjat.

1.3.6 Példa

Létezik a síkon olyan halmaz, mely a 0 pontban a maximum-metrikát tekintve héjszerűen porózus, az euklideszi metrikában viszont nem héjszerűen porózus.

Bizonyítás:

Jelölje d a maximum-metrikát $\mathbb{R}^2$-en és legyen

$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{2}/2^{k+1} \leq d(0,x) \leq 1/2^k, k \in \mathbb{N}\right\}$$

Ekkor a maximum-metrikában $S_{(0,0)}\left(1/2^k, \sqrt{2}/2^k\right) \subseteq E^c\ \forall k$, tehát

$$p_m^s(E;(0,0)) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt{2}/2^k - 1/2^k}{\sqrt{2}/2^k} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Az euklideszi metrikában viszont nincs olyan héj, melyet a 0 körül E^c-be helyezhetünk, hiszen $\forall k$-ra a $\left(0, \sqrt{2}/2^k\right)$ és az $\left(1/2^k, 1/2^k\right)$ pont is rajta van az origó körüli $\sqrt{2}/2^k$ sugarú gömb felszínén – ezért $p^s(E;(0,0)) = 0$. □

1.3.7 További érdekesség, hogy ha (P_1, ρ_1), (P_2, ρ_2) metrikus terek, $M_1 \subseteq P_1$, $x \in M_1$, $M_2 \subseteq P_2$, $y \in M_2$ és az (1.2) jelöléseivel $p(M_1, x) \geq \eta$, $p(M_2, y) \geq \gamma$, akkor $p(M_1 \times M_2, (x,y)) \geq \max\{\eta, \gamma\}$, ha a szorzattérben a $d((x,y),(u,v)) = \max\{\rho_1(x,u), \rho_2(y,v)\}$ metrikát tekintjük – azonban a héjszerű porozitás esetén ez nem teljesül.

1.3.8 Könnyen találhatunk példát olyan halmazra, mely (erősen) porózus és emellett összefüggő: tetszőleges egyenes a síkon megfelel. Az alábbi állításból az következik, hogy a héjszerűen porózus halmazok körében ez nem fordulhat elő:

1.3.9 Állítás

Legyen E héjszerűen porózus a (P,ρ) metrikus térben, $C \subseteq P$ pedig tetszőleges olyan összefüggő halmaz, melyre $E \subseteq C$. Ha a G nyílt halmaz esetén $\operatorname{card}(G \cap E) \geq 2$, *akkor $G \cap C$-ben E nem sűrű.*

Bizonyítás:

Tegyük fel indirekt, hogy E sűrű $G \cap C$-ben és legyen $x, y \in G \cap E$. Mivel E héjszerűen porózus x-ben, azért léteznek $0 < r_1 < r_2 < \rho(x,y)$ számok úgy, hogy $B(x,r_2) \subseteq G$, $S_x(r_1,r_2) \cap E = \emptyset$. Ekkor az indirekt feltevés szerint $S_x(r_1,r_2) \cap C = \emptyset$ is teljesül, ezért $C = (B(x,r_2) \cap C) \cup \left(\left(P \setminus \overline{B(x,r_1)}\right) \cap C\right)$, ami ellentmond C összefüggőségének. □

1.3.10 Következmény

Ha E legalább két pontból álló héjszerűen porózus halmaz a (P,ρ) metrikus térben, akkor E nem összefüggő.

Bizonyítás:

Indirekt tegyük fel, hogy E összefüggő. Alkalmazzuk a fenti tételt $E = C$, $G = P$ választással, ekkor azt kapjuk, hogy E nem sűrű $P \cap E = E$-ben, ami ellentmondás. □

1.3.11 Megjegyzés

Igazolható, hogy ha E zárt héjszerűen σ-porózus részhalmaza egy teljes metrikus térnek, akkor E teljesen széteső (vagyis csak egypontú összefüggőségi komponensei vannak).

1.3.12 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^m$ $(m < n)$ esetén jelölje $Y_x = \{y \in \mathbb{R}^{n-m} : (x,y) \in E\}$. Ha tekintjük a síkon az $E = \{(x,y) : x = c\}$ halmazt (c tetszőleges szám), akkor E nyilván porózus, viszont az $Y_c (= \mathbb{R})$ szekció mint $\mathbb{R}$ részhalmaza nem porózus. A héjszerűen porózus halmazok szekciói azonban mindig héjszerűen porózusak a megfelelő térben:

1.3.13 Állítás

Legyen $m < n$ és $E \subseteq \mathbb{R}^n$ héjszerűen porózus halmaz. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}^m$ esetén Y_x héjszerűen porózus $\mathbb{R}^{n-m}$-ben.

Bizonyítás:

Ha $Y_x = \varnothing$, akkor az állítás nyilvánvaló. Ha $Y_x \neq \varnothing$, akkor létezik $y \in \mathbb{R}^{n-m}$, hogy $(x, y) \in E \subseteq \mathbb{R}^n$. Mivel E héjszerűen porózus (x, y)-ban, azért létezik $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ és $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy $0 < r_k < R_k$, $R_k \to 0$, $S_{(x,y)}(r_k, R_k) \cap E = \varnothing$, és $\frac{R_k - r_k}{R_k} \to \eta = p^s(E; (x, y)) > 0$. Ebből következik, hogy $\mathbb{R}^{n-m}$-ben $S_y(r_k, R_k) \cap Y_x = \varnothing$ $\forall k$, tehát $p^s(Y_x; y) \geq \lim_{k\to+\infty} \frac{R_k - r_k}{R_k} = \eta > 0$. □

Végül hasonlítsuk össze a héjszerű porozitást a hiperporozitás fogalmával – amit az alábbiakban definiálunk.

1.3.14 Definíció (hiperporozitás)

Egy $M \subseteq (P, \rho)$ halmaz hiperporózus *az $x \in P$ pontban, ha létezik olyan γ pozitív szám, hogy minden $z \neq x$-hez található y, melyre $\rho(x, y) + \rho(y, z) = \rho(x, z)$ és $B(y, \gamma\rho(x, y)) \cap M = \varnothing$. Jelölje*

$$p^h(M; x) = \sup\{\gamma : \exists y\ \rho(x, y) + \rho(y, z) = \rho(x, z), B(y, \gamma\rho(x, y)) \cap M = \varnothing\},$$

amit az M halmaz x pontbeli hiperporozitásának *nevezünk.*

1.3.15 Példa

Létezik olyan (P, ρ) lokálisan összefüggő izolált pont nélküli metrikus tér, $E \subseteq P$ héjszerűen porózus halmaz, hogy E nem hiperporózus.

Bizonyítás:

Legyen (P, ρ) az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0) : -1 < x_1 < 1\}$ halmaz ellátva az euklideszi metrikával, és $E = \{(1, 0)\}$ egypontú halmaz. Tetszőleges $R > 0$, $N > 1$ esetén az $S_{(1,0)}(R/N, R)$ héj E^c-ben fekszik, ezért E erősen héjszerűen porózus (tartsunk R-rel 0-hoz, N-nel $+\infty$-hez). Azonban E nem hiperporózus $(1, 0)$-ban, mivel $(-1, 0) \in P$, de a $(-1, 0)$ és az $(1, 0)$ pontokat összekötő szakaszon nincs P-beli pont. □

1.3.16 Tétel

Legyen (P, ρ) konvex metrikus tér, azaz ha $x, z \in P$, $0 < \alpha < \rho(x, z)$, akkor létezik $y \in P$ pont úgy, hogy $\rho(x, y) = \alpha, \rho(y, z) = \rho(x, z) - \alpha$. Ha $E \subseteq P$ héjszerűen porózus az $x \in P$ pontban, akkor E hiperporózus x-ben.

Bizonyítás:

Legyen a feltételek szerint $p^s(E; x) = \eta > 0$. Ezért létezik $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy $0 < r_n < R_n$, $R_n \to 0$, $S_x(r_n, R_n) \cap E = \varnothing$, és $\frac{R_n - r_n}{R_n} \to \eta$. A hiperporozitás belátásához tekintsünk egy tetszőleges $z \in P$, $z \neq x$ pontot. Minden n

természetes számra definiáljunk egy y_n, az x-et és z-t összekötő szakaszon fekvő pontot úgy, hogy $\rho(x, y_n) = R_n - \frac{R_n - r_n}{2}$ legyen. Ilyen y_n a tér konvexsége miatt létezik. Ekkor $y_n \in S_x(r_n, R_n)$, $B\left(y_n, \frac{R_n - r_n}{2}\right) \cap E = \varnothing$. Mivel

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{(R_n - r_n)/2}{\rho(x, y_n)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(R_n - r_n)/2}{R_n - (R_n - r_n)/2} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(R_n - r_n)/R_n}{2 - (R_n - r_n)/R_n} = \frac{\eta}{2-\eta},
\end{aligned}$$

azért $p^h(E; x) \geq \frac{\eta}{2-\eta} > 0$, tehát E hiperporózus x-ben. □

Külön elmélete van az ún. porozitás-függvények segítségével definiálható porozitás-fogalmaknak. Az alábbiakban Zajiček [24] terminológiáját vezetjük be.

1.3.17 Definíció (porozitás-függvény)

A $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt porozitás-függvénynek *nevezzük, ha monoton növő, valamely $h > 0$ számra folytonos $[0, h)$-n és $g(0) = 0$. A porozitás-függvények halmazát G-vel jelöljük.*

1.3.18 Definíció ((g)-porozitás)

Legyen (P, ρ) metrikus tér, $g \in G$, $M \subseteq P$, $x \in P$, $c > 0$. Azt mondjuk, hogy az M halmaz (g)-porózus *x-ben, ha az (1.1.1) jelöléseivel*

$$\limsup_{R\to 0+} g(\gamma(x, R, M))/R > 0.$$

Az x pont (g, c)-porozitási pontja *M-nek, ha*

$$\limsup_{R\to 0+} g(\gamma(x, R, M))/R \geq c.$$

1.3.19 Definíció ($\langle g\rangle$-porozitás)

Legyen (P, ρ) metrikus tér, $g \in G$, $M \subseteq P$, $x \in P$. Azt mondjuk, hogy az M halmaz $\langle g\rangle$-porózus *x-ben, ha létezik $B(s_n, r_n)$ gömböknek olyan sorozata, hogy $s_n \to x$, $B(s_n, r_n) \cap M = \varnothing$ és $g(r_n) > \rho(x, s_n)$.*

Legyen $H \subseteq G$. Az M halmazról azt mondjuk, hogy $\langle H\rangle$-porózus *x-ben, ha $\forall h \in H$ esetén $\langle h\rangle$-porózus x-ben.*

Zajiček [24] számos érdekes tételt közöl, ezek közül csak a leglényegesebbeket említjük.

1.3.20 Tétel

Legyen $0 < q < p < 1$ és M egy metrikus tér részhalmaza. Ekkor M pontosan akkor (x^q)-σ-porózus, ha (x^p)-σ-porózus.

A bizonyítás két, könnyen belátható lemmán és a belőlük következő állításon alapul:

1.3.21 Lemma

Ha $f \in G$ és $x \in M$ $\langle f \rangle$-porozitási pontja M-nek, akkor egyben $(2f, 1)$-porozitási pontja is.

Bizonyítás:

A feltétel szerint akármilyen kis $h > 0$ számhoz van y, hogy $B(y, h) \cap M = \varnothing$ és $f(y) > \rho(x, y)$. Ha h elég kicsi, akkor $f(\gamma(x, R, M)) > R/2$, $R = 2\rho(x, y)$ választással. □

1.3.22 Lemma

Ha $f \in G$, és A (f)-σ-porózus, akkor $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, ahol A_n (f, c_n)-porózus valamilyen $c_n > 0$-ra.

Bizonyítás:

Legyen $A = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$, ahol minden B_i (f)-porózus. Legyen $B_{i,k}$ azon $x \in B_i$ pontok halmaza, melyek $(f, 1/k)$-porozitási pontjai B_i-nek. Ekkor $B_i = \cup_{k=1}^{\infty} B_{i,k}$, a $B_{i,k}$ halmazokat pedig rendezzük egy $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozatba. □

1.3.23 Állítás

Ha $h, f \in G$ és $\forall B > 0$-hoz létezik $A > 0$, $\delta > 0$, $r \in \mathbb{Z}$, hogy

$$\underbrace{(Ah) \circ \ldots \circ (Ah)}_{r\text{-szer}}(x) \geq Bf(x) \quad 0 < x < \delta,$$

akkor M (f)-σ-porozitásából következik (h)-σ-porozitása.

Az utóbbi állítás feltételei $A = 1$, $h = x^p$, $f = x^q$ és olyan $r \in \mathbb{Z}$-re teljesülnek, hogy $p^r < q$, ugyanis ekkor $x^{p^r - q} \geq B$, ha x elég közel van a 0-hoz.

Az (f)-porozitás és a közönséges porozitás lényegi eltérését jól érzékelteti a következő tétel:

1.3.24 Tétel

Legyen $0 < q < 1$. Ekkor létezik perfekt, (x^q)-porózus, pozitív Lebesgue-mértékű halmaz.

Bizonyítás:

Jelölje $I = (a - r, a + r)$ $(r > 0)$ esetén $x^q * I$ az $(a - r^q, a + r^q)$ intervallumot. A keresett D halmazt $(D_k)_{k=0}^{\infty}$ zárt halmazok metszeteként állítjuk elő, ahol minden D_k 2^k darab zárt intervallum uniója. Legyen $S_0 = \{[0, 1/2]\}$. Ha az

$S_k = \{I_1, ..., I_{2^k}\}$ diszjunkt zárt intervallumokból álló halmaz már definiálva van, akkor $j = 1, ..., 2^k$ esetén legyenek I'_j és I''_j olyan diszjunkt zárt intervallumok, hogy $x^q * \left(I_j \setminus \left(I'_j \cup I''_j\right)\right) = \operatorname{int} I_j$ teljesüljön. Legyen $S_{k+1} = \{I'_1, I''_1, ..., I'_{2^k}, I''_{2^k}\}$. Ekkor $D_k = \cup\{I : I \in S_k\}$, $D = \cap_{k=0}^{\infty} D_k$ megfelel a kívánalmaknak. Ugyanis az $L = I_j \setminus \left(I'_j \cup I''_j\right)$ intervallumra az kell teljesüljön, hogy $2\left(|L|/2\right)^q = |I_j|$, ebből

$$\lambda\left(I'_j \cup I''_j\right) = |I_j|\left(1 - 2^{1-1/q}\,|I_j|^{1/q-1}\right).$$

Mivel $|I_j| < 1/2^{k+1}$, azért

$$\lambda\left(I'_j \cup I''_j\right) \geq |I_j|\left(1 - 2^{(1-1/q)(k+2)}\right).$$

Ha $\lambda\left(D_k\right) = m_k$, akkor a fentiekből

$$m_{n+1} \geq m_n\left(1 - 2^{(1-1/q)(n+2)}\right) \geq ... \geq \frac{1}{2}\prod_{k=0}^{n}\left(1 - 2^{(1-1/q)(k+2)}\right),$$

tehát

$$\lambda\left(D\right) \geq \frac{1}{2}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - 2^{(1-1/q)(k+2)}\right) > 0.$$

□

Az előbbiek mellett viszont belátható, hogy tetszőleges euklideszi térben létezik nem (x^q)-σ-porózus halmaz $(0 < q < 1)$.

A következő definíciót Humkenál [8] találjuk:

1.3.25 Definíció (globális porozitás)

*Legyen $E \subset \mathbb{R}$ korlátos halmaz, $r > 0$. Ha E-nek van legalább két pontja, akkor jelölje $a = \inf E$, $b = \sup E$ és legyen $(a,b) \setminus \overline{E} = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$, ahol az I_n-ek páronként diszjunkt (esetleg üres) nyílt intervallumok. Jelölje $EP\left(N\right)$ az $I_1, ..., I_{N-1}$ intervallumok végpontjait. Azt mondjuk, hogy E r-*globálisan porózus*, ha $\forall N\ \exists N^*$, hogy $E \setminus EP\left(N\right) \subseteq \cup_{n=N}^{N^*}\left(r * I_n\right)$, ahol $r * I_n$ jelöli az I_n-nel koncentrikus, r-szeres hosszúságú nyílt intervallumot. Ha E egypontú vagy üres halmaz, akkor definíció szerint legyen r-globálisan porózus. Egy halmazt* globálisan porózusnak *nevezünk, ha valamely $r > 0$-ra r-globálisan porózus.*

1.3.26 Megjegyzés

Nem igaz, hogy minden globálisan porózus halmaz minden részhalmaza is globálisan porózus (vö. (1.1.5)), csak „majdnem" teljesül az állítás:

1.3.27 Állítás

Legyen E r-globálisan porózus halmaz, $[a,b]$ tetszőleges zárt intervallum, $\varepsilon > 0$. Ha $\{I_k\}$-val jelöljük $(a-\varepsilon, b+\varepsilon) \setminus \overline{E}$ komponenseit, akkor minden K-hoz létezik $K^* > K$, hogy (az (1.3.25) definíció jelöléseivel) $(E \setminus EP(K)) \cap [a,b] \subseteq \cup_{k=K}^{K^*} (r * I_k)$.

Bizonyítás:

Jelölje $A = \inf E$, $B = \sup E$ és $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ az $(A,B) \setminus \overline{E}$ halmaz komponenseit. Az $((A,B) \cap (a-\varepsilon, b+\varepsilon)) \setminus \overline{E}$ minden I_k komponenséhez egyértelműen létezik $n(k)$, hogy $I_k \subseteq J_{n(k)}$ (ha $J_{n(k)}$-nak sem $a-\varepsilon$ sem $b+\varepsilon$ nem eleme, akkor $J_{n(k)} = I_k$). Legyen $N_1 = \max\{n(k) : k < K\}$. Ha $a - \varepsilon \notin E$ $(b+\varepsilon \notin E)$, akkor legyen N_2 (N_3) az az index, melyre $a-\varepsilon \in J_{N_2}$ $(b+\varepsilon \in J_{N_3})$, különben legyen $N_2\,(N_3) = 0$. Létezik N_4, hogy minden $n \geq N_4$ esetén $|J_n| < \varepsilon/r$, amiből $J_n \cap (a-\varepsilon, b+\varepsilon) = \emptyset$ esetén következik, hogy $(r * J_n) \cap [a,b] = \emptyset$. Végül jelölje $N_5 = \max\{N_i : i = 1,2,3,4\}$. Mivel E globálisan porózus, létezik N_5^{**}, hogy $E \setminus EP(N_5) \subseteq \cup_{n=N_5}^{N_5^{**}} (r * J_n)$. Az előbbi meggondolásból, ha $K^* = \max\{k : N_5 \leq n(k) \leq N_5^{**}\}$, akkor $(E \setminus EP(K)) \cap [a,b] \subseteq \cup_{k=K}^{K^*} (r * I_k)$. □

A közönséges porozitás tulajdonságait tekintve figyelemreméltó az alábbi lemma és két következménye:

1.3.28 Lemma

Ha E globálisan porózus, akkor $\overline{E}$ is az.

Bizonyítás:

Legyen r az E globális porozitása és $s > r$. Megmutatjuk, hogy $\overline{E}$ s-globálisan porózus. Legyen N adott. Ekkor létezik N^*, hogy $E \setminus EP(N) \subseteq \cup_{n=N}^{N^*} (r * I_n)$. Mivel a jobb oldalon lévő halmaz egy véges sok komponensből álló nyílt halmaz, azért ez $\overline{E}$-ból legfeljebb az $r * I_n$-ek végpontjait nem fedi le. Tehát létezik $s > r$, hogy $\overline{E} \setminus EP(N) \subseteq \cup_{n=N}^{N^*} (s * I_n)$. □

1.3.29 Következmény

Az $E \subset \mathbb{R}$ korlátos halmaz pontosan akkor globálisan σ-porózus, ha benne van egy F_σ globálisan σ-porózus halmazban.

1.3.30 Következmény

Létezik olyan σ-porózus halmaz, ami nem globálisan σ-porózus.

Bizonyítás:

Az (1.1.8) állítás C' pontjából következik. □

Humke vizsgálja az egyenletes porozitás tulajdonságait is:

1.3.31 Definíció (egyenletes porozitás)

Az E halmaz egyenletesen porózus, *ha* $\exists\varepsilon > 0$, *hogy* $\forall x \in E$ *az (1.2) jelölésével* $p(E,x) > \varepsilon$.

1.3.32 Példa

Az $S = \{\pm\frac{1}{n} : n = 1,2,...\}$ *halmaz egyenletesen porózus, de nem globálisan porózus.*

Bizonyítás:

S nyilván egyenletesen porózus, hiszen minden pontjában 1 a porozitása (az $1/n$ pont $1/n - 1/(n+1)$ sugarú környezetébe egy ugyanekkora hosszúságú, S-től diszjunkt intervallum írható). Viszont nem globálisan porózus, mert a (1.3.25) definíció szerint létező r-re és N^*-ra teljesülnie kellene, hogy

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N^*} + \frac{1}{N^*+1}\right) < \frac{r}{2}\left(\frac{1}{N^*} - \frac{1}{N^*+1}\right),$$

hogy S maradék részét a megfelelő véges sok intervallum lefedje, amiből $r > 2N^* + 1$ minden N^*-ra (hiszen N tetszőlegesen nagy lehet), ilyen r pedig nem létezik. □

1.3.33 Megjegyzés

Könnyen látható, hogy minden porózus (így minden σ-porózus halmaz is) előáll egyenletesen porózus halmazok megszámlálható uniójaként, ld. (1.3.22) lemmát.

1.3.34 Következmény

Az egyenletesen σ-porózus halmazok megegyeznek a σ-porózus halmazokkal, de nem egyeznek meg a globálisan σ-porózus halmazokkal.

A következőkben csak megemlítjük, hogy $\mathbb{R}^n$ kvázikonform leképezéseinek elméletében használatosak még a következő definíciók:

1.3.35 Definíció (nagyon porózus)

Ha (P,ρ) metrikus tér, $M \subseteq P$, $x \in P$, akkor azt mondjuk, hogy M nagyon porózus *x-ben, ha (a (1.1.1) jelöléssel)* $\liminf_{R\to 0+} \gamma(x,R,M)/R > 0$.
Továbbá E nagyon erősen porózus *x-ben, ha* $\lim_{R\to 0+} 2\gamma(x,R,M)/R \geq 1$.

1.3.36 Definíció (globálisan, egyenletesen nagyon porózus)

Ha (P,ρ) metrikus tér, $M \subseteq P$, $x \in P$, akkor azt mondjuk, hogy M globálisan nagyon porózus, *ha létezik $c > 0$, hogy ((1.1.1) jelöléssel)* $\gamma(x,R,M) > cR$

minden $x \in P$ *és* $R > 0$ *mellett.*
M egyenletesen nagyon porózus*, ha* $\exists c > 0$*, hogy* $\liminf_{R \to 0+} \gamma(x, R, M) / R > c$ $\forall x \in M$.

Az ún. sűrűségtopológiák vizsgálatánál játszanak fontos szerepet az alábbi típusú halmazok:

1.3.37 Definíció (szuperporozitás)
Ha (P, ρ) *metrikus tér,* $M \subseteq P$*,* $x \in P$*, akkor azt mondjuk, hogy* M szuperporózus x*-ben, ha minden olyan* F *halmazra, mely porózus* x*-ben,* $M \cup F$ *is porózus* x*-ben.*

Normált terekben vezethető be az iránymenti porozitás fogalma.

1.3.38 Definíció (iránymenti porozitás)
Ha $(P, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $V \subseteq P$ *adott halmaz, akkor azt mondjuk, hogy az* $M \subseteq P$ *halmaz* V irányban porózus *az* x *pontban, ha az (1.1.2) definícióban szereplő* y *pont minden esetben* $y = x + tv$ $(t \geq 0)$ *alakúnak választható, ahol* $v \in V$*. Ha* $V = \{v\}$*, akkor* M v irányban porózus x*-ben.*

Preiss és Zajiček [15] cikkében szereplő tételéből az következik, hogy szeparábilis normált terekben fekvő irány mentén porózus halmazok vizsgálatakor elegendő a megszámlálható sűrű halmaz elemeinek irányaira szorítkozni. Ehhez bevezetik az alábbi definíciót:

1.3.39 Definíció (megengedhető pár)
Legyen $(P, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $E, F \subseteq P$ *adottak. Azt mondjuk, hogy* E, F megengedhető pár*, ha létezik* $\eta > 0$*, hogy* $\forall e \in E, \forall f \in F$ *esetén* $\|e + f\| \geq \eta \max(\|e\|, \|f\|)$.

A tétel a következő állításból adódik:

1.3.40 Állítás
Legyen $(P, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $E, F \subseteq P$ *megengedhető pár. Ekkor ha* $A \subseteq P$ *az* $E + F$ *irányban* σ*-porózus halmaz, akkor* $A = A_1 \cup A_2$ *alakban írható, ahol* A_1 *az* E *irányban* σ*-porózus,* A_2 *pedig* F *irányban* σ*-porózus.*

1.3.41 Tétel
Legyen $(P, \|\cdot\|)$ *szeparábilis normált tér,* $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ *teljes sorozat* P*-ben (* $\overline{\langle (v_n)_{n=1}^{\infty} \rangle} = P$*). Ha* $A \subseteq P$ *valamely* V *irányban* σ*-porózus halmaz, akkor* $A = \cup_{n=1}^{\infty} (A_n^+ \cup A_n^-)$ *alakban írható, ahol* A_n^+ *ill.* A_n^- σ*-porózusak* v_n *ill.* $-v_n$ *irányban.*

Bizonyítás:

Nyilván elég a tételt porózus A esetére bizonyítani. Az alapgondolat az, hogy mivel feltehető, hogy a v_n-ek lineárisan függetlenek, azért minden n-re $E = \langle v_1, ..., v_{n-1} \rangle$ és $F = \langle v_n \rangle$ megengedhető pár. Továbbá A felírható $A = \cup_{k,n=1}^{\infty} A_{k,n}$ alakban, ahol $A_{k,n}$ azon A-beli pontok halmaza, melyekben A $1/k$-porózus és amelyekhez a porozitás miatt létező v_x ($\|v_x\| = 1$) irányra

$$\text{dist}\,(v_x, \langle v_1, ..., v_n \rangle \cap \{v \in P : \|v\| = 1\}) < 1/k$$

. Innen némi számolással és az (1.3.40) állítás felhasználásával igazolható a tétel.
□

A későbbiekben szükségünk lesz még néhány (pl. Banach-térbeli) porozitás-fogalomra – ezeket a megfelelő helyen definiálni fogjuk.

1.4 Tipikus kompakt halmazok és folytonos függvények a számegyenesen

Ismert tény, hogy ha $\mathbb{R}$ nem üres kompakt részhalmazait (jelöljük ezek összességét a továbbiakban $\mathcal{C}$-vel) ellátjuk az ún. *Hausdorff-metrikával*, vagyis $A, B \in \mathcal{C}$ esetén

$$\rho\,(A, B) \doteq \max\{\bar{\rho}_B^A, \bar{\rho}_A^B\}, \text{ ahol } \bar{\rho}_B^A = \inf\{\varepsilon > 0 : B \subseteq \bigcup_{x \in A} B\,(x, \varepsilon)\},$$

akkor $\mathcal{K} = (\mathcal{C}, \rho)$ teljes metrikus tér. A következőkben látni fogjuk, hogy az ebben a térben bizonyos értelemben tipikus halmaz porózus.

1.4.1 Legyen (az (1.2) jelölésével) $P^+\,(\alpha) \doteq \{F \in \mathcal{K} : p^+\,(F, x) \geq \alpha\ \forall x \in F\}$. Hasonlóan értelmezhető $P^-\,(\alpha)$, $P\,(\alpha)$ is. A definíciókból könnyen látható, hogy ha $0 < \alpha < \beta \leq 1$, akkor

$$P^+\,(\alpha) \supseteq P^+\,(\beta) \supseteq P^+\,(1)$$

és $P^+\,(\beta) = \cap_{\alpha<\beta} P^+\,(\alpha)$. Hasonló relációk érvényesek $P^-\,(\alpha)$-ra, $P\,(\alpha)$-ra is.

Larson [10] mutatta meg, hogy az erősen porózus halmazok tipikusak $\mathcal{K}$-ban.

1.4.2 Tétel

$P^+\,(1)$ sűrű G_δ részhalmaz $\mathcal{K}$-ban.

Bizonyítás:

A bizonyítás fő gondolata az, hogy a

$$P_n^+(\eta) \doteq \{F \in \mathcal{C} : \quad \forall x \in F\ \exists r \in (0,1/n) \text{ és } \exists I \subseteq (x, x+r) \setminus F \text{ zárt intervallum, melyre } |I|/r > \eta\}$$

nyílt halmaz $\mathcal{K}$-ban $\forall \eta \in (0,1)$ és $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Ebből

$$P^+(\alpha) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} P_n^+(\alpha - 1/m), \ P^+(1) = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^+(1-1/n)$$

G_δ halmazt ad. □

1.4.3 Következmény

A $\mathcal{K}$-nak azon elemei, melyek erősen porózusak, sűrű G_δ – így reziduális – halmazt alkotnak $\mathcal{K}$-ban.

1.4.4 Következmény

A $\mathcal{K}$-nak azon elemei, melyek σ-porózusak, reziduális halmazt alkotnak $\mathcal{K}$-ban.

Bizonyítás:

Következik abból, hogy minden erősen porózus halmaz σ-porózus. □

Vallin [23] bizonyította be, hogy egy tipikus kompakt halmaz erősen héjszerűen porózus is.

1.4.5 Tétel

A $\mathcal{K}$-nak azon elemei, melyek erősen héjszerűen porózusak (vagyis amelyekre az (1.3.2) definíció jelölésével $\limsup_{R\to 0+} \Lambda(x,R,M)/R \geq 1$), sűrű G_δ halmazt alkotnak $\mathcal{K}$-ban.

Bizonyítás:

A bizonyítás hasonló, mint az (1.4.2) tétel esetén, azzal a különbséggel, hogy most az alábbi halmazról kell megmutatni, hogy nyílt $\mathcal{K}$-ban $\forall \eta \in (0,1)$ és $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$\begin{aligned} P_n(\eta) = \quad & \{F \in \mathcal{C} : \forall x \in F\ \exists R_x \in (0,1/n), h_x > 0, t_x > 0, \\ & \text{hogy } t_x + h_x \leq R_x, h_x/R_x > \eta \text{ és } S_x(t_x, t_x+h) \subseteq F^c\}. \end{aligned}$$

□

Mivel egy kompakt tartójú folytonos függvény szinthalmazai (az $f^{-1}(\{f(x)\})$ alakú halmazok) $\mathcal{K}$-ban vannak, Larson felveti a kérdést, hogy a Thomson [19] által bizonyított, folytonos függvények szinthalmazaira vonatkozó állítások átfogalmazhatók-e a fenti eredmények tükrében, vagyis igazak-e az alábbiak:

1.4.6 Sejtés

Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sehol sem konstans folytonos függvény, akkor tipikus szinthalmaza tipikus; vagyis egy első kategóriájú halmaztól eltekintve minden y-ra $f^{-1}(y)$ tipikus kompakt halmaz.

Zelený tud olyan sehol sem konstans, folytonos függvényről, melynek ráadásul egyetlen szinthalmaza sem σ-porózus.

1.4.7 Tétel

Kompakt intervallumon értelmezett tipikus folytonos függvény minden szinthalmaza tipikus.

Bizonyítás:

A tétel állítása következik abból, hogy tipikus folytonos függvény bármely monoton függvénnyel (így a konstans függvényekkel is) a számegyenes egy erősen porózus részhalmazán egyezhet meg, ld. [7]. $\square$

1.4.8 Humke vetette fel azt a kérdést, hogy egy valós folytonos függvény grafikonja mindig σ-porózus-e. Foran [5] válaszolta meg a problémát negatívan 1985-ben, konstruálva egy olyan függvényt, amelynek grafikonja nem-σ-porózus. A grafikon Hausdorff-dimenziója 2. Akkor még nem volt ismert, hogy alacsonyabb dimenziójú valamint hogy korlátos változású ellenpélda létezik-e. Végül Zelený [28] 1999-ben konstruált olyan abszolút folytonos függvényt, melynek grafikonja nem-σ-porózus. Mivel ennek Fourier-sora egyenletesen konvergens, azért ez válasz Goffman 1995-ben felvetett kérdésére is, hogy létezik-e olyan függvény, melynek Fourier-sora egyenletesen konvergens és grafikonja nem-σ-porózus.

2.

Szigma-porózus halmazok Banach-terekben

2.1 Fréchet-differenciálhatóság

Legyen $(X, \|\cdot\|)$ valós Banach-tér, melynek duális tere szeparábilis, és legyen f az X-en értelmezett $\mathbb{R}$-be ható folytonos konvex függvény. Preiss és Zajiček [14] megmutatta, hogy azon pontok halmaza, melyekben f nem Fréchet-differenciálható, σ-porózus. (Egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvény az x pontban *Fréchet-differenciálható*, ha létezik olyan $a \in X^*$, hogy $\lim_{\|h\| \to 0} |f(x+h) - f(x) - (h,a)| / \|h\| = 0$, ahol (h,a) jelenti az a X^*-beli elem hatását h-n. Ekkor a-t nevezzük az f függvény x-beli Fréchet-deriváltjának.)

2.1.1 Tétel

Legyen $(X, \|\cdot\|)$ valós, szeparábilis duálissal rendelkező Banach-tér, f pedig folytonos és konvex függvény X-en. Ekkor azon pontok, melyekben f nem Fréchet-differenciálható, σ-porózus halmazt alkotnak.

Bizonyítás:

Jelölje A a szóban forgó halmazt és legyen x az f értelmezési tartományának egy belső pontja. Mivel f folytonos, ezért az f *szubderivált-halmaza*, vagyis a $Df(x)(h) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$ jelöléssel a $\partial f(x) = \{p \in X^* : (h,p) \leq Df(x)(h) \ \forall h \in X\}$ halmaz nem üres, ld. [2] 4.2 tétel. Ha $t_1 \leq t_2$, akkor f konvexsége miatt

$$f(x + t_1 h) = f\left(\frac{t_1}{t_2}(x + t_2 h) + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) x\right) \leq \frac{t_1}{t_2} f(x + t_2 h) + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) f(x),$$

amiből $\frac{f(x+t_1h)-f(x)}{t_1} \leq \frac{f(x+t_2h)-f(x)}{t_2}$. Tehát $Df(x)(h) = \inf_{t>0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$, ezért $t = 1$ választással $Df(x)(h) \leq f(x+h) - f(x)$. Válasszunk minden $x \in A$ esetén $p^x \in X^*$-ot úgy, hogy $f(x+h) - f(x) \geq (h, p^x)$ $\forall h \in X$ – ilyen az előbbiek alapján létezik. Legyen

$$A_m \doteq \{x \in A : \limsup_{h\to 0} \left(f(x+h) - f(x) - (h, p^x)\right) / \|h\| > \frac{1}{m}\}. \tag{2.1}$$

Mivel X^* szeparábilis, azért a benne lévő megszámlálható sűrű halmaz minden pontja köré írva egy $\frac{1}{12m}$ sugarú gömböt, az így kapott gömbrendszer lefedi X^*-ot. Tehát A_m előáll $A_m = \cup_{k=1}^{\infty} A_{m,k}$ alakban, ahol $A_{m,k}$-ra az teljesül, hogy minden $x, y \in A_{m,k}$ esetén $\|p^x - p^y\| < \frac{1}{6m}$ (vagyis álljon $A_{m,k}$ az olyan A_m-beli pontokból, melyekhez tartozó p^x folytonos lineáris funkcionálok mind a k. gömbben vannak). Minden A-beli x-re $\limsup_{h\to 0} \left(f(x+h) - f(x) - (h, p^x)\right) / \|h\| > 0$, ezért $A = \cup_{m=1}^{\infty} A_m = \cup_{m,k=1}^{\infty} A_{m,k}$, így elég megmutatni, hogy adott m, k esetén $A_{m,k}$ porózus.

Legyen tehát m, k és $x \in A_{m,k}$ rögzített. Mivel f folytonos konvex függvény, azért lokálisan Lipschitz. Ennek belátásához nem jelent megszorítást, ha az $x = 0$, $f(0) = 0$ esetre szorítkozunk. Az f folytonossága miatt tetszőleges $M > 0$ számhoz létezik $R > 0$, hogy $|f| \leq M$ a $B(0, R)$ gömbön. Indirekt tegyük fel, hogy léteznek $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$ pontok, melyekre $\|x_n\| \to 0$, és $|f(x_n)| / \|x_n\| > n$. Jelölje adott $0 < \rho < R$ esetén $y_n = \rho \cdot x_n / \|x_n\|$, ekkor $y_n \in B(0, R)$. Az f függvény konvexségéből következik, hogy ha n olyan nagy, hogy $\|x_n\| < \rho$, akkor

$$|f(x_n)| = \left| f\left(\frac{\|x_n\|}{\rho} \cdot y_n + \left(1 - \frac{\|x_n\|}{\rho}\right) \cdot 0\right)\right| \leq \frac{\|x_n\|}{\rho} |f(y_n)| \leq \frac{\|x_n\|}{\rho} M,$$

tehát minden elég nagy n-re $n < |f(x_n)| / \|x_n\| \leq M/\rho$ volna, ami ellentmondás. Ezért tetszőleges m-hez és x-hez létezik $R > 0, K > 1/m$, hogy f Lipschitz-konstansa $B(x, R)$-en legfeljebb K. Ebből $\|p^x\| \leq K$. $A_{m,k}$ definíciójából és (2.1)-ből következik, hogy $\forall r > 0$ $\exists h \in X$, hogy

$$f(x+h) - f(x) > \|h\| / m + (h, p^x) \text{ és } \|h\| < \min(r, R/2).$$

$A_{m,k}$ x-beli porozitásához elég megmutatni, hogy ilyen h-ra

$$B(x+h, \|h\| / 3Km) \cap A_{m,k} = \varnothing.$$

Tegyük fel indirekt, hogy e halmaznak létezik y eleme. Ekkor $f(x) - f(y) \geq (x - y, p^y)$. Ebből

$$f(x+h) - f(y) \quad > \quad (h, p^x) + (x - y, p^y) + \|h\| / m$$

$$= \quad ((x+h)-y, p^x) + (x-y, p^y - p^x) + \|h\|/m$$

Mivel $\|(x+h)-y\| < \|h\|/3Km$, $\|x-y\| < 2\|h\|$, $\|p^x\| \leq K$ és $\|p^x - p^y\| < \frac{1}{6m}$ azért kapjuk, hogy $f(x+h) - f(y) > \|h\|/3m$. Másrészt $x+h, y \in B(x,R)$, ezért $f(x+h) - f(y) \leq K\|(x+h)-y\| < \|h\|/3m$, ami ellentmondás. □

2.2 Lokális kompaktság és szigma-porozitás

Jelen fejezetben azt fogjuk megvizsgálni, hogyan jellemezhetők Banach-terek altereiben a (σ-)porózus halmazok. Ehhez szükségünk lesz a következő porozitásfogalmakra (a továbbiakban gömb alatt mindig nyílt gömböt értünk):

2.2.1 Definíció (gömbre nézve porózus)
Legyen (X,ρ) metrikus tér, $B \subseteq X$, $x \in B$. Legyen $S \subseteq X$ olyan gömb, melynek x a határán fekszik (azaz $x \in \overline{S} \setminus S$). Azt mondjuk, hogy B S-re nézve porózus *x-ben, ha $\exists \gamma > 0$, hogy $\forall \varepsilon > 0$-hoz léteznek $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S$ gömbök úgy, hogy* $x \in \overline{S}_2 \setminus S_2$, $S_1 \cap B = \emptyset$, $\varepsilon > \operatorname{diam} S_1 \geq \gamma \cdot (\operatorname{diam} S_2)$

2.2.2 Definíció (totális porozitás)
Legyen (X,ρ) metrikus tér, $B \subseteq X$, $x \in B$. A B halmaz totálisan porózus *x-ben, ha minden olyan gömbre nézve porózus x-ben, melynek x a határán fekszik.*

Agronsky és Bruckner [1] az altér lokális kompaktsága és az altérben kompakt halmazok porozitása közötti alábbi összefüggést mutatták meg:

2.2.3 Tétel
Legyen $(X, \|\cdot\|)$ szeparábilis Banach-tér, $A \subseteq X$ legalább két elemű konvex részhalmaz. A-nak pontosan akkor létezik B kompakt, nem porózus részhalmaza, ha A lokálisan kompakt. Ha A lokálisan kompakt, akkor B sehol sem sűrűnek és nem-σ-porózusnak is választható. Ha A nem lokálisan kompakt, akkor A minden kompakt részhalmaza totálisan porózus.

A fenti (2.2.3) tételben és a fejezet során végig az ($A \subseteq X$) altérben lévő halmazok topológiai és metrikus (gömb, porozitás) tulajdonságai alatt mindig az altérre megszorított topológiában tekintett megfelelő tulajdonságokat értjük. A tétel bizonyításához szükségünk lesz Banach és Mazur következő eredményére, melynek bizonyítása megtalálható pl. [11]-ban (az egyszerűség kedvéért jelölje a továbbiakban C a $[0,1]$ intervallumon folytonos függvények terét, ellátva a szokásos normával, $I_0 = [0,1]$):

2.2.4 Tétel (Banach-Mazur)

Ha X tetszőleges szeparábilis Banach-tér, akkor létezik ϕ lineáris izometria X-ről C egy zárt alterébe.

Agronsky és Bruckner eredményét két tételben bizonyítjuk. Az elsőhöz felhasználjuk az alábbi könnyen igazolható állítást:

2.2.5 Állítás

Ha A konvex, zárt részhalmaza az X szeparábilis Banach-térnek, és A tartalmaz kompakt gömböt, akkor A-ban minden zárt gömb kompakt.

2.2.6 Tétel

Legyen $(X, \|\cdot\|)$ szeparábilis Banach-tér, $A \subseteq X$ zárt, nem lokálisan kompakt konvex részhalmaz, melynek legalább két pontja van. Ha $B \subseteq A$ kompakt, akkor B totálisan porózus.

Bizonyítás:

A (2.2.4) Banach-Mazur tétel miatt feltehető, hogy $X = C$. Legyen $g \in B$, S olyan gömb, melynek g a határán fekszik, S középpontja u. Feltehető, hogy $\operatorname{diam} S < 1$. Legyen $\varepsilon > 0$. A (2.2.5) állítás miatt $\overline{S}$ nem kompakt. Ezért létezik olyan $\beta > 0$, hogy $\forall\delta > 0$-hoz $\exists f \in S$ és $x, y \in I_0, |x - y| < \delta$, hogy $|f(x) - f(y)| \geq \beta$. Legyen $v = \alpha u + (1 - \alpha) g$ az u-nak és g-nek olyan konvex kombinációja, hogy $\|v - g\| = \alpha \|u - g\| < \varepsilon/2$ (α-t elég kicsinek választva ez elérhető). Igazolható, hogy $S_2 = S(v, \|v - g\|) \subseteq S$, és g az S_2 határán fekszik. Megadunk egy olyan $S_1 \subseteq S_2$ gömböt, melyre $S_1 \cap B = \emptyset$, $\operatorname{diam} S_1 > \frac{\beta}{12} \cdot \operatorname{diam} S_2$. Legyen ω B-nek folytonossági modulusa. Ekkor $\alpha = \|v - g\|/2$, $\delta = \omega^{-1}\left(\frac{\alpha\beta}{6}\right)$ jelöléssel léteznek $x, y \in I_0$, $h \in S_2$, hogy $|x - y| < \delta$, $|h(x) - h(y)| > 5\omega(\delta)$ és $\|h - v\| < \alpha$. Legyen $S_1 = S(h, \omega(\delta))$. Ekkor $S_1 \subseteq S_2$, mivel $\omega(\delta) = \frac{\alpha\beta}{6} < \alpha$. Az $S_1 \cap B = \emptyset$ belátásához vegyük észre, hogy ha $f \in A \cap S_1$, akkor $|f(x) - f(y)| > |h(x) - h(y)| - |f(x) - h(x)| - |f(y) - h(y)| > 2\omega(\delta)$, tehát $f \notin B$. Mivel $\|v - g\| < \varepsilon/2$, azért $\varepsilon > \operatorname{diam} S_1 = \frac{\alpha\beta}{3} = \frac{\beta}{12} 4\alpha = \frac{\beta}{12}(\operatorname{diam} S_2)$, és ezzel beláttuk, hogy B totálisan porózus. □

A következő tétel arról szól, hogy fent kompakt részhalmaz helyett nem vehetünk sehol sem sűrűt. (Ha minden sehol sem sűrű halmaz is totálisan porózus volna, akkor nem lokálisan kompakt terekben az első kategóriájú halmazok megegyeznének a σ-porózusakkal.)

2.2.7 Tétel

Legyen $(X, \|\cdot\|)$ szeparábilis Banach-tér, $A \subseteq X$ konvex részhalmaz, melynek legalább két eleme van. Ha $S \subseteq A$ tetszőleges gömb, akkor létezik $B \subseteq S$ zárt, sehol sem sűrű, nem-σ-porózus részhalmaz.

Bizonyítás:

Ismét felhasználva a (2.2.4) Banach-Mazur tételt, feltehető, hogy $X = C$. Legyenek $f, g \in S$, $f \neq g$ tetszőlegesek, $x_0 \in I_0$, $f(x_0) < g(x_0)$ (feltehető, hogy ilyen létezik). Tkadlec [21]-ban közölt tétele alapján létezik $E \subseteq (f(x_0), g(x_0))$ zárt, sehol sem sűrű, nem-σ-porózus részhalmaz. Legyen $B \doteq \{s \in S : s(x_0) \in E\}$. Megmutatjuk, hogy ez jó. Könnyen látható, hogy B sehol sem sűrű és zárt A-ban. Tegyük fel, hogy $B = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$. Belátjuk, hogy valamelyik B_k nem porózus valamely $h \in B_k$ pontjában.

Legyen $E_k \doteq \{y \in E : \exists s \in B_k \; s(x_0) = y\}$. Ekkor $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$, mivel S konvex. Tehát $\exists k$, $\exists z \in E_k$, hogy E_k nem porózus z-ben. Az f és g függvények megfelelő konvex kombinációját képezve kaphatunk olyan $h \in S$-et, melyre $h(x_0) = z$. Megmutatjuk, hogy B nem porózus h-ban. Legyen $\varepsilon > 0$ olyan, hogy $f(x_0) < h(x_0) - \varepsilon < h(x_0) + \varepsilon < g(x_0)$. Némi számolással belátható, hogy ha valamely $v \in A$-ra $S(v, \delta) \subseteq S(h, \varepsilon)$, és $\gamma_1 = \frac{\|g-h\|+\varepsilon}{g(x_0)-h(x_0)-\varepsilon}$, $\gamma_2 = \frac{\|f-h\|+\varepsilon}{h(x_0)-\varepsilon-f(x_0)}$, akkor $\forall y \in [v(x_0), v(x_0) + \frac{\delta}{\gamma_1}]$ $\exists w \in S(v, \delta) \cap A$, hogy $w(x_0) = y$, és $\forall u \in [v(x_0) - \frac{\delta}{\gamma_2}, v(x_0)]$ $\exists l \in S(v, \delta) \cap A$, $l(x_0) = u$. Jelölje $\gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$. Legyen adva $\eta > 0$. Mivel E_k nem porózus $h(x_0)$-ban, az (1.1.2) definíció alapján létezik $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, hogy ha $I \subseteq (h(x_0) - \varepsilon_1, h(x_0) + \varepsilon_1)$, $|I| \geq \eta\varepsilon_1$, akkor $I \cap E_k \neq \emptyset$. Tegyük fel, hogy $M \subseteq A$ olyan gömb, melynek h a határán fekszik és $\operatorname{diam} M < \varepsilon_1$. Ha $S(v, \delta) \subseteq M$, akkor $(v(x_0) - \delta, v(x_0) + \delta) \subseteq (h(x_0) - \varepsilon_1, h(x_0) + \varepsilon_1)$, ezért ha $\frac{\delta}{\gamma} \geq \eta\varepsilon_1$ is teljesül, akkor mivel $\gamma > 1$, létezik $y \in \left(v(x_0) - \frac{\delta}{\gamma}, v(x_0) + \frac{\delta}{\gamma}\right) \cap E_k$. Viszont γ definíciója alapján $\exists w \in S(v, \delta) \cap A$, hogy $w(x_0) = y$. Tehát $w \in B_k$, $S(v, \delta) \cap B_k \neq \emptyset$. Így beláttuk, hogy $\exists \varepsilon_1$, hogy $\forall \eta > 0$-ra, minden M gömbre, melynek h a határán fekszik, és minden $S \subseteq M$ gömbre, melyre $\varepsilon_1 > \operatorname{diam} S > 2\gamma\eta \operatorname{diam} M$, teljesül, hogy $S \cap B_k \neq \emptyset$, tehát B_k nem $2\gamma\eta$-porózus h-ban $\forall \eta > 0$-ra, így B_k nem porózus h-ban. □

2.2.8 Következmény

(A (2.2.3) állítás másik iránya) Ha X szeparábilis Banach-tér, $A \subseteq X$ lokálisan kompakt, konvex részhalmaz, melynek legalább két eleme van, akkor A-ban minden zárt gömb tartalmaz kompakt, sehol sem sűrű nem-σ-porózus részhalmazt.

3.

Nullmértékű és első kategóriájú halmazok

A továbbiakban a számegyenesre mint alaphalmazra szorítkozva azt fogjuk vizsgálni, milyen párhuzam vonható a nullmértékű és első kategóriájú valamint a σ-porózus halmazok között, ill. miben különböznek egymástól ezek a halmazcsaládok.

3.1 Néhány érdekesség

Jelen fejezetben Oxtoby [13] segítségével áttekintjük a nullmértékű és az első kategóriájú halmazok néhány érdekes tulajdonságát.

3.1.1 Mindkét halmaztulajdonság – mint azt a bevezetőben is említettük – egyfajta „kicsiség”-et jelent. Az első kategóriájú halmazok esetén ez például azt jelenti, hogy megszámlálható sok belőlük nem tölthet ki egy intervallumot. Másrészről, ha egy intervallumban véletlenszerűen választunk ki egy pontot, akkor annak adott részintervallumba esésének valószínűsége a részintervallum hosszával arányos, egy nullmértékű halmazba esésének valószínűsége pedig 0. Az, hogy egyik halmazcsalád sem tartalmazza a másikat, következik az alábbi tételből:

3.1.2 Tétel

A számegyenes felbontható A és B diszjunkt halmazokra úgy, hogy A első kategóriájú, B pedig nullmértékű.

Bizonyítás:

Legyen $r_1, r_2, \ldots$ a racionális számok (vagy tetszőleges sűrű megszámlálható halmaz) egy felsorolása, $I_{i,j} \doteq (r_i - 1/2^{i+j}, r_i + 1/2^{i+j})$. Legyen $G_j = \cup_{i=1}^{\infty} I_{i,j}$ minden j-re és $B = \cap_{j=1}^{\infty} G_j$. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik j, hogy $1/2^j < \varepsilon$, és mivel $B \subseteq \cup_i I_{i,j}$ és $\sum_i |I_{i,j}| = \sum_i 1/2^{i+j} = 1/2^j < \varepsilon$, azért B nullmértékű. Másrészt G_j sűrű nyílt $(\forall j)$, ezért G_j^c sehol sem sűrű, így $A \doteq B^c = \cup_j G_j^c$ első kategóriájú. □

3.1.3 Megjegyzés

Az előbbi tételben a számegyenes tetszőleges nullmértékű sűrű G_δ részhalmaza választható B-nek.

3.1.4 Lemma

A számegyenes tetszőleges nem-megszámlálható G_δ részhalmaza tartalmaz sehol sem sűrű, zárt, nullmértékű részhalmazt, mely folytonosan ráképezhető a $[0, 1]$-re.

Bizonyítás:

Cantor-jellegű konstrukcióval belátható. □

Konstruálható olyan (B-vel jelölt) ún. *Bernstein-halmaz*, melyre B és B^c is metszi a számegyenes minden nem-megszámlálható zárt részhalmazát.

3.1.5 Tétel

*Tetszőleges B Bernstein-halmaz nem mérhető és nem Baire-tulajdonságú (*Baire-tulajdonságúnak *nevezünk egy halmazt, ha van olyan nyílt halmaz, mellyel vett szimmetrikus differenciája első kategóriájú). Sőt, B és B^c minden mérhető halmaza nullmértékű és minden Baire-tulajdonságú részhalmaza első kategóriájú.*

Bizonyítás:

A mértékre vonatkozó állítás következik abból, hogy a Lebesgue-mérték belülről kompakt reguláris. Könnyen látható, hogy ha $A \subseteq B$ Baire-tulajdonságú, akkor A előáll $E \cup P$ alakban, ahol E G_δ, P első kategóriájú. A (3.1.4) lemma miatt itt E csak megszámlálható lehet. Ezért A első kategóriájú. □

3.1.6 Következmény

Minden pozitív külső mértékű halmaz tartalmaz nem-mérhető részhalmazt. Minden második kategóriájú halmaz tartalmaz nem Baire-tulajdonságú részhalmazt.

Bizonyítás:

Az adott halmazt A-val jelölve, $A \cap B$ vagy $A \cap B^c$ valamelyike megfelel. □

3.1.7 A nullmértékű halmazok és az első kategóriájú halmazok családja között sok hasonlóság van. Mindkét halmazcsalád σ-ideál, mely tartalmazza a megszámlálható halmazokat. Mindkettő tartalmaz kontinuum számosságú halmazokat is. Mindkettő számossága $2^{\mathfrak{c}}$. Egyiknek sem eleme egyetlen intervallum se, mindkét ideál tetszőleges elemének komplementere sűrű. Mindkét halmazcsalád eltolás-invariáns. Tetszőleges nullmértékű ill. tetszőleges első kategóriájú halmazt tartalmaz a megfelelő σ-ideál egy-egy Borel eleme (sőt G_δ ill. F_σ eleme).

Erdős és Sierpinski nevéhez fűződik a két σ-ideál közötti, a fentiekből (is) sejthető párhuzam pontos megfogalmazása, az ún. *dualitási elv*, mely tisztán halmazelméleti alapon bizonyítható:

3.1.8 Tétel (Dualitási elv)

Legyen P tetszőleges olyan állítás, mely a „nullmértékű" és az „első kategóriájú" kifejezéseken túl csak tisztán halmazelméleti fogalmakat tartalmaz. Legyen P^* az az állítás, melyet úgy kapunk P-ből, hogy a „nullmértékű" és az „első kategóriájú" kifejezéseket mindenütt felcseréljük egymással. Ekkor, ha feltesszük a kontinuum-hipotézist, P és P^* ekvivalens egymással.

A dualitási elv alapján sok hasznos és érdekes állítást fogalmazhatunk meg (a számegyenesre vonatkozóan). Példának okáért álljon itt néhány (az első kettő kivételével mindenütt szükséges feltenni a kontinuum-hipotézist):

3.1.9 Állítás

Tetszőleges nullmértékű halmaz komplementerében van kontinuum számosságú nullmértékű halmaz.

Bizonyítás:

Minden nullmértékű halmaz komplementerében van nem-megszámlálható zárt halmaz, ami (3.1.4) miatt tartalmaz (zárt) kontinuum számosságú nullmértékű halmazt. □

3.1.10 Állítás (duális)

Tetszőleges első kategóriájú halmaz komplementerében van kontinuum számosságú első kategóriájú halmaz.

Bizonyítás:

Minden első kategóriájú halmaz komplementere tartalmaz egy nem-megszámlálható G_δ-halmazt. A (3.1.4) lemma miatt ez tartalmaz egy kontinuum számosságú sehol sem sűrű részhalmazt. □

3.1.11 Állítás

Minden második kategóriájú halmaz tartalmaz egy kontinuum számosságú részhalmazt úgy, hogy annak minden nem-megszámlálható részhalmaza második kategóriájú. (Ez a részhalmaz az ún. Lusin-halmaz.*)*

Bizonyítás:

A dualitási elvhez használt (tisztán halmazelméleti) meggondolással belátható. □

3.1.12 Állítás (duális)

Minden pozitív külső mértékű halmaz tartalmaz egy kontinuum számosságú részhalmazt úgy, hogy annak minden nem-megszámlálható részhalmaza pozitív külső mértékű.

3.1.13 Állítás

Ha E második kategóriájú, akkor tartalmaz kontinuum sok diszjunkt második kategóriájú részhalmazt.

Bizonyítás:

Legyen f kölcsönösen egyértelmű leképezés $\mathbb{R}^2$ és E egy Lusin-részhalmaza között. Az állítás következik abból, hogy a síknak van kontinuum sok diszjunkt nem-megszámlálható részhalmaza. □

3.1.14 Állítás (duális)

Minden pozitív külső mértékű halmaz tartalmaz kontinuum sok diszjunkt pozitív külső mértékű részhalmazt.

Az utolsó két állításról látni fogjuk, hogy σ-porózus megfelelője is igaz, vagyis a számegyenes tartalmaz kontinuum sok páronként diszjunkt nem-σ-porózus (perfekt) halmazt (ld. [16]).

3.2 Párhuzam és eltérés a szigma-porózus halmazok szigma-ideáljától

Zajiček ([25]) vetette fel a kérdést 1987-ben, hogy rendelkeznek-e a nem-σ-porózus Borel-halmazok azzal a pozitív külső mértékű halmazokra jellemző tulajdonsággal, mely szerint ezek tartalmaznak ugyanolyan tulajdonságú zárt részhalmazt. A választ 4 évvel később Zelený adta meg ([29]) a következő formában:

3.2.1 Tétel

Teljes metrikus tér nem-σ–porózus Szuszlin részhalmaza tartalmaz zárt nem-σ-porózus részhalmazt.

A bizonyítás igen bonyolult és hosszadalmas, ezért itt nem közöljük.

Zajiček nevéhez fűződik az az eredmény, mely a σ-porózus halmazok nullmértékű halmazokkal való hasonlóságát mutatja. Egy nullmértékű halmaz lefedhető megszámlálható sok akármilyen kis összhosszúságú intervallummal. Egy σ-porózus halmazra pedig az igaz, hogy $0 < c < 1/2$ esetén előáll megszámlálható sok (x, c)-porózus halmaz uniójaként (a definíciót ld. (1.3.18)).

3.2.2 Tétel

Legyen (P, ρ) metrikus tér, $M \subseteq P$ σ-porózus halmaz, $0 < c < 1/2$. Ekkor M egyben (x, c)-σ-porózus is.

Bizonyítás:

Könnyen látható, hogy létezik $M = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$ előállítás, ahol B_k $(x, 1/k)$-porózus (ld. (1.3.22) lemma). Ezért a tételt elég belátni arra az esetre, ha M (x, a)-porózus valamely $0 < a \leq 1$-re. Az (1.3.18) és (1.3.19) definíciókból rögtön következik, hogy ekkor M egyben $\langle 2x/a \rangle$-porózus is. Ha $f = 2x/a$, $h = x/2c$, akkor $h^{(n)}(x) = h \circ \ldots \circ h(x) \geq f(x)$ elég nagy n-re, amiből belátható, hogy következik M $\langle x/2c \rangle$-σ-porozitása, így (1.3.21) alapján M (x, c)-σ-porózus is. □

A σ-porózus halmazok is rendelkeznek az első kategóriájú halmazokra jellemző azon tulajdonsággal, hogy akárhány nyílt halmazt véve közülük az azokból képezett unió megőrzi a megfelelő tulajdonságot. Első kategóriájú halmazokra ez az ún. *Banach-kategória-tétel*, melyet Oxtoby [13] is közöl.

3.2.3 Tétel (Banach-kategória)

Tetszőleges topologikus térben akárhány nyílt első kategóriájú halmaz uniója is első kategóriájú.

Bizonyítás:

Legyen G a $\mathcal{G}$ nem üres, nyílt, első kategóriájú halmazokból álló halmazrendszer uniója. Legyen $\mathcal{F} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ nem üres diszjunkt nyílt halmazok maximális rendszere azzal a tulajdonsággal, hogy mindegyikük benne van valamelyik $\mathcal{G}$-beli halmazban. Ekkor $\overline{G} \setminus \cup\mathcal{F}$ sehol sem sűrű zárt halmaz, ugyanis ha $\operatorname{int}\left(\overline{G} \setminus \cup\mathcal{F}\right) = W \neq \varnothing$ volna, akkor $W \cap G \neq \varnothing$ is teljesülne, tehát $W \cap G$-nek $\mathcal{G}$ alkalmas elemébe metsző részét hozzávehetnénk $\mathcal{F}$-hez, ami ellentmond $\mathcal{F}$ maximalitásának. Minden U_α felírható $U_\alpha = \cup_{n=1}^{\infty} N_{\alpha,n}$ alakban, ahol $N_{\alpha,n}, \alpha \in A, n \in \mathbb{N}$ sehol sem sűrű. Legyen $N_n = \cup_{\alpha\in A} N_{\alpha,n}$. Ha egy U nyílt halmaz belemetsz N_n-be, akkor valamelyik $N_{\alpha,n}$-be is belemetsz, ezért létezik V nem üres nyílt halmaz, melyre $V \subseteq (U \cap U_\alpha) \setminus N_{\alpha,n}$, következésképpen $V \subseteq U \setminus N_n$ – vagyis N_n sehol sem sűrű. Ezért

$$G \subseteq \left(\overline{G} \setminus \cup\mathcal{F}\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha\right) = \left(\overline{G} \setminus \cup\mathcal{F}\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right)$$

első kategóriájú. □

3.2.4 Tétel

Tetszőleges metrikus térben akárhány nyílt σ-porózus halmaz uniója is σ-porózus.

Bizonyítás:

Azt fogjuk felhasználni, hogy minden metrikus tér parakompakt (ld. például [18], [9]), amiből következik, hogy a tér tetszőleges nyílt fedésének van olyan finomítása, mely előáll megszámlálható sok, nyílt halmazokból álló olyan halmazcsalád egyesítéseként, melyek mindegyike lokálisan véges. Belátható, hogy a lokálisan végesség helyett azt is megkövetelhetjük, hogy minden pontnak létezzék olyan környezete, mely a halmazcsaládnak csak egy elemébe metsz bele, vagyis hogy létezzék σ-diszkrét finomítás. Ekkor ha $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$ a tételbeli nyílt σ-porózus halmazok rendszere, akkor az uniójukra megszorítva a metrikát egy olyan metrikus teret kapunk, amelynek $\mathcal{U}$ egy nyílt fedése. Alkalmazva a fentieket kapjuk ennek egy $\mathcal{W} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{W}_n$, (szintén) nyílt σ-porózus halmazokból álló σ-diszkrét finomítását, ahol tehát a $\mathcal{W}_n$ halmazcsaládok diszkrétek. Megmutatjuk, hogy adott n esetén $\cup\{W : W \in \mathcal{W}_n\}$ σ-porózus. Legyen tehát n rögzített és jelölje $(W_\beta)_{\beta\in B}$ a $\mathcal{W}_n$-beli halmazok összességét. Ekkor $\forall\beta \in B$ a W_β halmaz felírható $W_\beta = \cup_{k=0}^{\infty} P_{\beta,k}$ alakban, ahol $\forall k$-ra $P_{\beta,k}$ porózus. Megmutatjuk, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $P_k = \cup_{\beta\in B} P_{\beta,k}$ is porózus. Legyen $x \in P_k$ tetszőleges. Ekkor elég kis $\varepsilon > 0$ esetén $B(x, \varepsilon)$ pontosan egy $\beta \in B$ esetén metsz bele $P_{\beta,k}$-ba, így P_k x-beli porozitása $P_{\beta,k}$ porozitásából következik. Mivel $\cup\{W : W \in \mathcal{W}_n\} = \cup\{W_\beta : \beta \in B\} = \cup_{k=0}^{\infty} P_k$, azért a halmaz σ-porózus, és ezt akartuk belátni. □

3.2.5 Tkadlec [21] cikkében az első kategóriájú és nullmértékű halmazok ($\mathcal{A}$-val jelölt) σ-ideáljának következő tulajdonságait vizsgálta meg a σ-porózus halmazok esetére:

(i) Ha A az $\mathcal{A}$-hoz nem tartozó Borel-halmaz, akkor $A+A$ tartalmaz intervallumot;

(ii) $\mathcal{A}$-hoz nem tartozó Borel-halmazok diszjunkt családja csak megszámlálható lehet.

Az állítások analógja már a σ-porózus perfekt halmazok körében sem igaz. A bizonyítás Tkadlecnek egy olyan konstrukcióján alapul, mely általános módszert nyújt perfekt nem-σ-porózus halmaz megadására. A konstruált S halmaz rendelkezni fog azzal a tulajdonsággal, hogy ha azon pontjait, melyekben porózus (ezeket $P(S)$-sel jelöljük), tartalmazza egy U G_δ-halmaz, akkor U nem lehet σ-porózus. Ebből következik, hogy S sem σ-porózus (ui. perfekt, tehát G_δ); valamint az is, hogy létezik olyan porózus halmaz, mely nincs benne σ-porózus G_δ-ban – ami pozitív válasz Humke korábban felvetett (1.1.9) problémájára.

3.2.6 A konstrukcióhoz szükségünk lesz természetes számoknak egy olyan nemcsökkenő $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozatára, melyre $\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$; valamint minden R zárt intervallum és n pozitív egész esetén R zárt részintervallumainak adott véges $\mathcal{D}_n(R)$ rendszerére. Ezután tetszőleges R zárt intervallum és n pozitív egész szám esetén definiáljuk R egymásba nem nyúló zárt részintervallumainak $\mathcal{R}_n(R)$ rendszerét. A továbbiakban tetszőleges D zárt intervallum, $r>0$ szám esetén jelölje $r*D$ a D-vel koncentrikus, r-szeres hosszúságú zárt intervallumot. Legyen E a 2^k*D, $k=0,...,k_n$, $D\in\mathcal{D}_n(R)$ alakú intervallumok azon végpontjainak halmaza, melyek $\operatorname{int} R$-be esnek. Ezek tehát R-et $1+\operatorname{card} E$ egymásba nem nyúló (nem-elfajult) zárt részintervallumra osztják. Legyen $\mathcal{R}_n(R)$ ezen intervallumok közül azok összessége, melyek nem részei egyetlen $\mathcal{D}_n(R)$-beli intervallumnak sem. Ha $[a,b]$ adott zárt intervallum, akkor definiáljuk indukcióval minden n pozitív egészre az $\mathcal{R}_n$ egymásba nem nyúló zárt intervallumokból álló rendszert: $\mathcal{R}_0=\{[a,b]\}$, $\mathcal{R}_n=\cup\{\mathcal{R}_n(R): R\in\mathcal{R}_{n-1}\}$.

3.2.7 Tétel

Tegyük fel, hogy minden pozitív egészre és minden R zárt intervallumra $\mathcal{D}_n(R)$ rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

$(F1)$ Ha $D\in\mathcal{D}_n(R)$, akkor $2^{k_n+1}*D\subseteq R$;

$(F2)$ Ha valamely $k\in\{0,...,k_n\}$, $D_1,D_2\in\mathcal{D}_n(R)$ esetén $\left(2^k*D_1\right)\cap\left(2^k*D_2\right)\neq$

$\emptyset$, akkor létezik $D \in \mathcal{D}_n(R)$, hogy $\left(2^k * D_1\right) \cup \left(2^k * D_2\right) \subseteq 2^k * D$.
Ekkor az

$$S = \bigcap_{n=0}^{\infty} \cup \{R : R \in \mathcal{R}_n\} \tag{3.1}$$

halmaz perfekt, sehol sem sűrű, és ha $U \supseteq P(S)$ G_δ, akkor U nem-σ-porózus; következésképpen S nem-σ-porózus halmaz.

Most térjünk rá a (3.2.5)-ban említett (i) tulajdonság vizsgálatára, ha $\mathcal{A}$ a σ-porózus halmazok σ-ideálja.

3.2.8 Tétel

Létezik olyan S perfekt, nem-σ-porózus halmaz, hogy tetszőleges $(c_1, ..., c_i)$ véges sorozatra a $\sum_{j=1}^{i} c_j S$ halmaz nullmértékű, vagyis tetszőleges C megszámlálható halmazra a

$$\{\sum_{j=1}^{i} c_j s_j : i \in \mathbb{N}, c_j \in C, s_j \in S\}$$

halmaz nem tartalmaz intervallumot.

Bizonyítás:

Az S halmazt a fenti (3.2.6) konstrukcióval adjuk meg. Legyen adva $R = [c, d]$, $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor minden N pozitív egészhez hozzárendeljük R zárt részhalmazainak egy $\mathcal{D}_n(R, N)$ rendszerét úgy, hogy $|R \setminus \cup\mathcal{D}_n(R, N)| \leq n \cdot 3^{-N} \cdot |R|$, valamint definiálunk egy (R-től és N-től független) P_n egyváltozós polinomot. Ehhez legyen d_m, $m = 0, \pm 1, ..., \pm N, N+1$ R-beli pontok egy olyan véges sorozata, hogy
$[d_0, d_1] = \frac{1}{2} * [c, d]$;
$d_{-m} - c = \frac{1}{3}(d_{-m+1} - c)$, $m = 1, ..., N$;
$d - d_m = \frac{1}{3}(d - d_{m-1})$, $m = 2, ..., N+1$.
Ekkor $|(c, d_{-N})| = |(d_{N+1}, d)| = \frac{1}{4} \cdot 3^{-N} \cdot |R|$, tehát vehetünk minden (d_m, d_{m+1}) intervallumban ($m = 0, \pm 1, ..., \pm N$) egy-egy zárt részintervallumot úgy, hogy ezek összességét $\mathcal{D}_1(R, N)$-nek definiálva $|R \setminus \cup\mathcal{D}_1(R, N)| \leq 3^{-N} \cdot |R|$. $P_1(N) \doteq 2N + 1$, $\mathcal{D}_1(R, N)$ elemeinek száma.
Legyen $n > 1$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy minden R' zárt intervallumra és N pozitív egészre $\mathcal{D}_{n-1}(R', N)$-et már definiáltuk. Osszuk fel $\mathcal{D}_1(R, N)$ minden D elemét a $2^{-k} * D$, $k = 0, ..., n-1$ intervallumok végpontjaival $2n - 1$ darab egymásba nem nyúló zárt részintervallumra. Álljon $\mathcal{D}_n(R, N)$ az ilyen I intervallumokból létrehozott $\mathcal{D}_{n-1}(I, N)$ intervallumok rendszeréből, hozzávéve még

a $2^{-n-1} * D$, $D \in \mathcal{D}_1(R,N)$ alakú intervallumokat. Ekkor

$$\begin{aligned} |R \setminus \cup\mathcal{D}_n(R,N)| &\leq \left(3^{-N} + (n-1)\,3^{-N}\right) \cdot |R| = n \cdot 3^{-N} \cdot |R|, \\ P_n(N) &\doteq \operatorname{card}\mathcal{D}_n(R,N) = (2N+1)\left(1 + (2n-1)\,P_{n-1}(N)\right). \end{aligned}$$

Az S közvetlen, (3.2.6)-beli konstrukciójához szükséges intervallumrendszerekre legyen $\mathcal{D}_n(R) = \mathcal{D}_n(R, N_n)$, ahol $N_n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $(\operatorname{card}\mathcal{R}_n)^n \cdot |\cup\mathcal{R}_n| \leq 1/n$ minden pozitív n-re. (Ilyet azért lehetséges választani, mert ha $k_n = n-1$, akkor $(\operatorname{card}\mathcal{R}_n)^n \cdot |\cup\mathcal{R}_n| \leq ((2nP_n(N_n)+1)\operatorname{card}\mathcal{R}_{n-1})^n \cdot n \cdot 3^{-N_n} \cdot |\cup\mathcal{R}_{n-1}|)$. A (3.2.7) állítás alapján a (3.1) módon definiált S halmaz nem-σ-porózus. Az előbbiek szerint

$$\begin{aligned} \left|\sum_{j=1}^{i} c_j S\right| &\leq \left|\sum_{j=1}^{i} c_j\left(\cup\mathcal{R}_n\right)\right| = \left|\bigcup_{R_1\in\mathcal{R}_n} \cdots \bigcup_{R_i\in\mathcal{R}_n} \sum_{j=1}^{i} c_j R_j\right| \\ &\leq \sum_{R_1\in\mathcal{R}_n} \cdots \sum_{R_i\in\mathcal{R}_n} \sum_{j=1}^{i} |c_j| \cdot |R_j| \leq \\ &\leq i \cdot \max\{|c_j| : j = 1,\dots,i\} \cdot (\operatorname{card}\mathcal{R}_n)^i \cdot |\cup\mathcal{R}_n| \\ &\leq \frac{i}{n} \cdot \max\{|c_j| : j = 1,\dots,i\} \cdot (\operatorname{card}\mathcal{R}_n)^{i-n}, \end{aligned}$$

tehát $\left|\sum_{j=1}^{i} c_j S\right| = 0$. □

A (3.2.5)-beli (ii) tulajdonság sem teljesül a σ-porózus halmazok σ-ideáljára. Ezt az alábbi tétel egy következményeként kapjuk:

3.2.9 Tétel

Legyen K első kategóriájú halmaz. Ekkor létezik K-tól diszjunkt S perfekt, nullmértékű, nem-σ-porózus halmaz.

Bizonyítás:

Elegendő azt megmutatni, hogy minden F_σ, teljes mértékű K első kategóriájú halmazhoz létezik tőle diszjunkt S perfekt, nem-σ-porózus halmaz. Legyen $K = \cup_{m=1}^{\infty} F_m$, ahol F_m $(m = 1, 2, \dots)$ sehol sem sűrű zárt. Először adott n pozitív egészhez, R zárt intervallumhoz, melyre $K \cap \partial R = \emptyset$, adunk meg minden m pozitív egészre egy $\mathcal{D}_n(R,m)$, az R zárt részintervallumaiból álló véges rendszert úgy, hogy $F_m \cap R \subseteq \cup\{\operatorname{int} D : D \in \mathcal{D}_n(R,m)\}$. Mivel $F_m \cap \partial R = \emptyset$ és F_m sehol sem sűrű zárt, azért létezik R nem-elfajult zárt részintervallumainak olyan $\mathcal{D}_1(R,m)$ véges, diszjunkt rendszere, melyre az előbbi teljesül és $2 * D \subseteq R$, ha

$D \in \mathcal{D}_1(R,m)$. Mivel K első kategóriájú, azért $\mathcal{D}_1(R,m)$-et úgy is megválaszthatjuk, hogy $K \cap \left[\cup\{\partial\left(2^k * D\right) : k \in \mathbb{Z}, D \in \mathcal{D}_1(R,m)\}\right] = \varnothing$ legyen.

Legyen $n > 1$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy minden R' zárt intervallumra, melyre $K \cap \partial R' = \varnothing$ és m pozitív egészre $\mathcal{D}_{n-1}(R',m)$-et már definiáltuk. Osszuk fel $\mathcal{D}_1(R,m)$ minden D elemét a $2^{-k} * D$, $k = 0, ..., n-1$ intervallumok végpontjaival $2n-1$ darab egymásba nem nyúló zárt részintervallumra, $I_j(D)$-kre, $j = 0, ..., 2n-2$, ahol $I_0(D) = 2^{-n+1} * D$. Álljon $\mathcal{D}_n(R,m)$ az $I_j(D)$, $j = 1, ..., 2n-2$ intervallumokból képezett $\mathcal{D}_{n-1}(I_j(D), m)$ intervallumok rendszeréből, hozzávéve még a $2^{-n+1} * D$, $D \in \mathcal{D}_1(R,m)$ alakú intervallumokat.

Legyen $k_n = n-1$, $\mathcal{D}_n(R) = \mathcal{D}_n(R,n)$ $\forall n \in \mathbb{N}^+$, ha $K \cap \partial R = \varnothing$. Az S halmazt ismét (3.1) alapján konstruáljuk meg, tetszőleges $R = [a,b]$, $K \cap \partial R = \varnothing$ intervallumból kiindulva. A (3.2.7) tétel $(F1)$ és $(F2)$ feltételei és hogy $\forall n \in \mathbb{N}^+$ $(\cup\mathcal{R}_{n+1}) \cap F_n = \varnothing$, könnyen ellenőrizhetők. Ezért $S \cap K = \varnothing$ és a (3.2.7) tétel miatt S perfekt és nem-σ-porózus. $\square$

3.2.10 Következmény

A számegyenesen létezik nem-megszámlálhatóan sok, diszjunkt, perfekt, nem-σ-porózus halmaz.

Bizonyítás:

Transzfinit indukcióval következik a fenti tételből. $\square$

3.2.11 Megjegyzés

Az előbbi következményben nem-megszámlálható helyett kontinuumot is írhatunk (ld. [16]).

Bizonyítás:

Tkadlec fentiekben bizonyított (3.2.8) tétele alapján létezik $\mathbb{R}$-nek olyan S nem-σ-porózus perfekt részhalmaza, hogy $S-S$ első kategóriájú (ugyanis mivel S perfekt, azért $S-S$ is az, és a tétel szerint nullmértékű, tehát sehol sem sűrű.) Ezért létezik G sűrű G_δ-halmaz, melyre $G \cap (S-S) = \varnothing$. Ekkor $G \cup \{0\}$ is sűrű G_δ. Mycielski [12]-ban közölt tétele alapján létezik $D \subseteq \mathbb{R}$ perfekt halmaz, hogy $D - D \subseteq G \cup \{0\}$. Így $(D-D) \cap (S-S) = \{0\}$, tehát minden $t, w \in D$, $t \neq w$ esetén $(t+S) \cap (w+S) = \varnothing$. Mivel D szükségképpen kontinuum számosságú, a tétel ebből következik. $\square$

4.

Példák és konstrukciók

4.1 Teljes metrikus terek

Zajiček [27] azt vizsgálta, hogy az alábbi állítás milyen X terekre igaz:

4.1.1 Állítás
Létezik $F \subseteq X$ sehol sem sűrű, zárt, nem-σ-porózus halmaz.

4.1.2 Megmutatta, hogy ha g tetszőleges porozitás-függvény (ld. (1.3.17)), akkor minden izolált pont nélküli teljes metrikus térben létezik F sehol sem sűrű zárt, nem σ-$\langle g \rangle$-porózus részhalmaz. Ha X szeparábilis, akkor F-et választhatjuk nullmértékűnek is tetszőleges, előre adott lokálisan véges Borel-mértékre nézve. Ha $X = \mathbb{R}$, akkor azt is megkövetelhetjük, hogy F Hausdorff-dimenziója 0 legyen.

4.2 Példa nullmértékű és első kategóriájú nem szigma-porózus halmazra

A σ-porózus halmazok σ-ideáljának alaposabb ismeretéhez nélkülözhetetlen, hogy lássuk, nem azonos egyetlen közismert halmazcsaláddal sem.

4.2.1 Nem-σ-porózus Borel halmazt könnyen konstruálhatunk a következőképpen (Zajiček [25]): $x \in (0, 1)$-et írjuk fel $x = 0, a_1 a_2 \ldots$ alakban, ahol $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot 10^{-i}$, és ha kétféle felírás is létezik, akkor a 0-kat használjuk 9-esek helyett. Ha $a \in$

$\{0,1,...,9\}$ számjegy, akkor legyen

$$d(a,x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{card}\{k:1\le k\le n, a_k=a\}}{n}.$$

4.2.2 Állítás

Legyen $a\in\{1,...,8\}$, $0<d<1$. Ekkor az $A_d=\{x:d(a,x)=d\}$ halmaz nem-σ-porózus Borel.

4.2.3 Foran már említett [5] cikkében olyan folytonos függvényt ad meg, melynek grafikonja nem-σ-porózus. Ez is tehát példa nem-σ-porózus Borel-halmazra.

4.2.4 Egy Cantor-típusú $C(\alpha)$ halmaz esetén részletesen áttekintettük, mikor lesz a halmaz nullmértékű (ha $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$, ld. (1.2.7)), mikor nem-σ-porózus (ha $\alpha_n\to 0$, ld. (1.2.9)), és mivel a konstrukcióból adódóan sehol sem sűrű, ezért pl. $\alpha_n=1/(n+1)$ esetén $C(\alpha)$ nem-σ-porózus, nullmértékű és első kategóriájú halmaz, amint azt már a (1.2.10) következményben is említettük.

4.2.5 Zajiček a [25] írásában említést tesz Konjaginnal való személyes értekezéséről, mely során Konjagin az $E=\{x:\sum_{n=1}^{\infty}|\sin(n!\pi x)|/n\le 1\}$ halmazról mutatta meg, hogy nullmértékű, zárt, és nem-σ-porózus.

4.2.6 A korábbiakban Tkadlec segítségével mutattunk példát S perfekt, sehol sem sűrű halmazra, mely nem-σ-porózus (ld. (3.2.6) konstrukciót és (3.2.7) tételt). Erre a konstrukcióra épül a szintén Tkadlecnél [22] található példa nullmértékű és első kategóriájú, nem-σ-porózus halmazra. Legyen $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ pozitív egészek nemcsökkenő sorozata, melyben minden m pozitív egész pontosan 2^m-szer szerepel. Tetszőleges R korlátos és zárt intervallum valamint n pozitív egész esetén legyen $P_n(R)$ azon pontok összessége, melyek az R intervallumot 2^{k_n+2} egyenlő hosszúságú zárt intervallumra bontják fel. Jelölje $\mathcal{R}_n(R)$ ezen részintervallumok rendszerét, kivéve azokat, melyek tartalmazzák R középpontját. Az $\mathcal{R}_n$ intervallumrendszereket teljes indukcióval definiáljuk: $\mathcal{R}_0=\{[0,1]\}$, $\mathcal{R}_n=\cup\{\mathcal{R}_n(R):R\in\mathcal{R}_{n-1}\}$.

4.2.7 Állítás

A fentiekben definiált $\mathcal{R}_n$ zárt intervallumrendszerekből képzett

$$S=\bigcap_{n=0}^{\infty}\cup\{R:R\in\mathcal{R}_n\}$$

halmaz Lebesgue-nullmértékű, sehol sem sűrű és nem-σ-porózus.

Bizonyítás:
A sehol sem sűrűség a konstrukcióból közvetlenül adódik. S Lebesgue-mértékére

$$|S| = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - 2^{-k_n - 1}\right) = 0,$$

mert $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-k_n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} 2^m \cdot 2^{-m-1} = \infty$.
Ha a (3.2.6) konstrukciót a $\mathcal{D}_n(R) = P_n(R) \cup \{2^{-k_n-1} * R\}$ intervallumrendszerekre alkalmazzuk, akkor épp a (4.2.6)-beli $\mathcal{R}_n$-ekhez ill. a tételbeli S halmazhoz jutunk. Könnyen ellenőrizhető, hogy az így definiált $\mathcal{D}_n(R)$ halmazrendszerek kielégítik a (3.2.7) tétel $(F1)$ és $(F2)$ feltételeit, ezért S nem-σ-porózus. □

Tkadlec [22] cikkében a fenti S halmazt abból a célból hozza létre, hogy megadjon egy olyan véges Borel-mértéket, mely eltűnik a σ-porózus halmazokon és szinguláris a Lebesgue-mértékre (a mérték tartója S lesz). Ilyen mérték létezése azért érdekes, mert ha egy véges Borel-mérték nulla az első kategóriájú és Lebesgue-nullmértékű halmazokon, akkor ebből következik, hogy abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre. Ugyanis mivel egy valós Borel-mérték reguláris, elég azt igazolni, hogy a Lebesgue-nullmértékű zárt halmazokon eltűnik. Ez pedig következik abból, hogy ha egy zárt halmaz Lebesgue-nullmértékű, akkor első kategóriájú. Ezek szerint Tkadlec mértékének létezéséből is következik az, hogy a σ-porózus halmazok σ-ideálja valódi része a nullmértékű és első kategóriájú halmazok σ-ideáljának. A fenti tulajdonságú mérték létrehozásához egy Preiss által megfogalmazott lemmát használ fel:

4.2.8 Lemma

Legyen μ véges Borel-mérték a számegyenes egy S részhalmazán és tegyük fel, hogy μ-re teljesülnek a következők:
(1) Létezik $d > 0$, hogy $\sum \mu(d * I) < \infty$, ha az összegzés $\overline{S}$ korlátos kiegészítő intervallumain fut;
(2) Létezik $c > 1$, $C > 0$ és $\delta > 0$, hogy $\mu(c * I) \leq C\mu(I)$, ha $|I| < \delta$ és I középpontja S-ben van;
(3) A megszámlálható halmazok μ-nullahalmazok.
Ekkor minden σ-porózus P halmazra $\mu(P) = 0$.

Bizonyítás:
Számolás. □

4.2.9 A keresett mértéket indukcióval definiáljuk a (4.2.7)-beli S halmazon, (4.2.6) jelöléseit használva. Először a következő $\tau : \cup_{n=0}^{\infty}\mathcal{R}_n \to [0,1]$ leképezést adjuk meg. $\tau([0,1]) = 1$. Ha $R \in \mathcal{R}_n$ és $R \subseteq R'$, ahol $R' \in \mathcal{R}_{n-1}$, akkor

$$\tau(R) \doteq \begin{cases} 2^{-2k_n-1} \cdot \tau(R'), & \text{ha } R \subseteq 2^{-k_n} * R'; \\ 3 \cdot 2^{-k_n-k-2} \cdot \tau(R'), & \text{ha int } R \subseteq \left(2^{-k+1} * R'\right) \setminus \left(2^{-k} * R'\right) \\ & \text{és } k \in \{1, ..., k_n\} \end{cases}$$

ahol adott R zárt intervallum, $r > 0$ szám esetén $r*R$ jelöli az R-rel koncentrikus, r-szeres hosszúságú zárt intervallumot. Mivel $\sum_{\{R\in\mathcal{R}_n : R\subseteq R'\}} \tau(R) = \tau(R')\ \forall R' \in \mathcal{R}_{n-1}$, azért létezik olyan μ Borel-mérték, melyre $\operatorname{supp}\mu = S$ és $\mu(I) = \tau(I)$, ha $I \in \cup_{n=0}^{\infty}\mathcal{R}_n$.

4.2.10 Tétel

A számegyenesen létezik olyan véges Borel-mérték, mely nullát vesz fel a σ-porózus halmazokon és nem abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve.

Bizonyítás:

A (4.2.9)-ben definiált véges Borel-mértékre $\mu(S) = 1$, $\operatorname{supp}\mu = S$ és a (4.2.7) állítás alapján S Lebesgue-nullmértékű. Tehát elegendő belátnunk, hogy a (4.2.8) lemma feltételei teljesülnek. Mivel μ a megszámlálható halmazokon nyilván eltűnik, azért (3) teljesül. Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{R\in\mathcal{R}_{n-1}} \mu\left(2*\left(2^{-k_n-1}*\operatorname{int}(R)\right)\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{R\in\mathcal{R}_{n-1}} 2^{-2k_n}\mu(R) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2k_n} = \sum_{m=1}^{\infty} 2^m \cdot 2^{-2m} = 1 < \infty, \end{aligned}$$

tehát (1) $d = 2$ választással teljesül.

Tegyük fel, hogy J olyan intervallum, melynek x középpontja S-ben van és $|J| < 2$. Legyen n a legkisebb olyan pozitív egész, melyre léteznek $R' \in \mathcal{R}_n$, $R \in \mathcal{R}_{n-1}$ intervallumok, hogy $x \in R' \subseteq J \cap R$. Legyen $Q = J \cap \cup_{k=0}^{k_n+1}\partial\left(2^{-k} * R\right)$. Két esetet különböztetünk meg:

(i) $\operatorname{card} Q \leq 1$. Ekkor $J \cap \left(2^{-k_n-1} * R\right) = \emptyset$. Legyen K a J által tartalmazott $\mathcal{R}_n$-beli intervallumok száma, ekkor $S \cap (2*J)$-t $2K+5$ darab R_n-beli intervallum fedi le, melyek μ-mértéke legfeljebb kétszerese $\mu(S \cap (2*J))$-nak. Tehát

$$\frac{\mu(2*J)}{\mu(J)} \leq \frac{2(2K+5)}{K} \leq 14.$$

(ii) $\operatorname{card} Q \geq 2$. Legyen $k \in \{1, ..., k_n + 1\}$ a legkisebb olyan egész, hogy $J \cap \partial\left(2^{-k+1} * R\right) \neq \varnothing$. Ekkor $\mu(J) \geq \frac{1}{2}\mu\left(\left(2^{-k+1} * R\right) \smallsetminus \left(2^{-k} * R\right)\right)$ és mivel $2 * J \subseteq 2^{-k+3} * R$, azért

$$\begin{aligned}
\mu(2 * J) &\leq \mu\left(\left(2^{-k+3} * R\right) \smallsetminus \left(2^{-k+2} * R\right)\right) + \mu\left(\left(2^{-k+2} * R\right) \smallsetminus \left(2^{-k+1} * R\right)\right) \\
&\quad + \mu\left(\left(2^{-k+1} * R\right) \smallsetminus \left(2^{-k} * R\right)\right) + \mu\left(2^{-k} * R\right) \\
&\leq (4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 + 1)\, \mu\left(\left(2^{-k+1} * R\right) \smallsetminus \left(2^{-k} * R\right)\right).
\end{aligned}$$

Az (i)-t és (ii)-t összevetve kapjuk, hogy

$$\frac{\mu(2 * J)}{\mu(J)} \leq 44,$$

tehát (2) $c = 2$, $C = 44$, $\delta = 2$ választással teljesül. Így μ valóban nulla a σ-porózus halmazokon. $\square$

Felmerül a kérdés, hogy létezik-e a fenti (4.2.10) tételbeli tulajdonságokkal rendelkező mérték $\mathbb{R}^n$-en, tetszőleges n pozitív egész esetén. Az előbbiekben ismertetett konstrukciót még két dimenzióba sem sikerült közvetlenül átvinni – az eljárás igen erősen kihasználja a számegyenes sajátosságait. Viszont, mint a következőkben látni fogjuk, a Fubini-tétel σ-porózus halmazokra vonatkozó analógja segítségével, melyet Zajiček közölt 1998-ban ([15]), bebizonyítható ilyen mérték létezése.

5.

Fubini-jellegű tétel szigma-porózus halmazokra

5.1 A klasszikus Fubini és Kuratowski-Ulam tétel

A klasszikus Fubini-tételt Rudin [17] megfogalmazásában mondjuk ki. Ha f az $X \times Y$ szorzattéren értelmezett függvény, akkor $x \in X$ esetén jelölje f_x azt az Y-on értelmezett függvényt, melyre $f_x(y) = f(x, y)$, $y \in Y$; hasonlóan, adott $y \in Y$ esetén $f^y(x) = f(x, y)$, $x \in X$.

5.1.1 Tétel (Fubini)
Legyenek $(X, \mathcal{S}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ σ-véges mértékterek, f az $X \times Y$-on értelmezett $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$-mérhető függvény. Ha $f \geq 0$, és $\phi(x) = \int_Y f_x d\nu$, $\psi(y) = \int_X f^y d\mu$, akkor ϕ $\mathcal{S}$-mérhető, ψ $\mathcal{T}$-mérhető és

$$\int_X \phi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \psi d\nu.$$

A Fubini tétel azon következményének, amely szerint tetszőleges E síkbeli Lebesgue-nullmértékű halmaz $E_x = \{y : (x, y) \in E\}$ metszetei majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén a számegyenes nullmértékű részhalmazai, kategória-duálisa is igaz ([13]-ben megtalálható), mégpedig tetszőleges olyan $X \times Y$ szorzattérre, ahol X akármilyen, Y pedig M_2 topologikus tér:

5.1.2 Tétel (Kuratowski-Ulam)
Ha $E \subseteq X \times Y$ első kategóriájú, ahol X tetszőleges, Y M_2 topologikus tér, akkor E_x is első kategóriájú X egy első kategóriájú részhalmaza kivételével. Sőt, ha E

sehol sem sűrű, akkor E_x is sehol sem sűrű X egy első kategóriájú részhalmaza kivételével.

Bizonyítás:
A tétel két állítása lényegében ekvivalens egymással. Az első azért következik a másodikból, mert ha $E = \cup E_i$, akkor $E_x = \cup_i (E_i)_x$. A második is következik az elsőből, mert ha E sehol sem sűrű, akkor $\overline{E}$ is az, és mivel $\left(\overline{E}\right)_x$ első kategóriájú, azért E_x sehol sem sűrű, hiszen $\overline{E_x} \subseteq \left(\overline{E}\right)_x$ és ebből $\operatorname{int} \overline{E_x} = \varnothing$. Tehát elegendő a második állítást bizonyítani E sehol sem sűrű zárt halmazra.
Legyen $\{V_n\}$ az Y egy megszámlálható bázisa, $G = (X \times Y) \setminus E$. Ekkor G sűrű nyílt. Adott n pozitív egészre legyen $G_n = \{x : (x, y) \in G$ valamely $y \in V_n$ esetén$\}$. Ha $x \in G_n$, $y \in V_n$, $(x, y) \in G$, akkor léteznek $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ nyílt halmazok úgy, hogy $x \in U$, $y \in V \subseteq V_n$ és $U \times V \subseteq G$, tehát $U \subseteq G_n$, így G_n nyílt. Sőt, G_n sűrű nyílt halmaz X-ben $(\forall n)$, mert tetszőleges $U \subseteq X$ nyílt halmazra $G \cap (U \times V_n)$ nemüres, tehát $U \cap G_n \neq \varnothing$. Ebből következik, hogy $\cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ egy X-beli első kategóriájú halmaz komplementere. Tetszőleges $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ esetén G_x tartalmaz pontot V_n-ből $\forall n$. Tehát $G_x \subseteq Y$ sűrű nyílt, ezért $E_x = Y \setminus G_x$ sehol sem sűrű zárt. Így valóban egy első kategóriájú halmaz kivételével E_x sehol sem sűrű. □

5.2 A Tkadlec által konstruált mérték több dimenzióban

Az alábbiakban Zajiček [15] eredményére támaszkodva megmutatjuk azt, hogy a (4.2.10) tételbeli mértékből képezett egyszerű szorzatmérték $\mathbb{R}^n$-ben megőrzi a kívánt tulajdonságokat – vagyis minden σ-porózus halmazon nullát vesz fel és szinguláris a Lebesgue-mértékre.

Zajiček a (5.1.1) Fubini tétel alábbi következményeit vizsgálta, hogy írhatunk-e bennük „nullmértékű” helyett „σ-porózust”:

5.2.1 Következmény (1)
Ha $M \subseteq \mathbb{R}^2$ Lebesgue-mérhető és Lebesgue-majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén M_x Lebesgue-nullmértékű, akkor M is Lebesgue-nullmértékű.

5.2.2 Következmény (2)
Ha $M \subseteq \mathbb{R}^2$ Lebesgue-nullmértékű, akkor Lebesgue-majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén M_x Lebesgue-nullmértékű.

5.2.3 Következmény (3)

Ha $M \subseteq \mathbb{R}^2$ *Lebesgue-nullmértékű Borel-halmaz, akkor* M *felírható* $M = A \cup B$ *alakban, ahol* $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ *Borel-halmazok, és* $\forall x \in \mathbb{R}$ $A_x = \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in A\}$ *Lebesgue-nullmértékű és* $\forall y \in \mathbb{R}$ $B_y = \{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in B\}$ *Lebesgue-nullmértékű.*

Bizonyítás:

Az (5.2.1) és (5.2.2) állítások a (5.1.1) tétel egyszerű következményei. A (5.2.3)-t elég nullmértékű G_δ-halmazra bizonyítani. Legyen tehát $M = \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, ahol G_n-ek monoton fogyó nyíltak. Könnyen látható, hogy az $x \mapsto \lambda^1 (G_n)_x$ „szekciófüggvény" alulról félig folytonos (adott n esetén), ahol λ^1 az egydimenziós Lebesgue-mértéket jelöli. Feltehető, hogy minden n-re $\lambda^2 (G_n) < 1/n^3$, ahol λ^2 a kétdimenziós Lebesgue-mérték. Az $U_n = \{x \in \mathbb{R} : \lambda^1 (G_n)_x > 1/n\}$ nyílt halmazra $\lambda^1 (U_n) \le 1/n^2$, tehát $\lambda^1 (\cap_N \cup_{n=N}^{\infty} U_n) = \lambda^1 (\limsup U_n) = 0$ a Borel-Cantelli lemma miatt. Ha $x \notin \limsup U_n$, akkor $\exists N$ $x \notin U_n$ minden $n \ge N$ esetén, tehát $\lambda^1 (M_x) \le \lambda^1 ((G_n)_x) \le 1/n$ ha $n \ge N$, így $\lambda^1 (M_x) = 0$. Ebből $A = M \cap [\cup\{\{x\} \times \mathbb{R} : x \notin \limsup U_n\}]$, $B = M \setminus A$ megfelel, mert $\cup\{\{x\} \times \mathbb{R} : x \notin \limsup U_n\}$ síkbeli F_σ halmaz. □

Zajiček megállapítja, hogy érdekes módon épp ez az utóbbi, kevésbé ismert (5.2.3) következmény az egyetlen lehetséges általánosítása a Fubini-tételnek σ-porózus halmazokra.

5.2.4 Az (5.2.1) általánosítása nem igaz σ-porózus halmazokra. Foran már említett [5] példája $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre, melynek grafikonja nem-σ-porózus, ellenpéldát szolgáltat.

5.2.5 A (5.2.2) következmény csak abban a speciális esetben igaz, ha $M = A \times B$ alakú analitikus halmaz. Ugyanis megmutatható, hogy ha A, B nem-σ-porózus G_δ-halmazok a számegyenesen, akkor $A \times B$ nem-σ-porózus (ld. [26]) és hogy $\mathbb{R}$ analitikus nem-σ-porózus részhalmaza tartalmaz zárt nem-σ-porózus részhalmazt (ld. [29]). Zajiček olyan ellenpéldát ad, mellyel igazolja, hogy a (5.2.2) következmény közvetlen analógja nem teljesülhet a σ-porózus halmazokra: megad egy $M \subseteq \mathbb{R}^2$ σ-erősen porózus halmazt (definíciót ld. (1.2.4)), melyre $\{x \in \mathbb{R} : \lambda (\mathbb{R} \setminus M_x) = 0\}$ reziduális.

Most térjünk rá jelen dolgozat legfontosabb tételének bizonyítására. Ehhez szükségünk lesz (a továbbiakban rögzített) (X,ρ), (Y,η) metrikus terekben az ún. *iránymenti porozitás* fogalmára.

5.2.6 Definíció (iránymenti c-porozitás)

Legyen $X \times Y$ ellátva az ω metrikával, $c > 0$ szám. Azt mondjuk, hogy az $A \subseteq X \times Y$ halmaz az X irányban *c*-porózus *az $a = (a_1, a_2) \in X \times Y$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz*

$$\text{létezik } b \in X \text{ és létezik } r > 0 \text{ melyekre} \qquad (\maltese)$$
$$\omega\left(a, (b, a_2)\right) < \varepsilon, \ r > c \cdot \omega\left(a, (b, a_2)\right) \text{ és } B\left((b, a_2), r\right) \cap A = \varnothing.$$

Hasonlóan definiálható az Y irányban való c-porozitás is.

5.2.7 Definíció

Legyenek $(X \times Y, \omega)$ metrikus tér, $A \subseteq X \times Y$, $c, \varepsilon > 0$ adottak. Jelölje $R(A, c, \varepsilon)$ azon $a = (a_1, a_2) \in X \times Y$ pontokat, melyekre $(\maltese)$ teljesül.

5.2.8 Lemma

Legyen $(X \times Y, \omega)$ metrikus tér, $A \subseteq X \times Y$ halmaz, $c, \varepsilon > 0$ számok adottak. Ekkor

(i) $R(A, c, \varepsilon)$ nyílt halmaz $(X \times Y, \omega)$-ban.

(ii) A pontosan akkor X irányban c-porózus egy $a = (a_1, a_2) \in X \times Y$ pontban, ha $a \in \cap_{n=1}^{\infty} R(A, c, 1/n)$.

(iii) Ha A az X irányban c-porózus, akkor létezik egy $\tilde{A} \supseteq A$ G_δ-halmaz, mely az X irányban c-porózus.

(iv) Ha A az X irányban c-σ-porózus, akkor létezik egy $\tilde{A} \supseteq A$ $G_{\delta\sigma}$-halmaz, mely az X irányban c-σ-porózus.

Bizonyítás:

(i) és (ii) nyilvánvalóak. (iii)-ben $\tilde{A} \doteq \overline{A} \cap \left(\cap_{n=1}^{\infty} R(A, c, 1/n)\right)$, ez (i) alapján G_δ. A (iv) következik (iii)-ből. □

5.2.9 Megjegyzés

A fenti terminológiának megfelelően a továbbiakban akkor nevezünk egy halmazt egy pontban c-porózusnak, ha az (1.1.2) definíció ezen c szám esetén teljesül rá. Ez az (1.3.18) definícióbeli $(x, c/2)$-porozitásnak felel meg.

5.2.10 Lemma

Lássuk el $X \times Y$-t az $\omega = (\rho \times \eta)_s$ összeg-metrikával (vagyis $(a_1, a_2), (x_1, x_2) \in X \times Y$ esetén legyen $\omega((a_1, a_2), (x_1, x_2)) = \rho(a_1, x_1) + \eta(a_2, x_2)$), és legyen $0 < \alpha < 1/2$ rögzítve. Ekkor
(i) Ha $A \subseteq X \times Y$ $(1-\alpha)$-porózus $a = (a_1, a_2) \in X \times Y$-ban, akkor A vagy X vagy Y irányban $(1-2\alpha)$-porózus a-ban.
(ii) Ha A $(1-\alpha)$-porózus, akkor $A = A_1 \cup A_2$ alakban írható, ahol A_1 az X irányban $(1-2\alpha)$-porózus, A_2 az Y irányban $(1-2\alpha)$-porózus.

Bizonyítás:
Indirekt tegyük fel, hogy (i) nem teljesül. Ekkor $\exists \varepsilon > 0$, hogy

$$\text{ha } B((x_1, a_2), r_1) \cap A = \varnothing \text{ és } \rho(a_1, x_1) < \varepsilon, \text{ akkor } r_1 \leq (1-2\alpha)\rho(a_1, x_1) \quad (\dagger)$$

és

$$\text{ha } B((a_1, x_2), r_2) \cap A = \varnothing \text{ és } \eta(a_2, x_2) < \varepsilon, \text{ akkor } r_2 \leq (1-2\alpha)\eta(a_2, x_2) \quad (\ddagger)$$

A feltétel szerint létezik olyan $x = (x_1, x_2)$ pont és $r > 0$ szám, hogy $\omega(a, x) < \varepsilon$, $B(x, r) \cap A = \varnothing$ és

$$r > (1-\alpha)\omega(a, x) = (1-\alpha)(\rho(a_1, x_1) + \eta(a_2, x_2)). \quad (\natural)$$

Legyen $r_1 = r - \eta(a_2, x_2)$, $r_2 = r - \rho(a_1, x_1)$. Ha $r_1 > 0$, akkor $B((x_1, a_2), r_1) \subset B(x, r) \subseteq (X \times Y) \setminus A$ és $\rho(a_1, x_1) < \varepsilon$. Ezért $(\dagger)$-ből következik, hogy $r - \eta(a_2, x_2) \leq (1-2\alpha)\rho(a_1, x_1)$. Hasonlóan, $r - \rho(a_1, x_1) \leq (1-2\alpha)\eta(a_2, x_2)$, amiből $r \leq (1-\alpha)(\rho(a_1, x_1) + \eta(a_2, x_2))$ kellene teljesüljön, ez pedig ellentmond $(\natural)$-nek. Tehát (i)-t beláttuk. A (ii) igazolásához definiáljuk A_1-et (ill. A_2-t) azon A-beli pontok halmazaként, melyekben A az X (ill. Y) irányban $(1-2\alpha)$-porózus.
□

5.2.11 Állítás

Lássuk el $X \times Y$-t az $\omega = (\rho \times \eta)_s$ összeg-metrikával. Legyen $A \subseteq X \times Y$ σ-porózus halmaz, $0 < c < 1$ rögzített. Ekkor A előáll $A = A_1 \cup A_2$ alakban, ahol A_1 az X irányban c-σ-porózus, A_2 az Y irányban c-σ-porózus.

Bizonyítás:
Legyen $\varepsilon > 0$ olyan, hogy $c < 1 - 2\varepsilon$. A korábbiakban belátott (3.2.2) állításból következően, az (5.2.9) megjegyzés alapján, az A halmaz $(1-\varepsilon)$-σ-porózus is. Ebből és a (5.2.10) lemma (ii)-ből kapjuk az állítást. □

5.2.12 Megjegyzés

· *Ha A Borel, akkor a fenti állításban* A_1 *és* A_2 *Borelnek is választható. Ugyanis* $A = \left(A \cap \tilde{A}_1\right) \cup \left(A \cap \tilde{A}_2\right)$, *ahol* $\tilde{A}_1$ *és* $\tilde{A}_2$ *a (5.2.8) lemma (iv) pontja szerint létező* $G_{\delta\sigma}$*-fedések.*

· *Az* A_1 *ill.* A_2 *halmazoknak megvan az a tulajdonságuk, hogy minden* $(A_1)^y$ *ill.* $(A_2)_x$ *szekciójuk* σ*-porózus a megfelelő térben.*

5.2.13 Definíció (abszolút folytonosság)

Egy P *metrikus tér részhalmazain definiált* μ *mértékre azt mondjuk, hogy* abszolút folytonos *a* σ*-porózus halmazokra nézve, ha* $\mu(A) = 0$ *minden* $A \subseteq P$ σ*-porózus halmaz esetén.*

5.2.14 Tétel

Legyen a μ *ill.* ν *Radon-mérték az* X *ill.* Y *szeparábilis metrikus téren abszolút folytonos a megfelelő tér* σ*-porózus részhalmazaira nézve. Ekkor a* $\mu \otimes \nu$ *szorzat-mérték is abszolút folytonos a az* $X \times Y$*–beli* σ*-porózus halmazokra nézve.*

Bizonyítás:

A (5.2.11) állításból és a (5.1.1) Fubini-tételből következik, ha azt a szorzattérbeli A σ-porózus halmaz karakterisztikus függvényére alkalmazzuk (ilyenkor az ott szereplő jelölésekkel $\phi(x) = \nu(A_x)$, $\psi(y) = \mu(A^y)$). □

5.2.15 Következmény

$\mathbb{R}^n$*-en (n pozitív egész) létezik olyan mérték, mely abszolút folytonos a* σ*-porózus halmazokra nézve, de nem abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve.*

Bizonyítás:

A Tkadlec által konstruált (4.2.10) tételbeli mértéket μ-vel jelölve az n tényezős $\mu \otimes \ldots \otimes \mu$ szorzatmérték az előbbi tétel alapján megfelel. □

Irodalomjegyzék

[1] S. J. Agronsky and A. M. Bruckner, *Local compactness and porosity in metric spaces*, Real Analysis Exchange, 11 (1985–86), pp. 365–379.

[2] J.-P. Aubin, *Optima and Equilibria. An introduction to Nonlinear Analysis*, Springer–Verlag, 1993.

[3] E. Dolženko, *Boundary properties of arbitrary functions*, Izvestia Akademii Nauk SSSR Ser. Mat., 31 (1967), pp. 3–14.

[4] M. J. Evans, P. D. Humke, and K. Saxe, *A symmetric porosity conjecture of Zajicek*, Real Analysis Exchange, 17 (1991–92), pp. 258–271.

[5] J. Foran, *Continuous functions need not have σ-porous graphs*, Real Analysis Exchange, 11 (1985–86), pp. 194–203.

[6] J. Foran and P. D. Humke, *Some set theoretic properties of σ-porous sets*, Real Analysis Exchange, 6 (1980–81), pp. 114–120.

[7] P. D. Humke and M. Laczkovich, *Typical continuous functions are virtually nonmonotone*, Proceedings of the American Mathematical Society, 94 (1985), pp. 244–248.

[8] P. D. Humke and T. Vessey, *Another note on σ-porous sets*, Real Analysis Exchange, 8 (1982–83), pp. 262–271.

[9] J. L. Kelley, *General Topology*, D. Van Nostrand Company, 1957, pp. 127–128.

[10] L. Larson, *Typical compact sets in the Hausdorff metric are porous*, Real Analysis Exchange, 13 (1987–88), pp. 116–118.

[11] L. A. Lusternik and W. I. Sobolew, *Elemente der Funktionalanalysis*, Mathematische Lehrbücher und Monographien, Akademie-Verlag, 1955, pp. 140–144.

[12] J. Mycielski, *Independent sets in topological algebras*, Fundamenta Mathematicae, Warszawa, 55 (1964), pp. 139–147.

[13] J. C. Oxtoby, *Measure and Category*, Graduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, 1971.

[14] D. Preiss and L. Zajiček, *Fréchet differentiation of convex functions in a Banach space with a separable dual*, Proceedings of the American Mathematical Society, 91 (1984), pp. 202–204.

[15] ——, *Sigma-porous sets in products of metric spaces and sigma-directionally porous sets in Banach spaces*, Real Analysis Exchange, 24 (1998–99), pp. 295–313.

[16] I. Recław, *A note on the σ-ideal of σ-porous sets*, Real Analysis Exchange, 12 (1986–87), pp. 455–457.

[17] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill series in higher mathematics, McGraw-Hill Book Company, 2nd ed., 1966, pp. 145–153.

[18] H. Schubert, *Topológia*, Műszaki Könyvkiadó, 1986, pp. 95–103.

[19] B. S. Thomson, *On the level set structure of a continuous function*, 1985.

[20] ——, *Real Functions*, Lecture Notes in Mathematics, Springer–Verlag, 1985.

[21] J. Tkadlec, *Constructions of some non-σ-porous sets on the real line*, Real Analysis Exchange, 9 (1983–84), pp. 473–482.

[22] ——, *Construction of a finite Borel measure with σ-porous sets as null sets*, Real Analysis Exchange, 12 (1986–87), pp. 349–353.

[23] R. W. Vallin, *An introduction to shell porosity*, Real Analysis Exchange, 18 (1992–93), pp. 294–320.

[24] L. Zajiček, *Sets of σ-porosity and sets of σ-porosity (q)*, Casopis pro Pestování Matematiky, 101 (1976), pp. 350–359.

[25] ——, *Porosity and σ-porosity*, Real Analysis Exchange, 13 (1987–88), pp. 314–350.

[26] ——, *Products of non-σ-porous sets and Foran systems*, Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Università di Modena, 44 (1996), pp. 497–505.

[27] ——, *Small non-σ-porous sets in topologically complete metric spaces*, Colloquium Mathematicum, 77 (1998), pp. 293–304.

[28] M. Zelený, *An absolutely continuous function with non-σ-porous graph.* Preprint, 1999.

[29] M. Zelený and J. Pelant, *The structure of the σ-ideal of σ-porous sets.* Preprint, 1991.

Index