Hálók kongruenciahálója

Diplomamunka

Írta: **Skublics Benedek**

Témavezető: **Pálfy Péter Pál**

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézet

2007

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A hálók kongruenciaháló problémája a hálóelmélet egyik legismertebb kérdése, amely hosszú ideig megoldatlan volt, míg két évvel ezelőtt F. Wehrungnak sikerült olyan konstrukciót mutatnia, amely eldöntötte a kérdést.

G. Birkhoff és O. Frink 1948-ban belátták, hogy tetszőleges algebra kongruenciahálója algebrai háló. Grätzer György és Schmidt Tamás 1963-ban megmutatták, hogy minden L algebrai hálóhoz létezik olyan algebra, amelynek kongruenciahálója izomorf az L hálóval. N. Funayama és T. Nakayama 1942-ben belátták, hogy tetszőleges háló kongruenciahálója disztributív algebrai háló. Ennek a problémának az előzőhöz hasonló megfordítását nevezzük kongruenciaháló problémának (angolul „Congruence Lattice Problem"), azaz azt a kérdést, hogy vajon minden disztributív algebrai hálóhoz létezik-e olyan háló, aminek ez a kongruenciahálója. A hosszú időn át nyitott kérdésre F. Wehrung 2005-ben ellenpéldát konstruált és ezzel megmutatta, hogy létezik olyan disztributív algebrai háló, ami nem áll elő háló kongruenciahálójaként.

A probléma érdekességét az adja, hogy – mint utóbb kiderült – erősen függ az előállítandó disztributív algebrai háló számosságától. Sokáig az algebrai hálók esetéhez hasonlóan megpróbálták belátni, hogy minden disztributív algebrai háló előáll háló kongruenciahálójaként. Az első eredmény R.P. Dilworth nevéhez fűződik, miszerint minden véges disztributív háló előáll (véges) háló kongruenciahálójaként. Erre az első nyomtatásban megjelent bizonyítás Grätzer György és Schmidt Tamás 1962-ben megjelent cikkében olvasható [6]. A későbbi években több irányban próbálkoztak megoldani a problémát. Az előállítandó disztributív algebrai háló számosságára vonatkozó legjobb korlátot Huhn Andrásnak sikerült elérni. 1985-ben belátta, hogy minden legfeljebb $\aleph_1$ számosságú disztributív algebrai háló előáll háló kongruenciahálójaként. Az előző eredményt Huhn András hirtelen halála után, 1989-ben H. Dobbertin rendezte sajtó alá [12]. F. Wehrung konstrukciója [18] ellenpéldát ad az összes olyan esetre, ahol az előállítandó disztributív algebrai háló számossága legalább $\aleph_{\omega+1}$. Az optimális korlátot 2006-ban P. Růžička érte el úgy, hogy F. Wehrung példáját megjavítva $\aleph_2$ számosságú ellenpéldát mutatott [17]. Ezzel a kongruenciahálók problémáját sikerült megválaszolni.

Szakdolgozatom célja, hogy minél rövidebb, átfogó megoldást mutassak a kongruenciaháló problémára. Az első fejezetben definiálom a legszükségesebb fogalmakat és kimondom a kongruenciaháló problémának két átfogalmazását. A második fejezetben néhány halmazelméleti eredményt bizonyítok. A harmadik fejezetben Grätzer György, H. Lakser és F. Wehrung bizonyítását közlöm Huhn András eredményére vonatkozólag [5]. A negyedik fejezetben F. Wehrung P. Růžička által megjavított ellenpélda-konstrukcióját mutatom be.

1. fejezet

Hálók kongruenciái

Ebben a fejezetben definiáljuk a legszükségesebb fogalmakat és jelöléseket, majd ismertetjük a kongruenciaháló-problémát és annak két olyan átfogalmazását, amit a probléma tárgyalása során fel fogunk használni.

1.1. A „Congruence Lattice Problem"

Tetszőleges A algebra esetén $\Theta_A(x,y)$ jelölje A-nak a legszűkebb olyan kongruenciáját, amely tartalmazza az (x,y) párt; A kongruenciahálóját jelölje $\operatorname{Con} A$, ebben a kompakt kongruenciák $(\vee,0)$-félhálót alkotnak, amit jelöljön $\operatorname{Con_c} A$. $\operatorname{Con_c} A$ a $\Theta_A(x,y)$ alakú elemek által generált $(\vee,0)$-félháló. Con (illetve $\operatorname{Con_c}$) tekinthető olyan $\mathcal{L} \to \mathcal{D}$ (illetve $\mathcal{L}_0 \to \mathcal{S}$) funktornak, ahol $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{D}$ és $\mathcal{S}$ a következő kategóriákat jelöli:

(i) $\mathcal{L}$ objektumai a hálók, morfizmusai a háló-homomorfizmusok;
(ii) $\mathcal{L}_0$ objektumai a hálók, morfizmusai a háló-beágyazások;
(iii) $\mathcal{D}$ objektumai a disztributív algebrai hálók, morfizmusai a teljes $\vee$-homomorfizmusok;
(iv) $\mathcal{S}$ objektumai a disztributív $(\vee,0)$-félhálók, morfizmusai az $\vee$-beágyazások.

Az előbb bevezetett fogalmak segítségével már megfogalmazható a kongruenciaháló-probléma:

Congruence Lattice Problem (CLP): Előáll-e minden disztributív algebrai háló valamely háló kongruenciahálójaként? Másképp megfogalmazva: Reprezentálható-e minden disztributív algebrai háló? (Nevezzünk egy disztributív algebrai hálót reprezentálhatónak, ha előáll valamely háló kongruenciahálójaként.)

1.2. A CLP megfogalmazása félhálók segítségével

Az L háló (illetve S $\vee$-félháló) $I \neq \emptyset$ részhalmazát ideálnak nevezzük, ha minden $a,b \in L$ (illetve minden $a,b \in S$) elempárra

$$a \vee b \in I \quad \Leftrightarrow \quad a \in I \text{ és } b \in I$$

teljesül. Az L háló (illetve S $\vee$-félháló) ideáljainak a tartalmazásra nézve részbenrendezett halmazát jelölje $\operatorname{Id} L$ (illetve $\operatorname{Id} S$). Mindkét esetben ideálok tetszőleges metszete vagy üres, vagy ideál, ezért ideálok egyesítése ideál. Hálók esetén ideálok véges metszete nem üres, ezért $\operatorname{Id} L$ háló. Félhálók esetén ha S $(\vee, 0)$-félháló, akkor $\operatorname{Id} S$ háló.

Legyen L tetszőleges teljes háló. Az $a \in L$ elemet *kompakt elemnek* nevezzük, ha bármely $X \subseteq L$ részhalmazhoz $a \leq \bigvee X$ esetén létezik olyan $X' \subseteq X$ véges részhalmaz, amelyre $a \leq \bigvee X'$. Az L hálót *algebrainak* nevezzük, ha minden eleme előáll kompakt elemek egyesítéseként.

1.1. lemma. *Az L háló pontosan akkor algebrai, ha előáll $(\vee, 0)$-félháló ideálhálójaként.*

Bizonyítás. Legyen S $(\vee, 0)$-félháló. Ekkor $\operatorname{Id} S$ teljes háló, amelyben $(a]$ kompakt elem, tehát $\operatorname{Id} S$ algebrai, hiszen

$$I = \bigvee_{a \in I} (a] \,.$$

Legyen most L algebrai háló, jelölje S a kompakt elemeinek a halmazát. S az L-beli egyesítésre nézve $(\vee, 0)$-félháló. Tekintsük a

$$\varphi : a \mapsto ((a] \cap S) \,, \quad a \in L$$

L-ből $\operatorname{Id} S$-be képező leképezést. Belátjuk, hogy φ hálóizomorfizmus. Tetszőleges $a, b \in L$ elempárra $(a] \cap (b] = (a \wedge b]$ miatt φ metszet-tartó. Az algebrai hálók definíciója miatt φ injektív, hiszen $a = \bigvee \varphi(a)$. Továbbá $a \vee b = \bigvee \varphi(a) \vee \bigvee \varphi(b) = \bigvee (\varphi(a) \cup \varphi(b))$ miatt $\varphi(a \vee b) \subseteq \varphi(a) \vee \varphi(b)$ és $\varphi(a), \varphi(b) \subseteq \varphi(a \vee b)$ miatt $\varphi(a) \vee \varphi(b) \subseteq \varphi(a \vee b)$, ezért φ egyesítés-tartó. A szürjektivitáshoz vegyünk egy tetszőleges $I \in \operatorname{Id} S$ ideált, legyen $a = \bigvee I$. Ekkor $I \subseteq \varphi(a)$. Az ellenkező irányú tartalmazáshoz vegyünk egy $c \in \varphi(a)$ elemet. Mivel $c \leq \bigvee I$, c kompaktsága miatt létezik $I_0 \subset I$ véges részhalmaz, amelyre $c \leq \bigvee I_0$. Tehát $c \in I$, ezért $\varphi(a) \subseteq I$. Ezzel beláttuk φ szürjektivitását is, így L és $\operatorname{Id} S$ izomorfak. $\square$

Közismert, hogy az L háló *disztributív*, ha minden $a, b, c \in L$ elemre $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$. Az S $\vee$-félháló *disztributív*, ha minden olyan $a, b, c \in S$ elemre, amelyekre $c \leq a \vee b$ teljesül, léteznek olyan $a_0 \leq a$ és $b_0 \leq b$ elemek, amelyekre $a_0 \vee b_0 = c$. Jegyezzük meg, hogy egy háló pontosan akkor disztributív, ha mint $\vee$-félháló disztributív.

Bármely disztributív algebrai háló kompakt elemei disztributív $(\vee, 0)$-félhálót alkotnak a háló $\vee$ műveletére nézve. Legyen ugyanis D disztributív algebrai háló, és jelölje C a kompakt elemek halmazát, ami a háló $\vee$-műveletével és 0-elemével $(\vee, 0)$-félháló. A disztributivitás ellenőrzéséhez legyenek $a, b, c \in C$ olyan elemek, amelyekre $c \leq a \vee b$ teljesül. D algebrai, ezért $a \wedge c$ és $b \wedge c$ is előáll D-ben kompakt elemek egyesítéseként:

$$a \wedge c = \bigvee C_a \quad \text{és} \quad b \wedge c = \bigvee C_b \quad (C_a, C_b \subseteq C).$$

Tehát $c = c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b) = \bigvee (C_a \cup C_b)$, ezért c kompaktsága miatt léteznek olyan $C'_a \subseteq C_a$ és $C'_b \subseteq C_b$ véges halmazok, hogy $c = \bigvee (C'_a \cup C'_b)$. Az $a_0 = \bigvee C'_a \leq a$ és $b_0 = \bigvee C'_b \leq b$ elemekre $c = a_0 \vee b_0$ teljesül, tehát C disztributív. Az előbb belátott ténynél több is igaz:

1.2. lemma. *S pontosan akkor disztribitív $(\vee, 0)$-félháló, ha létezik olyan D disztributív algebrai háló, amelyre S izomorf D kompakt elemeinek $(\vee, 0)$-félhálójával.*

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges disztributív $(\vee, 0)$-félháló. Az előző lemma bizonyításában láttuk, hogy $\operatorname{Id} S$ algebrai háló, amelyben az $(a]$ alakú elemek kompaktak. Más kompakt elemek nincsenek, mert ha $I \in \operatorname{Id} S$ kompakt, akkor

$$I = \bigvee_{a \in I} (a]\,,$$

és a kompaktság miatt létezik olyan $I' \subseteq I$ véges részhalmaz, amelyre

$$I = \bigvee_{a \in I'} (a] = \Big(\bigvee I'\Big]\,,$$

tehát I előáll a kívánt alakban. Ebből azonnal adódik, hogy S izomorf az $\operatorname{Id} S$ háló kompakt elemeinek $(\vee, 0)$-félhálójával. Azt kell csak belátnunk, hogy $\operatorname{Id} S$ disztributív. Ezt a következő lemma 3. részében bizonyítjuk. □

1.3. lemma. *1. Ha $(L, \wedge, \vee)$ háló, akkor az $(L, \vee)$ félháló pontosan akkor disztributív, ha az $(L, \wedge, \vee)$ háló disztributív.*

2. Ha az S $\vee$-félháló disztributív, akkor minden $a, b \in S$ elemhez létezik olyan $d \in S$ elem, amelyre $d \leq a$ és $d \leq b$ teljesül. Következésképpen $\operatorname{Id} S$ háló.

3. Az S $\vee$-félháló pontosan akkor disztributív, ha az $\operatorname{Id} S$ háló disztributív.

Bizonyítás. Ha $(L, \wedge, \vee)$ disztributív háló, akkor a definícióban használt jelöléseket alkalmazva az $a_0 = a \wedge c$ és $b_0 = b \wedge c$ választás az $(L, \vee)$ félháló disztributivitását mutatja. Visszafelé lássuk be, hogy ha $(L, \vee)$ disztributív félháló, akkor L nem tartalmazhat N_5-tel, vagy M_3-mal izomorf részhálót. Tegyük fel indirekt, hogy tartalmaz N_5-tel vagy M_3-mal izomorf részhálót. Első esetben legyen $d < c < b < e$ és $d < a < e$ az N_5-tel izomorf részháló két lánca. Ekkor a $c \leq a \vee b$ összefüggésre nem teljesül az $(L, \vee)$ félháló disztributivitása. Második esetben legyenek $d < a, b, c < e$ az M_3-mal izomorf részháló elemei. Ekkor ismét a $c \leq a \vee b$ összefüggésre nem teljesül az $(L, \vee)$ félháló disztributivitása. Ezzel a lemma 1. részét beláttuk.

Ha S disztributív $\vee$-félháló, akkor tetszőleges $a, b \in S$ elemekre $a \leq a \vee b$ teljesül, tehát léteznek $a_0 \leq a$ és $b_0 \leq b$ elemek, hogy $a_0 \vee b_0 = a$. Így a $d = b_0$ választással beláttuk a lemma 2. részét.

Ha S disztributív $\vee$-félháló, akkor minden $I, J \in \operatorname{Id} S$ ideálra teljesül

$$I \vee J = \{i \vee j \mid i \in I, j \in J\}\,,$$

amiből következik $\operatorname{Id} S$ disztributivitása. Visszafelé, ha $\operatorname{Id} S$ disztributív, akkor minden $a \leq b_0 \vee b_1$ elemre

$$(a] = (a] \wedge ((b_0] \vee (b_1]) = ((a] \wedge (b_0]) \vee ((a] \wedge (b_1])\,,$$

ezért $a = a_0 \vee a_1$, ahol $a_0 \in (b_0]$ és $a_1 \in (b_0]$. Ezzel a lemma 3. részét is beláttuk. □

Összevetve az 1.1. és az 1.3. lemma eredményét kapjuk, hogy minden disztributív algebrai háló előáll disztributív $(\vee, 0)$-félháló ideálhálójaként.

1.4. lemma. *Tetszőleges L háló esetén $\operatorname{Con} L$ izomorf $\operatorname{Con_c} L$ ideálhálójával.*

Bizonyítás. A bizonyítás megegyezik az 1.1. lemma bizonyításával, felhasználva, hogy $\operatorname{Con_c} L$ a $\operatorname{Con} L$ kompakt elemeinek félhálója. □

Az eddig elhangzottak segítségével CLP a következőképpen fogalmazható át:

A CLP megfogalmazása félhálókkal: Előáll-e minden disztributív $(\vee, 0)$-félháló valamely háló kompakt kongruenciáinak félhálójaként? Másképp megfogalmazva: Reprezentálható-e minden disztributív $(\vee, 0)$-félháló? (Nevezzünk egy disztributív $(\vee, 0)$-félhálót reprezentálhatónak, ha előáll valamely háló kompakt kongruenciáinak félhálójaként.)

1.3. A CLP Pudlák-féle megfogalmazása

Tetszőleges L háló $a \in L \setminus \{0\}$ elemét $\vee$-*irreducibilisnek* nevezzük, ha minden $b, c \in L$ elempárra teljesül a

$$b \vee c = a \quad \Rightarrow \quad b = a \text{ vagy } c = a$$

implikáció. Jelölje $\mathrm{J}(L)$ az L háló $\vee$-irreducibilis elemeinek a halmazát. A definícióból azonnal látszik, hogy véges háló minden eleme előáll $\vee$-irreducibilis elemek egyesítéseként. A Kuros–Ore tételből következik, hogy disztributív algebrai háló minden eleme előáll véges sok $\vee$-irreducibilis elem egyesítéseként.

Jelölje $\mathcal{S}$ az 1.1. szakaszban definiált kategóriát, amelynek objektumai a disztributív $(\vee, 0)$-félhálók, morfizmusai az $\vee$-beágyazások. Legyen I rögzített indexhalmaz és minden $i \in I$ indexre $C_i \in \operatorname{Ob} \mathcal{S}$ és $C \in \operatorname{Ob} \mathcal{S}$ tetszőleges disztributív $(\vee, 0)$-félháló. Ekkor C-t a $(C_i \mid i \in I)$ rendszer *irányított limeszének* („direct limit") nevezzük, ha

(i) minden $i \in I$ indexre C_i $(\vee, 0)$-részfélhálója C-nek,

(ii) $C = \bigcup(C_i \mid i \in I)$ és

(iii) minden $i, j \in I$ indexpárhoz létezik olyan $k \in I$ index, hogy $C_i \cup C_j \subseteq C_k$.

Minden olyan $i, j \in I$ indexpárra, amelyekre $C_i \subseteq C_j$, jelölje $\gamma_j^i \in \hom(C_i, C_j)$, illetve minden $k \in I$ indexre $\gamma_k \in \hom(C_k, C)$ a kanonikus beágyazást. Jegyezzük meg, hogy ekkor a $(C, \gamma_i \mid i \in I)$ rendszer a $(C_i, \gamma_j^i \mid i, j \in I)$ rendszer ko-szorzata. A következő tétel Ju.L. Ershov [3] és P. Pudlák [16] nevéhez fűződik. Az itt leírt bizonyítás P. Pudláktól származik.

1.5. tétel. (Ju.L. Ershov és P. Pudlák) *Minden C disztributív $(\vee, 0)$-félháló előáll véges disztributív $(\vee, 0)$-részfélhálóinak irányított limeszeként.*

Bizonyítás. Az 1.2. lemma miatt feltehető, hogy C egy D disztributív algebrai háló kompakt elemeinek halmaza. Ellenőriznünk kell, hogy C és véges disztributív $(\vee, 0)$-részfélhálói teljesítik az irányított limeszre kimondott három feltételt. Az (i)-es feltétel nyilván teljesül. A (ii)-es és (iii)-as feltételekhez elég belátni, hogy minden $F \subseteq C$ véges halmazhoz található C-nek olyan S véges disztributív $(\vee, 0)$-részfélhálója, ami őt tartalmazza. Az F halmaz által a D hálóban generált disztributív részhálót jelölje G. Jól ismert, hogy G véges.

Minden $s \in \mathrm{J}(G)$ elemhez hozzárendelünk véges sok alatta lévő kompakt elemet a következőképpen:

(i) Ha $c \in G \cap C$ és $s_1, \ldots, s_n \in \mathrm{J}(G)$ páronként különböző elemek, amelyekre $s_1 \vee \cdots \vee s_n = c$, akkor válasszunk olyan $c_1, \ldots, c_n \in C$ elemeket, amelyekre $c_1 \leq s_1, \ldots, c_n \leq s_n$ és $c_1 \vee \cdots \vee c_n = c$ teljesül, és rendeljük hozzá c_i-t s_i-hez.

(ii) Ha $s, s_1, \ldots, s_n \in \mathrm{J}(G)$ páronként különböző elemek, amelyekre $s \nleq s_1 \vee \cdots \vee s_n$, akkor válasszunk olyan $c \in C$ elemet, amelyre $c \leq s$ és $c \nleq s_1 \vee \cdots \vee s_n$ és rendeljük hozzá c-t s-hez.

Az előző két pont feltételeit kielégítő $c_1, \ldots, c_n$ és c kompakt elemek léteznek, mert a D háló algebrai. Mivel G véges, ezért minden $s \in \mathrm{J}(G)$ elemhez véges sok nála kisebb kompakt elemet rendeltünk. Tetszőleges $s \in \mathrm{J}(G)$ elemre legyen $s' \in C$ az összes olyan kompakt elem egyesítése, amit valamelyik $t \leq s$ $\vee$-irreducibilis elemhez hozzárendeltünk. Legyen S az $\{s' \mid s \in \mathrm{J}(G)\} \cup \{0\}$ halmaz által generált $(\vee, 0)$-részfélhálója C-nek.

S véges. $F \subseteq S$, mert minden $c \in F$ elemre $c \in G \cap C$, továbbá G véges, tehát minden eleme előáll $\vee$-irreducibilis elemek egyesítéseként, ezért léteznek olyan $s_1, \ldots, s_n \in \mathrm{J}(G)$ elemek, amelyekre $c = s_1 \vee \cdots \vee s_n$, tehát az (i)-es pont szerint

$$c = c_1 \vee \cdots \vee c_n \leq s_1' \vee \cdots \vee s_n' \leq s_1 \vee \cdots \vee s_n = c,$$

ezért $c \in S$. Végül lássuk be, hogy S disztributív. Ehhez elég belátni, hogy ha $s' \leq s_1' \vee \cdots \vee s_n'$, akkor valamelyik $1 \leq i \leq n$ indexre $s' \leq s_i'$, mert ekkor az $x, y, z \in S$ elemekre, ha $z \leq x \vee y$, akkor

$$z = z_1' \vee \cdots \vee z_m' \leq x_1' \vee \cdots \vee x_k' \vee y_1' \vee \cdots \vee y_l' = x \vee y$$

miatt a $z_1', \ldots, z_m'$ elemek két részre oszthatók aszerint, hogy x vagy y alatt helyezkednek-e el. Ha $s' \leq s_1' \vee \cdots \vee s_n'$, akkor a (ii)-es pont szerint $s \leq s_1 \vee \cdots \vee s_n$, ezért G disztributivitása miatt van olyan $1 \leq i \leq n$ index, amelyre $s \leq s_i$. Innen s' és s_i' definíciójából azonnal adódik, hogy $s' \leq s_i'$. Ezzel beláttuk, hogy S olyan véges, disztributív $(\vee, 0)$-részfélhálója S-nek, ami tartalmazza F-et. □

1.6. tétel. *Legyen S disztributív $(\vee, 0)$-félháló az $(S_i \mid i \in I)$ rendszer irányított limesze, σ_j^i és σ_i a megfelelő beágyazások. Tegyük fel, hogy minden $i \in I$ indexre létezik L_i háló, $\iota_i : S_i \to \mathrm{Con_c}\, L_i$ izomorfizmus és minden $\sigma_j^i : S_i \to S_j$ $\vee$-beágyazásra létezik $\lambda_j^i : L_i \to L_j$ háló-beágyazás úgy, hogy minden $i, j, k \in I$ indexre:*

(i) $\lambda_i^i = \mathrm{Id}_{L_i}$,

(ii) $\lambda_k^j \circ \lambda_j^i = \lambda_k^i$, *ha* $S_i \subseteq S_j \subseteq S_k$ *és*

(iii) $\mathrm{Con_c}\, \lambda_j^i \circ \iota_i = \iota_j \circ \sigma_j^i$, *ha* $S_i \subseteq S_j$.

Ekkor létezik olyan L háló, amelyre $S \simeq \mathrm{Con_c}\, L$.

Jelölje $\mathcal{L}$ az 1.1. szakaszban definiált kategóriát, amelynek objektumai a hálók, morfizmusai a háló-beágyazások és $\mathcal{C}$ azt a kategóriát, amelynek objektumai az S_i hálók, morfizmusai a σ_j^i háló-beágyazások, továbbá $E : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ az $S_i \mapsto S_i$ funktort. Ekkor az 1.6. tétel feltétele azt mondja, hogy létezik $H : \mathcal{C} \to \mathcal{L}$ funktor és $\iota : E \to \mathrm{Con_c} \circ H$ természetes ekvivalencia ($L_i = H(S_i)$ és $\lambda_j^i = H(\sigma_j^i)$). A bizonyításban megkonstruált $(L, \lambda_i \mid i \in I)$ rendszer az $(L_i \mid i \in I)$ rendszer ko-szorzata lesz. Erről bővebben P. Pudlák cikkében [16] olvashatunk.

Bizonyítás. Feltehető, hogy bármely $i \neq j$ indexpárra $L_i \cap L_j = \emptyset$. Legyen $K = \bigcup(L_i \mid i \in I)$ és R a következő ekvivalenciareláció K-n: $(x, y) \in R$ pontosan akkor, ha léteznek olyan $i, j, k \in I$ indexek, amelyekre $\lambda_k^i(x) = \lambda_k^j(y)$. Legyen $L = K/R$. Minden $x \in K$ elemre jelölje $\bar{x}$ az x-et tartalmazó ekvivalenciaosztályát R-nek. Legyen $\leq$ a következő rendezés az L halmazon: $\bar{x} \leq \bar{y}$ pontosan akkor, ha léteznek olyan $i, j, k \in I$ indexek, amelyekre $\lambda_k^i(x) \leq \lambda_k^j(y)$. Először tegyük fel, hogy $\bar{x} \leq \bar{y}$, továbbá legyenek $x' \in \bar{x}$ és $y' \in \bar{y}$ tetszőleges elemek. Ekkor R definíciója szerint léteznek olyan $p, q, r \in I$ indexek, amelyekre $\lambda_r^i(x) = \lambda_r^p(x')$ és $\lambda_r^j(y) = \lambda_r^q(y')$.

Az irányított limesz definíciójának (iii)-as pontjából és a tétel (ii)-es feltételéből következik, hogy van olyan $s \in I$ index, hogy λ_s^k és λ_s^r értelmezve vannak, továbbá

$$\lambda_s^p(x') = \lambda_s^r \circ \lambda_r^p(x') = \lambda_s^r \circ \lambda_r^i(x) = \lambda_s^k \circ \lambda_k^i(x) \leq \\ \leq \lambda_s^k \circ \lambda_k^j(y) = \lambda_s^r \circ \lambda_r^j(y) = \lambda_s^r \circ \lambda_r^q(y') = \lambda_s^q(y'),$$

felhasználva, hogy λ_s^k háló-homomorfizmus, speciálisan rendezéstartó. Tehát a $\leq$ reláció jóldefiniált, továbbá R definíciója és a (ii)-es feltétel miatt reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, tehát részbenrendezés. Az irányított limesz definíciójának (iii)-as pontjából és a tétel (ii)-es feltételéből következik, hogy L a $\leq$ részbenrendezéssel hálót alkot. Legyen $\lambda_i : L_i \to L$ az $x \mapsto \bar{x}$ leképezés, ami az előzőek alapján háló-homomorfizmus, sőt beágyazás, mert minden λ_j^i beágyazás.

Lássuk be, hogy $S \simeq \mathrm{Con_c}\, L$. Mivel ι_i izomorfizmus, λ_i beágyazás, ezért

$$(\mathrm{Con_c}\, \lambda_i) \circ \iota_i : S_i \to \mathrm{Con_c}\, L$$

beágyazás. Ebből, az irányított limesz definíciójából és a tétel (iii)-as feltételéből következik, hogy létezik egyértelműen olyan $\sigma : S \to \mathrm{Con_c}\, L$ beágyazás, hogy minden $i \in I$ indexre

$$\sigma \circ \sigma_i = (\mathrm{Con_c}\, \lambda_i) \circ \iota_i.$$

Megmutatjuk, hogy σ szürjektív. Legyen Θ tetszőleges kompakt kongruenciája L-nek. Ekkor léteznek olyan $a_k, b_k \in L$ elempárok, amelyekre

$$\Theta = \bigvee_{1 \leq k \leq n} \Theta_L(a_k, b_k).$$

Az L konstrukciójából azonnal adódik, hogy létezik $i \in I$ index és olyan $c_k, d_k \in L_i$ elempárok, amelyekre

$$\lambda_i(c_k) = a_k, \quad \lambda_i(d_k) = b_k \quad (1 \leq k \leq n).$$

Legyen

$$\Theta_i = \bigvee_{1 \leq k \leq n} \Theta_L(c_k, d_k).$$

Ekkor $\Theta = (\mathrm{Con_c}\, \lambda_i)\Theta_i = (\mathrm{Con_c}\, \lambda_i) \circ \iota_i(\iota_i^{-1}\Theta) = \sigma \circ \sigma_i(\iota_i^{-1}\Theta)$, tehát σ szürjektív. Ezzel a tételt beláttuk. □

Az előző tétel segítségével CLP a következő állításra vezethető vissza:

A CLP Pudlák-féle megfogalmazása: Vajon előáll-e minden disztributív $(\vee, 0)$-félháló reprezentálható $(\vee, 0)$-részfélhálóinak irányított limeszeként úgy, hogy az előállításban szereplő félhálókra teljesülnek az előző tétel feltételei?

Jegyezzük meg, hogy az előbbi megfogalmazás valóban ekvivalens CLP-vel, mert megfordítva: ha egy disztributív $(\vee, 0)$-félháló reprezentálható, akkor az 1.5. tétel miatt előáll a véges disztributív $(\vee, 0)$-részfélhálóinak irányított limeszeként, amiken a félháló reprezentációja olyan reprezentációt indukál, amire teljesülnek az 1.6. tétel feltételei.

2. fejezet

Halmazelméleti háttér

Ebben a fejezetben C. Kuratowski tételét [13] ismertetjük, aztán bevezetjük a k-létrák, illetve a szabad fák fogalmát és alkalmazzuk rá a Kuratowski-tételt. Grätzer György, H. Lakser és F. Wehrung 2-létrák segítségével bizonyították Huhn András eredményét [12]. F. Wehrung a Kuratowski-tételt alkalmazva adott ellenpéldát CLP-re [18], és P. Růžička szabad fák segítségével optimalizálta F. Wehrung ellenpéldájának számosságát [17].

2.1. A Kuratowski-tétel

A továbbiakban véges számosságokra használni fogjuk a halmazelméletben megszokott konvenciót: $0 = \emptyset$ és $n = \{0, \dots, n-1\}$. Legyen n pozitív egész szám, Ω tetszőleges halmaz. Jelölje $[\Omega]^{n-1}$ az Ω $(n-1)$-elemű részhalmazainak halmazát, illetve $[\Omega]^{<\omega}$ az Ω véges részhalmazainak halmazát. Legyen $\Psi : [\Omega]^{n-1} \to [\Omega]^{<\omega}$ rögzített leképezés. Az $X \in [\Omega]^n$ halmazt *(a Ψ leképezésre nézve) szabad halmaznak* („free set") nevezzük, ha minden $x \in X$ elemre $x \notin \Psi(X \setminus \{x\})$.

A következő tételre a későbbiekben Kuratowski-tétel névvel fogunk hivatkozni, bár C. Kuratowski cikkében egy másik tételt bizonyított, aminek az alábbi tétel következménye.

2.1. tétel. (C. Kuratowski) *Ha $|\Omega| \geq \aleph_{n-1}$, akkor tetszőleges $\Psi : [\Omega]^{n-1} \to [\Omega]^{<\omega}$ leképezés esetén létezik (a Ψ-re nézve) szabad halmaz.*

A tétel bizonyításához szükségünk van C. Kuratowski eredeti tételére.

Legyen Ω tetszőleges halmaz, n tetszőleges természetes szám és $A \subseteq \Omega^n$. Azt mondjuk, hogy A a k-adik koordinátában $< \varkappa$ számosságú, ha tetszőleges $x_j \in \Omega$ $(1 \leq j \leq n, j \neq k)$ rögzített elemekre

$$|\{x \in \Omega \,|\, (x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, x_n) \in A\}| < \varkappa.$$

Jelölje az előbb definiált tulajdonságot $|A|_k < \varkappa$. Például ha $n = 1$, akkor $|A|_1 < \varkappa$ és $|A| < \varkappa$ ekvivalensek.

2.2. tétel. (C. Kuratowski) *Legyen Ω tetszőleges halmaz, α rendszám és n pozitív egész szám. Ekkor $\Omega < \aleph_{\alpha+n-1}$ pontosan akkor teljesül, ha léteznek $A_1, \dots, A_n$ halmazok úgy, hogy*

(i) $\Omega^n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ *és*

(ii) minden $k = 1, \ldots, n$ indexre $|A_k|_k < \aleph_\alpha$.

Bizonyítás. A tételt n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$, akkor az állítás nyilvánvaló. Legyen n tetszőleges pozitív egész szám és tegyük fel, hogy $(n+1)$-nél kisebb pozitív egész számokra igaz az állítás.

Először lássuk be, hogy a feltétel szükséges. Legyen Ω tetszőleges $\aleph_{\alpha+n-1}$ számosságú halmaz. Be kell látnunk, hogy létezik $(n+1)$ olyan halmaz, amik kielégítik az (i)-es és (ii)-es feltételeket. Feltehető, hogy $\Omega = \omega_{\alpha+n-1}$. Az indukciós feltevésből adódik, hogy minden $\gamma \in \Omega$ rendszámhoz léteznek olyan $A_{\gamma,1}, \ldots, A_{\gamma,n}$ halmazok, amelyekre:

$$(\gamma+1)^n = \bigcup_{k=1}^{n} A_{\gamma,k} \quad \text{és} \tag{2.1}$$

$$|A_{\gamma,k}|_k < \aleph_\alpha \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{2.2}$$

Definiáljuk minden $k = 1, \ldots, n+1$ indexre az A_k halmazt a következő képpen. $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) \in \Omega^{n+1}$ pontosan akkor legyen benne az A_k halmazban, ha

(a) vagy létezik olyan $j > k$ index, amelyre
  i. $\xi_j \geq \xi_m$ $(m = 1, \ldots, n+1)$ és
  ii. $(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_{n+1}) \in A_{\xi_j,k}$,

(b) vagy létezik olyan $j < k$ index, amelyre
  i. $\xi_j \geq \xi_m$ $(m = 1, \ldots, n+1)$ és
  ii. $(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_{n+1}) \in A_{\xi_j,k-1}$.

Lássuk be, hogy az így definiált $A_1, \ldots, A_{n+1}$ halmazok kielégítik az (i)-es és (ii)-es feltételeket.

Az (i)-es feltétel igazolásához legyen $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) \in \Omega^{n+1}$ tetszőleges elem és ξ_j az elemnek olyan koordinátája, amelyre $\xi_j \geq \xi_m$ teljesül minden $m = 1, \ldots, n+1$ indexre. $(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_{n+1}) \in (\xi_j + 1)^n$, ezért a (2.1)-es összefüggés miatt létezik olyan $1 \leq l \leq n$ index, amelyre

$$(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_{n+1}) \in A_{\xi_j,l}.$$

Ha $j > l$, akkor $k = l$ választással, ha $j \leq l$, akkor $k = l+1$ választással kapjuk, hogy

$$(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) \in A_k.$$

Ezzel beláttuk, hogy az $A_1, \ldots, A_{n+1}$ halmazok teljesítik az (i)-es feltételt.

A (ii)-es feltétel igazolásához legyen $1 \leq k \leq n+1$ tetszőleges egész szám és $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_{n+1} \in \Omega$ rögzített rendszámok. Legyen

$$C = \{\xi \in \Omega \,|\, (\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi, \xi_{k+1}, \xi_n) \in A_k\}$$

Be kell látnunk, hogy $|C| < \aleph_\alpha$. Jeölje B_j azon $\xi_k \in \Omega$ rendszámok halmazát, amelyekre $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ kielégíti az (a) és (b) feltételek valamelyikét. A_k definíciójából következik, hogy

$$C = \bigcup_{j=1}^{k-1} B_j \cup \bigcup_{j=k+1}^{n+1} B_j.$$

Tehát elég belátnunk, hogy $|B_j| < \aleph_\alpha$, ami mind $j < k$, mind $j > k$ esetben azonnal következik B_j definíciójából és a (2.2)-es összefüggésből. Ezzel beláttuk, hogy az $A_1, \ldots, A_{n+1}$ halmazok teljesítik a (ii)-es feltételt és befejeztük a szükségesség bizonyítását.

Másodszor lássuk be, hogy a feltétel elégséges. Tegyük fel indirekt, hogy a $\Omega = \omega_{\alpha+n}$ halmazra léteznek olyan $A_1, \ldots, A_{n+1}$ halmazok, amelyek kielégítik az (i)-es és (ii)-es feltételeket. Legyen

$$X = \bigcup_{(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in(\omega_{\alpha+n-1})^n} \{\xi \in \Omega \,|\, (\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi) \in A_{n+1}\}\,.$$

A (ii)-es feltétel miatt $|A_{n+1}|_{n+1} < \aleph_\alpha$, ezért

$$|X| \leq \aleph^n_{\alpha+n-1}\aleph_\alpha = \aleph_{\alpha+n-1} < |\Omega|.$$

Speciálisan létezik $\eta \in (\Omega \setminus X)$ rendszám, amiből az (i)-es feltétel miatt következik, hogy

$$(\omega_{\alpha+n-1})^n \times \{\eta\} \subseteq \Omega^n \setminus A_{n+1} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k. \tag{2.3}$$

Legyen

$$A'_k = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in (\omega_{\alpha+n-1})^n \,|\, (\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta) \in A_k\}\,.$$

A (2.3)-as összefüggésből adódik, hogy

$$(\omega_{\alpha+n-1})^n \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A'_k,$$

ahol a (ii)-es felevés miatt minden $k = 1, \ldots, n$ indexre $|A'_k|_k < \aleph_\alpha$, ami ellentmond az indukciós feltevésnek, hogy a feltétel elégséges az n esetben. Ezzel befejeztük az elégségesség bizonyítását. □

Bizonyítás (2.1. tétel). Legyen Ω legalább $\aleph_{n-1}$ számosságú halmaz, és tegyük fel indirekt, hogy van egy olyan $\Psi : [\Omega]^{n-1} \to [\Omega]^{<\omega}$ leképezés, amelyre nézve nem létezik szabad halmaz. Tehát minden $X \in [\Omega]^n$ halmaznak van olyan $x \in X$ eleme, amelyre: $x \in \Psi(X \setminus \{x\})$.

Tetszőleges $k = 1, \ldots, n$ indexre legyen A_k a következő halmaz. $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega^n$ pontosan akkor legyen benne A_k-ban, ha $x_k \in \Psi(\{x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n\})$.

Az $\alpha = 0$ választással alkalmazzuk a 2.2. tételt. Az indirekt feltevés miatt az $A_1, \ldots, A_n$ halmazok teljesítik az (i)-es feltételt. $\Psi(Y)$ minden $Y \in [\Omega]^{n-1}$ halmaz esetén véges, ezért minden $k = 1, \ldots, n$ indexre $|A_k|_k < \aleph_0$, tehát az $A_1, \ldots, A_n$ halmazok teljesítik a (ii)-es fetételt. Alkalmazva a 2.2. tételt kapjuk, hogy $|\Omega| < \aleph_{n-1}$, ami ellentmondás. □

Jegyezzük meg, hogy az $\alpha = 0$ esetben a 2.2. és a 2.1. tételek ekvivalensek. Erre nekünk nem lesz szükségünk.

2.2. k-létrák

A k-létrákról itt elmondott eredmények S.Z. Ditor [1] és H. Dobbertin [2] nevéhez fűződnek.

Legyen k tetszőleges pozitív egész szám. Az L hálót *k-létrának* („k-ladder") nevezzük, ha minden $a \in L$ elemre

(i) $(a]$ véges és
(ii) a legfeljebb k elemet fed.

A definícióból közvetlenül látszik, hogy minden véges lánc 1-létra, sőt ω (mint lánc) is 1-létra.

2.3. tétel. *Minden k-létra legfeljebb $\aleph_{k-1}$ elemű.*

Bizonyítás. Legyen L tetszőleges k-létra és indirekt tegyük fel, hogy L-nek legalább $\aleph_k$ eleme van. Legyen $\Psi : [L]^k \to [L]^{<\omega}$ az a halmazleképezés, amit minden $\{a_0, \ldots, a_{k-1}\} \in [L]^k$ halmazra az

$$\{a_0, \ldots, a_{k-1}\} \mapsto \left(\bigvee (a_i \,|\, i \in k)\right]$$

hozzárendelés definiál. Alkalmazva Kuratowski tételét kapjuk, hogy létezik

$$\{x_0', \ldots, x_k'\} \subseteq L,$$

a Ψ leképezésre nézve szabad halmaz, ami esetünkben azt jelenti, hogy minden $i \in (k+1)$ indexre

$$x_i' \notin \left(\bigvee (x_j' \,|\, j \neq i)\right]. \tag{2.4}$$

Legyen $x = \bigvee(x_i' \,|\, i \in (k+1))$. $(x]$ véges, mert az L háló k-létra, ezért minden $i \in (k+1)$ indexre van olyan $x_i \in [\bigvee(x_j' \,|\, j \neq i), x]$ elem, amit x fed. A (2.4)-es összefüggés miatt az x_i elemek páronként különbözők. x tehát olyan elem, ami legalább $k+1$ elemet fed, ami ellentmondás, hiszen L-ről feltettük, hogy k-létra. □

A tételben szereplő becslés $k = 1$ esetben nyilvánvalóan éles, hiszen ω olyan 1-létra, ami $\aleph_0$ számosságú. A következő tétel szerint a becslés $k = 2$ esetén is éles.

2.4. tétel. *Létezik $\aleph_1$ számosságú 2-létra.*

Bizonyítás. Minden $\xi \in \omega_1$ rendszámra rekurzívan definiáljuk az L_ξ hálót. $L_0 = \omega$. Tegyük fel, hogy a $\xi \in \omega_1$ rendszámra már definiáltuk az L_ξ hálót, és L_ξ tartalmaz olyan $(a_n \,|\, n \in \omega)$ szigorúan növő sorozatot, ami kofinális L_ξ-vel. Legyen $(b_n \,|\, n \in \omega)$ olyan szigorúan növő lánc, ami diszjunkt L_ξ-től. Legyen

$$L_{\xi+1} = L_\xi \cup \{b_n \,|\, n \in \omega\}$$

és tekintsük rajta azt a legszűkebb részbenrendezést, ami tartalmazza L_ξ és $(b_n \,|\, n \in \omega)$ részbenrendezését, továbbá minden $n \in \omega$ indexre $a_n < b_n$ teljesül. $L_{\xi+1}$ az előbb definiált részbenrendezésre nézve olyan háló, amelynek L_ξ és $(b_n \,|\, n \in \omega)$részhálója. Ha $a \in L_\xi$, akkor $(a_n \,|\, n \in \omega)$ kofinalitása miatt létezik olyan legkisebb $n \in \omega$ index, amire $a \leq a_n$ teljesül és ekkor tetszőleges $m \in \omega$ indexre $a \vee b_m = b_m \vee b_n$, illetve $a \wedge b_m = a \wedge a_m$. Definíció szerint $(b_n \,|\, n \in \omega)$ kofinális $L_{\xi+1}$-gyel és 2-létra.

Ha $\xi \in \omega_1$ limeszrendszám, és minden $\eta \in \xi$ rendszámra L_η-t már definiáltuk, akkor legyen $L_\xi = \bigcup(L_\eta \,|\, \eta \in \xi)$. L_ξ triviálisan háló. Be kell látnunk, hogy L_ξ-ben van ω hosszú, szigorúan növő sorozat, ami kofinális L_ξ-vel. Legyen $(\xi_k \,|\, k \in \omega)$ ξ elemeinek egy felsorolása. Minden $k \in \omega$ indexre rögzítsünk L_{ξ_k}-ban egy $(a_n^k \,|\, n \in \omega)$ szigorúan növő, kofinális sorozatot. Ekkor

$$\left(\bigvee_{k \in n} a_n^k \,\middle|\, n \in \omega\right)$$

szigorúan növő, kofinális sorozat L_ξ-ben. L_ξ nyilvánvalóan 2-létra, mert bármely $\eta \in \xi$ rendszámra bármely $a \in L_\eta$ elem alá a későbbiekben új elemek nem kerülnek és L_η az indukciós feltevés szerint 2-létra.

Végül $L = \bigcup(L_\xi \mid \xi \in \omega_1)$ az előzőekhez hasonlóan nyilván 2-létra és $\aleph_1$ számosságú. □

2.3. Szabad fák

A szabad fák fogalma P. Růžička [17] nevéhez fűződik.

Legyenek k, m, n természetes számok, $0 < k$ és $m \leq n$. Legyen $g : n \backslash m \to k$ tetszőleges függvény. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$T_{n,k}(g) = \{f : n \to k \mid f \restriction \operatorname{Dom} g = g\},$$

ha $0 < m$ és $i \in k$, akkor

$$T_{n,k}(g, i) = \{f \in T_{n,k}(g) \mid f(m-1) = i\},$$
$$T_{n,k}(g, \neg i) = \{f \in T_{n,k}(g) \mid f(m-1) \neq i\}.$$

Legyen Ω tetszőleges halmaz és $\Phi : [\Omega]^{<\omega} \to [\Omega]^{<\omega}$ rögzített leképezés. Legyenek k és n természetes számok, $0 < k$, $\tau : \{f : n \to k\} \to \Omega$ tetszőleges leképezés. Ω-beli elemeknek $\mathcal{T} = (\tau(f) \mid f : n \to k)$ rendszerét *n-magasságú (a Φ leképezésre nézve) szabad k-fának* („free k-tree of height n") nevezzük, ha minden $0 < m \leq n$ természetes számra, $g : n \backslash m \to k$ leképezésre és $i \in k$ értékre

$$\{\tau(f) \mid f \in T_{n,k}(g, i)\} \cap \Phi\left(\{\tau(f) \mid f \in T_{n,k}(g, \neg i)\}\right) = \emptyset.$$

A $\mathcal{T}$ fa *értékkészletének* („range") nevezzük az $\operatorname{rng} \mathcal{T} = \{\tau(f) \mid f : n \to k\}$ halmazt.

Jegyezzük meg, hogy az $f : \omega \to k$ parciális függvények a kiterjesztésre, mint részbenrendezésre nézve (végtelen) fát alkotnak, tehát $\operatorname{rng} \mathcal{T}$ tekinthető egy ilyen (végtelen) fa n-edik szintjének (főleg, ha τ injektív).

2.5. lemma. (P. Růžička) *Ω minden legalább $\aleph_{k-1}$ számosságú X részhalmazához létezik olyan n-magasságú szabad k-fa, aminek az értékkészlete X-ben van.*

Bizonyítás. A lemmát n-re vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 0$, akkor $\mathcal{T} = (\tau(\emptyset))$ jó választás tetszőleges $\tau(\emptyset) \in X$ elemre. Legyen $n \geq 0$ és tegyük fel, hogy az állítás n-re igaz. Mutatnunk kell $(n+1)$-magasságú szabad k-fát, aminek az értékkészlete X-ben van. X-et bontsuk fel $\aleph_{k-1}$ darab, egyenként legalább $\aleph_{k-1}$ számosságú, páronként diszjunkt részhalmazának az uniójára: $X = \bigcup_{\alpha < \omega_{k-1}} X_\alpha$. Ilyen felbontás létezik, mert $\aleph_{k-1}$ reguláris számosság. Felhasználva az indukciós feltevést minden $\alpha < \omega_{k-1}$ rendszámhoz létezik olyan $\mathcal{T}_\alpha = (\tau_\alpha(f) \mid f : n \to k)$, n-magasságú szabad k-fa, aminek az értékkészlete X_α-ban van. A könnyebb érthetőség kedvéért mostantól írjunk τ_α helyett α-t. Legyen $\Psi : [\omega_{k-1}]^{k-1} \to [\omega_{k-1}]^{<\omega}$ a következő leképezés:

$$\Psi(A) = \left\{\beta \in \omega_{k-1} \mid \operatorname{rng} \mathcal{T}_\beta \cap \Phi\left(\bigcup_{\alpha \in A} \operatorname{rng} \mathcal{T}_\alpha\right) \neq \emptyset\right\}$$

minden $A \in [\Omega]^{k-1}$ halmazra. Alkalmazva a Kuratowski-tételt kapjuk, hogy létezik $B = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}\}$, a Ψ-re nézve szabad halmaz. Tetszőleges $f : (n+1) \to k$ függvényre legyen $\tau(f) = \alpha_{f(n)}(f \restriction n)$. Belátjuk, hogy $\mathcal{T} = (\tau(f) \mid f : (n+1) \to k)$ Φ-re nézve szabad k-fa. Legyen $0 < m \leq n+1$ természetes szám és $g : (n+1) \backslash m \to k$ rögzített leképezés. Ha $m = n+1$, akkor egyedül $g = \emptyset$ lehetséges és ekkor minden $i \in k$ értékre

$$\{\tau(f) \mid f \in T_{n+1,k}(g, i)\} = \operatorname{rng} \mathcal{T}_{\alpha_i},$$
$$\{\tau(f) \mid f \in T_{n+1,k}(g, \neg i)\} = \bigcup_{j \in k, j \neq i} \operatorname{rng} \mathcal{T}_{\alpha_j}.$$

Mivel B Ψ-re nézve szabad halmaz,

$$\operatorname{rng} \mathcal{T}_{\alpha_i} \cap \Phi \left(\bigcup_{j \in k, j \neq i} \operatorname{rng} \mathcal{T}_{\alpha_j} \right) = \emptyset.$$

Ha $m < n$, akkor rögzített $i \in k$ értékre

$$\{\tau(f) \mid f \in T_{n+1,k}(g, i)\} = \left\{\alpha_{g(n)}(f) \mid f \in T_{n,k}(g_0, i)\right\},$$
$$\{\tau(f) \mid f \in T_{n+1,k}(g, \neg i)\} = \left\{\alpha_{g(n)}(f) \mid f \in T_{n,k}(g_0, \neg i)\right\},$$

ahol $g_0 = g \restriction n \backslash m$. Mivel $\mathcal{T}_{\alpha_{g(n)}}$ Φ-re nézve szabad k-fa,

$$\left\{\alpha_{g(n)}(f) \mid f \in T_{n,k}(g_0, i)\right\} \cap \Phi \left(\left\{\alpha_{g(n)}(f) \mid f \in T_{n,k}(g_0, \neg i)\right\} \right) = \emptyset.$$

Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{T}$ Φ-re nézve szabad k-fa. $\square$

3. fejezet

Pozitív eredmények

Ebben a fejezetben először két olyan lemmát mutatunk, amik hálók bizonyos tulajdonságú hálókba történő beágyazásáról szólnak (3.1. és 3.3. lemma), majd ezeket felhasználjuk egy olyan segédtétel bizonyításához (3.5. tétel), aminek segítségével belátjuk a Huhn-tételt (3.9. tétel). A Huhn-tétel bizonyításakor és általában a fejezetben a CLP P. Pudlák által megfogalmazott változatát tartjuk szem előtt.

3.1. Hálók kiterjesztése

3.1. lemma. *1. Minden K háló beágyazható egy olyan L korlátos, egyszerű hálóba, ami tartalmaz duális atomot.*

2. Minden K véges háló beágyazható egy olyan L véges, egyszerű hálóba, ami tartalmaz duális atomot.

3. Ha K-nak van legkisebb eleme, akkor a beágyazás (mindkét esetben) választható 0-tartónak.

A lemma 1. részének bizonyítását két régóta ismert tételre vezetjük vissza (P.M. Whitman [19] és O. Ore [14]), a 2. részhez egy konstrukciót mutatunk (G. Grätzer és E.T. Schmidt [7]) . A Huhn-tétel bizonyításához elég a lemma 2. részét ismerni, ezért az teljes lesz a két hivatkozott tétel ismerete nélkül is.

Bizonyítás. A Whitman-tétel szerint minden háló beágyazható egy partícióhálóba, és az Ore-tétel szerint minden partícióháló egyszerű és nyilván tartalmaz duális atomot. A kettőt összevetve kapjuk a lemma 1. részét. Jegyezzük meg, hogy az előbbi eredmények megtalálhatók Grätzer Gy. könyvében [4] is.

A lemma 2. részének bizonyításához feltehető, hogy $|K| > 2$, mert $|K| \leq 2$ esetén a kételemű háló véges, egyszerű, szakaszosan komplementumos, tartalmaz duális atomot és K beágyazható ebbe. Legyen $0 = 0_K$ és $1 = 1_K$. Feltehető, hogy $1 \notin \mathrm{J}(K)$; különben bővítsük ki K-t egy tetszőleges $k \notin K$ elemmel úgy, hogy minden $x \in K \setminus \{0, 1\}$ elemre

$$k \wedge x = 0 \quad \text{és} \quad k \vee x = 1$$

teljesüljön. Az így kapott hálóban 1 nem $\vee$-irreducibilis, tehát léteznek olyan $x_1, x_2 < 1$ elemek, amelyekre $x_1 \vee x_2 = 1$ teljesül. Legyen

$$M = K \setminus \{a \in K \mid a = 0 \text{ vagy } a \text{ atom}\}\,.$$

Minden $a \in M$ elemre vegyünk hozzá K-hoz egy $p_a \notin K$, $p_a < a$ atomot úgy, hogy $a \neq b$ esetén $p_a \neq p_b$. Legyen

$$L = K \cup \{p_a \,|\, a \in M\},$$

és legyen $\leq$ a következő részbenrendezés az L halmazon:

(a) ha $x, y \in K$, akkor

$$x \leq y \ K\text{-ban} \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y \ L\text{-ben};$$

(b) ha $a \in M$, $x \in K$, akkor

$$x < p_a \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{és} \quad p_a < x \Leftrightarrow a \leq x;$$

(c) ha $a, b \in M$, akkor

$$p_a \leq p_b \quad \Leftrightarrow \quad a = b.$$

Ekkor $(L; \leq)$ háló, és a $\wedge$ és $\vee$ műveleteket a következő összefüggések írják le:

(i) K részhálója L-nek;

(ii) ha $a \in M$, $x \in K$, akkor

$$p_a \wedge x = \begin{cases} 0 & \text{ha } a \not\leq x, \\ p_a & \text{ha } a \leq x; \end{cases}$$

(iii) ha $a \in M$, $x \in K$, akkor

$$p_a \vee x = \begin{cases} a \vee x & \text{ha } x \neq 0, \\ p_a & \text{ha } x = 0; \end{cases}$$

(iv) ha $a, b \in M$, $a \neq b$, akkor

$$p_a \wedge p_b = 0 \quad \text{és} \quad p_a \vee p_b = a \vee b.$$

Az így konstruált L háló véges, $0_L = 0$ és $1_L = 1$.

Lássuk be, hogy L egyszerű. Legyen $\Theta \neq \omega_L$ tetszőleges kongruenciája L-nek. Mutassuk meg, hogy van olyan $0 < x \in L$ elem, amelyre $0 \equiv x(\Theta)$. $\Theta \neq \omega_L$, ezért léteznek olyan $u < v$ elemek, amelyekre

$$u \equiv v(\Theta). \tag{3.1}$$

Ha $u = 0$, akkor $x = v$ jó választás. Ha $0 < u$, akkor $v \in M$ és p_v létezik. Két esetet különböztetünk meg. Ha $u \in K$, akkor a (3.1)-es kongruenciát p_v-vel metszve kapjuk, hogy $0 \equiv p_v(\Theta)$. Ha $u \in L \setminus K$, akkor van olyan $a \in M$ elem, amelyre $u = p_a$. Ekkor definíció szerint $a \leq v$. Mivel $a \in M$, ezért létezik olyan $x \in K$, amelyre $0 < x < a$. Ekkor a (3.1)-es kongruenciát x-szel metszve kapjuk, hogy $0 \equiv x(\Theta)$.

Felhasználva a $0 \equiv x(\Theta)$ kongruenciát kapjuk, hogy $p_1 \equiv 1(\Theta)$, vagy $x = p_1$. Ha $x \neq p_1$, akkor a $p_1 \equiv 1(\Theta)$ kongruenciát x_1-gyel, illetve x_2-vel metszve kapjuk, hogy $x_1 \equiv 0(\Theta)$ és $x_2 \equiv 0(\Theta)$, ezért $1 = x_1 \vee x_2 \equiv 0(\Theta)$, ami pontosan azt jelenti, hogy $\Theta = \iota_L$, tehát L egyszerű. Ha $x = p_1$, akkor mivel p_1 csak a 0 és 1 elemekkel összehasonlítható, a $0 \equiv p(\Theta)$ kongruenciából kapjuk hogy $a \equiv 1(\Theta)$ minden $a \in L \backslash 0$ elemre. $|K| > 2$ miatt ebből következik, hogy $1 \equiv 0(\Theta)$, tehát ismét azt kaptuk, hogy L egyszerű.

L véges és $|L| > 2$, tehát tartalmaz duális atomot.

A lemma 3. része az 1. esetben következik a hivatkozott tételekből, a 2. esetben pedig a konstrukcióból azonnal adódik. Ezzel a lemmát beláttuk. $\square$

Legyen L tetszőleges háló, $H \subseteq L$ és szűkítsük le a $\wedge$ és $\vee$ műveleteket H-ra a következő módon. Tetszőleges $a, b, c \in H$ elemekre ha $a \wedge b = c$ (illetve $a \vee b = c$), akkor $a \wedge b$-t (illetve $a \vee b$-t) definiáljuk, és legyen egyenlő c-vel; ha $a \wedge b \notin H$ (illetve $a \vee b \notin H$), akkor $a \wedge b$-t (illetve $a \vee b$-t) nem definiáljuk. Az így kapott parciális műveletekkel ellátott H halmazt *parciális hálónak* nevezzük.

Legyen $(P; \leq)$ részbenrendezett halmaz. Tetszőleges $a, b \in P$ elemre $a \wedge b$ (illetve $a \vee b$) pontosan akkor van értelmezve, ha $\inf\{a, b\}$ (illetve $\sup\{a, b\}$) létezik, és $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ (illetve $a \vee b = \sup\{a, b\}$).

3.2. lemma. *Az előbb definiált parciális műveletekkel* $(P; \wedge, \vee)$ *parciális háló.*

A tétel bizonyításához szükségünk van részbenrendezett halmaz ideáljának a fogalmára. Az $I \subseteq P$ nem üres halmazt a P részbenrendezett halmaz *ideáljának* nevezzük, ha

(i) minden $a, b \in I$ elemre $a \vee b \in I$, amennyiben $a \vee b$ létezik és
(ii) az $a \leq b \in I$ összefüggésből következik, hogy $a \in I$.

Jelölje $\mathrm{Id}_0\, P$ az $\emptyset$ és P ideáljai által alkotott halmazt. $\mathrm{Id}_0\, P$ a tartalmazásra nézve háló, hiszen a definícióból azonnal látszik, hogy ideálok tetszőleges metszete is ideál, vagy $\emptyset$.

Bizonyítás. Legyen $\varphi : P \to \mathrm{Id}_0\, P$ az a leképezés, amit minden $a \in P$ elemre az

$$a \mapsto (a]$$

hozzárendelés definiál. $(.]$ definíciójából azonnal adódik, hogy: φ injektív; ha $a, b \in P$ és $a \wedge b$ (illetve $a \vee b$) értelmezve van, akkor $(a] \wedge (b] = (a \wedge b]$ (illetve $(a] \vee (b] = (a \vee b]$); megfordítva ha van olyan $c \in P$ elem, amire $(a] \wedge (b] = (c]$ (illetve $(a] \vee (b] = (c]$), akkor $a \wedge b$ (illetve $a \vee b$) értelmezve van és egyenlő c-vel. Ezzel beláttuk, hogy P parciális háló. $\square$

Jegyezzük meg, hogy ha P-ben van legkisebb elem, akkor már az ideálok halmaza hálót alkot a tartalmazásra nézve. Jelölje ezt $\mathrm{Id}\, P$. Ebben az esetben P tekinthető $\mathrm{Id}\, P$ parciális részhálójának úgy, hogy tartalmazza $\mathrm{Id}\, P$ 0-elemét. Ha P véges, akkor természetesen $\mathrm{Id}_0\, P$ (illetve $\mathrm{Id}\, P$) is véges.

3.3. lemma. *Legyenek* L_0, L_1 *és* L_2 *tetszőleges hálók és mindkét* $i \in \{1, 2\}$ *indexre* $\varphi_i : L_0 \to L_i$ *beágyazás. Ekkor van olyan* K *háló és mindkét* $i \in \{1, 2\}$ *indexre* $\psi_i : L_i \to K$ *beágyazás, hogy*

$$\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2 \quad \textit{és} \quad \psi_1(L_1) \cap \psi_2(L_2) = \psi_1 \circ \varphi_1(L_0) = \psi_2 \circ \varphi_2(L_0).$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy $L_0 = L_1 \cap L_2$ és L_0 részhálója L_1-nek és L_2-nek. Legyen $P = L_1 \cup L_2$ és definiáljuk rajta a következő részbenrendezést:

(i) mindkét $i \in \{1, 2\}$ indexre és minden $a, b \in L_i$ elemre $a \leq b$ P-ben pontosan akkor teljesül, ha $a \leq b$ L_i-ben;
(ii) minden $i \neq j$ indexre és minden $a \in L_i$ és $b \in L_j$ elemre $a \leq b$ P-ben pontosan akkor teljesül, ha van olyan $c \in L_0$, amelyre $a \leq c$ L_i-ben és $c \leq b$ L_j-ben.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az előbb valóban részbenrendezést definiáltunk. A bizonyítás végét az előző lemma adja. $\square$

Jegyezzük meg, hogy ha L_0, L_1 és L_2 0-hálók és φ_1, φ_2 0-beágyazások, akkor K választható 0-hálónak és ψ_1, ψ_2 0-beágyazásnak; illetve ha L_1 és L_2 végesek, akkor K is választható végesnek. A lemmában leírt konstrukció Grätzer Gy. könyvében [4] „(Strong) Amalgamation Property” címszó alatt található.

3.2. A Dilworth-tétel és egy segédtétel

A következő tétel a Dilworth-tételnek egy erősebb formája, amit az utána következő segédtételben fel fogunk használni. A Dilworth-tételnek ez az erősebb formája következik mind a Grätzer György és Schmidt Tamás féle bizonyításból [6], mind a Grätzer György és H. Lakser féle bizonyításból, ami megtalálható Grätzer György könyvében [4].

3.4. tétel. *Legyen D tetszőleges véges disztributív háló. Ekkor létezik olyan véges háló, amelyre* $\operatorname{Con} L$ *izomorf D-vel. Jelölje az összekötő izomorfizmust α. Továbbá a konstruált L hálónak van olyan Boole-féle ideálja, amit a $\{d_p \mid p \in \mathrm{J}(D)\}$ atomok generálnak és minden $p \in \mathrm{J}(D)$ elemre*

$$\alpha\Theta_L(d_p, 0) = p.$$

3.5. tétel. *Legyenek L_0, L_1 és L_2 hálók, $\eta_1 : L_0 \to L_1$ és $\eta_2 : L_0 \to L_1$ háló-homomorfizmusok. Legyen D véges disztributív háló, és tetszőleges $i \in \{1, 2\}$ indexre legyen $\psi_i : \operatorname{Con} L_i \to D$ teljes $\vee$-homomorfizmus, amelyre*

$$\psi_1 \circ \operatorname{Con} \eta_1 = \psi_2 \circ \operatorname{Con} \eta_2.$$

Ekkor létezik L háló, és mindkét $i \in \{1, 2\}$ indexre $\varphi_i : L_i \to L$ háló-homomorfizmus úgy, hogy

$$\varphi_1 \circ \eta_1 = \varphi_2 \circ \eta_2,$$

és létezik $\alpha : \operatorname{Con} L \to D$ izomorfizmus úgy, hogy mindkét $i \in \{1, 2\}$ indexre

$$\alpha \circ \operatorname{Con} \varphi_i = \psi_i.$$

Ha L_0, L_1 és L_2 tartalmaz legkisebb elemet és η_1, η_2 0-tartó beágyazás, akkor L választható úgy, hogy legyen legkisebb eleme, és φ_1, φ_2 választható 0-tartó beágyazásnak.

Ha L_1 és L_2 végesek, akkor L választható véges, atomos hálónak.

A tételt négy lépésben bizonyítjuk. Ehhez először három lemmát látunk be.

3.6. lemma. *Legyenek L'_0, L'_1 és L'_2 hálók, $\eta'_1 : L'_0 \to L'_1$ és $\eta'_2 : L'_0 \to L'_1$ háló-beágyazások. Jelölje C_2 a 2-elemű láncot és tetszőleges $i \in \{1, 2\}$ indexre legyen $\psi'_i : \operatorname{Con} L'_i \to C_2$ az a leképezés, amit a következő összefüggés definiál:*

$$\psi'_i\Theta = 0_{C_2} \quad \Leftrightarrow \quad \Theta = \omega_{L'_i}.$$

Ekkor létezik olyan L háló, aminek van legnagyobb eleme és tartalmaz duális atomot, továbbá mindkét $i \in \{1, 2\}$ indexre létezik $\varphi'_i : L'_i \to L$ háló-beágyazás úgy, hogy

$$\varphi'_1 \circ \eta'_1 = \varphi'_2 \circ \eta'_2,$$

és létezik $\alpha : \operatorname{Con} L \to C_2$ izomorfizmus úgy, hogy mindkét $i \in \{1, 2\}$ indexre

$$\alpha \circ \operatorname{Con} \varphi'_i = \psi'_i.$$

Ha L'_0, L'_1 és L'_2 tartalmaz legkisebb elemet és η'_1, η'_2 0-tartó beágyazás, akkor L választható úgy, hogy legyen legkisebb eleme, és φ'_1, φ'_2 választható 0-tartó beágyazásnak.

Ha L'_1 és L'_2 végesek, akkor L is választható végesnek.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 3.3. lemmát az $L_0 = L'_0$, $L_1 = L'_1$, $L_2 = L'_2$, $\varphi_1 = \eta'_1$ és $\varphi_2 = \eta'_2$ esetben. Tehát van olyan K háló és $\psi_1 : L'_1 \to K$, $\psi_2 : L'_2 \to K$ beágyazás, amelyekre

$$\psi_1 \circ \eta'_1 = \psi_2 \circ \eta'_2.$$

A 3.3. lemma utáni megjegyzés szerint ha L'_0, L'_1 és L'_2 0-hálók és η'_1, η'_2 0-beágyazások, akkor K választható 0-hálónak és ψ_1, ψ_2 0-beágyazásnak; illetve ha L'_1 és L'_2 végesek, akkor K is választható végesnek.

A 3.1. lemma miatt K beágyazható egy olyan L egyszerű hálóba, aminek van legnagyobb eleme és tartalmaz duális atomot. Ha K 0-háló, akkor a beágyazás 0-tartó, és ha K véges, akkor L is véges. Jelölje a beágyazást φ.

Mindkét $i \in \{1, 2\}$ indexre legyen $\varphi'_i = \varphi \circ \psi_i$. Ekkor

$$\varphi'_1 \circ \eta'_1 = \varphi \circ (\psi_1 \circ \eta'_1) = \varphi \circ (\psi_2 \circ \eta'_2) = \varphi'_2 \circ \eta'_2.$$

Mivel L egyszerű, természetes módon adódik az $\alpha : \operatorname{Con} L \to C_2$ izomorfizmus:

$$\alpha\Theta = 0_{C_2} \quad \Leftrightarrow \quad \Theta = \omega_L.$$

Mindkét $i \in \{1, 2\}$ indexre φ'_i beágyazás, ezért $\operatorname{Con} \varphi'_i$ szeparálja $\operatorname{Con} L'_i$ 0-elemét, azaz

$$(\operatorname{Con} \varphi'_i)\,\Theta = \omega_L \quad \Leftrightarrow \quad \Theta = \omega_{L'_i}.$$

Ebből közvetlenül adódik, hogy

$$\alpha \circ \operatorname{Con} \varphi'_i = \psi'_i.$$

Ezzel a lemmát beláttuk. $\square$

3.7. lemma. *A 3.5. tétel igaz a $D = C_2$ speciális esetben. Továbbá a konstruált L olyan háló, aminek van legnagyobb eleme és tartalmaz duális atomot.*

Bizonyítás. Mindkét $i \in \{1, 2\}$ indexre legyen

$$\Theta_i = \bigvee \left(\Theta \in \operatorname{Con} L_i \mid \psi_i\Theta = 0_{C_2}\right),$$

és legyen

$$\Theta_0 = \left\{(x, y) \in L_0^2 \mid \eta_1 x \equiv \eta_1 y\,(\Theta_1)\right\} = \left\{(x, y) \in L_0^2 \mid \eta_2 x \equiv \eta_2 y\,(\Theta_2)\right\}.$$

Minden $i \in 3$ indexre legyen $L'_i = L_i/\Theta_i$ és $\pi_i : L_i \to L'_i$ a kanonikus szürjekció. Ekkor $\Theta_0 = \operatorname{Ker}(\pi_1 \circ \eta_1) = \operatorname{Ker}(\pi_2 \circ \eta_2)$. Tetszőleges $x, y \in L_0$ elemekre és $i \in \{1, 2\}$ indexre $x \equiv y(\Theta_0)$ pontosan akkor, ha $\eta_i x \equiv \eta_i y(\Theta_i)$, ezért létezik $\eta'_i : L'_0 \to L'_i$ háló-beágyazás, amire

$$\pi_i \circ \eta_i = \eta'_i \circ \pi_0;$$

továbbá létezik $\psi'_i : \operatorname{Con}_{L'_i} \to C_2$ leképezés, amire

$$\psi'_i\Theta = 0_{C_2} \Leftrightarrow \Theta = \omega_{L'_i} \quad \text{és} \quad \psi'_i \circ \operatorname{Con} \pi_i = \psi_i.$$

Alkalmazva a 3.6. lemmát kapunk egy L hálót, $\varphi'_1 : L'_1 \to L$, $\varphi'_2 : L'_2 \to L$ háló-beágyazást és $\alpha : \operatorname{Con} L \to C_2$ izomorfizmust úgy, hogy mindkét $i \in \{1, 2\}$ indexre

$$\alpha \circ \operatorname{Con} \varphi'_i = \psi'_i.$$

Mindkét $i \in \{1,2\}$ indexre legyen

$$\varphi_i = \varphi_i' \circ \pi_i : L_i \to L.$$

Ekkor

$$\varphi_1 \circ \eta_1 = \varphi_1' \circ \pi_1 \circ \eta_1 = \varphi_1' \circ \eta_1' \circ \pi_0 = \varphi_2' \circ \eta_2' \circ \pi_0 = \varphi_2' \circ \pi_2 \circ \eta_2 = \varphi_2 \circ \eta_2,$$

és minden $i \in \{1,2\}$ indexre

$$\alpha \circ \operatorname{Con} \varphi_i = \alpha \circ (\operatorname{Con} \varphi_i') \circ (\operatorname{Con} \pi_i) = \psi_i' \circ \operatorname{Con} \pi_i = \psi_i.$$

Ezzel a lemmát beláttuk. □

3.8. lemma. *A 3.5. tétel igaz, ha D tetszőleges véges Boole-féle háló. Továbbá a konstruált L hálónak van olyan Boole-féle duális ideálja, ami izomorf D-vel, $\{d_p \mid p \in \mathrm{J}(D)\}$ a duális ideál duális atomjainak halmaza és minden $p \in \mathrm{J}(D)$ elemre*

$$\alpha\Theta_L(d_p, 1_L) = p.$$

Bizonyítás. Boole-féle hálóban az atomok és az $\vee$-irreducibilis elemek megegyeznek, ezért a $\mathrm{J}(D)$ halmaz megegyezik a D háló atomjainak a halmazával. Minden $p \in \mathrm{J}(D)$ elemhez tartozik egy $\beta_p : D \to C_2$ szürjektív, 0-tartó háló-homomorfizmus, amire $\beta_p(x) = 1_{C_2}$ pontosan akkor teljesül, ha $p \leq x$. Ekkor a

$$\beta = \prod_{p \in \mathrm{J}(D)} \beta_p : D \to \prod_{p \in \mathrm{J}(D)} C_2$$

leképezés izomorfizmus.

Minden $p \in \mathrm{J}(D)$ elemre legyen $\psi_i^p = \beta_p \circ \psi_i$. Alkalmazva a 3.7. lemmát az $\eta_i : L_0 \to L_i$, $\psi_i^p : \operatorname{Con} L_i \to C_2$ homomorfizmusokra, kapunk egy olyan L_p egyszerű hálót, aminek van legnagyobb eleme és tartalmaz duális atomot, amit jelöljön d_p', továbbá mindkét $i \in \{1,2\}$ indexre kapunk egy $\varphi_i^p : L_i \to L_p$ háló-homomorfizmust, amelyre

$$\varphi_1^p \circ \eta_1 = \varphi_2^p \circ \eta_2,$$

és egy $\alpha_p : \operatorname{Con} L_p \to C_2$ izomorfizmust, amelyre

$$\alpha_p \circ \operatorname{Con} \varphi_i^p = \psi_i^p = \beta_p \circ \psi_i.$$

Legyen $L = \prod(L_p \mid p \in \mathrm{J}(D))$ és mindkét $i \in \{1,2\}$ indexre

$$\varphi_i = \prod_{p \in \mathrm{J}(D)} \varphi_i^p : L_i \to L.$$

Ekkor

$$\varphi_1 \circ \eta_1 = \varphi_2 \circ \eta_2.$$

Mivel $\operatorname{Con} \varphi_i = \prod(\operatorname{Con} \varphi_i^p \mid p \in \mathrm{J}(D))$, ezért

$$\left(\prod_{p \in \mathrm{J}(D)} \alpha_p\right) \circ \operatorname{Con} \varphi_i = \prod_{p \in \mathrm{J}(D)} (\alpha_p \circ \operatorname{Con} \varphi_i^p) =$$

$$= \prod_{p \in \mathrm{J}(D)} (\beta_p \circ \psi_i) = \left(\prod_{p \in \mathrm{J}(D)} \beta_p\right) \circ \psi_i = \beta \circ \psi_i.$$

Legyen tehát $\alpha = \beta^{-1} \circ \prod(\alpha_p \mid p \in \mathrm{J}(D))$. Mivel β és $\prod(\alpha_p \mid p \in \mathrm{J}(D))$ izomorfizmusok, ezért α definíciója értelmes és $\alpha : \operatorname{Con} L \to D$ olyan izomorfizmus, amire

$$\alpha \circ \operatorname{Con} \varphi_i = \psi_i.$$

Minden $p \in \mathrm{J}(D)$ elemre definiáljuk a $d_p \in L = \prod(L_q \mid q \in \mathrm{J}(D))$ elemet a következő képpen:

$$(d_p)_q = \begin{cases} d'_p & \text{ha } q = p, \\ 1_{L_q} & \text{ha } q \neq p. \end{cases}$$

Ekkor d_p duális atom L-ben és a $\{d_p \mid p \in \mathrm{J}(D)\}$ halmaz által generált duális ideál

$$\prod_{p \in \mathrm{J}(D)} \{d'_p, 1_{L_p}\}$$

olyan Boole-féle háló, ami a D-vel izomorf és duális atomjainak a halmaza $\{d_p \mid p \in \mathrm{J}(D)\}$.

Mivel $\operatorname{Con} L = \prod(\operatorname{Con} L_p \mid p \in \mathrm{J}(D))$ és L_p egyszerű, ezért minden $p, q \in \mathrm{J}(D)$ elempárra a $\Theta_L(d_p, 1_L)$ elem q-adik koordinátája

$$(\Theta_L(d_p, 1_L))_q = \begin{cases} \Theta_{L_p}(d'_p, 1_{L_p}) = \iota_{L_p} & \text{ha } q = p, \\ \Theta_{L_q}(1_{L_q}, 1_{L_q}) = \omega_{L_q} & \text{ha } p \neq q. \end{cases}$$

Ekkor minden $q \in \mathrm{J}(D)$ elemre

$$\beta_q p = \alpha_q(\Theta_L(d_p, 1_L))_q,$$

ezért

$$\beta p = \prod (\alpha_q \mid q \in \mathrm{J}(D))\, \Theta_L(d_q, 1_L),$$

amiből azonnal adódik, hogy $p = \alpha\Theta_L(d_p, 1_L)$.

Mivel véges direkt szorzat megtartja a 0-elemet és véges hálókhoz véges hálót rendel, a lemmát bebizonyítottuk. $\square$

Bizonyítás (3.5. tétel). Először értelmezzük a D véges disztributív háló által generált Boole-féle hálót. A Stone-féle reprezentációs tétel miatt létezik olyan véges Ω halmaz, amire D izomorf a $(\mathcal{P}(\Omega); \subseteq)$ Boole-féle háló egy részhálójával. Tehát feltehető, hogy D részhálója $\mathcal{P}(\Omega)$-nak. Vegyük az összes $\mathcal{P}(\Omega)$-beli, D-t tartalmazó Boole-féle hálót. Ezek metszete is Boole-féle, jelölje B. B az Ω halmaz összes olyan $x \subseteq \Omega$ részhalmaza által generált részháló $\mathcal{P}(\Omega)$-ban, amelyekre igaz, hogy vagy $x \in D$, vagy $\bar{x} = \Omega \setminus x \in D$, sőt B minden eleme felírható x, illetve $\bar{x}$ alakú elemek egyesítéseként, ahol $x \in D$. Mielőtt megmutatjuk, hogy B nem függ Ω-tól, vezessünk be néhány jelölést.

Jelölje $\eta : D \to B$ a kanonikus beágyazást. Minden $x \in B$ elemre $\varrho(x)$ jelölje a legkisebb D-beli elemet, ami tartalmazza x-et. Az így kapott $\varrho : B \to D$ megfeleltetés olyan $(\vee, 0)$-homomorfizmus, amire

$$\varrho \circ \eta = \mathrm{Id}_D,$$

és a

$$\varrho \restriction_{\mathrm{J}(B)} : \mathrm{J}(B) \to \mathrm{J}(D) \tag{3.2}$$

leképezés rendezéstartó bijekció a $\mathrm{J}(B)$ és $\mathrm{J}(D)$ részbenrendezett halmazok között. A rendezéstartás és a szürjektivitás nyivánvaló, mert minden véges Boole-féle háló atomos és minden Boole-féle hálóban az atomok és az $\vee$-irreducibilis elemek megegyeznek. Az injektivitás bizonyításához legyen $x, y \in \mathrm{J}(B)$ két tetszőleges elem, amire $\varrho(x) = \varrho(y) = z$. Mivel x és y atom, ezért x vagy $\bar{x}$ és y vagy $\bar{y}$ biztosan D-ben van. De $\varrho(x) = \varrho(y) = z$, tehát $x = y = z$ vagy $\bar{x}, \bar{y} \in D$. Mivel x és y atomok, $x = y$ vagy $z = (\bar{x} \cap z) \cup (\bar{y} \cap z)$. Ha $x = y$, akkor készen vagyunk. Ha $z = (\bar{x} \cap z) \cup (\bar{y} \cap z)$, akkor $\varrho(x) = \varrho(y) = z$ miatt $x = y = z = \emptyset$, ami ellentmondás, mert $x, y \in \mathrm{J}(B)$. Tehát ϱ a $\mathrm{J}(B)$ halmazon injektív.

Ebből azonnal adódik, hogy B nem függ az Ω halmaztól, hiszen tetszőleges véges Ω-ból kiindulva kapjuk, hogy B izomorf a $|\mathrm{J}(D)|$-elemű halmaz hatványhalmazával.

Legyen tehát B a D által generált Boole-féle algebra és $\eta : D \to B$ a kanonikus beágyazás. Alkalmazva a 3.8. lemmát az $\eta_i : L_0 \to L_i$ háló-homomorfizmusra és az $\eta \circ \psi_i : \mathrm{Con}\, L_i \to B$ teljes $\vee$-homomorfizmusra, kapunk egy K_0 hálót és mindkét $i \in \{1, 2\}$ indexre egy $\varphi_i^0 : L_i \to K_0$ háló-homomorfizmust, amelyre

$$\varphi_1^0 \circ \eta_1 = \varphi_2^0 \circ \eta_2,$$

és egy $\alpha_0 : \mathrm{Con}\, K_0 \to B$ izomorfizmust, amelyre

$$\alpha_0 \circ \mathrm{Con}\, \varphi_i^0 = \eta \circ \psi_i.$$

Továbbá a K_0 hálónak van olyan I_0 Boole-féle duális ideálja, aminek $|\mathrm{J}(B)|$ darab duális atomja van, legyenek ezek $\{d_p^0 \mid p \in \mathrm{J}(B)\}$ és minden $p \in \mathrm{J}(B)$ elemre

$$\alpha_0 \Theta_{K_0}(d_p^0, 1_{K_0}) = p.$$

A 3.4. tétel szerint létezik K_1 véges háló és $\alpha_1 : \mathrm{Con}\, K_1 \to D$ izomorfizmus. Továbbá a K_1 hálónak van olyan I_1 Boole-féle ideálja, aminek $\mathrm{J}(D)$ darab duális atomja van, legyenek ezek $\{d_p^1 \mid p \in \mathrm{J}(D)\}$ és minden $p \in \mathrm{J}(D)$ elemre

$$\alpha_1 \Theta_{K_1}(d_p^1, 1_{I_1}) = p.$$

A (3.2)-es bijekció miatt az I_0 duális ideál és az I_1 ideál izomorfak, hiszen a leképezés, ami minden $p \in \mathrm{J}(B)$ elemre a d_p^0-hoz a $d_{\varrho(p)}^1$-et rendeli, izomorfizmust indukál közöttük. Legyen L az a háló, amit úgy kapunk, hogy a K_0 és K_1 hálókat összeragasztjuk, azonosítva I_0 és I_1 elemeit az előbb definiált izomorfizmussal. Az így kapott L hálóban jelölje I az I_0-ból és I_1-ből a ragasztás során kapott részhálót és minden $p \in \mathrm{J}(D)$ elemre d_p a d_p^1-ből kapott elemet. Ugyanakkor mindkét $i \in 2$ indexre jelölje ε_i a K_i háló beágyazását az L hálóba. Ekkor a $\mathrm{Con}\, \varepsilon_1 : \mathrm{Con}\, K_1 \to \mathrm{Con}\, L$ leképezés a 3.8. lemma miatt izomorfizmus és

$$\mathrm{Con}\, \varepsilon_1 : \Theta_{K_1}(d_p^1, 1_{I_1}) \mapsto \Theta_L(d_p, 1_I), \tag{3.3}$$

a $\mathrm{Con}\, \varepsilon_0 : \mathrm{Con}\, K_0 \to \mathrm{Con}\, L$ leképezés $(\vee, 0)$-homomorfizmus és

$$\mathrm{Con}\, \varepsilon_0 : \Theta_{K_0}(d_p^0, 1_{K_0}) \mapsto \Theta_L(d_{\varrho(p)}, 1_I). \tag{3.4}$$

Mindkét $i \in 1, 2$ indexre legyen

$$\varphi_i = \varepsilon_0 \circ \varphi_i^0.$$

Ekkor

$$\varphi_1 \circ \eta_1 = \varepsilon_0 \circ \varphi_1^0 \circ \eta_1 = \varepsilon_0 \circ \varphi_2^0 \circ \eta_2 = \varphi_2 \circ \eta_2.$$

Legyen $\alpha = \alpha_1 \circ (\operatorname{Con} \varepsilon_1)^{-1}$. Mivel α_1 és $\operatorname{Con} \varepsilon_1$ izomorfizmusok, ezért α definíciója értelmes és $\alpha : \operatorname{Con} L \to D$ olyan izomorfizmus, amire

$$\alpha \circ \operatorname{Con} \varphi_i = \alpha_1 \circ (\operatorname{Con} \varepsilon_1)^{-1} \circ (\operatorname{Con} \varepsilon_0) \circ (\operatorname{Con} \varphi_i^0).$$

A (3.3)-as és (3.4)-es összefüggésekből kapjuk, hogy minden $p \in \mathrm{J}(B)$ elemre

$$(\operatorname{Con} \varepsilon_1)^{-1} \circ (\operatorname{Con} \varepsilon_0) : \Theta_{K_0}(d_p^0, 1_{K_0}) \mapsto \Theta_{K_1}(d_{\varrho(p)}^1, 1_{I_1}),$$

ezért minden $p \in \mathrm{J}(B)$ elemre

$$\alpha_1 \circ (\operatorname{Con} \varepsilon_1)^{-1} \circ (\operatorname{Con} \varepsilon_0) \circ \alpha_0^{-1} : p \mapsto \varrho(p),$$

amiből azonnal adódik, hogy

$$\alpha_1 \circ (\operatorname{Con} \varepsilon_1)^{-1} \circ (\operatorname{Con} \varepsilon_0) \circ \alpha_0^{-1} = \varrho,$$

mivel mindkét oldal $(\vee, 0)$-homomorfizmus. Az előzőek alapján tehát mindkét $i \in \{1, 2\}$ indexre

$$\alpha \circ \operatorname{Con} \varphi_i = \varrho \circ \alpha_0 \circ (\operatorname{Con} \varphi_i^0) = \varrho \circ \eta \circ \psi_i = \psi_i.$$

Ha K_0-nak van legkisebb eleme, akkor ε_0 0-tartó beágyazás, ezért ha L_0-nak, L_1-nek és L_2-nek van legkisebb eleme és η_1, η_2 0-tartó homomorfizmus, akkor a 3.8. lemma miatt K_0-nak van legkisebb eleme és φ_1^0, φ_2^0 0-tartó homomorfizmus, tehát L-nek van legkisebb eleme és φ_1, φ_2 0-tartó homomorfizmus.

Ha L_1 és L_2 végesek, akkor a 3.8. lemma miatt K_0 is véges, tehát L is véges. Ezzel a tételt beláttuk. □

3.3. A Huhn-tétel bizonyítása

3.9. tétel. (Huhn A.) *Legyen D disztributív algebrai háló. Ha D-nek legfeljebb $\aleph_1$ kompakt eleme van, akkor van olyan L háló, amelyre* $\operatorname{Con} L \simeq D$.

Jegyezzük meg, hogy a bizonyításból az is kiderül, hogy L választható olyan lokálisan véges hálónak, aminek van legkisebb eleme. A tételből nyilván következik, hogy minden legfeljebb $\aleph_1$ számosságú háló reprezentálható.

Bizonyítás. Jelölje S a tételben szereplő D disztributív háló kompakt elemeinek $(\vee, 0)$-félhálóját. S definíció szerint disztributív. Az 1.5. tételben beláttuk, hogy S minden véges részhalmaza kiterjeszthető S véges, disztributív $(\vee, 0)$-részfélhálójává. Ezt felhasználva S-et előállítjuk véges disztributív $(\vee, 0)$-részfélhálókból álló, rendszer irányított limeszeként. Legyen I $\aleph_1$ számosságú 2-létra. Ilyen a 2.4. tétel miatt létezik. Legyen $\pi : I \to S$ olyan szürjektív leképezés, amire $\pi(0_I) = 0_S$ és $\varrho : I \to \omega$ az a leképezés, ami minden $i \in I$ elemhez hozzárendeli az i alatti elemek számát (ennek van értelme, mert I 2-létra). Minden $i \in I$ elemre $\varrho(i)$ szerint rekurzívan definiáljuk az S_i véges disztributív $(\vee, 0)$-részfélhálót S-ben. S_i legyen olyan véges, disztributív félháló S-ben, ami tartalmazza az

$$\bigcup_{j<i} S_j \cup \{\pi(i)\}$$

véges halmazt. Korábbi megjegyzésünk alapján ilyen létezik. Feltehető, hogy $S_{0_I} = \{0_S\}$. S definíció szerint és π szürjektivitása miatt az így kapott $\mathcal{S} = (S_i \mid i \in I)$ véges disztributív $(\vee, 0)$-részfélhálókból álló rendszer irányított limesze. Legyen I minden $i < j$ elemére $\varphi_j^i : S_i \to S_j$ a kanonikus beágyazás.

Definiáljuk minden $n \in \omega$ számra az

$$I_n = \{i \in I \mid \varrho(i) \leq n\}$$

halmazt. n szerint rekurzívan minden $i \in I_n$ elemre konstruálunk olyan L_i véges 0-elemes hálót, $\varepsilon_i : \operatorname{Con} L_i \to S_i$ izomorfizmust és minden $j \leq i$ elemre $f_i^j : L_j \to L_i$ 0-tartó háló-homomorfizmust, amik tetszőleges $i, j, k \in I_n$, $i \leq j \leq k$ elemek mellett kielégítik az 1.6. feltételeit:

(i) $f_i^i = \mathrm{Id}_{L_i}$,
(ii) $f_k^i = f_k^j \circ f_j^i$ és
(iii) $\varepsilon_j \circ \operatorname{Con} f_j^i = \varphi_j^i \circ \varepsilon_i$.

$n = 0$ esetén $L_{0_I} = \{0\}$ jó, mert $S_{0_I} = 0_S$. Tegyük fel, hogy n-re már megvagyunk a konstrukcióval. Legyen $i \in I_{n+1} \setminus I_n$. I 2-létra, ezért i legfeljebb két elemet fed, jelölje ezeket i_1 és i_2 (ha i egy elemet fed, akkor $i_1 = i_2$). Mindkét $k \in \{1, 2\}$ indexre a

$$\psi_k = \varphi_i^{i_k} \circ \varepsilon_{i_k}$$

leképezés olyan $(\vee, 0)$-beágyazása $\operatorname{Con} L_{i_k}$-nak S_i-be, amire a (ii)-es és (iii)-as feltételek miatt fennáll a

$$\psi_1 \circ \operatorname{Con} f_{i_1}^{i_1 \wedge i_2} = \psi_2 \circ \operatorname{Con} f_{i_2}^{i_1 \wedge i_2}$$

egyenlőség, továbbá S_i véges, tehát ψ_k teljes $\vee$-beágyazás és az 1.2. lemma miatt S_i tekinthető véges disztributív hálónak, ezért alkalmazhatjuk a 3.5. tételt a $\psi_k : \operatorname{Con} L_{i_k} \to S_i$ és $\eta_k = f_{i_k}^{i_1 \wedge i_2} : L_{i_1 \wedge i_2} \to L_{i_k}$ homomorfizmusokra. Tehát létezik olyan L_i véges (0-elemes) háló, mindkét $k \in \{1, 2\}$ indexre $g_k : L_{i_k} \to L_i$ 0-tartó háló-homomorfizmus és $\varepsilon_i : \operatorname{Con} L_i \to S_i$ izomorfizmus, amire

$$g_1 \circ f_{i_1}^{i_1 \wedge i_2} = g_2 \circ f_{i_2}^{i_1 \wedge i_2} \quad \text{és}$$
$$\varepsilon_i \circ \operatorname{Con} g_k = \psi_k.$$

Ha $i_1 = i_2$, akkor g_2-t cseréljük g_1-re, így az előző két összefüggés érvényben marad. Ezután legyen mindkét $k \in \{1, 2\}$ indexre $f_i^{i_k} = g_k$. Erre felírva az előző két összefüggést kapjuk:

$$f_i^{i_1} \circ f_{i_1}^{i_1 \wedge i_2} = f_i^{i_2} \circ f_{i_2}^{i_1 \wedge i_2} \quad \text{és} \tag{3.5}$$
$$\varepsilon_i \circ \operatorname{Con} f_i^{i_k} = \psi_k. \tag{3.6}$$

Ezzel f_i^j-t definiáltuk minden olyan $j \in I_{n+1}$ elemre, ahol i fedi j-t. Legyen most $j \in I_{n+1}$ tetszőleges $j \leq i$ elem. Ha $j = i$, akkor legyen $f_i^i = \mathrm{Id}_{L_i}$. Ha $j < i$, akkor létezik $k \in \{1, 2\}$ index, amire $j \leq i_k$, akkor legyen

$$f_i^j = f_i^{i_k} \circ f_{i_k}^j.$$

A jóldefiniáltság ellenőrzéséhez tegyük fel, hogy $j \leq i_1 \wedge i_2$. Ekkor felhasználva a (3.5)-ös összefüggést

$$f_i^{i_1} \circ f_{i_1}^j = f_i^{i_1} \circ f_{i_1}^{i_1 \wedge i_2} \circ f_{i_1 \wedge i_2}^j = f_i^{i_2} \circ f_{i_2}^{i_1 \wedge i_2} \circ f_{i_1 \wedge i_2}^j = f_i^{i_2} \circ f_{i_2}^j.$$

Ezzel minden $i, j \in I_n$, $j \leq i$ elempárra definiáltuk az $f_i^j : L_j \to L_i$ 0-tartó hálóbeágyazást. Az (i)-es feltétel definíció szerint teljesül. A (ii)-es feltétel ellenőrzéséhez legyen $i, j, k \in I_{n+1}$. Feltehető, hogy $k \in I_{n+1} \setminus I_n$ és $i < j < k$, különben a feltétel triviálisan teljesül. Ekkor van olyan l index, amit a k fed és $j \leq l$. Felhasználva az indukciós hipotézist és a (3.5)-ös összefüggést

$$f_k^i = f_k^l \circ f_l^i = f_k^l \circ f_l^j \circ f_j^i = f_k^j \circ f_j^i.$$

A (iii)-as feltétel ellenőrzéséhez legyen $i, j \in I_{n+1}$. Feltehető, hogy $j \in I_{n+1} \setminus I_n$ és $i < j$, különben a feltétel triviálisan teljesül. Ekkor van olyan l index, amit a j fed és $i \leq l$. Felhasználva az indukciós hipotézist és a (3.6)-os összefüggést

$$\varepsilon_j \circ \operatorname{Con} f_j^i = \varepsilon_j \circ \operatorname{Con} f_j^l \circ \operatorname{Con} f_l^i = \varphi_j^l \circ \varepsilon_l \circ \operatorname{Con} f_l^i = \varphi_j^l \circ \varphi_l^i \circ \varepsilon_i = \varphi_j^i \circ \varepsilon_i.$$

Mivel véges háló minden kongruenciája kompakt, olyan $(L_i \mid i \in I)$ rendszert konstruáltunk, ami a hozzá tartozó $\iota_i = \varepsilon_i$ és $\lambda_k^j = f_k^j$ homomorfizmusokkal együtt kielégíti az 1.6. tétel feltételeit. Tehát létezik olyan L háló, amire $\operatorname{Con_c} L \simeq S$. $\square$

4. fejezet

Ellenpélda CLP-re

Ebben a fejezetben először megmutatjuk, hogy minden félháló kiterjeszthető úgy, hogy a kiterjesztés disztributív legyen. Utána megkonstruáljuk az ellenpéldát, majd a F. Wehrung nevéhez fűződő két lemma segítségével (4.9. és 4.10. lemma) belátjuk, hogy a konstruált félháló ellenpélda. A fejezetben a CLP félhálók segítségével megfogalmazott változatát tartjuk szem előtt.

4.1. Szabad disztributív kiterjesztés

Ebben a szakaszban M. Ploščica és J. Tůma konstrukcióját [15] ismertetjük. Ennek segítségével mutatunk ellenpéldát CLP-re. Legyen S $(\vee, 0)$-félháló. Célunk S-et új elemekkel addig bővíteni, amíg a kapott félháló disztributív nem lesz.

Legyen $\mathcal{C}(S) = \{(u, v, w) \in S^3 \,|\, w \leq u \vee v\}$, és hívjuk az $(u, u, u) \in \mathcal{C}(S)$ alakú elemeket diagonális elemeknek. Nevezzük az $x \subseteq \mathcal{C}(S)$ véges halmazt *soványnak* („reduced”), ha

(a) x pontosan egy diagonális elemet tartalmaz, amit jelöljön $(\pi(x), \pi(x), \pi(x))$,

(b) $(u, v, w)\,, (v, u, w) \in x$ esetén $u = v = w$ és

(c) $(u, v, w) \in x \setminus \{(\pi(x), \pi(x), \pi(x))\}$ esetén $u, v, w \nleq \pi(x)$.

Jelölje $\mathcal{R}(S)$ a sovány halmazok halmazát. Tetszőleges $x \in \mathcal{R}(S)$ sovány halmazra legyen $x^* = x \setminus \{(\pi(x), \pi(x), \pi(x))\}$. Nevezzük *kanonikus projekciónak* („canonical projection”) az előbb definiált $\pi : \mathcal{R}(S) \to S$ leképezést. Rövid ideig jelölje $\leq_S$ az S-en (az $\vee$ műveletből segítségével) definiált $\leq$ részbenrendezést. $\mathcal{R}(S)$-en definiáljuk a következő részbenrendezést:

$$x \leq_{\mathcal{R}(S)} y \Leftrightarrow \forall (u, v, w) \in x \setminus y \quad (u \leq_S \pi(y) \text{ vagy } w \leq_S \pi(y))\,. \tag{4.1}$$

A definícióból azonnal adódik, hogy ha $x \leq_{\mathcal{R}(S)} y$, akkor $\pi(x) \leq_S \pi(y)$. Ellenőriznünk kell, hogy valóban részbenrendezést definiáltunk. $x \setminus x = \emptyset$, ezért $\leq_{\mathcal{R}(S)}$ reflexív. Tegyük fel, hogy $x \leq_{\mathcal{R}(S)} y \leq_{\mathcal{R}(S)} z$ és $(u, v, w) \in x \setminus z$. Ha $(u, v, w) \in x \setminus y$, akkor $u \leq_S \pi(y) \leq_S \pi(z)$, vagy $w \leq_S \pi(y) \leq_S \pi(z)$. Ha $(u, v, w) \notin x \setminus y$, akkor $(u, v, w) \in y$, ezért $u \leq_S \pi(z)$, vagy $w \leq_S \pi(z)$. Tehát $x \leq_{\mathcal{R}(S)} z$, ezért $\leq_{\mathcal{R}(S)}$ tranzitív. Ha $x \leq_{\mathcal{R}(S)} y$ és $y \leq_{\mathcal{R}(S)} x$, akkor $\pi(x) = \pi(y)$ és a sovány halmaz definíciójának (c) feltételéből azonnal adódik, hogy $x = y$, tehát $\leq_{\mathcal{R}(S)}$ antiszimmetrikus. Ezzel beláttuk, hogy $\leq_{\mathcal{R}(S)}$ részbenrendezés.

Figyeljük meg, hogy a definícióban szereplő feltétel u-ban és v-ben nem szimmetrikus. Később látni fogjuk, hogy ez fontos szerepet játszik a megkonstruálandó szabad disztributív kiterjesztés disztributivitásánál.

Mostantól az egyszerűbb jelölés és a könnyebb érthetőség kedvéért a $\leq$ jelet használjuk a $\leq_S$ és a $\leq_{\mathcal{R}(S)}$ helyett is.

4.1. lemma. $\mathcal{R}(S)$ $(\vee,0)$*-félháló az előbb definiált részbenrendezésre nézve, ahol tetszőleges* $x,y\in\mathcal{R}(S)$ *elemek egyesítését kiszámolhatjuk az alábbi algoritmussal:*

1. *Legyen* $A_0=x\cup y$. *Minden* $(u,v,w)\neq(v,u,w)$ A_0*-beli elempárt töröljünk* A_0*-ból és helyette vegyük hozzá* A_0*-hoz a* (w,w,w) *elemet. Az összes helyettesítés után kapott halmazt jelölje* A_1.
2. *Jelölje* $(u_1,u_1,u_1),\dots,(u_k,u_k,u_k)$ *az* A_1 *diagonális elemeit. Ezeket töröljük* A_1*-ből és helyettük vegyük hozzá* A_1*-hez az* (u,u,u) *elemet, ahol* $u=\bigvee_{i=1}^{k}u_i$. *Az így kapott halmazt jelölje* A_2.
3. *Ha létezik* $(u,v,w)\in A_2$ *nem diagonális elem, amelyre* $v\leq\pi(A_2)$, *akkor ezt és a diagonális elemet töröljük* A_2*-ből és vegyük hozzá* A_2*-höz a* $(w\vee\pi(A_2),w\vee\pi(A_2),w\vee\pi(A_2))$ *elemet. (Ezzel* $\pi(A_2)$ *értéke is megváltozik.) Iteráljuk a fenti eljárást, amíg lehetséges. Az eredményül kapott halmazt jelölje* A_3.
4. *Töröljük* A_3*-ból az összes* (u,v,w) *nem diagonális elemet, amelyre* $u\leq\pi(A_3)$ *vagy* $w\leq\pi(A_3)$. *Az így kapott halmaz:* $A_4=x\vee y$.

A $\iota_S:S\to\mathcal{R}(S)$, $u\mapsto(u,u,u)$ *megfeleltetés* $(\vee,0)$*-beágyazás.*

Bizonyítás. Először lássuk be, hogy A_4 sovány halmaz. Valóban, a 2. lépés miatt A_4 pontosan egy diagonális elemet tartalmaz, tehát teljesül rá az (a) feltétel. Az 1. lépés miatt teljesül rá a (b) feltétel. A (c) feltétel a 3. és 4. lépés miatt áll fenn A_4-re.

Most megmutatjuk, hogy $x\leq A_4$. ($y\leq A_4$ bizonyítása hasonló.) Tegyük fel, hogy $(u,v,w)\in x\setminus A_4$, azaz (u,v,w)-t valamelyik lépésben töröltük. Ha az 1. vagy a 2. lépésben töröltük, akkor a 2. lépés miatt $w\leq\pi(A_4)$. Ha a 3. lépésben töröltük, akkor $w\leq\pi(A_3)=\pi(A_4)$. Ha a 4. lépésben töröltük, akkor $u\leq\pi(A_4)$ vagy $w\leq\pi(A_4)$. Tehát $x\leq A_4$.

Végül azt kell belátnunk, hogy A_4 minimális felső korlát. Ehhez legyen $z\in\mathcal{R}(S)$, $x\leq z$, $y\leq z$. Tegyük fel, hogy $(u,v,w)\in A_4\setminus z$. Ha $(u,v,w)\in A_0$, akkor $u\leq\pi(z)$ vagy $w\leq\pi(z)$, mert $x\leq z$ és $y\leq z$. Ha $(u,v,w)\notin A_0$, akkor az algoritmus során jelent meg, tehát csak a $(\pi(A_4),\pi(A_4),\pi(A_4))$ elem lehet, ezért azt kell belátnunk, hogy $\pi(A_4)\leq\pi(z)$. Az $x\leq z$ és $y\leq z$ feltételből következik, hogy $\pi(x)\leq\pi(z)$ és $\pi(y)\leq\pi(z)$. Ha létezik $(c,c,c)\in A_1$ elem, ami az 1. lépés során jelent meg, akkor létezik $(a,b,c)\in x$ nem diagonális elem, amelyre $(b,a,c)\in y$. z nem tartalmazhatja az (a,b,c) és a (b,a,c) elemet egyszerre. Feltehető, hogy $(a,b,c)\notin z$ (a másik eset hasonló). Ekkor $x\leq z$ miatt $a\leq\pi(z)$ vagy $c\leq\pi(z)$. Ha $a\leq\pi(z)$, akkor $(b,a,c)\notin z$, mert z sovány. Tehát $y\leq\pi(z)$ miatt $b\leq\pi(z)$ vagy $c\leq\pi(z)$. Ha $b\leq\pi(z)$, akkor $c\leq a\vee b\leq\pi(z)$. Ezért minden esetben azt kapjuk, hogy $c\leq\pi(z)$. Ez azt jelenti, hogy a 2. lépés után $\pi(A_2)\leq\pi(z)$. Ha létezik $(a,b,c)\in A_2$ nem diagonális elem, amit a 3. lépés során törlünk, akkor $b\leq\pi(A_2)\leq\pi(z)$. Tehát $(a,b,c)\notin z$, ezért $a\leq\pi(z)$ vagy $c\leq\pi(z)$. Ha $a\leq\pi(z)$, akkor $c\leq a\vee b\leq\pi(z)$. Így mindkét esetben $c\leq\pi(z)$, ezért $c\vee\pi(A_2)\leq\pi(z)$ és a 3. lépés után $\pi(A_3)\leq\pi(z)$. A 4. lépésben a diagonális elem nem változik, azaz $\pi(A_4)\leq\pi(z)$.

Tehát $\mathcal{R}(S)$ $(\vee,0)$-félháló és $x\vee y=A_4$. ι_S injektivitása és 0-tartása a definíció közvetlen következménye. Legyen $x=\iota_S(u)$ és $y=\iota_S(v)$. Ekkor $A_0=A_1=\{(u,u,u),(v,v,v)\}$, $A_2=A_3=A_4=\{(u\vee v,u\vee v,u\vee v)\}$, ezért ι_S $\vee$-tartó leképezés. Tehát ι_S $(\vee,0)$-beágyazás. $\square$

Minden S-beli elemet azonosítsunk a ι_S beágyazásnál vett képével. (Mostantól bármilyen S $(\vee, 0)$-félhálóra S és $\operatorname{Im}\iota_S$ között nem teszünk különbséget.) Vegyük észre, hogy $\pi : \mathcal{R}(S) \to S$ rendezéstartó leképezés (nem feltétlenül $(\vee, 0)$-homomorfizmus) és $\pi\restriction S = \mathrm{id}_S$. Az előbbi megállapodással élve tetszőleges $x \in S \subseteq \mathcal{R}(S)$ és $y \in \mathcal{R}(S)$ elemekre igaz a következő összefüggés:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \leq \pi(y). \tag{4.2}$$

Nevezzük az S $(\vee, 0)$-félhálón értelmezett *interpolációnak* („interpolant”) a $\delta : \mathcal{C}(S) \to S$ függvényt, ha $\delta(u, v, w) \vee \delta(v, u, w) = w$ és $\delta(u, v, w) \leq u$ teljesül minden $(u, v, w) \in \mathcal{C}(S)$ elemre. (A definíció alapján nyilvánvaló, hogy félhálón pontosan akkor létezik interpoláció, ha disztributív). Tehát ha S-et úgy bővítjük, hogy ugyanakkor definiálunk a kibővített félhálón egy interpolációt, akkor készen vagyunk.

Legyen $\Delta_S : \mathcal{C}(S) \to \mathcal{R}(S)$ az a leképezés, amit minden $(u, v, w) \in \mathcal{C}(S)$ elemre az alábbi összefüggés definiál:

$$\Delta_S(u, v, w) = \begin{cases} w & \text{ha } u = v = w \text{ vagy } v = 0 \text{ vagy } w = 0, \\ 0 & \text{ha } u = 0, \\ \{(0, 0, 0), (u, v, w)\} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor minden $x \in \mathcal{R}(S)$ elemre

$$x = \bigvee_{(u,v,w) \in x} \Delta_S(u, v, w). \tag{4.3}$$

Valóban, jelöljük az egyenlőség jobb oldalát A-val. Ha $(u, v, w) \in x$, akkor a sovány halmaz definíciójából azonnal adódik, hogy $\Delta_S(u, v, w) \leq x$, ezért $x \geq A$. Továbbá ha $(a, b, c) \in x \setminus A$, akkor (a, b, c)-t a 4.1. lemma algoritmusa során valahol kiszórtuk. Az 1. lépésben nem szórhattuk ki, mert x sovány és $(a, b, c) \in x$. Ha a 2. lépésben szórtuk ki, akkor $a = b = c = \pi(x)$ és az algoritmusból látszik, hogy $\pi(x) \leq \pi(A)$. Ha a 3. vagy a 4. lépésben szórtuk ki, akkor $b \leq \pi(A)$ vagy $a \leq \pi(A)$ vagy $c \leq \pi(A)$, ami x soványsága és $\pi(A) \leq \pi(x)$ miatt csak az $a = b = c = \pi(x)$ esetben lehet. Tehát $x \leq A$, amivel a (4.3)-as egyenlőséget beláttuk.

4.2. lemma. *Legyenek S és T $(\vee, 0)$-félhálók és $\varphi : S \to T$ $(\vee, 0)$-homomorfizmus. Legyen $\delta : \mathcal{C}(\operatorname{Im}\varphi) \to T$ olyan leképezés, amelynél minden $(u, v, w) \in \mathcal{C}(\operatorname{Im}\varphi)$ elemre $\delta(u, v, w) \vee \delta(v, u, w) = w$ és $\delta(u, v, w) \leq u$ teljesül. Ekkor egyértelműen létezik olyan $\varphi_\delta : \mathcal{R}(S) \to T$ $(\vee, 0)$-homomorfizmus, ami kiterjesztése φ-nek és amelynél minden $(u, v, w) \in \mathcal{C}(S)$ elemre $\varphi_\delta(\Delta_S(u, v, w)) = \delta(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w))$ teljesül.*

A bizonyítás előtt jegyezzük meg, hogy az előbb definiált δ leképezés majdnem T-n értelmezett interpoláció, azzal a különbséggel, hogy nem az egész T-n, hanem csak az $\operatorname{Im}\varphi$ részfélhálón van értelmezve.

Bizonyítás. Ha létezik a lemma feltételeit kielégítő φ_δ $(\vee, 0)$-homomorfizmus, akkor minden $x \in \mathcal{R}(S)$ elemre:

$$\varphi_\delta(x) = \varphi_\delta\left(\bigvee_{(u,v,w) \in x} \Delta_S(u, v, w)\right) =$$
$$= \bigvee_{(u,v,w) \in x} \varphi_\delta(\Delta_S(u, v, w)) = \bigvee_{(u,v,w) \in x} \delta(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)),$$

felhasználva a (4.3)-as összefüggést. Tehát φ_δ csak egyféleképpen definiálható:

$$\varphi_\delta(x) = \bigvee_{(u,v,w)\in x} \delta(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)) \quad (x \in \mathcal{R}(S)).$$

φ_δ jóldefiniált, S-en megegyezik φ-vel és minden $(u,v,w) \in \mathcal{C}(S)$ elemre teljesíti a

$$\varphi_\delta(\Delta_S(u,v,w)) = \delta(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w))$$

összefüggést, mert Δ_S definíciója alapján: ha $u = v = w$ vagy $v = 0$ vagy $w = 0$, akkor

$$\varphi_\delta(\Delta_S(u,v,w)) = \varphi_\delta(w) = \delta(\varphi(w), \varphi(w), \varphi(w)) = \delta(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w));$$

ha $u = 0$, akkor

$$\varphi_\delta(\Delta_S(u,v,w)) = \varphi_\delta(0) = \delta(0,0,0) = \delta(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w));$$

harmadik esetben

$$\begin{aligned}\varphi_\delta(\Delta_S(u,v,w)) &= \varphi_\delta(\{(0,0,0),(u,v,w)\}) = \\ &= \delta(0,0,0) \vee \delta(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)) = \delta(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)).\end{aligned}$$

Tehát elég belátni, hogy φ_δ művelettartó. $\varphi_\delta(0) = 0$, mert $0 \in S$. Az $\vee$-tartáshoz a következő egyenlőséget kell igazolni:

$$\begin{aligned}\varphi_\delta(x \vee y) &= \bigvee_{(u,v,w)\in x\vee y} \delta(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)) = \\ &= \bigvee_{(u,v,w)\in x\cup y} \delta(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)) = \varphi_\delta(x) \vee \varphi_\delta(y).\end{aligned}$$

Először legyen $(u,v,w) \in x \cup y$. A szimmetria miatt feltehető, hogy $(u,v,w) \in x$. Mivel $x \leq x \vee y$, ezért $(u,v,w) \in x \vee y$ vagy $u \leq \pi(x \vee y)$ vagy $w \leq \pi(x \vee y)$. Ha $(u,v,w) \in x \vee y$, akkor $\delta(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)) \leq \varphi_\delta(x \vee y)$. Ha $u \leq \pi(x \vee y)$, akkor $\delta(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)) \leq \varphi(\pi(x \vee y)) = \delta(\pi(x \vee y), \pi(x \vee y), \pi(x \vee y)) \leq \varphi_\delta(x \vee y)$. Hasonlóan a harmadik esetben is a $\delta(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)) \leq \varphi_\delta(x \vee y)$ összefüggést kapjuk, tehát $\varphi_\delta(x \vee y) \geq \varphi_\delta(x) \vee \varphi_\delta(y)$.

Az ellenkező irányú egyenlőtlenséghez a 4.1. lemma miatt elég megmutatni, hogy:

$$\varphi(\pi(x \vee y)) = \delta(\varphi(\pi(x \vee y)), \varphi(\pi(x \vee y)), \varphi(\pi(x \vee y))) \leq \varphi_\delta(x) \vee \varphi_\delta(y).$$

Világos, hogy $\varphi(\pi(x)) \leq \varphi_\delta(x)$ és $\varphi(\pi(y)) \leq \varphi_\delta(y)$. Kövessük végig lépésről lépésre a 4.1. lemma algoritmusát. 1. lépés: ha $(u,v,w) \in x$ és $(v,u,w) \in y$, akkor

$$\varphi(w) = \delta(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)) \vee \delta(\varphi(v), \varphi(u), \varphi(w)) \leq \varphi_\delta(x) \vee \varphi_\delta(y).$$

2. lépés: mivel az előző lépésben kapott összes diagonális elem legfeljebb $\varphi_\delta(x) \vee \varphi_\delta(y)$, ezért $\pi(A_2) \leq \varphi_\delta(x) \vee \varphi_\delta(y)$. 3. lépés: ha $(u,v,w) \in A_2$, $v \leq \pi(A_2)$, akkor

$$\begin{aligned}\varphi(w) &= \delta(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)) \vee \delta(\varphi(v), \varphi(u), \varphi(w)) \leq \\ &\leq \delta(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)) \vee \varphi(v) \leq \varphi_\delta(x) \vee \varphi_\delta(y).\end{aligned}$$

Tehát $\pi(A_3) \leq \varphi_\delta(x) \vee \varphi_\delta(y)$. 4. lépés: mivel a diagonális elem nem változik, $\varphi(\pi(x \vee y)) = \pi(A_3) \leq \varphi_\delta(x) \vee \varphi_\delta(y)$. $\square$

4.3. tétel. *1. Legyenek S és T $(\vee, 0)$-félhálók. Tetszőleges $\varphi : S \to T$ $(\vee, 0)$-homomorfizmus egyértelműen kiterjeszthető $\mathcal{R}(\varphi) : \mathcal{R}(S) \to \mathcal{R}(T)$ $(\vee, 0)$-homomorfizmussá úgy, hogy $\mathcal{R}(\varphi)(\Delta_S(u, v, w)) = \Delta_T(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w))$ teljesül minden $(u, v, w) \in \mathcal{C}(S)$ elemre.*
2. Az $S \mapsto \mathcal{R}(S)$, $\varphi \mapsto \mathcal{R}(\varphi)$ megfeleltetés $\mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0$ funktort definiál.

Bizonyítás. A tétel első része közvetlen következménye a 4.2. lemmának a $\varphi \leftrightarrow \iota_T \circ \varphi$ és a $\delta \leftrightarrow \Delta_T \restriction \mathcal{C}(\operatorname{Im}\varphi)$ választással. A (4.3)-as összefüggés miatt $\mathcal{R}(\mathrm{Id}_S) = \mathrm{Id}_{\mathcal{R}(S)}$ és felhasználva, hogy $\mathcal{R}(\varphi)$ $(\vee, 0)$-homomorfizmus:

$$\mathcal{R}(\varphi)(x) = \mathcal{R}(\varphi)\left(\bigvee_{(u,v,w)\in x} \Delta_S(u, v, w)\right) = \left(\bigvee_{(u,v,w)\in x} \Delta_T(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w))\right),$$

amiből azonnal adódik, hogy tetszőleges $\psi : T \to U$ $(\vee, 0)$-homomorfizmusra

$$\mathcal{R}(\psi\varphi) = \mathcal{R}(\psi)\mathcal{R}(\varphi).$$

Ebből rögtön következik a tétel második része. □

Tetszőleges S $(\vee, 0)$-félhálóra legyen $\mathcal{R}^0(S) = S$ és $\mathcal{R}^{n+1}(S) = \mathcal{R}(\mathcal{R}^n(S))$ minden n természetes számra, $\mathcal{D}(S) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}(S)$. Hasonlóan tetszőleges φ $(\vee, 0)$-homomorfizmusra legyen $\mathcal{R}^0(\varphi) = \varphi$ és $\mathcal{R}^{n+1}(\varphi) = \mathcal{R}(\mathcal{R}^n(\varphi))$ minden n természetes számra, $\mathcal{D}(\varphi) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}(\varphi)$.

4.4. tétel. *Az $S \mapsto \mathcal{D}(S)$, $\varphi \mapsto \mathcal{D}(\varphi)$ megfeleltetés $\mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_1$ funktort definiál, amelynél tetszőleges S $(\vee, 0)$-félháló képe az S-nek disztributív kiterjesztése.*

Bizonyítás. Tekintsük az S $(\vee, 0)$-félhálót. $\Delta_{\mathcal{D}(S)} : \mathcal{R}\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(S) \to \mathcal{D}(S)$ interpoláció lesz $\mathcal{D}(S)$-en, tehát $\mathcal{D}(S)$ disztributív $(\vee, 0)$-félháló. Ebből az előző tétel második felét kihasználva következik, hogy a fent definiált megfeleltetés $\mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_1$ funktor. □

Az előző két tételből azonnal adódik a következő

4.5. lemma. *Legyen $\{S_j \mid j \in J\}$ az S $(\vee, 0)$-félháló $(\vee, 0)$-részfélhálóinak tetszőleges halmaza. Ekkor:*
1. $\mathcal{R}(\bigcap_{j\in J} S_j) = \bigcap_{j\in J} \mathcal{R}(S_j)$ és $\mathcal{D}(\bigcap_{j\in J} S_j) = \bigcap_{j\in J} \mathcal{D}(S_j)$.
2. Ha J nemüres, felfelé irányított részben rendezett halmaz és a $j \mapsto S_j$ $(j \in J)$ megfeleltetés rendezéstartó, akkor $\mathcal{R}(\bigcup_{j\in J} S_j) = \bigcup_{j\in J} \mathcal{R}(S_j)$ és $\mathcal{D}(\bigcup_{j\in J} S_j) = \bigcup_{j\in J} \mathcal{D}(S_j)$.

Tetszőleges S $(\vee, 0)$-félhálóra legyen az $x \in \mathcal{D}(S)$ elem *rangja*, $\operatorname{rk} x = n$, ha n a legkisebb természetes szám, amelyre $x \in \mathcal{R}^n(S)$.

Végül lássunk be egy technikai lemmát, amire az Evaporációs lemma bizonyításakor lesz szükségünk.

4.6. lemma. *Legyenek S és T tetszőleges $(\vee, 0)$-félhálók és $\varphi : S \to T$ $(\vee, 0)$-homomorfizmus. Tetszőleges $u \in \mathcal{D}(S)$ és $v_0, v_1 \in \mathcal{D}(T)$ elemre, ha $\mathcal{D}(\varphi)(u) \le v_0 \vee v_1$, akkor léteznek $x_0, x_1 \in \mathcal{D}(S)$ és $y \in S$ elemek, hogy*

$$\varphi(y) \le v_0 \vee v_1, \quad \mathcal{D}(\varphi)(x_i) \le v_i \quad (i \in 2) \quad \text{és} \quad u \le x_0 \vee x_1 \vee y.$$

Bizonyítás. Az állítást az u elem rangjára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Legyen $n = \operatorname{rk} u$. Ha $n = 0$, akkor az $x_0 = x_1 = 0$ és $y = u$ választással készen vagyunk.

Ha $n = 1$, akkor mindkét $i \in 2$ indexre legyen

$$x_i = \{(a, b, c) \in u \mid (\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)) \in v_i^*\} \cup \{0\}.$$

Azonnal látszik, hogy az x_0 és x_1 halmazok kielégítik a sovány halmaz definíciójának feltételeit, ezért $x_0, x_1 \in \mathcal{D}(S)$. A (4.3)-as összefüggést és a 4.3. tételt felhasználva kapjuk, hogy mindkét $i \in 2$ indexre $\mathcal{D}(\varphi)(x_i) \leq v_i$. A 4.1. lemmában láttuk, hogy $(v_0 \vee v_1)^* \subseteq (v_0 \cup v_1)^*$, ezért minden olyan $(a, b, c) \in u$ elemre, amelyre $(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)) \in (v_0 \vee v_1)^*$, a (4.3)-as összefüggést felhasználva kapjuk, hogy $\Delta_S(a, b, c) \leq x_0 \vee x_1$. Tetszőleges $(a, b, c) \in u$ elemre legyen

$$\varrho(a, b, c) = \begin{cases} a & \text{ha } \varphi(a) \leq \pi(v_0 \vee v_1), \\ c & \text{egyébként,} \end{cases}$$

és legyen

$$y = \bigvee \left(\varrho(a, b, c) \mid (a, b, c) \in u \text{ és } (\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)) \notin (v_0 \vee v_1)^*\right).$$

Világos, hogy $y \in S$ és minden olyan $(a, b, c) \in u$ elemre, amelyre $(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)) \notin (v_0 \vee v_1)^*$, a sovány halmazok közti részbenrendezés definícióját felhasználva kapjuk, hogy $\Delta_S(a, b, c) \leq y$. Ezzel beláttuk, hogy tetszőleges $(a, b, c) \in v$ elemre

$$\Delta_S(a, b, c) \leq x_0 \vee x_1 \vee y,$$

így a (4.3)-as összefüggést felhasználva kapjuk, hogy $u \leq x_0 \vee x_1 \vee y$. Végül mivel $\mathcal{D}(\varphi)(u) \leq v_0 \vee v_1$, minden olyan $(a, b, c) \in u$ elemre, amelyre $(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)) \notin (v_0 \vee v_1)^*$, ismét a részbenrendezés definíciója és a (4.3)-as összefüggés alapján $\varphi(\varrho(a, b, c)) \leq \pi(v_0 \vee v_1)$, így $\varphi(y) \leq v_0 \vee v_1$.

Tegyük fel, hogy $n > 1$ és n-nél kisebb rangú elemekre már beláttuk az állítást. φ helyett tekintsük az $\mathcal{R}(\varphi) : \mathcal{R}(S) \to \mathcal{R}(T)$ leképezést. Az u elem rangja $\mathcal{R}(S)$-ben $(n - 1)$, tehát léteznek olyan $x_0', x_1' \in \mathcal{D}(S)$ és $y' \in \mathcal{R}(S)$ elemek, amelyekre

$$\mathcal{R}(\varphi)(y') \leq v_0 \vee v_1, \quad \mathcal{D}(\varphi)(x_i') \leq v_i \quad (i \in 2) \quad \text{és} \quad u \leq x_0' \vee x_1' \vee y'.$$

Mivel $\operatorname{rk} y' = 1$, teljesül rá az indukciós feltevés, tehát léteznek olyan $x_0'', x_1'' \in \mathcal{D}(S)$ és $y \in S$ elemek, amelyekre

$$\varphi(y) \leq v_0 \vee v_1, \quad \mathcal{D}(\varphi)(x_i'') \leq v_i \quad (i \in 2) \quad \text{és} \quad y' \leq x_0'' \vee x_1'' \vee y.$$

Mindkét $i \in 2$ indexre legyen $x_i = x_i' \vee x_i''$. Az így kapott x_i és y elemek teljesítik az állításban szereplő összefüggéseket. Ezzel a lemmát beláttuk. □

4.2. Az $\mathcal{L}$, $\mathcal{G}$ funktorok és az evaporációs lemma

Legyen Ω tetszőleges halmaz. Jelölje $\mathcal{L}(\Omega)$ az a_0^ξ, a_1^ξ $(\xi \in \Omega)$ és 1 szimbólumok és az $a_0^\xi \vee a_1^\xi = 1$ $(\xi \in \Omega)$ relációk által generált $(\vee, 0, 1)$-félhálót. $\mathcal{L}(\Omega)$ reprezentálható, mint olyan $(X, Y) \in \Omega \times \Omega$ párok részbenrendezett halmaza, ahol X és Y véges, diszjunkt részhalmazai Ω-nak vagy $X = Y = \Omega$, és $(X, Y) \leq (X', Y')$, ha $X \subseteq$

X' és $Y \subseteq Y'$. Ebben a félhálóban a fenti a_0^ξ és a_1^ξ szimbólumoknak rendre a $(\{\xi\},\emptyset)$ és $(\emptyset,\{\xi\})$ párok feleltethetők meg, míg $1 = (\Omega,\Omega)$ és $0 = (\emptyset,\emptyset)$. Legyen X tetszőleges részhalmaza Ω-nak. Az $\mathcal{L}(X)$ $(\vee,0,1)$-félhálót azonosítsuk $\mathcal{L}(\Omega)$ azon $(\vee,0,1)$-részfélhálójával, amit az $\{a_i^\xi \mid \xi \in X, i \in 2\}$ elemek generálnak.

Legyen $\varphi : \Omega \to \Omega'$ tetszőleges halmazleképezés. Jelölje $\mathcal{L}(\varphi) : \mathcal{L}(\Omega) \to \mathcal{L}(\Omega')$ azt az egyértelműen létező $(\vee,0,1)$-homomorfizmust, ami az $a_i^\xi \in \mathcal{L}(\Omega)$ elemhez az $a_i^{\varphi(\xi)} \in \mathcal{L}(\Omega')$ elemet rendeli. A definícióból azonnal adódik a következő

4.7. lemma. *Az $\Omega \mapsto \mathcal{L}(\Omega)$, $\varphi \mapsto \mathcal{L}(\varphi)$ megfeleltetés $\mathcal{H} \to \mathcal{S}_0$ funktort definiál.*

Vezessük be az $\mathcal{L}$ és $\mathcal{D}$ funktorok kompozíciójára a $\mathcal{G} = \mathcal{D} \circ \mathcal{L}$ jelölést. Jegyezzük meg, hogy $\mathcal{G}$ tekinthető a halmazok kategóriájából a disztributív $(\vee,0,1)$-félhálók kategóriájába képező funktornak (mert a kapott félhálóknak mindig van legnagyobb eleme és a homomorfizmusok 1-tartók). Felhasználva a 4.5. lemmát kapjuk:

4.8. lemma. *Legyen $\{X_j \mid j \in J\}$ az Ω halmaz részhalmazainak tetszőleges halmaza. Ekkor:*

1. $\mathcal{L}(\bigcap_{j\in J} X_j) = \bigcap_{j\in J} \mathcal{L}(X_j)$ *és* $\mathcal{G}(\bigcap_{j\in J} X_j) = \bigcap_{j\in J} \mathcal{G}(X_j)$.
2. *Ha J nemüres, felfelé irányított részben rendezett halmaz és a $j \mapsto X_j$ $(j \in J)$ megfeleltetés rendezéstartó, akkor* $\mathcal{L}(\bigcup_{j\in J} X_j) = \bigcup_{j\in J} \mathcal{L}(X_j)$ *és* $\mathcal{G}(\bigcup_{j\in J} X_j) = \bigcup_{j\in J} \mathcal{G}(X_j)$.

Tetszőleges Ω halmazra legyen az $x \in \mathcal{G}(\Omega)$ elem *tartója*, $\operatorname{supp} x$, a legkisebb $X \subseteq \Omega$ halmaz, amelyre $x \in \mathcal{G}(X)$. Az előző lemma miatt ilyen halmaz létezik, sőt mindig véges.

A következő lemma előtt szükségünk van egy jelölésre. Ha $A \subseteq \Omega$ tetszőleges véges halmaz, $\varphi : A \to 2$ tetszőleges függvény, akkor legyen

$$a_\varphi^A = \bigvee_{\xi\in A} a_{\varphi(\xi)}^\xi \in \mathcal{L}(\Omega).$$

4.9. lemma. (Evaporációs lemma) *Legyen Ω tetszőleges halmaz, A_0 és A_1 diszjunkt, véges részhalmazai Ω-nak és $\delta \in \Omega \setminus (A_0 \cup A_1)$. Továbbá legyen $u \in \mathcal{G}(\Omega \setminus \{\delta\})$, mindkét $i \in 2$ indexre $v_i \in \mathcal{G}(\Omega \setminus A_i)$ és $\varphi_i : A_i \to 2$ tetszőleges függvény. Ha*

$$u \leq v_0 \vee v_1 \quad \text{és} \quad v_i \leq a_{\varphi_i}^{A_i}, a_i^\delta \quad (i \in 2),$$

akkor $u = 0$.

Bizonyítás. Legyen $h : \Omega \setminus \{\delta\} \to \Omega$ beágyazás. Ekkor $\mathcal{L}(h) : \mathcal{L}(\Omega \setminus \{\delta\}) \to \mathcal{L}(\Omega)$ beágyazás lesz. A 4.6. lemma miatt léteznek $x_0, x_1 \in \mathcal{G}(\Omega \setminus \{\delta\})$ és $y \in \mathcal{L}(\Omega \setminus \{\delta\})$ elemek, amelyekre

$$y \leq v_0 \vee v_1, \quad \mathcal{G}(h)(x_i) \leq v_i \quad (i \in 2) \quad \text{és} \quad u \leq x_0 \vee x_1 \vee y.$$

Rögzítsük az $i \in 2$ indexet. Egyértelműen létezik olyan $p_i : \mathcal{L}(\Omega) \to \mathcal{L}(\Omega \setminus \{\delta\})$ retrakció, amelyre $p_i(a_i^\delta) = 0$ és $p_i(a_{1-i}^\delta) = 1$. Legyen $q_i = \mathcal{D}(p_i)$. $q_i(\mathcal{G}(h)(x_i)) = x_i$, mert $x_i \in \mathcal{G}(\Omega \setminus \{\delta\})$, ezért a $\mathcal{G}(h)(x_i) \leq v_i \leq a_i^\delta$ egyenlőtlenségből $x_i = 0$ következik.

Egyértelműen létezik olyan $r_i : \mathcal{L}(\Omega) \to \mathcal{L}(\Omega \setminus A_{1-j})$ retrakció, amelyre $r_i(a_{\varphi_{1-i}}^{A_{1-i}}) = 0$. Legyen $s_i = \mathcal{D}(r_i)$. $s_i(v_{1-i}) = 0$, mert $v_{1-i} \leq a_{\varphi_{1-i}}^{A_{1-i}}$. Tetszőleges $j \in 2$ indexre legyen $y_j = r_j(y)$. $y_j \leq v_j$, mert $y \leq v_j$ és $y \leq y_0 \vee y_1$. Hiszen $\mathcal{G}(\Omega \setminus A_0) \vee \mathcal{G}(\Omega \setminus A_1) = \mathcal{G}(\Omega)$, ezért léteznek $y_j' \in \mathcal{G}(\Omega \setminus A_{1-j})$ elemek, amelyekre $y = y_0' \vee y_1'$ és $y_j' \leq y_j$ miatt $y \leq y_0' \vee y_1' \leq y_o \vee y_1$. Mivel $\delta \notin A_j$, az $y_j \leq v_j \leq a_{\varphi_j}^{A_j}, a_j^\delta$ egyenlőtlenségből $y_j = 0$ következik. $\square$

4.3. Az eróziós eljárás és az ellenpélda

Legyen $p : \omega \to 2$ a páros számokon 0-t, a páratlan számokon 1-et felvevő paritás függvény. Tetszőleges L $\vee$-félháló $U, V \subseteq L$ részhalmazaira legyen $U \vee V = \{u \vee v \mid u \in U, v \in V\}$, és jelölje $\mathrm{Con}_c^U L$ a $\Theta_L(u,v)$ $(u,v \in U)$ elemek által generált $(\vee,0)$-részfélhálóját $\mathrm{Con_c}\, L$-nek.

4.10. lemma. (Eróziós lemma) *Legyen $x_0, x_1 \in L$ és legyen valamely $n > 0$ természetes számra $Z = \{z_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ olyan véges részhalmaza L-nek, amelyre $\bigvee(z_i \mid i \in n) < z_n$ és mindkét $j \in 2$ indexre vezessük be az*

$$a_j = \bigvee \left(\Theta_L(z_i, z_{i+1}) \mid i \in n, p(i) = j\right)$$

kongruenciát. Ekkor mindkét $j \in 2$ indexre léteznek olyan $u_j \in \mathrm{Con}_c^{\{x_j\} \vee Z} L$ kongruenciák, amelyekre

$$z_0 \vee x_0 \vee x_1 \equiv z_n \vee x_0 \vee x_1 \mod (u_0 \vee u_1) \quad \text{és} \quad u_j \leq a_j \cap \Theta_L(z_n \vee x_j, x_j) \quad (j \in 2).$$

Bizonyítás. Tetszőleges $i \in n$ indexre legyen $v_i = \Theta_L(z_i \vee x_{p(i)}, z_{i+1} \vee x_{p(i)})$. Figyeljük meg, hogy $v_i \in \mathrm{Con}_c^{\{x_{p(i)}\} \vee Z}$. Továbbá $v_i \leq \Theta_L(z_n \vee x_{p(i)}, x_{p(i)})$, mert

$$z_i \vee x_{p(i)} \equiv z_i \vee z_n \vee x_{p(i)} = z_{i+1} \vee z_n \vee x_{p(i)} \equiv z_{i+1} \vee x_{p(i)} \mod \Theta_L(z_n \vee x_{p(i)}, x_{p(i)}),$$

és $v_i \leq a_{p(i)}$, mert $z_i \equiv z_{i+1} \mod a_{p(i)}$. Tetszőleges $j \in 2$ indexre legyen

$$u_j = \bigvee \left(v_i \mid i \in n, p(i) = j\right).$$

Hogy mindkét $j \in 2$ indexre $u_j \in \mathrm{Con}_c^{\{x_j\} \vee Z} L$ és $u_j \leq a_j \cap \Theta_L(z_n \vee x_j, x_j)$ teljesül, az közvetlenül adódik a bizonyítás első részéből. Végül minden $i \in n$ indexre $z_i \vee x_{p(i)} \equiv z_{i+1} \vee x_{p(i)} \mod v_i$, ezért $z_i \vee x_0 \vee x_1 \equiv z_{i+1} \vee x_0 \vee x_1 \mod (u_0 \vee u_1)$, amiből $z_0 \vee x_0 \vee x_1 \equiv z_n \vee x_0 \vee x_1 \mod (u_0 \vee u_1)$ azonnal következik. □

4.11. tétel. *Legyen Ω legalább $\aleph_2$ számosságú halmaz és L tetszőleges korlátos háló. Ekkor* $\mathrm{Con_c}\, L \not\cong \mathcal{G}(\Omega)$.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy létezik $\mu : \mathrm{Con_c}\, L \to \mathcal{G}(\Omega)$ $(\vee, 0)$-izomorfizmus. Ekkor minden $\xi \in \Omega$ elemre létezik $n_\xi \in \omega$ természetes szám és

$$(0 = z_0^\xi, z_1^\xi, \ldots, z_{n_\xi}^\xi = 1) \subseteq L$$

sorozat úgy, hogy minden $i \in n_\xi$ indexre:

$$\mu\Theta_L(z_i^\xi, z_{i+1}^\xi) \leq a_{p(i)}^\xi. \tag{4.4}$$

Mivel $\aleph_2$ nem-megszámlálható reguláris számosság, van olyan $n \in \omega$ természetes szám és $\Omega' \subseteq \Omega$ $\aleph_2$ számosságú részhalmaz, amelynek minden $\xi \in \Omega'$ elemére $n_\xi = n$. Legyen $r : \Omega \to \Omega'$ tetszőleges retrakció. $\mathcal{G}(r)$ olyan $(\vee, 0, 1)$-homomorfizmus, ami a $\mathcal{G}(\Omega') \leq \mathcal{G}(\Omega)$ $(\vee, 0, 1)$-részfélhálóra megszorítva identitás. Ha Ω'-t jelöljük Ω-val és $\mathcal{G}(r) \circ \mu$-t jelöljük μ-vel, akkor olyan $(\vee, 0, 1)$-homomorfizmust kapunk $\mathrm{Con_c}\, L$-ből $\mathcal{G}(\Omega)$-ba, amelyikre a (4.4)-es összefüggés fennáll. Az így kapott μ homomorfizmus nem feltétlenül izomorfizmus. Legyen $\Theta \in \mathrm{Con}\, L$ az a kongruencia, amire

$(x, y) \in \Theta$ pontosan akkor teljesül, ha $\mu\Theta_L(x, y) = 0$. μ az L/Θ faktorháló kompakt-kongruencia-félhálóján $(\vee, 0, 1)$-homomorfizmust indukál, amit jelöljön μ_Θ. Ha L-et kicseréljük L/Θ-ra és μ-t kicseréljük μ_Θ-ra, akkor kapjuk, hogy az indirekt feltevésből következik olyan L korlátos háló, $\mu : \operatorname{Con_c} L \to \mathcal{G}(\Omega)$ $(\vee, 0, 1)$-homomorfizmus és $n \in \omega$ természetes szám létezése, hogy minden $\xi \in \Omega$ elemre van L-beli elemeknek olyan n hosszú sorozata, amelyre teljesül a (4.4)-es összefüggés, továbbá feltehető, hogy μ a 0-t szeparálja. Rögzítsük az így kapott L-et, Ω-t, μ-t, n-et és minden $\xi \in \Omega$ elemre a $(z_0^\xi, \dots, z_n^\xi)$ sorozatot.

Most következik az eróziós eljárás, ami azt mutatja, hogy az immár azonos hosszú sorozatok közül minden $0 < i \leq n$ indexhez kiválasztható véges sok sorozat úgy, hogy ezen sorozatok i-edik elemeinek egyesítése 1, ami $i = n$ esetben nyilvánvaló.

Tetszőleges $X \subseteq \Omega$ részhalmazra jelölje $S(X)$ a $\{z_i^\xi \mid 0 \leq i \leq n, \xi \in X\}$ halmaz által generált $(\vee, 0, 1)$-részfélhálóját L-nek. Legyen $\Phi : [\Omega]^{<\omega} \to [\Omega]^{<\omega}$ az a leképezés, ami az $X \in [\Omega]^{<\omega}$ halmazhoz a

$$\Phi(X) = \bigcup \left\{ \operatorname{supp}(\mu x) \mid x \in \operatorname{Con}_c^{S(X)} L \right\}$$

halmazt rendeli. Mivel Ω $\aleph_2$ számosságú, a 2.5. lemma szerint létezik $\mathcal{T} = (\alpha(f) \mid f : n \mapsto 3)$ n-magasságú (a Φ leképezésre nézve) szabad 3-fa.

4.12. lemma. *Minden $m \in (n+1)$ számra és $g : n \setminus m \to 2$ leképezésre*

$$\bigvee_{f \in T_{n,2}(g)} z_{n-m}^{\alpha(f)} = 1.$$

Bizonyítás. A lemmát m-re vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Ha $m = 0$, az állítás triviálisan teljesül bármely $g : n \to 2$ leképezésre. Tegyük fel, hogy $m \in n$ és m-re már beláttuk az állítást. Legyen $g : n \setminus (m+1) \to 2$ tetszőleges függvény. Tetszőleges $i \in 2$ indexre legyen

$$x_i = \bigvee_{f \in T_{n,2}(g,i)} z_{n-m-1}^{\alpha(f)}.$$

Rögzítsük az $i \in 2$ indexet. Ekkor

$$\mu\Theta_L(x_i, 1) \leq \left(\bigvee_{f \in T_{n,2}(g,i)} \mu\Theta_L \left(z_{n-m-1}^{\alpha(f)}, z_{n-m}^{\alpha(f)} \right) \right) \vee \mu\Theta_L \left(\bigvee_{f \in T_{n,2}(g,i)} z_{n-m}^{\alpha(f)}, 1 \right).$$

Legyen

$$u = \mu\Theta_L \left(\bigvee_{f \in T_{n,2}(g)} z_{n-m-1}^{\alpha(f)}, 1 \right) = \mu\Theta_L(x_0 \vee x_1, 1),$$

$A_i = \{\alpha(f) \mid f \in T_{n,2}(g,i)\}$ és $\varphi_i : A_i \to 2$ a konstans $p(n-m-1)$ értékű függvény. Az indukciós feltevés alapján

$$\mu\Theta_L \left(\bigvee_{f \in T_{n,2}(g,i)} z_{n-m}^{\alpha(f)}, 1 \right) = 0$$

és a (4.4)-es összefüggés alapján minden $f \in T_{n,2}(g,i)$ függvényre

$$\mu\Theta_L(z_{n-m-1}^{\alpha(f)}, z_{n-m}^{\alpha(f)}) \leq a_{p(n-m-1)}^{\alpha(f)}.$$

Az előzőekből azonnal adódik, hogy

$$\mu\Theta_L(x_i,1) \leq \bigvee_{f\in T_{n,2}(g,i)} a^{\alpha(f)}_{p(n-m-1)} = a^{A_i}_{\varphi_i}.$$

Legyen δ tetszőleges eleme Ω-nak. Az Eróziós lemma miatt léteznek

$$v_j \in \mathrm{Con}^{S(A_j\cup\{\delta\})}_c L$$

kongruenciák, amelyekre

$$v_j \leq a^{\delta}_{p(j)} \cap \mu\Theta_L(1,x_j) \leq a_{p(j)}, a^{A_j}_{\varphi_j} \quad \text{és} \quad u \leq v_0 \vee v_1.$$

Legyen most $\delta = \alpha(f)$, valamely rögzített $f \in T_{n,3}(g,2)$ függvényre. $\operatorname{supp} u \subseteq \Phi(\{\alpha(h) \mid h \in T_{n,2}(g)\}) = \Phi(A_0 \cup A_1)$ és $\operatorname{supp} v_j \subseteq \Phi(A_0 \cup \{\delta\})$. Mivel $\mathcal{T}$ (a Φ-re nézve) szabad 3-fa, $\delta \notin \Phi(A_0 \cup A_1)$ és $A_{1-j} \cap \Phi(A_j \cup \{\delta\}) = \emptyset$. Az Evaporációs lemmát alkalmazva kapjuk, hogy $u = 0$, amiből következik, hogy

$$\bigvee_{f\in T_{n,2}(g)} z^{\alpha(f)}_{n-m-1} = 1$$

Ezzel a lemmát beláttuk. $\square$

Az előbb bizonyított lemma $m = n$ és $g = \emptyset$ esetben az $1 = \bigvee(z^{\alpha(f)}_0 \mid f \in T_{n,2}(\emptyset)) = 0$ egyenlőséget adja, ami ellentmondás. Ezzel beláttuk a tételt. $\square$

4.13. tétel. *Legyen Ω legalább $\aleph_2$ számosságú halmaz és L tetszőleges háló. Ekkor* $\mathrm{Con_c}\, L \not\cong \mathcal{G}(\Omega)$.

Bizonyítás. Az előző tételhez hasonlóan indirekt tegyük fel, hogy létezik

$$\mu : \mathrm{Con_c}\, L \to \mathcal{G}(\Omega)$$

$(\vee, 0)$-izomorfizmus. Ekkor léteznek L-ben $u \leq v$ elemek, amelyre $\mu\Theta_L(u,v) = 1$, hiszen $\mu^{-1}(1) \in \mathrm{Con_c}\, L$, tehát előáll

$$\mu^{-1}(1) = \Theta_L(u_0,v_0) \vee \cdots \vee \Theta_L(u_k,v_k) \quad (k \in \omega, u_0, v_0, \ldots, u_k, v_k \in L)$$

alakban. $u = (\bigwedge u_i) \wedge (\bigwedge v_i), v = (\bigvee u_i) \vee (\bigvee v_i)$ választással

$$\mu^{-1}(1) = \Theta_L(u_0,v_0) \vee \cdots \vee \Theta_L(u_k,v_k) \leq \Theta_L(u,v)$$

miatt $\Theta_L(u_0,v_0) \vee \cdots \vee \Theta_L(u_k,v_k) = \Theta_L(u,v)$, mert μ izomorfizmus.

Mint az előző tételben, találhatók L-beli sorozatok, amelyek teljesítik a (4.4)-es összefüggést. Feltehető, hogy $u \leq z^{\xi}_i \leq v$ $(0 \leq i \leq n_{\xi}, \xi \in \Omega)$. Tekintsük különben z^{ξ}_i elemek helyett a $(z^{\xi}_i \vee u) \wedge v$ elemeket. Az így kapott sorozatok ugyanúgy kielégítik a (4.4)-es összefüggést. Innentől a μ-t megszorítva L-nek az $[u,v]$ korlátos részhálójára a bizonyítás szóról szóra megegyezik az előző tétel bizonyításával. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] S.Z. Ditor: *Cardinality questions concerning semilattices of finite breadth*. Discrete Math. **48** (1984), 47–59.

[2] H. Dobbertin: *Vaught's measures and their applications in lattice theory*. J. Pure Appl. Algebra **43** (1986), 27–51.

[3] Ju.L. Ershov: *Theory of Numerations (Russian)*. Monographs in Mathematical Logic and Foundations of Mathematics. Nauka, Moscow, 1977. 416 p.

[4] G. Grätzer: *General Lattice Theory*. Second edition, new appendices with B.A. Davey, R. Freese, B. Ganter, M. Greferath, P. Jipsen, H.A. Priestley, H. Rose, E.T. Schmidt, S.E. Schmidt, F. Wehrung, R. Wille. Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Berlin, 2003, xx+663 p.

[5] G. Grätzer, H. Lakser and F. Wehrung: *Congruence Amalgamation of lattices*. Acta Sci. Math. (Szeged) **66** (2000), 339–358.

[6] G. Grätzer, E.T. Schmidt: *On congruence lattices of lattices*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **13** (1962), 179–185.

[7] G. Grätzer, E.T. Schmidt: *Congruence-preserving extensions of finite lattices to sectionally complemented lattices*. Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1903–1915.

[8] Hajnal A. és Hamburger P.: *Halmazelmélet*. Harmadik kiadás. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1994, 288 o.

[9] A.P. Huhn: *A reduced free product of distributive lattices I*. Acta Math. Hung. **42** (1983), 349–354.

[10] A.P. Huhn: *On the representation of distributive algebraic lattices I*. Acta Sci. Math. (Szeged) **45** (1983), 239–246.

[11] A.P. Huhn: *On the representation of distributive algebraic lattices II*. Acta Sci. Math. (Szeged) **53** (1989), 3–10.

[12] A.P. Huhn: *On the representation of distributive algebraic lattices III*. Acta Sci. Math. (Szeged) **53** (1983), 11–18.

[13] C. Kuratowski: *Sur une caractérisation des alephs*. Fund. Math. **38** (1951), 14–17.

[14] O. Ore: *Theory of equivalence relations*. Duke Math. J. **9** (1942), 573–627.

[15] M. Ploščica and J. Tůma: *Uniform refinements in distributive semilattices.* Contributions to General Algebra **10**, Proceedings of the Klagenfurt Conference, May 29 – June 1, 1997. Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt 1998. 251–262.

[16] P. Pudlák: *On congruence lattices of lattices.* Algebra Universalis **20** (1985), 96-114.

[17] P. Růžička: *Free trees and the optimal bound in Wehrung's theorem.* Preprint (2006).

[18] F. Wehrung: *A solution to Dilworth's congruence lattice problem.* Preprint (2006).

[19] P.M. Whitman *Lattices, equivalence relations, and subgroups.* Bull. Amer. Math. Soc. **2** (1946), 507–522.

[20] http:/en.wikipedia.org/wiki/Congruence_Lattice_Problem.