Az általánosított Robertson-Walker tér-idők térszerű részének jellemzése

Bevezetés

Az általánosított relativitás elmélet már korán kapcsolatba került a kozmológiai elméletekkel, a Friedmann modell táguló univerzuma vezetett a kozmológiai állandó bevezetéséhez (lásd [B-E]. 424-426. o.; [O] 350-353. o.). Később a csillagászat fejlődése lehetőséget adott a modellek tesztelésére, mint például a Hubble által felfedezett vörös eltolódás ([H-E] 137. o.; [O] 347-348. o.). Az egyik legsikeresebb a Robertson-Walker modell volt, mely megfogalmazta az ősrobbanás elméletét, amelyet a kozmikus háttérsugárzással kapcsolatos mérések is megerősítettek 1965-ben ([O] 357. o.).

Egy korlátos univerzum gondolata már korán felmerült (lásd [P-H-L]), és mostanában egyre többen tanulmányozzák az általánosított Robertson-Walker modellt, hogy mérési eljárásokat találjanak, melyek a térszerű rész jellemzésére használhatók [C-W], [C-S-S], [W].

Az általánosított Robertson-Walker tér-idő egy olyan görbített szorzat tér-idő, melyben a térszerű rész egy 3-dimenziós állandó görbületű Riemann-sokaság, azaz a térszerű rész univerzális fedő felülete $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^3$ vagy $\mathbb{E}^3$. A kozmológiai megfigyelések szerint a hiperbólikus eset a legvalószínűbb [S]. Először a görbített szorzatokra vonatkozó általános eredményeket ismertetjük, hogy ezek segítségével adjunk minél kimerítőbb jellemzést az általánosított Robertson-Walker modell azon p, q pont párjaira, melyekre a p-ből a q pontba két különböző fényszerű geodetikus is indul [Sz-Sz], majd ezek segítségével adjunk módszert a térszerű rész vizsgálatához.

1. Lorentz görbített szorzatok, Robertson-Walker tér-idők és fényszerű geodetikusaik

DEFINÍCIÓK. Legyen $(B, <,>_B)$, $(F, <,>_F)$ szemi-Riemann sokaságok, és $\Phi : B \to \mathbb{R}^+$ egy sima függvény továbbá

$$\pi_B : B \times F \to B,\ \pi_F : B \times F \to F$$

a $B \times F$ szorzat sokaság természetes projekciói, ekkor jelölje $B \times_\Phi F$ azt a görbített szorzatot, mely a $B \times F$ sima sokaság a

$$<,>_{B\times_\Phi F} = \pi_B^*(<,>_B) + (\Phi \circ \pi_B)^2 \cdot \pi_F^*(<,>_F)$$

szemi-Riemann metrikával ellátva, ahol π_B^*, π_F^* a megfelelő szemi-Riemann metrikát húzza vissza a $B \times F$ szorzat sokaságra, ahol ezek a visszahúzottak külön-külön nem lesznek szemi-Riemann metrikák, de a fent definiált már igen. Ugyanis vegyünk egy $v \in T_{(b,f)}(B \times F)$, $(b,f) \in B \times F$ vektort és tegyük fel, hogy erre elfajuló a metrika, azaz $\forall u \in T_{(b,f)}(B \times F)$ vektorra $< v, u >_{B\times_\Phi F} = 0$, viszont ekkor

$$< v, u >_{B\times_\Phi F} = \pi_B^* < v, u >_B + (\Phi \circ \pi_B)^2(b, f) \cdot \pi_F^* < v, u >)_F =$$

$$=< T\pi_B(v), T\pi_B(u) >_B + (\Phi)^2(b) \cdot < T\pi_F(v), T\pi_F(u) >_F = 0$$

amelyből $T\pi_B(v) = 0$, $T\pi_F(v) = 0$ adódik a projekciók tulajdonságaiból és a szemi-Riemann metrikák nemelfajulósága miatt, így $v = 0$ teljesül ami a $<,>_{B\times_\Phi F}$ nemelfajultságát mutatja. A B sokaságot *bázis*nak F-et *fibrum*nak Φ sima függvényt pedig *görbítő függvény*nek nevezzük.

Legyen $\mathbb{R}^1_1$ azaz 1-dimenziós Lorentz-sokaság, melyet a valós egyenes kanonikus metrikájának -1-el való szorzásával kapunk, $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1_1$ egy nyílt intervallum, P egy teljes 3-dimenziós Riemannian sokaság és $\phi : I \to \mathbb{R}^+$ egy pozitív értékű sima függvény. Ekkor az $M = I \times_\phi P$ görbített szorzat egy 4-dimenziós Lorentz-sokaság melyen egy kanonikus idő orientációt definiál az I irányítása, ezt nevezzük *görbített szorzat tér-idő*nek. Továbbá, ha S egy egyszeresen összefüggő 3-dimenziós állandó görbületű Riemannian-sokaság, azaz S vagy a 3-dimenziós euklideszi tér $\mathbb{E}^3$ vagy a 3-dimenziós gömb $\mathbb{S}^3$ vagy a 3-dimenziós hiperbólikus tér $\mathbb{H}^3$, akkor $M = I \times_\phi S$ sokaságot *Robertson-Walker tér-idő*nek hívjuk ([B-E] 129-131. o.; [O] 341-345. o.). Továbbá legyen S' egy 3-dimenziós állandó görbületű Riemann sokaság úgy, hogy létezik egy lokálisan izometrikus fedőleképezés

$$\omega : S \to S',$$

akkor az $M' = I \times_\phi S'$ görbített szorzatot *általánosított Robertson-Walker tér-idő*nek nevezzük. Ebbe a definícióba az $S' = S$ esetet is belevesszük.

Az alábbi *lemmát*, mely standard eszközökkel könnyen bizonyítható, állandóan használni fogjuk.

LEMMA 1.1. Legyen $M = I \times_\phi P$ egy fényszerűen teljes görbített tér-idő, $\omega : P \to P'$ egy lokálisan izometrikus fedés és $M' = I \times_\phi P'$ a hozzá tartozó görbített tér-idő. Ekkor a következők igazak:

1. Az

$$\omega^\times : M \ni (t, z) \mapsto (t, \omega(z)) \in M'$$

egy $\omega^\times : M \to M'$ lokálisan izometrikus fedőleképezést definiál.

2. Ha $\Theta : P \to P$ egy ω-hoz tartozó fedő transzformáció, akkor

$$\Theta^\times : M \ni (t, z) \mapsto (t, \Theta(z)) \in M$$

egy $\omega^\times$-hez tartozó fedőtranszformáció, és minden ilyen ezen az úton kapható meg.

3. Ha $F \subset P$ egy fundamentális tartománya az ω leképezésnek,akkor $F^\times = I \times F$ egy $\omega^\times$-hez tartozó fundamentális tartomány.

A Lorentz geometria következő fogalmait fogjuk még használni: Ha $(M, <,>)$ egy Lorentz-sokaság és $p \in M$, akkor a *p pont T_pM érintőtérben haladó fénykúpjá*n az alábbi

$$\Lambda_p = \{ \ v \in T_pM - \{0_p\} \ \ | \ < v, v >= 0 \ \}$$

halmazt értjük; továbbá a *p pont M sokaságban haladó fénykúpjá*n az előző halmaz exponenciális leképezésnél vett képét értjük:

$$L_p = exp_p(\Lambda_p).$$

Ha $(M, <, >)$ még idő orientált is, akkor értelemszerűen definiálhattjuk a Λ_p^+ és L_p^+ *jövőbe mutató fénykúp*okat a T_pM és M halmazokon.

DEFINÍCIÓ. Legyen $(M, <, >)$ egy szemi-Riemann sokaság, $\varphi : C \to M$ egy geodetikusa, ahol $C \subset \mathbb{R}$ egy zárt intervallum, és $\theta : J \to C$ egy sima szigorúan monoton növő függvény a $J \subset \mathbb{R}$ intervallumon. Ekkor az alábbi

$$\psi = \varphi \circ \theta : J \to M$$

sima görbét a szemi-Riemann sokaság egy *pregeodetikus*ának hívjuk. Legyen ∇ a szemi-Riemann sokaság Levi-Cività kovariáns deriválása, ekkor a ψ pregeodetikus nyilvánvalóan kielégíti az alábbi egyenletet

$$\nabla_{\dot{\psi}}\dot{\psi} = \frac{d^2\theta}{d\tau^2}\dot{\psi},$$

és megfordítva minden ψ sima reguláris görbéje az M szemi-Riemann sokaságnak melyre $\nabla_{\dot{\psi}(\tau)}\dot{\psi}$ kollineáris $\dot{\psi}(\tau)$ vektorral $\forall\tau \in J$ pontra, egy pregeodetikus görbe lesz ([O], 69. o.; 95-96. o.).

ÁLLÍTÁS 1.2. Legyenek $(B, <, >_B)$ és $(F, <, >_F)$ szemi-Riemann sokaságok és $b \in B$, $f \in F$ tetszőleges pontok, ekkor az alábbi négy állítás érvényes:

1. A $B \times_\Phi \{f\}$, $\{b\} \times_\Phi F \subset B \times F$ részhalmazok szemi-Riemann részsokaságai a $B \times_\Phi F$ görbített szorzatnak.

2. A $\pi_B|_{B\times\{f\}}$ projekció megszorítás egy izometria.

3. A $\pi_F|_{\{b\}\times F}$ projekció megszorítás egy $\frac{1}{\Phi(b)}$ arányú hasonlóság.

4. A $B \times \{f\}$, $\{b\} \times F$ részsokaságok ortogonálisan metszik egymást a (b, f) pontban.

Bizonyítás. ([Sz] .o.) 1. A görbített szorzat definíciója miatt a szemi-Riemann metrika megszorítása minden $T_{(b,f)}(B \times \{f\})$, $b \in B$ érintő térre épp az eredeti szemi-Riemann metrikáját adja vissza a T_bB érintőtérnek így a keletkező metrika valóban egy szemi-Riemann metrika lesz. A $\{b\} \times F$ esetben a megszorítás $T_{(b,f)}(\{b\} \times F)$, $f \in F$ érintőtérre az eredeti T_fF-beli szemi-Riemann metrika $\Phi^2(b) \neq 0$-szerese, így ez is egy szemi-Riemann részsokaság lesz.

2. Belátásához legyenek $u, v \in T_{(b,f)}(B \times \{f\})$ vektorok, ekkor

$$< v, u >_{B\times_\Phi F} = \pi_B^* < v, u >_B + (\Phi \circ \pi_B)^2(b, f) \cdot \pi_F^* < v, u >_F =$$

$$= < T\pi_B(v), T\pi_B(u) >_B + 0$$

egyenlőség alapján adódik az izometria.

3.Az előző alapján $u, v \in T_{(b,f)}(\{b\} \times F)$ esetén

$$< v, u >_{B\times_\Phi F} = \pi_B^* < v, u >_B + (\Phi \circ \pi_B)^2(b, f) \cdot \pi_F^* < v, u >_F =$$

$$= 0 + (\Phi \circ \pi_B)^2(b, f) < T\pi_F(v), T\pi_F(u) >_F$$

egyenlőségből kapható, hogy ez egy hasonlóság.

4. Ha $u \in T_{(b,f)}(B \times \{f\}),\ v \in T_{(b,f)}(\{b\} \times F)$ akkor

$$< v, u >_{B \times_\Phi F} = \pi_B^* < v, u >_B + (\Phi \circ \pi_B)^2(b,f) \cdot \pi_F^* < v, u >_F =$$

$$< T\pi_B(v), T\pi_B(u) >_B + (\Phi)^2(b) \cdot < T\pi_F(v), T\pi_F(u) >_F = 0$$

adódik, hiszen $T\pi_F(u) = 0,\ T\pi_B(v) = 0$ ♠.

DEFINÍCIÓ. Az előző *állítás* alapján adódik a

$$T_{(b,f)}(B \times F) = T_{(b,f)}(B \times f) \oplus T_{(b,f)}(\{b\} \times F)$$

horizontális illetve *vertikális* direktösszegre való bontás. Jelölje az ezekhez tartozó *horizontális* és *vertikális* projekciókat

$$\mathcal{H} : T_{(b,f)}(B \times F) \to T_{(b,f)}(B \times \{f\}),\ \mathcal{V} : T_{(b,f)}(B \times F) \to T_{(b,f)}(\{b\} \times F).$$

Definiáljuk továbbá egy $X \in \mathcal{T}(B)$ sima vektormező *lift*jét, mely az az egyértelmű $\hat{X} \in \mathcal{T}(B \times F)$ vektormező, amire $T\pi_B(\hat{X}) = X,\ T\pi_F(\hat{X}) = 0$. Hasonlóan definiálhatjuk egy $Y \in \mathcal{T}(F)$ vektormező $\hat{Y} \in \mathcal{T}(B \times F)$ liftjét.

LEMMA 1.3. Legyen $B \times_\Phi F$ egy görbített szorzat és $\varphi : B \to \mathbb{R}$ sima függvény, akkor

$$grad(\varphi \circ \pi_B) = \widehat{grad\varphi}$$

összefüggés érvényes.

Bizonyítás. ([Sz] .o.)Elég megmutatni, hogy $< v, grad(\varphi \circ \pi_B) > = < v, \widehat{grad\varphi} >$, $\forall v \in T(B \times F)$ ami a

$$< v, grad(\varphi \circ \pi_B) > = v(\varphi \circ \pi_B) = (T\pi_B(v))\varphi = < T\pi_B(v), grad\varphi >_B = < v, \widehat{grad\varphi} >$$

egyenlőség miatt teljesül az előző állításban szereplő $\pi_B|_{B \times \{f\}}$ izometriája illetve a $B \times \{f\}$, és $\{b\} \times F$ részsokaságok ortogonalitása miatt. ♠

ÁLLÍTÁS 1.4. Legyenek $(B, <,>_B),\ (F, <,>_F)$ szemi-Riemann részsokaságok ∇^B, ∇^F pedig ezek Levy-Civitá kovariáns deriválásai $\Phi : B \to \mathbb{R}^+$ sima függvény és $B \times_\Phi F$, ∇ az általuk meghatárott görbített szorzat és annak Levi-Civitá kovariáns deriválása, továbbá $X, Y \in T(F),\ U, V \in T(B)$ sima vektormezők. Ekkor:

1. $\nabla_{\hat{U}} \hat{V} = \widehat{\nabla_U^B V}$

2. $\nabla_{\hat{U}} \hat{X} = \nabla_{\hat{X}} \hat{U} = \frac{\hat{U}(\Phi \circ \pi_B)}{\Phi \circ \pi_B} \hat{X}$

3. $\mathcal{H}(\nabla_{\hat{X}} \hat{Z}) = -(\Phi \circ \pi_B) \cdot (< X, Y >_F \circ \pi_F) grad(\Phi \circ \pi_B)$

4. $\mathcal{V}(\nabla_{\hat{X}} \hat{Y}) = \widehat{\nabla_X^F Y}$

összefüggések érvényesek.

Bizonyítás. ([Sz] .o) 1. Először azt fogjuk belátni, hogy $\nabla_{\hat{U}}\hat{V}$ horizontális. vegyünk egy $X \in T(F)$ sima vektormezőt, ekkor a Koszul formulát alkalmazva:

$$2 < \nabla_{\hat{U}}\hat{V}, \hat{X} >= \hat{U} < \hat{V}, \hat{X} > +\hat{V} < \hat{X}, \hat{U} > -\hat{X} < \hat{U}, \hat{V} > -$$

$$- < \hat{U}, [\hat{V}, \hat{X}] > + < \hat{V}, [\hat{X}, \hat{U}] > + < \hat{X}, [\hat{U}, \hat{V}] >= 0$$

hiszen $[\hat{U}, \hat{X}] = [\hat{V}, \hat{X}] = 0$ teljesül illetve $[\hat{U}, \hat{V}] = \widehat{[U, V]} \perp \hat{X}$ miatt az utolsó három tag tűnik el az első kettő az $\hat{U},\ \hat{V} \perp \hat{X}$ ortoganalitás miatt a harmadik pedig $< \hat{U}, \hat{V} > |_{\{b\}\times F} \equiv c_b$ konstans volta folytán tűnik el. Viszont $\pi_B|_{B\times\{f\}}$ izometrikussága folytán adódik az 1. állítás.

2. Legyenek $U, V \in T(B),\ X \in T(F)$ ekkor $[\hat{U}, \hat{X}] = 0$ és a Levi-Civitá kovariáns deriválás torzió mentessége folytán $Tor(\hat{X}, \hat{U}) = \nabla_{\hat{X}}\hat{U} - \nabla_{\hat{U}}\hat{X} - [\hat{X}, \hat{U}] = 0$ egyenlőségből $\nabla_{\hat{X}}\hat{U} = \nabla_{\hat{U}}\hat{X}$ adódik, amely vektormező vertikális, hiszen

$$0 = \hat{U} < \hat{X}, \hat{V} >=< \nabla_{\hat{U}}\hat{X}, \hat{V} > + < \hat{X}, \nabla_{\hat{U}}\hat{V} >;$$

$$< \nabla_{\hat{U}}\hat{X}, \hat{V} >= 0$$

adódik, mivel $\nabla_{\hat{U}}\hat{V}$ horizontális vektormező. Vegyünk egy $Y \in T(F)$ sima vektormezőt ekkor a Koszul formla alkalmazásával $2 < \nabla_{\hat{U}}\hat{X}, \hat{Y} >= \hat{U} < \hat{X}, \hat{Y} >$ adódik, mert az 1. pont bizonyításában mondottak alapján a többi tag kiesik. Így $\nabla_{\hat{U}}\hat{X}$ vertikális vektormező párhozamos az $\hat{X}$ vektormezővel azaz

$$< \nabla_{\hat{U}}\hat{X}, \hat{X} >= \frac{\hat{U} < \hat{X}, \hat{X} >}{2} = \frac{1}{2}\hat{U}((\Phi \circ \pi_B)^2 < x, x >_F)$$

ahonnan $< X, X > |_{B\times\{f\}} \equiv c_f$ konstans értékűsége folytán a deriválás elvégzésével adódik az állítás.

3. Az eddigi számítások alapján

$$0 = \hat{X} < \hat{Y}, \hat{U} >=< \nabla_{\hat{X}}\hat{Y}, \hat{U} > + < \hat{Y}, \nabla_{\hat{X}}\hat{U} >;$$

$$< \nabla_{\hat{X}}\hat{Y}, \hat{U} >= - < \hat{Y}, \nabla_{\hat{X}}\hat{U} >= - < \hat{Y}, \frac{\hat{U}\Phi}{\Phi}\hat{X} >= -(\Phi \circ \pi_B) \cdot \hat{U}(\Phi \circ \pi_B)(< Y, X > \circ \pi_F) =$$

$$= -(\Phi \circ \pi_B) \cdot (< X, Y >_F \circ \pi_F) < \widehat{grad(\Phi \circ} \pi_B), \hat{U} >$$

adódik ahonnan az előző *lemma* felhasználásával kapjuk a 3. állítást.

4. Tekintsük a $X, Y.Z \in T(F)$ sima vetormezőket. Ekkor a Koszul formula segítségével

$$< \mathcal{V}(\nabla_{\hat{X}}\hat{Y}), \hat{Z} >=< \nabla_{\hat{X}}\hat{Y}, \hat{Z} >= \frac{1}{2}\{\hat{X} < \hat{Y}, \hat{Z} > +\hat{Y} < \hat{Z}, \hat{X} > -\hat{Z} < \hat{X}, \hat{Y} > -$$

$$- < \hat{X}, [\hat{Y}, \hat{Z}] > + < \hat{Y}, [\hat{Z}, \hat{X}] > + < \hat{Z}, [\hat{X}, \hat{Y}] >\} = \frac{1}{2}\{\hat{X} < \hat{Y}, \hat{Z} > +\hat{Y} < \hat{Z}, \hat{X} > -$$

$$-\hat{Z} < \hat{X}, \hat{Y} > - < \hat{X}, \widehat{[Y,Z]} > + < \hat{Y}, \widehat{[Z,X]} > + < \hat{Z}, \widehat{[X,Y]} >\} =$$

$$\frac{\Phi^2(b)}{2}\{(X < Y, Z >_F + Y < Z, X >_F - Z < X, Y >_F - < X, [Y, Z] >_F +$$

$$< Y, [Z, X] >_F + < Z, [X, Y] >_F) \circ \pi_F\} = < \widehat{\nabla_X Y}, \hat{Z} >$$

adódik, amelyből a 4. pont következik. ♠

ÁLLÍTÁS 1. 5. Legyen $M = I \times_\phi P$ egy görbítet szorzat tér-idő és

$$\zeta(\tau) = (\xi(\tau), \eta(\tau)),\ \tau \in J$$

egy $\xi : J \to I$ és $\eta : J \to P$ szorzatra bontásban szereplő sima görbéje. Ekkor ζ pontosan akkor egy geodetikus, ha az alábbi differenciálegyenlet rendszert kielégíti

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} \cdot \xi' + < \dot{\eta}, \dot{\eta} >_S \cdot (\phi \circ \xi) \cdot ((\frac{d\phi}{dt} \circ \xi) \cdot \xi') = 0,$$

$$\overset{P}{\nabla}_{\dot{\eta}}\dot{\eta} + \frac{2}{\phi \circ \xi}\frac{d(\phi \circ \xi)}{d\tau}\dot{\eta} = 0,$$

ahol $<,>_P$, $\overset{P}{\nabla}$ a P 3-dimenziós Riemann-sokaság Riemann metrikáját és a hozzá tartozó Levi-Cività kovariáns deriválást jelöli.

Bizonyítás. ([Sz] .o.) Mivel $\zeta'(\tau) = \widehat{\xi'(\tau)} + \widehat{\eta'(\tau)}$, $\tau \in J$ miatt az előző *állítás* folytán

$$\nabla_{\zeta'}\zeta' = \nabla_{\widehat{\xi'} + \widehat{\eta'}}(\widehat{\xi'} + \widehat{\eta'}) =$$

$$= \nabla_{\widehat{\xi'}}\widehat{\xi'} + 2\nabla_{\widehat{\xi'}}\widehat{\eta'} + \nabla_{\widehat{\eta'}}\widehat{\eta'} =$$

$$= \widehat{\nabla^B_{\xi'}\xi'} + 2\frac{\xi'(\Phi \circ \pi_B)}{(\Phi \circ \pi_B)}\widehat{\eta'} - (< \eta', \eta' >_F \circ \pi_F) \cdot (\Phi \circ \pi_B) \cdot grad(\Phi \circ \pi_B) + \widehat{\nabla^F_{\eta'}\eta'}$$

adódik. Mivel ζ pontosan akkor geodetikus, ha $\nabla_{\zeta'}\zeta' = 0$, így a horizontális és vertikális vektormezők ortogonalitása folytán az *állítás adódik.* ♠

KÖVETKEZMÉNY. Legyen $M = I \times_\phi P$ egy görbített szorzat tér-idő és

$$\zeta(\tau) = (\xi(\tau), \eta(\tau)),\ \tau \in J$$

ennek egy geodetikusa. Ekkor a következők érvényesek:

1. $J \ni \tau \mapsto \eta(\tau) \in P$ a P Riemann-sokaság egy pregeodetikusa.

2. Ha $\kappa : \mathbb{R} \to P$ egy természetes paraméterezésben vett geodetikus, akkor létezik egy olyan fényszerű kiterjeszthetetlen egyértelmű geodetikusa az M sokaságnak

$$\zeta(\tau) = (\xi(\tau), \eta(\tau)),\ \tau \in J$$

amire $\eta(\tau) = \kappa \circ \theta(\tau)$, $\tau \in J$, ahol $\theta : J \to \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton növő sima függvény.

3. Ha ζ geodetikus pontosan akkor fényszerű, ha a $\tau \mapsto (\phi \circ \xi)\frac{d\xi}{d\tau}$, $\tau \in J$ függvény konstans.

Bizonyítás. ([O]) 1. Az előző *állítás* és a pregeodetikus definíciója alapján.

2. A következő *lemmá*ban látni fogjuk, hogy a κ geodetikus egy rögzített $\{t\} \times_\Phi P$ fibrumból egyértelműen emelhető fel egy fényszerű γ görbévé $\gamma(0) = (t, \kappa(0))$ tulajdonsággal, mivel a $\gamma'(0)$ irányú fényszerű $\gamma(0)$-ból induló geodetikus levtítettje egy $\kappa(0)$-ból induló $\kappa'(0)$ irányú pregeodetikus, így e levtített megegyezik κ egy átparaméterezésével, és a fényszerűvé való felemelés egyértelműsége miatt e fényszerű geodetikus megegyezik κ fényszerű felemeltjének egy átparaméterezésével, így a 2. pont adódik.

3.Tegyük fel, hogy ζ fényszerű, akkor azt kell látnunk, hogy $\frac{d}{d\tau}(\tau \to (\Phi \circ \xi)\frac{d\zeta}{d\tau}) = 0$ ez pedig az előző *állítás* illetve

$$0 =< \zeta', \zeta' >= -(\xi')^2 + (\Phi \circ \xi)^2 < \eta, \eta >_F \qquad (1)$$

alapján

$$\frac{d}{d\tau}((\Phi \circ \xi)\xi') = \Phi'(\xi')^2 + \Phi\xi" = \Phi'\Phi^2 < \eta, \eta >_F - < \eta, \eta >_F \Phi^2\Phi' = 0$$

adódik és ha egy geodetikusra $\tau \mapsto (\phi \circ \xi)\frac{d\xi}{d\tau}$ függvény konstans, akkor a fenti egyenlőség alapján éppen a az (1)-ben megfogalmazott kritériumát kapjuk a fényszerűségnek. ♠

LEMMA 1.6. Legyen $M = I \times_\phi P$ egy fényszerűen teljes görbített szorzat tér-idő, ahol P egy teljes Riemann-sokaság és $p = (t, c) \in M$. Akkor van olyan

$$\chi_p : \mathbb{R}^+ \to I$$

sima fügvény, melyre ha $\kappa : \mathbb{R} \to \{\ t\ \} \times P$ egy természetes paraméterezésben adott geodetikus, melyre $\kappa(0) = p$, akkor

$$\mathbb{R}^+ \ni \sigma \mapsto (\chi_p(\sigma), \kappa(\sigma)) \in M$$

egy jövőbe mutató fényszerű pregeodetikus.

Bizonyítás. Vegyük a $\kappa : \mathbb{R} \to \{\ t\ \} \times P$ természetes paraméterezésű geodetikust, és tegyük fel, hogy létezik egy $\lambda : \mathbb{R}^+ \to I$ sima függvény melyre

$$\mathbb{R}^+ \ni \sigma \mapsto (\lambda(\sigma), \kappa(\sigma))$$

fényszerű. Akkor ez kielégíti az alábbi

$$0 = - < \dot{\lambda}(\sigma), \dot{\lambda}(\sigma) > +\phi^2(\lambda(\sigma)) < \dot{\kappa}(\sigma), \dot{\kappa}(\sigma) >,$$

$$(\dot{\lambda}(\sigma))^2 = \phi^2((\lambda(\sigma)),$$

$$\dot{\lambda}(\sigma) = \phi(\lambda(\sigma))$$

differencálegyenletet. Amelyből integrálással

$$\int_0^{\lambda(\sigma)} \frac{d\lambda}{\phi(\lambda)} = \int_0^{\sigma} d\tau = \sigma$$

adódik. De ekkor egy $\Psi(\lambda) = \sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$ sima függvény nyerhető, így $\lambda(\sigma) = \Psi^{-1}(\sigma)$ érvényes. És megfordítva a fenti függvény segítségével a keresett fényszerű görbe definiálható. És ez a görbe az előző *következmény* értelmében pregeodetikus. ♠

DEFINÍCIÓ. Legyen $M = I \times_\phi P$ egy fényszerűen teljes görbített szorzat tér-idő. Rögzítsünk egy $p = (t, c) \in M$ pontot, és vegyünk egy $\kappa : \mathbb{R} \to \{\ t\ \} \times P$ természetes paraméterezésben vett geodetikust, melyre $\kappa(0) = p$. Ekkor az előző *lemma* értelmében létezik egy egyértelmű

$$\chi_p : \mathbb{R}^+ \to I$$

sima függvény, melyre $\sigma \mapsto (\chi_p(\sigma), \kappa(\sigma)) \in M$ az az egyértelmű fényszerű pregeodetikus, amelyik vetülete éppen κ. Ekkor ezt a fügvény jelöli a *foton számára szükséges galaktikus időt, a térszerű σ távolság megtételéhez* a κ térszerű geodetikus mentén.

2. Többször látható pontok egy idő orientált Lorentz-sokaságban

DEFINÍCIÓ. Legyen $(L, <, >)$ egy idő orientált Lorentz-sokaság és $x, y \in L$. Ha létezik egy $\varphi : [0, \beta] \to L$ jövőbe mutató fényszerű geodetikus, melyre $\varphi(0) = x$ és $\varphi(\beta) = y$, akkor x pontot *látható*nak mondjuk y pontból, továbbá az 1-dimenziós

$$T_\beta\varphi(\mathbb{R}^-) = \{\ \lambda \cdot \dot{\varphi}(\beta)\ |\lambda < 0,\ \lambda \in \mathbb{R}\ \} \subset T_y L$$

félteret az x pont y pontból való *láthatósági irányá*nak mondjuk. Jelölje $V(x; y)$ az x-nek y-ból való *láthatósági irányainak halmazá*t. Ha x látható y pontból, és csupán egyetlen irányból, más szavakkal $V(x; y)$ halmaz egy elemű, akkor x pontot *egyszeresen láthatónak* hívjuk y-ból, ha több mint egy láthatósági irány van, azaz $V(x; y)$ halmaznak több mint 1 eleme van, akkor x pontot *többszörösen látható*nak hívjuk y-ból. Az

$$o(x, y)$$

jelölje a $V(x, y)$ elmeinek számát, és ezt az x pont y-ból való *láthatósági rendjé*nek nevezzük. Ha P egy olyan 3-dimenziós Riemann-sokaság, melyben bármely két P-beli pont között egyértelműen létezik geodetikus, akkor nem léteznek az $M = I \times_\phi P$ görbített szorzat tér-időben többszörösen látható pontok.

Mi a következőkben azt fogjuk vizsgálni, hogy egy adott $p \in L$ pont mely pontokból látszik többszörösen, de szimetriai okokból a múltba mutató fényszerű geodetikusok vizsgálatával azon pont halmazra kapnánk eredményeinket *amelyeket* a p pontból többszörösen látunk.

LEMMA 2. 1. Legyenek $M = I \times_\phi P$, $M' = I \times_\phi P'$ olyan görbített szorzat tér-idők, melyekre létezik egy $\omega : P \to P'$ lokálisan izometrikus fedés és legyen $\omega^\times : M \to M'$ az *ehhez tartozó lokálisan izometrikus fedő leképezés, továbbá $p,\ q \in M, p',\ q' \in M'$, melyekre $p' = \omega^\times(p),\ q' = \omega^\times(q)$ teljesül. Ha*

$$q \in L_p^+ \cap \Theta^\times(L_p^+)$$

tartalmazás teljesül valamely $\Theta^\times : M \to M$ nem triviális $\omega^\times$-hez tartozó idő orientáció tartó fedő transzformációra, akkor p' többszörösen látható q' pontból. Illetve megfordíva, ha p' többszörösen látható q' pontból, akkor vagy már p is többszörösen látható q-ból vagy

$$q \in L_p^+ \cap \Theta^\times(L_p^+)$$

teljesül valamey $\Theta^\times$ nem triviális $\omega^\times$-hez tartozó tedő transzformációra.

Bizonyítás. Legyen $q \in L_p^+ \cap \Theta^\times(L_p^+)$, ekkor $\tilde{q} = (\Theta^\times)^{-1}(q) \in L_p^+$ érvényes, továbbá léteznek

$$\zeta(\sigma) = (\xi(\sigma), \eta(\sigma)),\ \sigma \in [0, \beta],\ \tilde{\zeta}(\tau) = (\tilde{\xi}(\tau), \tilde{\eta}(\tau)),\ \tau \in [0, \tilde{\beta}],$$

jövőbe mutató fényszerű geodetikusok, melyekre $\zeta(0) = \tilde{\zeta}(0) = p,\ \zeta(\beta) = q,\ \tilde{\zeta}(\tilde{\beta}) = \tilde{q}$ teljesül. Legyenek $p' = \omega^\times(p),\ q' = \omega^\times(q)$, ekkor a

$$\omega^\times \circ \zeta : [0, \beta] \to M,\ \omega^\times \circ \tilde{\zeta} : [0, \tilde{\beta}] \to M$$

görbék jövőbe mutató fényszerű geodetikusok p' és q' között. Megmutatjuk, hogy ekkor a

$$T_\beta(\omega^\times \circ \zeta)(\mathbb{R}^-) \neq T_{\tilde{\beta}}(\omega^\times \circ \tilde{\zeta}(\mathbb{R}^-))$$

teljesül. Tegyük fel indirekt, hogy a fenti irányok egyenlőek, és tekintsük a

$$\overleftarrow{\zeta}(\sigma) = \omega^\times \circ \zeta(\beta - \sigma),\ \sigma \in [0, \beta],$$

$$\overleftarrow{\tilde{\zeta}}(\tau) = \omega^\times \circ \tilde{\zeta}(\tilde{\beta} - \tau),\ \tau \in [0, \tilde{\beta}]$$

geodetikusokat. Ekkor az indirekt feltevés szerint ezen geodetikusok azonos pontból indulnak ugyanabba az irányba, ezáltal az egyik képe tartalmazza a másikat,és a χ_p galaktikus idő függvény miatt ezek ugyanazon $\{t\} \times P'$ és $\{t'\} \times P'$ fibrumok között futnak, ahol t és t' értékeket a $p = (t, c)$, $q = (t', c')$ határozza meg. Ennélfogva a $\overleftarrow{\zeta}$, $\overleftarrow{\tilde{\zeta}}$ geodetikusok M sokaságba való q kezdő pontú felemeltjeikȷ megegyeznek, következésképpen $p = \Theta^\times(p)$ érvényes, de ekkor $\Theta^\times$ fedőtranszformációnak triviálisnak kellene lennie de ez ellentmond $\Theta^\times$ választásának.

Tegyük fel most, hogy van egy $q' \in M'$ pont, mely többszörösen látható $p' \in M'$ pontból. Ekkor léteznek olyan fényszerű geodetikusok

$$\psi : [0, \beta] \to M',\ \tilde{\psi} : [0, \tilde{\beta}] \to M'$$

melyekre $\psi(0) = \tilde{\psi}(0) = p'$, $\psi(\beta) = \tilde{\psi}(\tilde{\beta}) = q'$ teljesül, és

$$\dot{\psi}(\beta),\ \dot{\tilde{\psi}}(\tilde{\beta}) \in T_{q'}M'$$

érintővektoraik függetlenek. Tekintsük ezek φ, $\tilde{\varphi}$ felemeltjeit az M sokaságba a p kezdőponttal, és legyen $q = \varphi(\beta)$, $\tilde{q} = \tilde{\varphi}(\tilde{\beta})$. Ekkor feltehető, hogy $q \neq \tilde{q}$ érvényes, máskülönben már p is többszörösen látható q pontból. Így tehát létezik egy $\Theta^\times$ nem triviális $\omega^\times$-hez tartozó fedő transzformáció, melyre $q = \Theta^\times(\tilde{q})$ teljesül, mivel $\omega^\times(q) = \omega^\times(\tilde{q})$ érvényes. Tehát a

$$q \in L_p^+ \cap \Theta^\times(L_p^+)$$

tartalmazás fennáll a fenti konstrukció alapján. ♠

ÁLLÍTÁS 2.2. Legyen $M = I \times_\phi P$ egy olyan fényszerűen teljes görbített szorzat tér-idő, ahol a P Riemann-sokaság bármely két pontján át egyértelműen létezik geodetikus, $\omega : P \to P'$ egy lokálisan izometrikus fedés és $M' = I \times_\phi P'$ az ehhez tartozó görbített szorzat tér-idő. Ha $p' \in M'$ többszörösen látható a $q' \in M'$ pontból, akkor a

$$o(p', q')$$

láthatósági rendjük véges.

Bizonyítás. Legyen $\{ \zeta_i \mid i \in \mathcal{I} \}$ azon $\zeta_i : [0, \beta_i] \to M'$ jövőbe mutató fényszerű geodetikusok halmaza, melyek kielégítik a $\zeta_i(0) = p' = (t, c')$, $\zeta_i(\beta_i) = q' = (\tilde{t}, \tilde{c'})$ feltételeket. Vegyük azokar a $\overleftarrow{\zeta}_i : [0, \beta_i] \to M'$ múltba mutató fényszerű geodetikusokat, melyeket az alábbi

$$\overleftarrow{\zeta}_i(\tau) = \zeta_i(\beta_i - \tau), \ \tau \in [0, \beta_i]$$

megfordítás ad meg $\forall i \in \mathcal{I}$. Rögzítsünk egy $q \in M$ pontot melyre $q' = \omega^\times(q)$ és legyen $\overleftarrow{\tilde{\zeta}_i}$ a $\overleftarrow{\zeta}_i$ geodetikus $\overleftarrow{\tilde{\zeta}_i}(0) = q$ kezdőpontú felemeltje $\forall i \in \mathcal{I}$ esetén. Vegyük a $p_i = \overleftarrow{\tilde{\zeta}}_i(\beta_i)$, $i \in \mathcal{I}$ pontokat, ekkor $\omega^\times(p_i) = p' = (t, c')$ és $p_i = (t, c_i)$ alakú valamely $c_i \in P$ pontra $\forall i \in \mathcal{I}$, ahol ezen pontok egy diszkrét halmazt alkotnak a P sokaságon, mivel ezek egy pont orbitján helyezkednek el az ω-hoz tartozó fedőtranszformációkra nézve, és különbözőek P tulajdonsága miatt. Másrészről viszont a $(\tilde{t}, c_i) \in \tilde{\{t\}} \times P$ pontok azonos térbeli távolságra vannak a $(\tilde{t}, \tilde{c}) \in \tilde{\{t\}} \times P$ ponttól, mert a szigorúan monoton növő χ_p függvényre a

$$\chi_p(\ d(c_i, \tilde{c})) = \tilde{t}, \ i \in \mathcal{I}$$

teljesül. De ekkor a $\{ \ p_i \mid i \in \mathcal{I} \ \}$ halmaznak véges elemszámúnak kell lennie, és így a $\{ \zeta_i \mid i \in \mathcal{I} \}$ halmaz is véges. ♠

DEFINÍCIÓ. Legyen P egy Riemann-sokaság és a, $b \in P$, ekkor azon $\gamma : [\alpha, \beta] \to P$ geodetikusok halmazát, melyekre $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$ teljesül jelölje $\mathcal{G}(a, \ b)$ és úgy nevezzük, hogy az *a pontot b-vel összekötő geodetikusok rendszere*, továbbá jelölje $\mathcal{L}(\gamma)$ a γ geodetikus hosszát, és $\mathcal{L}(a, b) = \{\mathcal{G}(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{G}(a, b)\}$ az *a és b közötti geodetikus hosszak halmazá*nak.

Abban az esetben amikor $P = \mathbb{E}^3$ vagy $P = \mathbb{H}^3$ és $d : P \times P \to \mathbb{R}$ jelöli ezen terek távolság függvényét, akkor c, $\tilde{c} \in P$ esetén

$$\mathcal{L}(c, \tilde{c}) \cap \mathcal{L}(\Theta(c), \tilde{c}) \neq \emptyset$$

pontosan akkor teljesül, ha $d(c,\tilde{c}) = d(\Theta(c),\tilde{c})$ érvényes, ahol Θ egy tetszőleges izometria.

LEMMA 2.3. Legyen $M = I \times_\phi P$ egy fényszerűen teljes görbített szorzat tér-idő, $\omega : P \to P'$ egy lokálisan izometrikus fedő leképezés, $M' = I \times_\phi P'$ a hozzá tartozó görbített szorzat, $\Theta : P \to P$ egy nem triviális fedőtranszformáció és $\Theta^\times : M \to M$ az ehhez tartozó fedőtranszformáció. Rögzítsünk egy $p = (t,c) \in M$ pontot akkor

$$L_p^+ \cap \Theta^\times(L_p^+) = \{ \ (\tilde{t},\tilde{c}) \in M \mid \tilde{t} = \chi_p(\lambda), \ \lambda \in \mathcal{L}(c,\tilde{c}) \cap \mathcal{L}(\Theta(c),\tilde{c}) \ \}$$

érvényes a fenti fénykúpok metszetére.

Bizonyítás. Ha $q \in L_p^+ \cap \Theta^\times(L_p^+)$, akkor van két különböző jövőbe mutató fényszerű geodetikus

$$\zeta : [0,1] \to M, \ \tilde{\zeta} : [0,1] \to M$$

melyekre $\zeta(0) = p$, $\tilde{\zeta}(0) = \Theta^\times(p)$, $\zeta(1) = \tilde{\zeta}(1) = q$ teljesül. Ekkor ezek P sokaságra vett η, $\tilde{\eta}$ vetületeik egyenlő hosszúságú pregeodetikusok az *állítás 1.2 következményé*nek értelmében, és ez a hossz a

$$\mathcal{L}(c,\tilde{c}) \cap \mathcal{L}(\Theta(c),\tilde{c}).$$

halmaz eleme.

Megfordítva, ha $\lambda \in \mathcal{L}(c,\tilde{c}) \cap \mathcal{L}(\Theta(c),\tilde{c})$, akkor vanak olyan η, $\tilde{\eta} : [0,1] \to P$ geodetikusok, melyek hossza λ és kielégítik a

$$\eta(0) = c, \ \tilde{\eta}(0) = \Theta(c), \ \eta(1) = \tilde{\eta}(1) = \tilde{c}$$

feltételeket. De ekkor az η geodetikus p-kezdőpontú és az $\tilde{\eta}$, $\Theta^\times(p)$-kezdőpontú fényszerű geodetikussá való felemeltjeik M sokaság ugyanazon

$$(\chi_p(\lambda),\tilde{c}) \in L_p^+ \cap \Theta^\times(L_p^+),$$

pontjában végződnek, azaz a *lemma* állítása teljesül. ♠

KÖVETKEZMÉNY 1. Legyen $M = I \times_\phi S$ egy fényszerűen teljes Robertson-Walker tér-idő, ahol $S = \mathbb{E}^3$ vagy $S = \mathbb{H}^3$ és $\omega : S \to S'$ egy lokálisan izometrikus fedőleképezés. Ha $p = (t,c) \in M$, akkor

$$L_p^+ \cap \Theta^\times(L_p^+) = \{ \ (\tilde{t},\tilde{c}) \in S \mid d(c,\tilde{c}) = d(\Theta(c),\tilde{c}), \ \tilde{t} = \chi_p(d(c,\tilde{c})) \ \} =$$

$$= \{ \ (\tilde{t},\tilde{c}) \in S \mid \tilde{c} \in B(c,\Theta(c)), \ \tilde{t} = \chi_p(d(c,\tilde{c})) \ \}$$

ahol $B(c,\Theta(c)) \subset S$ a $(c,\Theta(c))$ szakasz felezőmerőleges hipersíkja.

Bizonyítás. Ha $S = \mathbb{E}^3$ vagy $S = \mathbb{H}^3$ akkor

$$\{ \ (\tilde{t},\tilde{c}) \in M \mid \tilde{t} = \chi_p(\lambda), \ \lambda \in \mathcal{L}(c,\tilde{c}) \cap \mathcal{L}(\Theta(c),\tilde{c}) \ \} =$$

$$= \{ \ (\tilde{t},\tilde{c}) \in M \mid d(c,\tilde{c}) = d(\Theta(c),\tilde{c}), \ \tilde{t} = \chi_p(d(c,\tilde{c})) \ \}$$

teljesül, és így az előző *lemma* miatt teljesül az állítás. ♠

KÖVETKEZMÉNY 2. Legyen $M = I \times_\phi S$ egy fényszerűen teljes Robertson-Walker tér-idő, ahol $S = \mathbb{S}^3$ és $\omega : S \to S'$ egy lokálisan izometrikus fedő leképezés. Vegyünk egy $p = (t, c) \in M$ pontot, ekkor a következők érvényesek:

1.

$$L_p^+ \cap \Theta^\times(L_p^+) = \{ \ (\tilde{t}, \tilde{c}) \mid d(c, \tilde{c}) = d(\Theta(c), \tilde{c}), \ \tilde{t} = \chi_p(| \ d(c, \tilde{c}) + 2k\pi| \ ), \ k \in \mathbb{Z} \ \},$$

ahol $\Theta^\times$ egy nem triviális fedőtranszfomáció, melyet egy olyan Θ-ból származtattunk, ami az $\omega : S \to S'$ lokálisan izometrikus fedő leképezéshez tartozik.

2. Továbbá azon $q = (\tilde{t}, \tilde{c}) \in M$ pontok halmaza, amelyekből $p = (t, c)$ pont többszörösen látható a

$$\{ \ (\chi_p(k\pi), A^k(c)) \mid k \in \mathbb{N} - \{0\} \ \}$$

halmazt alkotják, ahol $A : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ az antipodális leképezés.

Bizonyítás. Mivel

$$\{ \ (\tilde{t}, \tilde{c}) \in M \mid \tilde{t} = \chi_p(\lambda), \ \lambda \in \mathcal{L}(c, \tilde{c}) \cap \mathcal{L}(\Theta(c), \tilde{c}) \ \} =$$

$$= \{ \ (\tilde{t}, \tilde{c}) \in M \mid d(c, \tilde{c}) = d(\Theta(c), \tilde{c}), \ \tilde{t} = \chi_p(\ | \ d(c, \tilde{c}) + 2k\pi \ | \ ), \ k \in \mathbb{Z} \ \}$$

teljesül, így a *következmény* első állítása adódik, míg a második nyilvánvaló. ♠

DEFINÍCIÓ. Legyen $M = I \times_\phi S$ egy Robertson-Walker tér-idő, $\omega : S \to S'$ egy lokálisan izometrikus fedő leképezés és Γ az ω álltal meghatározott fedőtranszformációk csoportja. Ha $p = (t, c), \ q = (\tilde{t}, \tilde{c}) \in M$ akkor

$$\Delta(p, q) = \{ \ \Theta \in \Gamma \mid \chi_p^{-1}(\tilde{t}) \in \mathcal{L}(\Theta(c), \tilde{c}) \ \}.$$

jelölje a $p, q \in M$ pontokhoz tartozó *többszörös láthatóságot generáló fedőtranszformációk halmazát*.

KÖVETKEZMÉNY 3. Legyen $M = I \times_\phi S$ egy Robertson-Walker tér-idő, $\omega : S \to S'$ egy lokálisan izometrikus leképezés és $M' = I \times_\phi S'$ az ez által meghatározott tér-idő. Ha $p = (t, c), \ q = (\tilde{t}, \tilde{c}) \in M, \ p' = \omega^\times(p), \ q' = \omega^\times(q) \in M'$, akkor a következő érvényes a láthatóság renjére:

$$o(p', q') = \sum \{ \ \#\mathcal{G}_L(\tilde{c}, \Theta(c)) \mid \Theta \in \Delta(p, q) \ \} + \Delta(p, q),$$

ahol $\#\mathcal{G}_L(\tilde{c}, \Theta(c)) + 1$ azon geodetikusok halmazának számossága melyek $\chi_p^{-1}(\tilde{t})$ hosszú úton kötik össze $\tilde{c}$ pontot $\Theta(c)$ pontal.

Bizonyítás. Vegyük a p' pontból q'-be menő jövőbe mutató fényszerű geodetikusokat és emeljük fel ezeket q pontban végződőkké. Ekkor ezen felemeltek olyan jövőbe mutató fényszerű geodetikusok lesznek melyek p és q pontok között futnak vagy $(t, \Theta(c))$ és $(\tilde{t}, \tilde{c})$ pontokat kötik össze. Innen pedig az *következmény* már egyszerűen adódik. ♠

KÖVETKEZMÉNY 4. Legyen $M = I \times_\phi S$ egy Robertson-Walker tér-idő, $\omega : S \to S'$ egy lokálisan izometrikus fedő leképezés és $p = (t, c), \ q = (\tilde{t}, \tilde{c}) \in M, \ p' = \omega^\times(p), \ q' = \omega^\times(q)$.

Ha $S=\mathbb{E}^3$ vagy $S=\mathbb{H}^3$ akkor $o(p',q')=\#\Delta(p,q)$.

Ha $S=\mathbb{S}^3$ akkor $o(p',q')=\infty$ pontosan akkor ha $\Theta(c)=\tilde{c}$, vagy $A\circ\Theta(c)=\tilde{c}$ valamely $\Theta\in\Delta(p,q)$ esetén, különben $o(p',q')=\#\Delta(p,q)$.

Bizonyítás. Az előző eredmény egyszerű következményeként adódik. ♠

TÉTEL 2.4. *Legyen P egy egyszeresen összefüggő Riemann-sokaság ahol bármely két pont között egyértelműen létezik őket összekötő geodetikus, továbbá $\omega : P\to P'$ egy olyan lokálisan izometrikus fedő leképezés, melyre P' kompakt és legyen $M'=I\times_\phi P'$ az ezekhez tartozó fényszerűen teljes görbített szorzat tér-idő.*

Rögzítsünk egy $t\in I$ értéket és legyen Ξ azoknak a $\tilde{t}\in I$ elemek halmaza, melyekhez vannak olyan $(c,\tilde{c}), c,\tilde{c}\in P'$ párok, hogy a

$$o(p',q')\geq 2$$

teljesül, ahol $p'=(t,c),\ q'=(\tilde{t},\tilde{c})\in M'$. Legyen továbbá Υ azoknak a $\tilde{t}\in I$ elemeknek a halmaza, melyekre van olyan $c\in P'$, hogy minden (t',c') párra melyre $c'\in P'$ és $t\leq t'\leq\tilde{t}$ az alábbi teljesül:

$$o(p',q')\leq 1$$

ahol $p'=(t,c),\ q'=(t',c')\in M'$. Legyen ekkor

$$t_*=\inf\{\ \tilde{t}\mid\tilde{t}\in\Xi\ \},$$

$$t^*=\sup\{\ \tilde{t}\mid\tilde{t}\in\Upsilon\ \}.$$

Ekkor létezik olyan zárt γ_* geodetikusa a P' sokaságnak melyre

1_*. *γ_* hossza $2\chi_{p'}^{-1}(t_*)$.*

2_*. *γ_* nem 0-homotóp.*

3_*. *γ_* a legrövidebb a P'-beli nem 0-homotóp zárt görbék között.*

Továbbá van egy olyan $c\in P'$ pont melyre

1^*. *$o((t,c),(t',c'))\leq 1$ teljesül minden $(t',c')\in M'$ pontra $t\leq t'<t^*$ esetén.*

2^*. *Van egy P' sokaságbeli $2\chi_{p'}^{-1}(t^*)$ hosszúságú geodetikus hurok, esetleg egy c pontbeli töréssel, amely nem 0-homotóp.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy tetszőleges $c\in P'$ pontot és egy $\hat{c}\in P$ pontot melyre $c=\omega(\hat{c})$ teljesül. Vegyük a

$$\varrho(c)=\frac{1}{2}\min\{\ d(\hat{c},\Theta(\hat{c}))\mid\Theta\in\Gamma-\{Id\}\ \}$$

függvényt ahol Γ az ω-hoz tartozó fedőtranszformációk csoportja. Ebben a definícióban $\varrho(c)$ értéke nem függ $\hat{c}\in P$ választásától.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a $c\mapsto\varrho(c),\ c\in P'$ függvény folytonos. Elég megmutatni, hogy minden $c_0\in P'$ pontnak van egy olyan környezete melyen ϱ folytonos. Mivel ω egy fedő leképezés, a c_0 pontnak van egy olyan U környezete, hogy

$$\omega^{-1}(U)=\cup\{\ \tilde{U}_i\mid i\in\mathcal{I}\ \}$$

melyre a $\omega\lceil\tilde{U}_i,\ i \in \mathcal{I}$ megszorítások diffeomorfizmusok az U környezetre. Rögzítsünk egy $\tilde{U} = \tilde{U}_1$ környezetet ezek közül. Ekkor a $\sigma = \omega^{-1}\lceil U : U \to \tilde{U}$ egy diffeomorfizmus lesz és az általa definiált $\hat{c} = \sigma(c),\ c \in U$ kiválasztás folytonos. Így az alábbi

$$U \ni c \mapsto d(\hat{c}, \Theta(\hat{c})) = d(\sigma(c), \Theta(\sigma(c))) \mid c \in U \ \}$$

függvény is folytonos minden rögzített $\Theta \in \Gamma - \{ \ Id \ \}$ esetén a d távolság függvény folytonossága miatt (lásd [G-K-M], 156-159. o.). Mivel a Γ csoport hatása a P sokaságon szigorúan diszkontinus, így van egy olyan $W \subset U$ környezete a c_0 pontnak melyre a $\Theta(W),\ \Theta \in \Gamma$ halmazok páronként diszjunktak. Ezáltal van véges sok $\Theta_i,\ i = 1, ..., k$ fedő transzformáció melyekre

$$\varrho(c) = \inf\{ \ d(\sigma(c), \Theta(\sigma(c))) \mid \Theta \in \Gamma - \{ \ I \ \} \ \} = \inf\{ \ d(\sigma(c), \Theta_i(\sigma(c))) \mid i = 1, ..., k \ \},\ c \in W$$

teljesül. De véges sok folytonos függvény infimuma is folytonos, így tehát ϱ is az.

Legyen $c_* \in P'$ az a pont ahol ϱ függvény felveszi a minimumát. Rögzítsünk egy $\hat{c}_* \in P$ pontot melyre $c_* = \omega(\hat{c}_*)$, ekkor van egy $2\varrho(c_*)$ hosszú $\hat{\gamma}_*$ geodetikus a $\hat{c}_*$ és $\Theta(\hat{c}_*)$ pontok között valamely $\Theta \in \Gamma$ elemre. Ekkor azonban a

$$\gamma_* = \omega \circ \hat{\gamma}_*$$

egy geodetikus hurok a c_* pontnál és γ_* minimális hosszú a P'-beli geodetikus hurkok között. Ugyanis legyen $\gamma : [0, \beta] \to P'$ egy geodetikus hurok melyre $\gamma(0) = \gamma(\beta) = x$, és rögzítsünk egy $\hat{x} \in \omega^{-1}(x)$ pontot és vegyük a $\hat{\gamma} : [0, \beta] \to P$ felemeltjét a γ-nak a $\hat{\gamma}(0) = \hat{x}$ kezdőpontból, továbbá jelölje $\hat{x}' = \hat{\gamma}(\beta)$ a végpontot. Ekkor van egy olyan $\Xi \in \Gamma - \{ \ I \ \}$ transzformáció melyre $\hat{x}' = \Xi(\hat{x})$. De ekkor

$$\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\hat{\gamma}) = d(\hat{x}, \hat{x}') \geq 2\varrho(x) \geq 2\varrho(c_*) = \mathcal{L}(\gamma_*)$$

teljesül. Annak belátásához, hogy γ_* nem törhet meg a c_* pontban, vegyük $\gamma_* : [0, \beta_*] \to P'$ geodetikust természetes paraméterezésben és tegyük fel, hogy γ_* megtörik a c_* pontban, azaz

$$\dot{\gamma}_*(0) \neq \dot{\gamma}_*(\beta)$$

teljesül. Tehát $T_{\hat{c}_*} T\Theta(\dot{\hat{\gamma}}_*(0)) \neq \dot{\hat{\gamma}}(\beta)$. Vegyük a $f = \hat{\gamma}_*(\frac{\beta}{2})$ pontot, ekkor erre a

$$d(f, \Theta(f)) < d(\hat{c}_*, \Theta(\hat{c}_*))$$

teljesül, de ez ellentmondana a c_* választásának. Az a tulajdonság, hogy γ_* nem 0-homotóp nyilvánvaló következménye a konstrukciónak.

Legyen $c^* \in P'$ az a pont ahol ϱ függvény felveszi a maximumát. Rögzítsünk egy $\hat{c}^* \in \omega^{-1}(c^*)$ pontot, ekkor van egy olyan $\Theta \in \Gamma - \{ \ I \ \}$ transzformáció, melyre

$$\varrho(c^*) = \frac{1}{2} d(\hat{c}^*, \Theta(\hat{c}^*))$$

teljesül. Ha $\hat{\gamma}^* : [0, \beta^*] \to P$ egy természetes paraméterezésben vett geodetikus $\hat{c}^*$ és $\Theta(\hat{c}^*)$ pontok között, akkor $\omega \circ \hat{\gamma}^*$ egy geodetikus hurok a c^* pontból, amely nem 0-homotóp. Legyenek $\zeta = (\xi, \eta)$, $\tilde{\zeta} = (\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ jövőbe mutató fényszerű geodetikusok M' sokaságban a (t, c^*) pontból kiindulva, melyekre η, $\tilde{\eta}$ azok a pregeodetikusok, melyek természetes paraméterezésben megegyeznek a $\gamma^* \lceil [0, \frac{1}{2}\beta^*]$, $\overleftarrow{\gamma}^* \lceil [\beta^*, \frac{1}{2}\beta^*]$ geodetikusokkal. Ekkor ζ, $\tilde{\zeta}$ ugyanazon (t^e, c^e) pontban végződnek. Azt kellene erre igazolni, hogy $t^e \in \Upsilon$ teljesül. Tegyük fel, hogy van egy olyan $(t', c') \in M'$ pont, melyre $t' < t^e$ és

$$o((t, c^*), (t', c')) > 1$$

fennáll. Ekkor lenne két különböző, egyenlő hosszú geodetikus P'-ben a c^* és c' pontok között. Viszont $\omega^{-1}(c')$ nem metszhet bele a c^* ponthoz tartozó F fundamentális tartományba, ahol ez utóbbin az É. Cartan féle *"méthode de rayonnement"* módszerrel készített álltalánosított Dirichlet-cella (lásd [Bu], 183-186. o.), azonban $t' < t^e$ miatt $d(c^*, c') < \frac{1}{2} d(c^*, \Theta(c^*))$ egyenlőtlenségnek kell fennállnia, így $\omega^{-1}(c')$ halmaznak bele kell metszenie az F fundamentális tartományba. Így megmutattuk, hogy $t^e = t^*$ egyenlősségnek fenn kell állnia, mivel minden $\tilde{t} \in \Upsilon$ elemre a $t^e < \tilde{t} \le t^*$ egyenlőtlenség ellentmondana t^e definíciójának. ♠

KÖVETKEZMÉNY. Legyen P egy egyszeresen összefüggő Riemann-sokaság, ahol bármely két pont között egyértelműen létezik geodetikus, $\omega : P \to P'$ egy lokálisan izometrikus fedő leképezés, továbbá legyen Γ az általa indukált fedőtranszformáció csoport a P sokaságon, és $M' = I \times_\phi P'$ a hozzájuk tartozó görbített szorzat tér-idő. Ha van egy olyan $\Phi : G \times P \to P$ tranzitív izometikus hatás mely kommutál Γ-val akkor $t_* = t^*$ egyenlőség teljesül.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy a fenti bizonyításban megkonstruált $\varrho : P' \to \mathbb{R}^+$ függvény konstans értékű lesz. ♠

DEFINÍCIÓ. Legyen $M = I \times_\phi S$ egy fényszerűen teljes Robertson-Walker tér-idő, ahol S sokaság vagy $\mathbb{E}^3$ vagy $\mathbb{H}^3$ és S' az $\omega : S \to S'$ lokálisan izometrikus fedés által meghatározott állandó görbületű sokaság, továbbá $M' = I \times_\phi S'$ az ehhez tartozó tér-idő. Rögzítsünk egy $p = (t, c) \in M$ pontot és legyen $\Xi : S \to S$ egy ω-hoz tartozó izometrikus fedő transzformáció, és $P_\Xi \subset \{t\} \times S$ a $((t, c), (t, \Xi(c))$pontokat összekötő szakasz felezőmerőleges hipersíkja. Ekkor a

$$V(p\,; \Xi) = \{\ (\chi_t(q), x) \in M \mid q = (t, x) \in P_\Xi\ \} \subset M$$

képlet egy 2-dimenziós sima részsokaságot definiál, amit a $p' = \omega(p)$ *pontot többszörösen látó pontok halmazában a p és Ξ által meghatároyott rész*nek nevezünk.

ÁLLÍTÁS 2.5. Legyen $M = I \times_\phi S$ egy fényszerűen teljes Robertson-Walker tér-idő ahol $S = \mathbb{E}^3$ vagy $\mathbb{H}^3$ és $M' = I \times_\phi S'$ az a tér-idő mely az $\omega : S \to S'$ lokálisan izometrikus fedéshez tartozik. Rögzítsünk egy $p \in M$ pontot és vegyük a $V(p\colon \Theta) \subset M$ többszörösen láthatósági pontok halmazát mely a $\Theta : S \to S$ fedőtranszformációhoz tartozik. Ha $q \in V(p\,; \Theta)$ és $p' = \omega(p)$, $q' = \omega(q)$ akkor

$$o(p', q') \ge 2$$

teljesül a láthatóság rendjére, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha q nincs benne más többszörösen láthatósági halmazban.

Bizonyítás. Ha $\zeta : [0,\beta] \to M$, $\tilde{\zeta} : [0,\tilde{\beta}] \to M$ jövőbe mutató fényszerű geodetikusok melyekre $\zeta(0) = p$, $\tilde{\zeta}(0) = \Theta(p)$, $\zeta(\beta) = \tilde{\zeta}(\tilde{\beta}) = q$ teljesül, akkor az $\omega \circ \zeta$, $\omega \circ \tilde{\zeta}$ jövőbe mutató fényszerű geodetikusok a p' pontból indulnak ki és a q' pontba érkeznek, méghozzá különböző irányokból. Ennél fogva

$$o(p', q') \geq 2$$

egyenlőtlenség teljesül. Tegyük most fel, hogy q pontot nem tartalmazza másik többszörösen láthatósági halmaz, de van egy olyan $\bar{\zeta} : [0,\beta] \to M'$ jövőbe mutató fényszerű geodetikus melyre $\bar{\zeta}(0) = p'$, $\bar{\zeta}(\beta) = q'$ teljesül, továbbá $\bar{\zeta}$ geodetikus q' pontba való beérkezésének iránya különbözik $\omega \circ \zeta$, $\omega \circ \tilde{\zeta}$ irányaitól. Legyen $\hat{\zeta} : [0,\hat{\beta}] \to M$ a $\bar{\zeta}$ felemeltje q végponttal. Ekkor van egy olyan $\Sigma : S \to S$ nem triviális fedőtranszformáció mely különbözik Θ-tól és melyre $\hat{\zeta}(0) = (t, \Sigma(c))$ teljesül, így tehát $q \in V(p\,;\Sigma)$ is érvényes. ♠

3. Példák

PÉLDA 3.1. Legyen P az $\mathbb{R}^2$ euklideszi vektortér a kanonikus Riemann metrikával ellátva és (e_1, e_2) ennek egy kanonikus ortonormált bázisa, továbbá $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R} - \{\ 0\ \}$. Ekkor a

$$\Theta_1 : \mathbb{R}^2 \ni x \mapsto x + \alpha e_1,\ \Theta_2 : \mathbb{R}^2 \ni x \mapsto x + \beta e_2$$

izometriák által generált $\Gamma =<\ \Theta_1,\ \Theta_2\ >$ csoport diszkontinusan hat. Legyen $\Phi : G \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az $\mathbb{R}^2$ eltolásai által meghatározott tranzitív hatás. Ekkor Γ és Φ kommutálnak egymással, így a *tétel 2.4 következményé*nek értelmében a $t_* = t^*$ egyenlőség fennáll.

PÉLDA 3.2. Legyen P a $\mathbb{H}^2$ hiperboliks sík és P' az a zárt irányítható $\mu > 1$ génuszú felület, melyet az alábbiakban konstruálunk meg (lásd még [Bu], 196-197. o.). P' megkonstruálásához rögzítsünk egy $\hat{c} \in \mathbb{H}^2$ pontot és $R_1, ..., R_{4\mu} \subset \mathbb{H}^2$ sugarakat a $\hat{c}$ pontból melyekre

$$(R_i, R_{i+1})\measuredangle = \frac{2\pi}{4\mu} = \frac{\pi}{2\mu},\ i = 1, ..., 4\mu$$

teljesül, ahol $R_{4\mu+1} = R_1$. Ha $\rho > 0$ és $\bar{q}_i(\rho) \in R_i,\ i = 1, ..., 4\mu$ olyan pontok melyekre $d(\hat{c}, \bar{q}_i(\rho)) = \rho$, akkor ezek egy szabályos 4μ szöget határoznak meg. Ha $\rho \to 0$, akkor ezen 4μ szögei tartanak az euklideszi szabályos 4μ szög szögeihez, míg $\rho \to \infty$ esetén 0-hoz tartanak. Tehát van ρ-nak egy olyan értéke, melyre ezen szögek éppen $\frac{\pi}{2\mu}$ nagyságúak, és ezt a szabályos 4μ szöget jelölje Q és a csúcsait pedig $\bar{q}_1, ..., \bar{q}_{4\mu}$. Jelölje Q oldalait

$$A_1, B_1, A_1^{-1}, B_1^{-1}, ..., A_\mu, B_\mu, A_\mu^{-1}, B_\mu^{-1}.$$

Ekkor a hiperbolikus sík kiparkettázható olyan egybevágó $Q = Q_1, Q_2, ...$ 4μ szögekkel, hogy ezek mindegyikének a csúcsa pontosan 4μ darab másik Q_i poligonhoz tartozik hozzá, és a megegyező oldala két ilyen 4μ szögnek inverz szimbólmokkal van jelölve.

A fenti 4μ szögek halmaza definiál egy szigorúan diszkontinus Γ csoportot, mely $\mathbb{H}^2$ azon izometriáiból áll, melyek eleget tesznek azon feltételeknek, hogy Γ-nak pontosan egy olyan eleme van, ami Q_i poliédert Q_j-re képezi úgy, hogy Q_i oldalait a Q_j megfelelően jelölt oldalaiba viszi. Ekkor van egy olyan $\omega : \mathbb{H}^2 \to P'$ lokálsan izometrikus fedő leképezés, melyhez tartozó fedőtranszformáció csoport éppen Γ és P' egy μ génuszú zárt irányítható felület.

Legyen $c = \omega(\hat{c}) \in P'$ és rögzítsünk egy olyan $\Theta_c \in \Gamma$ transzformációt melyre az alábbi egyenlőség teljesül:

$$\varrho(c) = \frac{1}{2}\min\{\ d(\hat{c}, \Theta(\hat{c}))\ |\ \Theta \in \Gamma - \{\ I\ \}\ \} = \frac{1}{2}d(\hat{c}.\Theta_c(\hat{c})).$$

Legyen $\hat{\gamma} : [0, \beta] \to \mathbb{H}^2$ az a geodetkus melyre $\hat{\gamma}(0) = \Theta_c^{-1}(\hat{c})$, $\hat{\gamma}(\beta) = \hat{c}$ és legyen $\gamma = \omega \circ \hat{\gamma}$. Ekkor γ nem lehet egy zárt geodetikus, azaz

$$T_{\Theta_c^{-1}(\hat{c})}\Theta_c(\dot{\hat{\gamma}}(0)) \neq \dot{\hat{\gamma}}(\beta)$$

teljesül. Ahhoz, hogy igazoljuk ezt az állítást tegyük fel, hogy

$$Q_1 \cap \Theta_c^{-1}(Q_1)$$

közös oldalát A_i jelöli Q_1-ben, akkor ezt az oldalt A_i^{-1} jelöli $\Theta_c^{-1}(Q_1)$-ben. De ekkor a

$$Q_1 \cap \Theta_c(Q_1)$$

közös oldalát A_i^{-1} jelöli Q_1-ben, így tehát

$$(T_{\Theta_c^{-1}(\hat{c})}\Theta_c(\dot{\hat{\gamma}}(0)), \dot{\hat{\gamma}}(\beta))\measuredangle = 2\frac{\pi}{2\mu} = \frac{\pi}{\mu}$$

teljesül. Mivel γ nem egy zárt geodetikus, így a *tétel 2.4* következtében $\varrho(c) \neq \varrho(c_*)$ érvényes. Azaz ekkor

$$\varrho(c_*) < \varrho(c) \leq \varrho(c^*)$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie.

LEMMA 3.3. Legyen P eyg teljes Riemann-sokaság, és $\omega : P \to P'$ egy lokálisan izometrikus fedés, és Γ az ω-hoz tartozó fedő transzformáció csoport, továbbá

$$\varrho = \frac{1}{2}inf\{d(\hat{x}, \theta(\hat{x}))\,|\,\omega(\hat{x}) = x,\, \theta \in \Gamma - \{Id\}\}.$$

Ekkor, ha a $\varrho : P' \to \mathbb{R}$ függvény lokálisan konstans r értéket vesz fel egy $x \in P'$ pontban, akkor léteznek olyan $B(\hat{y}, \epsilon) \subset P$, $\epsilon > 0$, $\theta_j \in \Gamma$, melyekre $\forall \hat{z} \in B(\hat{y}, \epsilon)$, $d(\hat{z}, \theta_j(\hat{z})) = 2r$, és θ_j a $\hat{z}$ és $\theta_j(\hat{z})$ közti természetes paraméterezésben vett geodetikust $2r$ paraméterértékkel tolja el.

Bizonyítás. Láthattuk a *Tétel 2.4*-ben, hogy a ϱ függvény értéke nem függ $\hat{x}$, $\omega(\hat{x}) = x$ választásától, továbbá választható $x \in U$ környezet olyan kicsinek, hogy az

$$\omega^{-1}(U) = \{\tilde{U}_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$$

halmaz diszjunkt elemeire az $\omega\lceil\tilde{U}_i$, $i \in \mathcal{I}$ megszorítások diffeomorfizmusok, és vegyük az ottani $\sigma = \omega^{-1} : U \to \tilde{U}$ folytonos kiválasztó függvényt és az ez által meghatározott θ_i, $i = 1, \ldots, k$ fedő transzformáció függvényeket, melyekre

$$\varrho(y) = \inf\{\ d(\sigma(y), \Theta(\sigma(y)))\ |\ \Theta \in \Gamma - \{\ I\ \}\ \} = \inf\{\ d(\sigma(y), \Theta_i(\sigma(y)))\ |\ i = 1, ..., k\ \}\ y \in U$$

teljesül, továbbá feltehető az $U = B(x, \delta)$ választás, úgy, hogy ezen a környezeten már ϱ függvény azonosan konstans. Legyenek

$$G_i = \{y \in U \mid d(\sigma(y), \theta_i(\sigma(y))) \neq 2r\},\ F_i = U \backslash G_i,$$

ahol G_i halmazok nyíltak. Ekkor $\exists j \in \{1, \ldots, k\}$ melyre $intF_j \neq \emptyset$, mert tegyük fel indirekt, hogy nem igaz, mivel a G_i halmazok sűrűek az U halmazban, ezért $G_1 \cap \cdots \cap G_k \neq \emptyset$, viszont $\forall y \in U \exists j \in \{1, \ldots, k\}$, $d(\sigma(y), \theta_j(\sigma(y))) = 2r$, amiből $y \notin G_j$ következik, de ez ellentmondana az indirekt feltevésünknek. Tehát legyen $y \in intF_j$, $\epsilon > 0$ melyre $B(y, \epsilon) \subset F_j$. Vegyük most a $\gamma : \mathbb{R} \to P$ természetes paraméterezésben vett goedetikust, melyre $\gamma(0) = \sigma(y)$, $\gamma(2r) = \theta_j(\sigma(y))$ teljesül. Ekkor igaz a $\theta_j(\gamma(\epsilon)) = \gamma(2r + \epsilon)$, mivel

$$2r = d(\gamma(\epsilon), \theta_j(\gamma(\epsilon))) \leq d(\gamma(\epsilon), \gamma(2r)) + d(\gamma(2r), \theta_j(\gamma(\epsilon))) = 2r - \epsilon + \epsilon$$

teljesül γ természetes paraméterezése, és θ_j izometrikussága folytán $d(\gamma(2r), \theta_j(\gamma(\epsilon)))=$ $d(\theta_j(\gamma(0)), \theta_j(\gamma(\epsilon))) = d(\gamma(0), \gamma(\epsilon)) = \epsilon$ egyenlőség miatt. De a fenti kiemelt egyenlőtlenségben egyenlőség csak akkor teljesül, ha nincs törés $\gamma(2r)$ pontnál, azaz $\theta_j(\gamma(\epsilon))$ a γ geodetikus folytatásán van, és így igaz amit állítottunk. Így $\theta_j(\gamma(0)) = \gamma(2r)$, $\theta_j(\gamma(\epsilon)) =$ $\gamma(2r + \epsilon)$ miatt γ geodetikos $2r$ paraméterrel tolódik el a θ_j transzformációnál, de ugyanez igaz hasonlóan minden $z \in B(y, \epsilon)$ esetén a $\sigma(z)$ és $\theta_j(\sigma(z))$ geodetikusra is. ♠

KÖVETKEZMÉNY 3.3.1. *Ha ϱ függvény lokálisan konstans r értéket vesz fel egy $x \in P'$ pontban, akkor $\exists\theta \in \Gamma$ és $\hat{x}$, $\omega(\hat{x}) = x$, melyekre a θ fedőtranszformáció a $\hat{x}$ és $\theta(\hat{x})$ között futó természetes paraméterezézben vett geodetikust $2r$ paraméterértékkel tolja el.*

Bizonyítás. Az előző *lemma*-beli δ *o*-hoz tartásával kapható, hogy $\exists\hat{y}_n \to \hat{x}$, θ_{j_n}, $n \in \mathbb{N}$ az előző *lemmát* kielégítő sorozat, ahol $j_n \in \{1, \ldots, k\}$ miatt feltehető, hogy $\theta_{j_n} = \theta_j$, $\forall n \in$ $\mathbb{N}$, de ekkor az $\hat{y}_n$ és $\theta_j(\hat{y}_n)$ közti geodetikusok lokálisan egyenletesen konvergálnak a $\hat{x}$ és $\theta_j(\hat{x})$ közti geodetikushoz, illetve a θ_j-re vonatkozó invariancia miatt adódik az állítás. ♠

KÖVETKEZMÉNY 3.3.2. $P = \mathbb{H}^3$ *esetén a ϱ függvény nem lehet lokálisan konstans.*

Bizonyítás. Az előző *lemma* szerint létezik a $B(\hat{y}, \epsilon)$ környezet és a $\theta_j \in \Gamma$ fedő transzfomáció a *lemma*-beli tulajdonsággal, továbbá jelölje $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^3$ a $\hat{y}$ és $\theta_j(\hat{y})$ között futó természetes paraméterezésben vett geodetikust. Ekkor a $\hat{y}$ ponton átmenő γ geodetikusra merőleges H_1 hipersík a θ_j transzformációnál a $\theta_j(\hat{y})$ ponton átmanő γ geodetikusra merőleges H_2 hipersíkba megy, ahol H_1 $\hat{y}$-hoz közeli pontjainak és H_2-beli képpontjainak távolsága $2r$. Azonban egy ilyen eltolásos forgatásnál a H_1 és H_2 halmazok $2r$ értékű távolság minimumát csak az $\hat{y}$ és $\theta_j(\hat{y})$ pontok közt veszi fel. ♠

PÉLDA 3.4. Legyen $P = \mathbb{H}^3$, ekkor tetszőleges $\omega : P \to P'$ lokális izometria esetén, ϱ függvény nem lehet lokálisan konstans.

PÉLDA 3.5. Legyen $P = \mathbb{E}^3$, ekkor 3 független eltolás által generált Γ fedőtranszformáció halmazra nézve, a ϱ függvény azonosan konstans.

PÉLDA 3.6. A következő példában ϱ függvény nem azonosan konstans, de van lokálisan konstans helye. Legyen $P = \mathbb{E}^3$, vegyünk egy e_1, e_2, e_3 ortonormált bázist. Legyen Γ a

$$\theta_1 : \ \mathbb{R}^3 \ni a \mapsto a + 100e_2, \ \theta_2 : \mathbb{R}^3 \ni a \mapsto a + 100e_3$$

eltolásokkal és a θ_3 az e_1 tengely menti π szögű, egység hosszú eltolásos forgatással generálva. Ekkor könnyen látható, hogy a $z = (0, 0, 25)$ pont egy kis környezeében a ϱ függvény azonosan 2 értéket vesz fel hiszen, ha a θ fedőtranszformáció nem θ_3 páros hatványa, akkor a Dirichlet-cella szerkezetből könnyen adódik, hogy $d(z, \theta(z)) > 50$, és ${\theta_3}^{2k}(a) = a + 2ke_1$ miatt adódik az állítás.

4. A fundamentális tartomány visszanyerése

A következő állításokban utalni fogunk az alábbi tételre:

POINCARÈ POLIÉDER TÉTEL 4.1. Legyen X az $\mathbb{S}^k$, $\mathbb{H}^k$, $\mathbb{E}^k$, $k \geq 2$ valamelyike és $P \subset X$ egy konvex (nyílt) poliéder melynek oldalait jelölje $s_1, \ldots, s_n$, továbbá legyen adva $\mathbb{G}$ mely olyan izometriái X-nek amelyek P oldalait párosítják egyértelműen (azaz $\forall s_i \ \exists! \ g_{s_i} \in \mathbb{G}$ melyre $g_{s_i}(s_i) = s_j$ valamely $j \in \{1, \ldots, n\}$). Ekkor ha

(i) ha $g_{s_i}(s_i) = s_j$, akkor $g_{s_j} = g_{s_i}^{-1}$

(ii) $g_{s_i}(P) \cap P = \emptyset$

(iii) bármely pontal csak véges sok ekvivalens van $\bar{P}$-ben, az oldalpárosítás által (az oldalakon) generált ekvivalencia alapján

minden e élhez van véges sok vele ekvivalens $\{e_1, \ldots, e_n\}$ él melyeknek vehető egy ciklikus sorrendje ($e = s_1 \cap s_2$, $s_{i_1} := g_{s_1}(s_1)$ ekkor $e_2 := g_{s_1}(e_1) = s_{i_1} \cap s_{i_2}$ valamely s_{i_2} oldarra, $s_{i_3} := g_{s_{i_2}}(s_{i_2})$, $e_3 := g_{s_{i_2}}(e_2) = s_{i_3} \cap s_{i_4}, \ldots$ és véges sok lépésben visszaérünk s_1 oldalhoz, a ciklus alatt fellépő oldalpárosításokat rendre $g_1, \ldots, g_n$-vel jeölve $h := g_n \circ \cdots \circ g_1$ e élet fixen hagyja és ezt ciklikus transzformációnak nevezzük)

(iv) minden e élre $\exists t \in \mathbb{N}^+$, $h^t = Id$

(v) minden e élre $\sum_{m=1}^{n} \alpha(e_m) = \frac{2\pi}{t}$, ahol e_m a ciklusban előforduló élek $\alpha(e_m)$ pedig a poliéder lapok szöge e_m élnél

feltételek mellet $\mathbb{G}$ egy diszkrét csoporthatást generál X-en aminek P egy fundamentális tartománya lesz.

Nekünk az $n = 3$ eset kell és a (iv), (v) esetekben $t = 1$ érték.

A [C-W], [C-S-S], [W] cikkekben leírt módszer alapján adódik a következő állítás.

ÁLLÍTÁS 4.2. Legyen $M = I \times_\phi P$ egy fényszerűen teljes görbített szorzat tér-idő, ahol $P = \mathbb{E}^3$ vagy $\mathbb{H}^3$; $\omega : P \to P'$ egy lokálisan izometrikus fedés, és P' kompakt, továbbá rögzítsünk egy $t \in I$ elemhez tartozó $\{t\} \times P'$ fibrumot. Ekkor $\exists t^\diamond \in I$, hogy bármely $t' > t^\diamond$ esetén bármely $q \in \{t'\} \times P'$ pontra, az innen $\{t\} \times P'$-beli többszörösen látható pontok láthatósági irányaiból P ismeretében P' megkapható.

Bizonyítás. Vegyünk egy $x \in P$ pontot és tekintsük a Γ fedőtranszformációk álltal meghatározott álltalánosított Dirichlet-celláját x-nek. Ekkor P' kompaktsága miatt könnyen látható, hogy van olyan nagy R, melyre $B(x, R)$ belemetsz az x Dirichlet-cellájának minden oldalat-meghatározó hipersíkjába minden $x \in P$ választás esetén. Ekkor megmutatjuk, hogy $\forall t^\diamond \geq \chi_t(R)$ választás jó. Vegyünk egy $t' > t^\diamond$ értéket, és legyen $R' = \chi_t^{-1}(t')$ tekintsük továbbá a $B(x, R') \subset P$ golyót és ennek az $\mathbb{S}^2_{R'} = \partial B(x, R')$ határát. Ekkor az x pontból felvett $V(y, (t', \omega(x)))$, $y =\in \{t\} \times P'$ láthatósági irányok félegyeneseinek $\mathbb{S}^2_{R'}$ gömbbel vett metszetei megegyeznek ezen gömbnek a $H_\theta = \{z \mid d(x, z) = d(\theta(x), z)\}$, $\theta \in \Gamma - \{Id\}$ hipersíkokkal vett metszeteivel. Ez a metszethalmaz, körpárok halmazára bomlik, ugyanis

$$\theta_{-1}(H_\theta \cap \mathbb{S}^2_{R'}) = H_{\theta^{-1}} \cap \mathbb{S}^2_{R'}$$

párosítás érvényes, ami azt mutatja hogy egyazon $\omega(\mathbb{S}^1) \subset P'$ immertált körvonalat látunk két különböző irányból, és ez egyértelmű párosítás, abban az értelemben, hogy a láthatósági irányok halmaza egy irány pár halmaz és ez a párosítás fogja a kimetszett $\mathbb{S}^1$-ek párosítását megadni.

Ha ismernének R' értékét, akkor $\mathbb{S}^2_{R'}$ gömbön az $\mathbb{S}^1$ párok H_θ, $H_{\theta^{-1}}$ hipersík párokat határoz meg, ezek pedig az x Dirichlet celláját határoznák meg (estleg olyan hipersíkok is adódnak, melyek nem játszanak szerepet a cella előállításában), illetve ezek oldalpárosító relációit $GL(3)$ illetve $SO(3, 1)$-ben, ahol az oldalpárosító izometriák kielégítik a Poincarè-tételbeli szög feltételt. Viszont $\mathbb{E}^3$ esetén a nagyítás azt a feltételt nem változtatja meg, így az elején tetszőleges sugarú gömbből kiindulva és azon felvéve az $\mathbb{S}^1$ párokat, majd a H_θ hipersíkokat működik a konstrukció, $\mathbb{H}^3$ eseben azonban, ha egy tetszőleges sugarú gömbből indulunk ki a láthatósági irányok által itt is $\mathbb{S}^1$ körvonalak metsződnek ki a gömbből, melyek hipersíkok által kimetszett körvonalak lesznek (ez a láthatósági irányok elemi vizsgálatából adódik, amelyből megállapítható, hogy ezek forgáskúpok uniói), és kimetsző hipersíkok egy cellét határoznak meg, mely folztonosan változik, az oldalak által bezárt szögek folyamatosan monotonon csökkenek, és mivel a mi sugarunknál meghatározott cellára teljesülnek a *Poincaré poliéder tétel* szögfeltételei a többi sugárhoz tartozó cellára nem teljesülhet. Így látható, hogy a konstrukció nem csak a Dirichlet-cellát, hanem Γ generátorait, sőt $\mathbb{H}^3$ esetben még a gömb sugarát is megadja,sőt Φ és t' ismeretében a fibrumok $t' - t$ időszeparációja is adódik. ♠

Ahhoz, hogy a fenti módszer az $\mathbb{S}^3$ esetben is alkalmazható legyen szükségünk lesz az alábbi lemmára.

Lemma 4.3. Legyen $P = \mathbb{S}^3$, $\omega : P \to P'$ lokálisan izometrikus fedő leképezés és Γ az általa meghatározott fedő transzformácók csoportja, melyre $A \in \Gamma$, $\Gamma \neq \{A, Id\}$, ahol $A : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ az antipodális leképezés. Ekkor $\forall x \in \mathbb{S}^3$ esetén az x Dirichlet cellájának meghatározásában A transzfomációnak nincs szerepe.

Bizonyítás. Vegyünk egy $\theta \in \Gamma$, $\theta \neq Id$, és vegyük $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{R}^4$-beli kanonikus modelljét, és rögzítsünk egy $x \in \mathbb{S}^3$ pontot, tekintsük továbbá a $H_\theta = \{y \in \mathbb{R}^4 \mid d(x,y) = d(\theta(x), y)\}$ hipersíkot. H_θ két félgömbre vágja $\mathbb{S}^3$-mat. Vegyünk egy x ponton átmenő γ geodetikust, ez egy 2π hosszú zárt geodetikus, melyet H_θ két egyenlő π hosszúságú részre bont, hiszen az A transzformációnál H_θ fixen marad, és γ is de a két darabja felcserélődik, így egyenlő hosszúak. Jelölje D_x az x ponthoz tartozó Dirichlet cellát az $\mathbb{S}^3$ gömbön. Tehát a fent mondottak alapján D_x cellában nem lehet π-nél hosszabb x ponton átmenő geodetikus. Tegyük fel, hogy az A transzformáció szerepet játszik az D_x cella előállításában, tehát D_x cellában van egy H_A álltal meghatározott F_A oldal, akkor ennek az oldalpárosításban az $F_{A^{-1}}$ oldal felel meg az A^{-1} transzformációnál, (mivel $A = A^{-1}$, így $F_A = F_{A^{-1}}$). Legyen γ_A az x ponton és az F_A oldal egy y belső pontján átmenő geodetikus. Ez a 2π hosszú zárt geodetikus átmegy az $A(y) \in F_A$ ponton is, így π hosszúságú része fekszik a D_x cellában. Ha most elkészítjük a $\Gamma' = \Gamma - \{A\}$ által létrehozott D'_x Dirichlet celláját az x pontnak, azaz az előző D_x gyártásakor nem vesszük figyelembe H_A hipersíkot, akkor itt a γ_A geodetikus nagyobb, mint π hosszú lesz, ami nem lehet, hiszen ezt láttuk a bizonyítás elején. Így az indirek feltevésünk, miszerint A szerepet játszik a Dirichlet-cella előállításában hibás, és ezzel a *lemmá*t igazoltuk ♠.

ÁLLÍTÁS 4.4. Legyen $P = \mathbb{S}^3$, $\omega : P \to P'$ lokálisan izometrikus fedő leképezés és Γ az általa generált fedőtranszformáció csoport. Ekkor ha $\Gamma \neq < A >$, azaz Γ csoportot nem az $A : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ antipodális leképezés generálja, akkor az

$$R_x = max\{\frac{1}{2}d(x, \theta(x)) \mid \theta \in \Gamma - \{A, Id\}\} < \frac{\pi}{2},\ x \in \mathbb{S}^3$$

értékre a

$$t' > t,\ t' \in I,\ R_x < R = \chi_t^{-1}(t') < \pi - R_x \quad mod\ \pi,\ q \in \{t'\} \times P'$$

esetén a q pontból a $\{t\} \times P'$ fibrumbeli többszörösen látható pontok halmazából x pont Dirichlet cellája visszanyerhető, továbbá Φ és t vagy t' ismeretében $t' - t$ is megkapható.

Bizonyítás. Vegyünk egy $x \in \mathbb{S}^3$ pontot az $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{R}^4$-beli kanonikus ábrázolásában, és vegyük a $B(x, R) \subset \mathbb{S}^3$ gömböt. Ekkor ha a feltételbeli $R_x < R < \pi - R_x\ mod\ \pi$ teljesül, akkor a

$$H_\theta \cap B(x, R) \neq \emptyset,\ \theta \in \Gamma - \{A, Id\},\ H_\theta = \{y \in \mathbb{R}^4 \mid d(x,y) = d(\theta(x), y)\}$$

teljesül, sőt a metszet egy $\mathbb{S}^1$ így az előző *állítás* módszerét alkalmazhatjuk a $\mathbb{H}^3$ esetéhez hasonlóan, hiszen az elöbbi *lemma* szerint a H_A nem játszik szerepet a Dirichlet-cella meghatározásában, ha még $A \in \Gamma$ teljesülne is. ♠

MEGJEGYZÉS A fenti *lemmá*ban, ha az x-hez tartozó Dirichlet-cella előállításában csak a $\theta_1, \ldots, \theta_n$ transzformációk játszanak szerepet, akkor az

$$R'_x = max\{\frac{1}{2}d(x, \theta_i(x)) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

választásra is igaz marad a *lemma*.

MEGJEGYZÉS A $\Gamma = \{Id\}$ és $\Gamma =< A >$ esetek megkülönböztetése is lehetséges, ha a rögzített $\{t\} \times P'$ mért fibrumot egy

$$q \in \{t'\} \times P',\ t' \in I,\ t' > t,\ \chi_t^{-1}(t') = k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{N}$$

pontból vizsgáljuk, hiszen ekkor $\Gamma = \{Id\}$ esetben nem mérünk többszörösen látható pontokat, míg $\Gamma =< A >$ esetben az átellenes irányokból ugyanazokat a pontokat látjuk.

5. A feltételek szükségessége, általánosíthatóság

A χ_p függvény definíciójában megköveteltük a fényszerűen teljességet. Az alábbi állítás azt mutatja, hogy milyen feltételt jelent ez a ϕ görbítő függvényre nézve.

ÁLLÍTÁS 5.1. Legyen $M = I \times_\phi P$ egy görbített szorzat tér-idő, ahol P egy teljes Riemann sokaság és $I = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Ekkor a jövőbe (múltba) mutató fényszerű geodetikusok pontosan akkor teljesek, ha az $\int_a^c \phi(t)dt$ ($\int_c^b \phi(t)dt$), $c \in I$ improprius integrál véges.

Bizonyítás ([B-E] 71-72. o.) Vegyük egy fényszerű geodetikust és írjuk az alábbi $\gamma(t) = (t, \eta(t))$ pregeodetikus alakba. Ekkor a pregeodetikus definíciójánál modottak, és az *állítás 1.5* alapján

$$g(t) \cdot \gamma'(t) = \nabla_{\gamma'}\gamma'(t) = 0+ < \eta', \eta' >_F \cdot\Phi \cdot \Phi' \frac{\partial}{\partial t} + \nabla_{\eta'}\eta' + \frac{2}{\Phi} \cdot \Phi' \cdot \eta' =$$

$$\frac{\Phi'}{\Phi}\frac{\partial}{\partial t} + \nabla_{\eta'}\eta' + \frac{2\Phi'}{\Phi}\eta'$$

adódik, felhasználva a

$$0 =< \gamma', \gamma' >= -1+ < \eta', \eta' >_F$$

egyenlőséget a fényszerűségből. Így az első egyenletből $g = \frac{\Phi'}{\Phi}$ következik. Azaz $\nabla_{\gamma'}\gamma' = [ln\Phi]'\gamma'$. Tekintsük most a $p(t) = \int_{\omega_0}^t \Phi(s)ds$ integrált. Mivel $p' = \Phi > 0$ így létezik a $p^{-1} : (A, B) \to (a, b)$ függvény, ahol $A = \lim_{t\to a^+} p(t)$, $B = \lim_{t\to b^+} p(t)$. Ekkor a $\gamma \circ p^{-1}(t) = (p^{-1}(t), \eta \circ p^{-1}(t))$ fényszerű geodetikus hiszen a $(\gamma \circ p^{-1})' = (\frac{1}{p'(p^{-1}(w))}, c' \circ p^{-1}(w) \cdot \frac{1}{p'(p^{-1}(w))})$ és $p' = \Phi$ miatt

$$< (\gamma \circ p^{-1})', (\gamma \circ p^{-1})' >= \frac{-1}{\Phi^2 \circ p^{-1}} + < \eta' \circ p^{-1}, \eta' \circ p^{-1} >_F \frac{1}{\Phi^2 \circ p^{-1}} = 0$$

adódik ami a fényszerűséget mutatja, másfelől

$$\nabla_{(\gamma\circ p^{-1})'}(\gamma \circ p^{-1})' = \frac{1}{\Phi \circ p^{-1}}\nabla_{\gamma'\circ p^{-1}}(\gamma' \circ p^{-1} \cdot \frac{1}{\Phi \circ p^{-1}}) = \frac{1}{\Phi^2 \circ p^{-1}}\nabla_{\gamma'\circ p^{-1}}\gamma' \circ p^{-1}+$$

$$+\frac{1}{\Phi \circ p^{-1}}\gamma' \circ p^{-1}(\frac{1}{\Phi \circ p^{-1}}) \cdot \gamma' \circ p^{-1} = \frac{\Phi'}{\Phi^3} \circ p^{-1}\gamma \circ p^{-1} - \frac{1}{\Phi \circ p^{-1}}\frac{\Phi'}{\Phi^2} \circ p^{-1}\gamma \circ p^{-1} = 0$$

teljesül, ami a geodetikusságot eredményezi. Így az $(A, B) \to M$ geodetikus (mely az erdeti geodetikusunk így vissza paraméterezve) teljes, ha $A = \infty,\ B = \infty$ teljesül. ♠

Lemma 5.2. Ha $M = I \times_\phi P$ egy görbített szorzat tér-idő ahol P egy teljes Riemann-sokaság, akkor egy fényszerű geodetikus minden $\{t\} \times P,\ t \in I$ fibrumot metsz.

Bizonyítás. Szimetriai okokból elég belátni, hogy egy $p = (t, c) \in M$ pontból induló jövőbe mutató fényszerű geodetikus minden $\{t\} \times P,\ t' > t,\ t \in I$ fibrumot metsz. Tehát az kell, hogy minden c-ből induló $\zeta : \mathbb{R}^+ \to P$ geodetikus jövőbe mutató fényszerű pregeodetikus $\gamma = (\zeta, \eta)$ felemeltjére igaz a *lemma.* Tegyük fel, hogy γ nem metsz egy t^* fibrumot. Legyen $\delta = min\{\phi(s) \mid t \leq s \leq t^*\} > 0$, ekkor a $\gamma : \mathbb{R}^+ \to M$ fényszerű pregeodetikusra

$$0 =< \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) >= \phi^2(\eta(s)) < \dot{\zeta}(s), \dot{\zeta}(s) > - < \dot{\eta}(s), \dot{\eta}(s) >= \phi^2(\eta(s)) - < \dot{\eta}(s), \dot{\eta}(s) >$$

$$\phi(\eta(s)) = \dot{\eta}(s)$$

egyenlőségből a $\gamma \subset [t, t^*] \times_\phi P$ taralmazás miatt

$$t^* - t > \int_0^\infty \dot{\eta}(s) ds \geq \int_0^\infty \delta ds = \infty$$

ellentmondás adódik. ♠

Ha egy $M = I \times_\phi P$ görbített szorzatra a fényszerűen teljességet nem, csak a P Riemann-sokaság teljességét követeljük meg, akkor a χ_p sima függvény csak egy $[0, R_p]$ intervallumon lesz értelmezve ahol R_p csupán attól függ, hogy p mely $\{t\} \times P$ fibrumban van, és azt a térbeli távolságot jelöli, amit az univerzum utolsó pillanatáig még megtehetünk. Ekkor ezen módosított χ_p függvény definíció alapján az *állítás 2.2*-ben elhagyható a fényszerűen teljesség feltétele, míg a *lemma 2.3, következmény 1-2* a következő módon alakul:

LEMMA 2.3.+ Legyen $M = I \times_\phi P$ egy görbített szorzat tér idő, $\omega : P \to P'$ egy lokálisan izometrikus fedő leképezés, $M' = I \times_\phi P'$ a hozzá tartozó görbített szorzat, $\Theta : P \to P$ egy nem triviális fedő transzformáció és $\Theta^\times : M \to M$ az ehhez tartozó fedőtranszformáció. Rögzítsünk egy $p = (t, c) \in M$ pontot akkor

$$L_p^+ \cap \Theta^\times(L_p^+) = \{\ (\tilde{t}, \tilde{c}) \in M \mid \tilde{t} = \chi_p(\lambda),\ \lambda \in \mathcal{L}(c, \tilde{c}) \cap \mathcal{L}(\Theta(c), \tilde{c}),\ \lambda < R_p\}$$

érvényes a fenti fénykúpok metszetére.

KÖVETKEZMÉNY 1.+ Legyen $M = I \times_\phi S$ egy Robertson-Walker tér-idő, ahol $S = \mathbb{E}^3$ vagy $S = \mathbb{H}^3$ és $\omega : S \to S'$ egy lokálisan izometrikus fedő leképezés. Ha $p = (t, c) \in M$, akkor

$$L_p^+ \cap \Theta^\times(L_p^+) = \{\ (\tilde{t}, \tilde{c}) \in S \mid d(c, \tilde{c}) = d(\Theta(c), \tilde{c}),\ \tilde{t} = \chi_p(d(c, \tilde{c})),\ d(c, \tilde{c}) < R_p\} =$$

$$= \{\ (\tilde{t}, \tilde{c}) \in S \mid \tilde{c} \in B(c, \Theta(c)) \cap H(c, R_p),\ \tilde{t} = \chi_p(d(c, \tilde{c}))\ \}$$

ahol $H(c, \Theta(c)) \subset S$ a $(c, \Theta(c))$ szakasz felezőmerőleges hipersíkja.

KÖVETKEZMÉNY 2.+ Legyen $M = I \times_\phi S$ egy Robertson-Walker tér-idő, ahol $S = \mathbb{S}^3$ és $\omega : S \to S'$ egy likálisan izometrikus fedő leképezés. Vegyünk egy $p = (t, c) \in M$ pontot, ekkor a következők érvényesek:

$$L_p^+ \cap \Theta^\times(L_p^+) =$$

$$= \{\ (\tilde{t}, \tilde{c}) \mid d(c, \tilde{c}) = d(\Theta(c), \tilde{c}),\ \tilde{t} = \chi_p(|\ d(c, \tilde{c}) + 2k\pi|\ ),\ k \in \mathbb{Z},\ |\ d(c, \tilde{c}) + 2k\pi| < R_p\},$$

ahol $\Theta^\times$ egy nem triviális fedő transzfomáció, melyet egy olyan Θ-ból származtattunk, ami az $\omega : S \to S'$ lokálisan izometrikus fedő leképezéshez tartozik. Továbbá azon $q = (\tilde{t}, \tilde{c}) \in M$ pontok halmaza, amelyekből $p = (t, c)$ pont többszörösen látható a

$$\{\ (\chi_p(k\pi), A^k(c)) \mid k \in \mathbb{N} - \{0\},\ k\pi < R_p\}$$

halmazt alkotják, ahol $A : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ az antipodális leképezés.

És itt az eredeti bizonyítások működnek. Továbbá a *lemma 2.1* egy általánosabb fomában is kimondható:

lemma 2.1.+ *Legyen $(M, <,>)$, $(M', <,>')$ idő orientált Lorentz-sokaságok, $\omega : M \to M'$ egy idő orientáció tartó lokálisan izometrikus fedő leképezés. Vegyünk egy $p \in M$ pontot, akkor $p' = \omega(p)$ többszörösen látható a $q' = \omega(q)$, $q \in M$ pontból akkor, és csak akkor, ha*

$$q \in L_p^+ \cap \theta(L_p^+)$$

teljesül az L_p^+ fénykúpra valamely ω-hoz tartozó $\theta : M \to M$ idő orientáció tartó izometrikus fedő transzformációra nézve, vagy már p többszörösen látható q pontból.

Bizonyítás A *lemma 2.1* bizonyításával analóg módon. ♠

Lemma 5.3. *Legyen $(L, <,>)$ egy idő orientált Lorentz-sokaság $M = I \times_\phi P$ egy görbített szorzat tér-idő, $\omega : M \to L$ egy lokálisan izometrikus idő orientáció tartó fedő leképezés. Vegyünk egy $p = (t, c) \in M$ pontot, akkor $p' = \omega(p)$ pontosan akkor látszik többszörösen az $q' = \omega(q)$, $q \in M$ pontból, ha p töbszörösen látszik q pontból, vagy*

$$q \in \{(t', c') \mid \exists\lambda \in \mathcal{L}(c, c') \cap \{\mathcal{L}(\tilde{c}, c') + \chi_p^{-1}(\tilde{t})\},\ t' = \chi_p(\lambda),\ \lambda < R_p\}$$

valamely $p^* = (\tilde{t}, \tilde{c}) \in \omega^{-1}(p')$, ahol $\mathcal{L}$ a második fejezetben van definiálva, továbbá az $\{\mathcal{L}(\tilde{c}, c') + \chi_p^{-1}(\tilde{t})\}$ pedig azt jelenti, hogy $\mathcal{L}$ elemeihez hozzá adjuk $\chi_p^{-1}(\tilde{t})$ értékét ami $\tilde{t} < t$ esetén a negatív $-\chi_{p^*}^{-1}$ értéket jelentse.

Bizonyítás. Az előző *lemma* miatt azon pontok melyekből p' többszörösen látható megkaphatók úgy, hogy az $\omega^{-1}(p') \subset M$ minden egyes pontjára vesszük azokat a pontokat, ahonnan az többszörösen látszik, majd ezek ω-nál vett képét, illetve a rögzített $p = (t, c) \in \omega^{-1}(p')$ esetén minden $p^* = (\tilde{t}, \tilde{c}) \in \omega^{-1}(p')$, $p^* \neq p$ pontra $L_p^+ \cap L_{p^*}^+$ metszetet kell ω-val levetíteni L-re. Ezen utóbbi metszet felírására vegyük a $q = (\bar{t}, \bar{c}) \in L_p^+ \cap L_{p^*}^+$ pontot, ekkor léteznek $\gamma : [0, \beta] \to M, \tilde{\gamma} : [0, \tilde{\beta}] \to M$ fényszerű geodetikusok melyekre $\gamma(0) = p$, $\tilde{\gamma}(0) = p^*$, $\gamma(\beta) = \tilde{\gamma}(\tilde{\beta}) = q$, ekkor ezek $\zeta, \tilde{\zeta}$ pregeodetikus vetületeire $\zeta(0) = c$, $\tilde{\zeta}(0) = \tilde{c}$, $\zeta(\beta) =$

$\tilde{\zeta}(\tilde{\beta}) = \bar{c}$ és ζ hossza $\chi_p(\bar{t})$ és $\tilde{\zeta}$ hossza $\chi_{p^*}(\bar{t})$. Mivel $\chi_p(\tilde{t}) + \chi_{p^*}(\bar{t}) = \chi_p(\bar{t})$ igaz $p^* = (\tilde{t}, \tilde{c})$ miatt így ζ $\chi_p(\tilde{t})$-vel hosszabb $\tilde{\zeta}$-nál. Azaz

$$L_p^+ \cap L_{p^*}^+ = \{(t', c') \mid \exists \lambda \in \mathcal{L}(c, c') \cap \{\mathcal{L}(\tilde{c}, c') + \chi_p^{-1}(\tilde{t})\},\ t' = \chi_p(\lambda),\ \lambda < R_p\}$$

igaz, hiszen az $\subset$ irányú tartalmazást a fentebb mondottak igazolják, míg a másik irányban $\lambda \in \mathcal{L}(c, c') \cap \{\mathcal{L}(\tilde{c}, c') + \chi_p^{-1}(\tilde{t})\}$ esetén léteznek $\zeta : [0\beta] \to P, \tilde{\zeta} : [0, \tilde{\beta}] \to P$ geodetikusok, melyekre $\zeta(0) = c,\ \tilde{\zeta}(0) = \tilde{c},\ \zeta(\beta) = \tilde{\zeta}(\tilde{\beta}) = c'$, ahol $\zeta,\ \chi_p^{-1}(\tilde{t})$-vel hosszabb $\tilde{\zeta}$-nál, azaz a fényszerű pregeodetikus felemeltjeik ugyanazon $(\chi_p(\lambda), c')$ pontban végződnek. ♠

A következő állítás a 4. fejezet konsrukciójánk gyenge általánosítása, mivel ott egyetlen mérési eredményből sikerült megkonstruálnunk a térszerű részt, míg most egy folytonos mérési sorozat segítségével konstruálunk a térszerű résszel homeomorf sokaságot.

Legyen P egy olyan Riemann sokaság, ahol bármely két pont között létezik és egyértelmű a geodetikus (ahol két geodetikust akkor tekintünk egyezőnek, ha egymás átparaméterezései), és $M = I \times_\phi P$ egy görbített szorzat tér-idő, továbbá $\omega : P \to P'$ egy lokálisan izometrikus fedés ahol P' kompakt, $\Gamma : P \to P$ a hozzá tartozó fedőtranszformáció csoport, és $M' = I \times P'$ az általuk meghatározott görbítettszorzat tér-idő. Ezek alapján a többszörösen láthatósági pontok és láthatósági irányaik megkaphatók, a következőkben pedig egy konsrtukciót szeretnénk adni mely a többszörösen látható pontok segítségével egy P'-el homeomorf topológikus sokaságot állít elő.

Rögzítsünk egy $c' \in P'$ ez lesz az a pont ahonnan vizsgálódunk és rögzítsünk egy $\{t'\} \times P'$ fibrumot aminek a többszörösen látható pontjait fogjuk vizsgálni bizonyos $(t, c') \in P'$ pontokból. Vegyük c' egy $c \in P$ felemeltjét és ennek T_cP érintőterét. Az ötletünk az, hogy az exponenciális leképezés inverzével felemeljük a Γ fedőtranszformációnál c-hez tartozó Dirichlet-cellát a T_cP érintő térre, ahol megmutatjuk (1), hogy exp_c^{-1} egy homemorfizmus lesz, így ha ismernénk a felemelt objektumot és annak "oldalain" a párosítást, akkor a faktorizáció elvégzése után egy P'-vel homeomorf topológikus sokaságot kapnánk. Megmutatjuk (2), hogy ha ezt a felemelt Dirichlet-cellát nem is, de egy ezzel homeomorfat kaphatunk az oldalpárosítással együtt, ha ismerjük a (t, c') pontokból a $\{t'\} \times P'$ fibrumbeli többszörösen látható pontok láthatósági irányait minden $t_c < t < t^c,\ t \in I$ esetén alkalmas $t_c, t^c \in I$ értékekre. Hogy mik ezek a t_c, t^c értékek az a konstrukció alatt mondjuk ki.

1. Az exp_c homeomorfizmus, mert folytonos, szuperjektív (hiszen bármely két pont között létezik geodetikus), egész T_cP-n értelmezett (mivel P' kompakt, ω egy lokálisan izometrikus fedés, így a *Hopf-Rinow* tétel alapján könnyen adódik P' majd P geodetikusan teljessége), és injektív is (hiszen, ha $x \neq y,\ exp(x) = exp(y)$, akkor a $[0, x],\ [0, y]$ szakaszok képei két különböző geodetikust fognak megadni.

2. Vegyünk egy r sugarú gömböt c körül P-ben (jelölje $S(c, r)$), ez a D_c Dirichlet-cellát metszeni fogja, ha $r^c > r > r_c$ (hisz kis r-ekre nem metszi, majd folyamatosan felfújva a folytonosság és P' kompaktsága miatt lesz egy olyan sugár amelyre érinti (r_c), és lesz egy olyan is amelyre már tartalmazza a Dirichlet-cellát (r^c)). Az exp leképezés tulajdonságai miatt az $S(c, r)$ gömbnek exp^{-1}-nél is egy $S(\vec{0}, r)$ gömb felel meg, és a

$$exp^{-1}(S(c, r) \cap D_c) = exp^{-1}(D_c) \cap S(\vec{0}, r)$$

megfelelés lesz igaz a metszetekre. De az $exp^{-1}(D_c)\cap S(\vec{0},r)$ metszetet úgy is megkaphatjuk, hogy a $\vec{0}\in T_cP$ pontból felvesszük a $(\chi_{t'}(r),c')$ pontból a $\{t'\}\times P'$ fibrumbeli többszörösen látható pontok láthatósági irányait, és tekintjük ennek a $S(\vec{0},r)$ gömbbel vett metszetét. Ha most lineárisan növeljük t értékét $t_c=\chi_{t'}(r_c)$, $t^c=\chi_{t'}(r^c)$ között és ismernénk $\chi_{t'}^{-1}(t)=r$ függvényt, akkor az elöbb mondottak alapján a (t,c')-hoz tartozó ($\{t'\}\times P'$-beli) láthatósági irányok segítségével fel tudnánk rajzolni $exp^{-1}(D_c)\cap S(\vec{0},\chi_{t'}^{-1}(t))$ metszeteket melyek (uniója a $t_c<t<t^c$ értékekre) kiadná az egész $exp^{-1}(D_c)$ határát, és a határpontok párosítását is. Azonban χ^{-1} függvényt nem ismerjük, csak azt tudjuk, hogy ez szigorúan monoton növő. Vegyük azt a $\varrho: T_cP\to T_cP$ homeomorfizmust mely az origót fixen hagyja és a $S(\vec{0},\chi_{t'}^{-1}(t))$ gömböt a $S(\vec{0},t)$ gömbre képzi ($t>t'$, $t\in I$). Ekkor az alábbi

$$\varrho\circ exp^{-1}(S(c,\chi_{t'}^{-1}(t))\cap D_c)=\varrho(exp^{-1}(D_c)\cap S(\vec{0},\chi_{t'}^{-1}(t)))=\varrho\circ exp^{-1}(D_c)\cap S(\vec{0},t)$$

egyenlőség teljesül a metszetekre ahol a legutolsó metszetet úgy is megkaphatjuk, hogy $\vec{0}\in T_cP$ pontból felmérjük a (t,c') ponthoz tartozó láthatósági irányokat és vesszük ennek a $S(\vec{0},t)$ gömbbel vett metszetét. Azaz $\varrho\circ exp^{-1}(D_c)$ határát a párosítással együtt meg tudjuk határozni, viszon $\varrho\circ exp^{-1}(D_c)$ homeomorf D_c vel úgy, hogy a határán a párosítások is megegyeznek. Így véve $\varrho\circ exp^{-1}(D_c)$-t és a határát lefaktorizálva az ekvivalens pontok szerint egy P'-vel homeomorf topológikus sokaságot kapunk. Így tehát az alábbi állítást láttuk be:

ÁLLÍTÁS 5.4. Legyen P egy 3-dimenziós sokaság, melynek bármely két pontja között egyértelműen létezik geodetikus, $M=I\times_\Phi P$ egy görbített szorzat tér-idő, $\omega: P\to P'$ egy lokálisan izometrikus fedő leképezés, ahol P' kompakt, és Γ az ehhez tartozó fedő transzformáció csoport, továbbá $M'=I\times_\Phi P'$ a P'-höz tartozó görbítettszorzat tér-idő. Rögzítsünk egy $\{t\}\times P'$, $t\in I$ fibrumot és egy $c'\in P'$ pontot. Ekkor léteznek olyan $t<t_c<t^c$, $t_c,t^c\in I$ értékek melyekre ha minden $(t',c')\in P'$, $t_c\le t'\le t^c$, $t'\in I$ pontra ismerjük azon $t\times P'$ fibrumbeli pontok láthatósági irányait melyek (t',c') pontból többszörösen láthatók akkor csak ezen (folytonosan változó) láthatósági irányhalmaz segítségével konstruálhatunk egy P'-vel homeomorf sokaságot.

Megpróbáltuk minnél teljesebben bemutatni a fényszerű geodetikusok viselkedését és segítségükkel a térszerű rész topológiáját, azonban mint láttuk általános esetben nem sikerült egyetlen mérésből eldönteni a topológiai szerkezetet, így még mindig maradnak érdekes kérdések, hogy van-e két különböző fundamentális csoportú térszerű sima Riemann-sokaság melyeknél ugyanazt a körpárosítást láttjuk, vagy lehetséges egyetlen mérésből eldönteni, hogy mi a fundamentális csoport, illetve mi a helyzet, ha a görbítő függvény nem csak a bázisbeli ponttól, hanem a fibrumbeli helytől is függ.

Irodalomjegyzék

[B-E] Beem, J. K. and Ehrlich, P. E., *Global Lorentzian Geometry*, Marcel-Dekker, 1981.

[Bu] Busemann, H., *The Geometry of Geodesics*, New York, 1955.

[C-W] Cornish, N. J. and Weeks, J. R., Measuring the shape of the universe, *Notices of the AMS* **45** (1998), 1463-1471.

[C-S-S] Cornish, N. J., Spergel, D. N. and Starkman, G. D., Circles in the sky; Finding topology with microwave background radiation, *Class. Quant. Grav.* **15** (1998), 2657-2670.

[G-K-M] Gromoll, D., Klingenberg, W., and Mayer, W., *Riemannsche Geometrie in Grossen*, Lecture Notes in Mathematics, **55**, 1968, Berlin.

[H-E] Hawking, S. W. and Ellis, F. G. R., *The Large Scale Structure of Space-time*, Cambridge University Press, 1973.

[O] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, 1983.

[P-H-L] Paál, G., Horváth, I. and Lukács, B., Inflation and compactification from galaxy redshifts, *Astrophysics and Space Sience*, **191**(1992), pp 107-124.

[S] Spergel, D. N., Do we live in a low-density universe?, *Class. Quant. Grav.* **15**(1998), pp 2589-2598.

[Sz] Szenthe János, A Riemann geometria elemei, Budapest 1998.

[Sz-Sz] Szeghy, D., Szenthe J., On generalized Robertson-Walker space-times, *Proceeding of the International Conference in Geometry and Topology*, Cluj-Napvca, 2002.

[W] Weeks, J. R., Reconstructing the global topology of the universe from the cosmic microwave background radiation, *Class. Quant. Grav.* **15** (1998), pp 2599-2604.