Szűcs Zsolt

A Brouwer-féle fixponttétel végtelen dimenziós általánosításai

Szakdolgozat

témavezető
Szilágyi Tivadar

2005. május

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Brouwer nevezetes fixponttétele az elmúlt kilencvenöt év során számos általánosítást megélt. A dolgozatban azt tűztük ki célul, hogy a lehetséges irányok minél szélesebb körét lefedjük.

Az első fejezetben a teljesség kedvéért bebizonyítjuk a Brouwer-féle fixponttételt, nem közismert módon. A következő két fejezetben tárgyaljuk a tétel messzemenő általánosításait, példákkal illusztrálva ezeket. A harmadik fejezetben halmazértékű leképezések fixpontelméletéről lesz szó, ahol felhasználjuk a második fejezetbeli, folytonos függvényekre kapott eredményeket. A negyedik részben alkalmazásokat mutatunk be, többek között a híres Invariáns altér problémára, és a harmonikus analízisben alapvető fontosságú tételekre.

A dolgozatban saját eredmények is szerepelnek. A 2.2.12. Tétel Banach terekre volt ismert. A 2.3.13. Megjegyzés, a 4.2.9. Példa, a 4.2.14. Tétel bizonyítása, valamint a 4.2.15. Megjegyzésben foglaltak nem ismert eredmények. Új ötleteken alapulnak a 3.3.13., a 3.4.4. és a 4.1.14. Tételek bizonyításai is.

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Szilágyi Tivadar tanár úrnak, aki figyelmembe ajánlotta a témát, és a dolgozat megírása folyamán segítséget nyújtott.

0.1. Jelölések, alapfogalmak

A követekező jelölésekkel élünk: tetszőleges H halmazra $\left|H\right|$ a H halmaz számosságát, $\mathcal{P}(H)$ a H hatványhalmazát jelöli. $\mathbb{N}$ a pozitív egész, $\mathbb{Z}$ az egész, $\mathbb{Q}$ a racionális, $\mathbb{R}$ a valós, $\mathbb{C}$ a komplex számok halmaza. $\mathbb{F}$ a valós vagy a komplex számok testét jelöli.

Tetszőleges $p, q \in \mathbb{Z}$-re $\overline{p,q}$ legyen $[p,q] \cap \mathbb{Z}$, ha $p \leq q$, egyébként az $\emptyset$ halmaz. Az $\mathbb{R}^n$ tér szokásos bázisát e^j $(j = 1,\ldots,n)$ jelöli; $\bar{e}$ az a vektor, melynek minden koordinátája 1. Az n-dimenziós egységkockát $[0,1]^n$-nel, a Hilbert kockát $[0,1]^\omega$-val jelöljük. Tetszőleges $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén legyen $x \leq y$ pontosan akkor, ha bármely $j \in \overline{1,n}$-re $x_j \leq y_j$; $x < y$, ha $x \leq y$ és $x \neq y$, valamint $x << y$, ha minden $i \in \overline{1,n}$ -re $x_i < y_i$.

Tetszőleges nemüres A, B, $C \subseteq A$, és $D \subseteq B$ halmazokra, valamint $g : A \longrightarrow B$ függvényre $g\big|_C$ jelentse a g leképezés C-re való megszorítását, $g^{-1}(D)$ pedig a D halmaz teljes inverz képét. Ha $B = \mathbb{R}$, akkor tetszőleges $c \in \mathbb{R}$-re $\{g \leq c\}$ vagy $\{g(x) \leq c\}$

a $g^{-1}((-\infty, c])$ halmazt jelenti. Hasonlóan értelmezzük a $\{g \geq c\}$, a $\{g < c\}$, és a $\{g > c\}$ halmazokat. $\mathcal{F}(A, B)$ legyen az A-n értelmezett, B-be képező függvények halmaza. $A = B$ esetén $\mathcal{F}(A)$-t írunk. $\mathbf{1}$ legyen az a konstans függvény, amely minden pontban 1-et vesz fel.

Ha (X, τ) topologikus tér és $C \subseteq X$, akkor legyen $\tau\big|_C$ a τ topológia megszorítása a C halmazra. Ha (X, τ_X) és (Y, τ_Y) topologikus terek, akkor a $\tau_X - \tau_Y$ folytonos függvények halmaza legyen $\mathcal{C}(X, Y)$ (beleértve, hogy a topológiák rögzítettek). Ha $Y = \mathbb{F}$ (ahol $\mathbb{F}$-et az euklideszi topológiával látjuk el), akkor $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(X)$-et is írunk. Ha X lokálisan kompakt tér, akkor $\mathcal{C}^b(X, \mathbb{F})$ a korlátos, $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{F})$ a kompakt tartójú, $\mathcal{C}_+(X, \mathbb{F})$ a nemnegatív $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(X)$-beli függvények halmazát jelöli. A kompakt konvergencia topológiára az Ω_X jelölést használjuk.

Egy (X, ϱ) metrikus térben egy $x_0 \in X$ közepű, $r > 0$ sugarú nyílt gömbre a $B(x_0, r)$, egy $M \subseteq X$ halmaz átmérőjére $\mathrm{diam}(M)$ jelölést használjuk.

A dolgozatban a vektorterek mindig $\mathbb{F}$ felettiek lesznek; bizonyos esetekben kikötjük, hogy valós vagy komplex a vektorterünk. Ha V vektortér $\mathbb{F}$ felett, akkor egy $S \subseteq V$ halmaz lineáris burkára az $\mathcal{L}(S)$ jelölést használjuk. A nullvektort $\mathbf{0}_V$, vagy ha nem okoz félreértést, akkor $\mathbf{0}$ jelöli. A V-n értelmezett lineáris transzformációk halmaza legyen $\mathrm{L}(V)$. Ha V komplex vektortér, akkor a V alatt fekvő valós vektortérre a $V_{\mathbb{R}}$ jelölést alkalmazzuk. Az $\mathbb{F}^n$ vektorteret mindig az euklideszi topológiával látjuk el.

Ismertnek tételezzük fel a normált terek és a topologikus vektorterek elméletének alapfogalmait: konvex halmaz, lokálisan konvex tér, szeparáltság, korlátos halmaz, hordó, teljesség, kváziteljesség, duális pár, gyenge topológiák, Mackey tér, Mackey topológia, polaritás, reflexív tér. Egy $(X, \|\cdot\|_X)$ normált térre vagy (E, τ_E) topologikus vektortérre, ha nem okoz félreértést, $(X, \|\cdot\|)$ vagy (E, τ) jelölést alkalmazzuk, vagy egyszerűen csak X-et vagy E-t írunk. Egyedüli kivétel az $\mathcal{L}_p$ tér, ekkor megmaradunk a szokásos $\|\cdot\|_p$ jelölésnél. Ha E topologikus vektortér, akkor algebrai duálisát E', topologikus duálisát E^* jelöli. Ha $(E, F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ duális pár, akkor az E-n meghatározott gyenge topológiát $\sigma(E, F)$, a Mackey topológiát $\mu(E, F)$ jelöli. E-n a $\sigma(E, E^*)$, illetve E^*-on a $\sigma(E^*, E)$ topológiára a megszokott gyenge, illetve gyenge-* topológia elnevezést használjuk. Ha E és F topologikus vektorterek, akkor az E-n értelmezett, F-be ható korlátos (illetve folytonos) lineáris operátorok halmazára a $\mathcal{B}(E, F)$ (illetve $\mathcal{L}(E, F)$) jelölést alkalmazzuk.

Egy $K \subseteq E$ halmaz konvex burkára a $\mathrm{conv}(K)$, zárt konvex burkára a $\overline{\mathrm{conv}}(K)$ ($\overline{\mathrm{conv}}(K)^E$), és ha K konvex, akkor extremális pontjaira az $\mathrm{Ext}(K)$ jelölést használjuk. Tetszőleges $x, y \in E$-re $[x, y]$ legyen az x és y közötti szakasz, azaz $\mathrm{conv}(\{x, y\})$, $[x, y)$ pedig legyen $[x, y] \setminus \{y\}$.

Ha $\emptyset \neq \Lambda$ halmaz és $p \in [1, \infty]$, akkor a $\ell^p_{\mathbb{F}}(\Lambda) = \{x : \Lambda \longrightarrow \mathbb{F} \mid \sum_{\lambda\in\Lambda} |x_\lambda|^p < +\infty\}$ Banach terek esetén (az ismert normákkal) a megszokott jelöléseket alkalmazzuk. Ha $\Lambda = \mathbb{N}$, akkor az ℓ^p jelölést használjuk; a konvergens és a 0-hoz konvergáló sorozatok tere legyen c és c_0. Ha szükséges, külön említjük, hogy valós vagy komplex sorozatokról van szó.

0.2. Felhasznált tételek

A következőkben bizonyítás nélkül közlünk néhány alapvető tételt a topologikus terek és a topologikus vektorterek elméletéből, melyekre a későbbiek folyamán hivatkozni fogunk ([7], [10], [22] és [23]).

0.2.1. Tétel. *Legyen E véges dimenziós, szeparált topologikus vektortér $\mathbb{F}$ felett. Ekkor bármely $\mathbb{F}^{dim E} \longrightarrow E$ lineáris bijekció homeomorfizmus.*
Véges dimenziós vektortéren egyetlen lineáris Hausdorff-topológia létezik; ez a topológia lokálisan kompakt, és teljesen normálható.

0.2.2. Tétel. (Bipoláris tétel) *Legyen $(E, F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ duális pár, $\emptyset \neq B \subseteq E$. Ekkor $B^{\circ\circ} = \overline{conv}(B \bigcup\{\boldsymbol{0}\})$, ahol a lezárást $\sigma(E, F)$-ben értjük.*

0.2.3. Tétel. *Egy E szeparált, lokálisan konvex tér pontosan akkor reflexív, ha hordós és minden gyengén korlátos és zárt részhalmaza gyengén kompakt.*

0.2.4. Tétel. (Mazur) *Egy E lokálisan konvex térben egy C konvex halmaz pontosan akkor zárt, ha gyengén zárt.*

0.2.5. Tétel. (Krein) *Legyen (E, τ) szeparált, lokálisan konvex tér, $A \subseteq E$ kompakt halmaz. Ekkor ekvivalens:*

(a) $\overline{conv}(A)$ kompakt.

(b) $\overline{conv}(A)$ τ-teljes.

Speciálisan, ha (E, τ) kváziteljes, szeparált, lokálisan konvex tér, akkor minden $A \subseteq E$ kompakt halmaz esetén $\overline{conv}(A)$ kompakt.

0.2.6. Tétel. (Szeparációs tétel) *Legyen E topologikus vektortér.*

(a) Ha E^* szétválaszt E felett, akkor E szeparált.

(b) Ha E szeparált, lokálisan konvex tér, akkor E^* szétválaszt E felett.

0.2.7. Tétel. (Krein-Milman) *Legyen E^* szétválasztó az E topologikus vektortér felett.*

(a) Ha $A \subseteq E$ kompakt, konvex halmaz, akkor $A = \overline{conv}(Ext(A))$.

(b) Ha $B \subseteq E$ kompakt, és $\overline{conv}(B)$ is kompakt, akkor $Ext(conv(B)) \subseteq B$.

0.2.8. Tétel. (Hahn-Banach) *Legyen E lokálisan konvex tér, $Y \subseteq E$ lineáris altér, és $u : Y \longrightarrow \mathbb{F}$ olyan lineáris funkcionál, amely folytonos Y altértopológiája szerint. Ekkor létezik olyan $\tilde{u} \in E^*$, amelyre $\tilde{u}\big|_Y = u$.*

0.2.9. Tétel. (Mackey) *Egy E szeparált, lokálisan konvex tér A részhalmaza pontosan akkor korlátos, ha bármely $l \in E^*$-ra $\sup_{x \in A} |l(x)| < +\infty$.*

0.2.10. Tétel. *Ha E topologikus vektortér, akkor minden nemzérus $f \in E'$ lineáris funkcionál nyílt leképezés.*

0.2.11. Tétel. *Minden lokálisan konvex tér izomorf Banach terek szorzatának egy alterével.*

0.2.12. Tétel. (Stone) *Legyen X T_1 topologikus tér. Ekkor ekvivalens:*

(i) *X parakompakt.*

(ii) *X tetszőleges $\mathcal{U}$ nyílt fedésének létezik nyílt baricentrikus finomítása.*

0.2.13. Tétel. (Mackey-Arens) *Legyen E kváziteljes, szeparált, lokálisan konvex tér. Ekkor*

(a) *E^*-on az Ω_E kompakt konvergencia topológia durvább, mint a $\mu(E^*, E)$ Mackey topológia.*

(b) *$(E^*, \Omega_E)^* = E$ a természetes azonosítás mellett.*

0.2.14. Tétel. (Alaoglu-Bourbaki) *Legyen E topologikus vektortér, F véges dimenziós, szeparált topologikus vektortér, $G \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ ekvifolytonos halmaz. Ekkor G relatív kompakt halmaz az $\mathcal{L}(E, F)$ feletti pontonkénti konvergencia topológiában. Speciálisan, ha $G \subseteq E^*$ ekvifolytonos, akkor G relatív kompakt a $\sigma(E^*, E)$ topológiában.*

0.2.15. Tétel. (Stone-Weierstrass) *Legyen X Hausdorff topologikus tér, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ olyan részalgebra, amely szétválasztja X pontjait, és $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$. Ekkor $\mathcal{A}$ sűrű $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$-ben az Ω_X kompakt konvergencia topológia szerint.*

0.2.16. Tétel. *E topologikus vektortér, $l \in E'$. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(a) *$l \in E^*$.*

(b) $\ker l$ *zárt lineáris altér E-ben.*

0.2.17. Tétel. *Legyen X topologikus tér, F topologikus vektortér, és $G \subseteq \mathcal{C}(X, F)$ ekvifolytonos halmaz.*

(a) *Ha minden $x \in X$-re $\{f(x) \mid f \in G\} \subseteq F$ relatív kompakt, akkor G relatív kompakt $(\mathcal{C}(X, F), \Omega_X)$-ben.*

(b) *G-n $\mathcal{C}(X, F)$-ből örökölt pontonkénti és kompakt konvergencia topológia azonos.*

1. fejezet

A Brouwer-féle fixponttétel

Ez a fejezet a teljesség igényét elégíti ki. Az első szakaszban nem közismert módszerrel bebizonyítjuk Brouwer tételét, majd általánosabb eredményeket ismertetünk, bevezetve a fixpont-terek fogalmát. Végül a tétel végtelen dimenziós érvényességét vizsgáló példákat említünk.

1.1. A klasszikus Brouwer tétel

A Brouwer-féle fixponttételre számos bizonyítás született, felhasználva az algebrai topológia és a fokszámelmélet eredményeit. Az itt bemutatásra kerülő, Kuhntól származó bizonyítás azonban teljesen elemi, amely kombinatorikus jelleget ölt.

1.1.1. Definíció. Legyen A tetszőleges halmaz, $B \subseteq A$, $g : B \longrightarrow A$ tetszőleges függvény. Egy $a \in B$ elem a g leképezés fixpontja, ha $g(a) = a$. A g függvény fixpontjainak halmazát $\mathrm{Fix}(g)$-vel jelöljük.

1.1.2. Tétel. (Brouwer) *Bármely $f : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]^n$ folytonos függvénynek létezik fixpontja.*

Rögzített $m \in \mathbb{N}$ mellett tekintsük a következő halmazokat:

- $S_n := \left\{ \{x^0, x^1, \ldots, x^n\} \subseteq (\overline{0,m})^n \;\middle|\; x^0 < x^1 < \cdots < x^n = x^0 + \bar{e} \right\}$

- $T_n := \left\{ \{y^0, y^1, \ldots, y^{n-1}\} \subseteq (\overline{0,m})^n \;\middle|\; y^0 < y^1 < \cdots < y^{n-1} \leq y^0 + \bar{e} \right\}$

- $T_n^k := \left\{ H \in T_n \;\middle|\; \exists\, j \in \overline{1,n} : \forall\, y \in H \;\, y_j = k \right\} \qquad (k \in \overline{0,m})$

- $T_n^* := \left\{ \{y^0, y^1, \ldots, y^{n-1}\} \subseteq (\overline{0,m})^n \;\middle|\; y^0 < y^1 < \cdots < y^{n-1} = y^0 + \bar{e} \right\}$

1.1.3. Lemma. *Ha $H \in T_n^0$ vagy $H \in T_n^m$, akkor létezik pontosan egy olyan S_n-beli halmaz, melynek H részhalmaza; ha $H \in T_n^*$ vagy $H \in T_n^k$ valamely $k \in \overline{1, m-1}$ mellett, akkor pontosan két ilyen S_n-beli halmaz létezik.*

Bizonyítás. Legyen $H = \{y^0, \ldots, y^{n-1}\}$, $H \in T_n^k$ valamely $k \in \overline{0, m}$–re. Ekkor a T_n^k halmaz definíciója szerint van olyan $j \in \overline{1, n}$ index, hogy bármely $i \in \overline{0, n-1}$-re $y_j^i = k$, ezért $i \geq 1$ esetén $(y^i - y^{i-1})_j = 0$. Ebből következik, hogy az $y^i - y^{i-1}$ vektor valamelyik koordinátája 1, a többi koordinátája pedig 0. Nincs tehát olyan $x \in (\overline{0, m})^n$ vektor, amelyre $y^{i-1} < x < y^i$ teljesülne. Ezért a H halmazt S_n-beli halmazzá bővíteni $k \in \overline{1, m}$ esetén úgy tudjuk, hogy $n+1$-edik vektorként hozzávesszük az összes y^i-nél kisebb $y^{n-1} - \bar{e}$ vektort, míg $k \in \overline{0, m-1}$ esetén $y^0 + \bar{e}$-t vesszük hozzá. Tehát $k = 0$ és $k = m$ esetén egyféleképpen végezhető el a kibővítés, $0 < k < m$ esetén kétféleképpen.

Legyen most $H \in T_n^*$. A definícióból adódik, hogy van pontosan egy olyan $i \in \overline{1, n-1}$ index, hogy y^i két koordinátájában is különbözik az y^{i-1} vektortól; legyenek ezek p-edik és q-adik koordináták. Így kapjuk, hogy $y^{i-1} + e^p + e^q = y^i$, ezért a H halmazt S_n-beli halmazzá az $y^{i-1} + e^p$ vagy az $y^i + e^q$ vektorral bővíthetjük ki. □

1.1.4. Lemma. *Tegyük fel, hogy a $\varphi : (\overline{0, m})^n \longrightarrow \overline{0, n}$ leképezésre teljesül az alábbi két feltétel:*

(i) Ha az $x \in (\overline{0, m})^n$ vektor valamely koordinátája 0, akkor $\varphi(x) \neq 0$

(ii) ha az $x \in (\overline{0, m})^n$ vektorra $x_k = m$ valamely $k \in \overline{1, n}$ mellett, akkor $\varphi(x) \neq k$

Ekkor létezik olyan $H \in S_n$, melyre $\varphi(H) = \overline{0, n}$.

Bizonyítás. n szerinti teljes indukcióval belátjuk, hogy páratlan sok ilyen tulajdonságú halmaz létezik.

Legyen $n = 1$. Ekkor az *(i)* feltétel azt jelenti, hogy $\varphi(0) = 1$, *(ii)* azt, hogy $\varphi(m) = 0$. Ebből következik, hogy létezik $q \in \overline{1, m}$, melyre $\varphi(q-1) = 1$ és $\varphi(q) = 0$. Jelölje p ezen számok minimumát. $p = m$ esetén készen vagyunk: egy ilyen tulajdonságú halmaz létezik. Ha $p < m$, akkor tekinsük a $\overline{p+1, m}$ halmazon a következő két egyenleterendszert:

1) $\varphi(i-1) = 0$, $\varphi(i) = 1$

2) $\varphi(i-1) = 1$, $\varphi(i) = 0$

Ekkor az 1) rendszernek nyilván ugyanannyi megoldása van, mint 2)-nek: $\varphi(m) = 0$, és minden átváltáshoz tartoznia kell egy visszaváltásnak. Ebből következik, hogy a $\{p-1, p\}$ halmazon kívül páros számú $H \in S_1$ elégíti ki a $\varphi(H) = \overline{0, 1}$ feltételt, tehát összesen páratlan sok keresett tulajdonságú S_1-beli halmaz van.

A továbbiakban tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, és vezessük be a következő két jelölést:

$$D_n := \big\{ H \in S_n \bigm| \varphi(H) = \overline{0,n} \big\}$$

$$E_n := \big\{ H \in T_n \bigm| \varphi(H) = \overline{0,n-1} \big\}$$

$\big|D_n\big|$-ről állítjuk, hogy páratlan. E célból kiszámoljuk az

$$a_n := \sum_{H \in S_n} \Big| \{\ H_1 \subseteq H \bigm|\ H_1 \in E_n\ \} \Big|$$

számot kétféle módon:

1) Ha $H \in D_n$, akkor H-nak egyetlen E_n-beli részhalmaza van: H-ból hagyjuk el azt az elemet, amelyikhez φ n-et rendeli. Ha $H \in S_n \backslash D_n$, akkor $\varphi(H) = \overline{0,n-1}$ esetén két E_n-beli részhalmaza van H-nak; egyébként egy sem. Jelölje c_n az $S_n \setminus D_n$ halmaz azon elemeinek számát, amelyeknek két E_n-beli részhalmazuk van. Ekkor tehát:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{H \in D_n} \Big| \{\ H_1 \subseteq H \bigm| H_1 \in E_n\ \} \Big| + \sum_{H \in S_n \backslash D_n} \Big| \{\ H_1 \subseteq \bigm| H_1 \in E_n\ \} \Big| \\ &= \big|D_n\big| + 2c_n \end{aligned} \tag{1.1}$$

2) Az 1.1.3. Lemmából következik, hogy

$$a_n = \big|E_n \bigcap T_n^0\big| + \big|E_n \bigcap T_n^m\big| + 2\sum_{k=1}^{m-1} \big|E_n \bigcap T_n^k\big| + 2\big|E_n \bigcap T_n^*\big| \tag{1.2}$$

Ha $H \in T_n^0$, akkor H tetszőleges elemének legalább az egyik koordinátája 0, ezért az *(i)* feltétel következtében φ a H halmazon nem vesz fel 0 értéket. Így $H \notin E_n$, vagyis $\big|E_n \cap T_n^0\big| = 0$. A tétel *(ii)* feltételéből következik, hogy a $(\overline{0,m})^{n-1}$ halmazon a

$$\psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, m)$$

egyenlőséggel értelmezett ψ függvény a $\overline{0,n-1}$ halmazba képez, valamint az *(i)* és *(ii)* feltételeket is teljesíti $n-1$ esetén. Ezért az indukciós feltevés szerint a $\varphi(H) = \overline{0,n-1}$ feltételt kielégítő $H \in S_{n-1}$ halmazok száma páratlan. Felhasználva az E_n, T_n^m és T_n halmazok definícióját, valamint a *(ii)* feltételt, kapjuk a következőt:

$$\begin{aligned} E_n \bigcap T_n^m =& \{\ H \in T_n \bigm| \forall\ x \in H : x_n = m; \varphi(H) = \overline{0,n-1}\ \} \\ =& \{\ \{y^0, \ldots, y^{n-1}\} \subseteq (\overline{0,m})^n \bigm| y^0 < \cdots < y^{n-1} = y^0 + \bar{e} - e^n \\ & \forall\ i \in \overline{0,n-1} : y_n^i = m; \varphi(H) = \overline{0,n-1}\ \} \end{aligned}$$

Ezért a $\varphi(H) = \overline{0,n-1}$ feltételnek eleget tévő $H \in S_{n-1}$ halmazok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetőek az $E_n \cap T_n^m$ halmaz elemeinek: a H halmaz minden eleméhez n-edik koordinátaként hozzávesszük az m számot. Így az (1.2) egyenlőségből adódik a_n páratlansága, amiből (1.1) alapján $\big|D_n\big|$-é is. $\square$

Bizonyítás. (1.1.2. Tétel) Véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens, így feltehető, hogy $\mathbb{R}^n$-en a maximum-norma adott. Legyen tehát $\|x\| = \max_{1\le j\le n} |x_j|$.

Indirekten tegyük fel, hogy az f leképezésnek nincs fixpontja. Ekkor létezik $\varepsilon > 0$, hogy $\|x - f(x)\| \geq \varepsilon$ teljesül minden $x \in [0,1]^n$-re. Mivel a $g(x) := x - f(x)$ függvény egyenletesen is folytonos a $[0,1]^n$ egységkockán, ezért van olyan $\delta > 0$, hogy ha $x_1, x_2 \in [0,1]^n$, $\|x_1 - x_2\| < \delta$, akkor $\|g(x_1) - g(x_2)\| < \varepsilon$. Legyen $m \in \mathbb{N}$ olyan, melyre $m > \frac{1}{\delta}$. Értelmezzünk egy $\varphi : (\overline{0,m})^n \longrightarrow \overline{0,n}$ leképezést a következő módon:

$$\varphi(x) := \begin{cases} \max\{i|\ g_i(\frac{x}{m}) < 0\} & \text{ha } \exists\ i \in \overline{1,n} : g_i(\frac{x}{m}) < 0 \\ \max\{i|\ x_i = 0\} & \text{ha } g(\frac{x}{m}) \geq \mathbf{0} \text{ és } \exists\ i \in \overline{1,n} : x_i = 0 \\ 0 & \text{ha } g(\frac{x}{m}) \geq \mathbf{0} \text{ és } x >> \mathbf{0} \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy φ kielégíti az 1.1.4. Lemma feltételeit. Valóban, ha $\varphi(x) = 0$, akkor x minden koordinátája pozitív; ha $\varphi(x) = k$ valamely $k \in \overline{1,n}$-re, akkor vagy $x_k = 0$, vagy $g_k(\frac{x}{m}) < 0$. $x_k = m$ az utóbbi esetben sem fordulhat elő, mert akkor $\frac{x_k}{m} - f_k(\frac{x}{m}) = g_k(\frac{x}{m}) < 0$ teljesülne, azonban f_k minden értéke legfeljebb 1. Az 1.1.4. Lemma követekeztében van tehát $H \in S_n$, melyre $\varphi(H) = \overline{0,n}$. Legyen $x_0 \in H$ az a vektor, melyre $\varphi(x_0) = 0$; ekkor φ definíciója miatt $g(\frac{x_0}{m})$ minden koordinátája nemnegatív. Legyen $k \in \overline{1,n}$ olyan index, amelyre $g_k(\frac{x_0}{m}) = \|g(\frac{x_0}{m})\|$, és legyen $z \in H$ az a vektor, amelyre $\varphi(z) = k$. S_n definíciója és m választása miatt $\|\frac{x}{m} - \frac{y}{m}\| = \frac{1}{m} < \delta$ igaz minden $x, y \in H$-ra, ezért $|g_k(\frac{x}{m}) - g_k(\frac{y}{m})| \leq \|g(\frac{x}{m}) - g(\frac{y}{m})\| < \varepsilon$ is teljesül. Ebből az egyenlőtlenségből és az indirekt feltevésből adódó $g_k(\frac{x_0}{m}) \geq \varepsilon$-ból következik, hogy $g_k(\frac{z}{m}) > 0$. Ezért z-re φ definíciójában a második eset áll fenn, azaz $z_k = 0$. Ebből viszont $f_k(\frac{z}{m}) = \frac{z_k}{m} - g_k(\frac{z}{m}) < 0$ következne, ami ellentmond f_k nemnegativitásának. □

Felmerül a kérdés, hogy milyen szerkezetű halmazokra igaz a Brouwer-tétel állítása. Ki fog derülni, hogy ezt a tulajdonságot a homeomorfizmusok megőrzik, tehát topologikus invariáns. Célszerű bevezetni az alábbi definíciót, melyre a második fejezetben visszatérünk.

1.1.5. Definíció. Egy X topologikus tér teljesíti a fixpont-feltételt, ha tetszőleges $f : X \longrightarrow X$ folytonos függvénynek van fixpontja. Egy X topologikus tér fixpont-tér, ha teljesíti a fixpont-feltételt.

1.1.6. Állítás. *Ha X és Y homeomorf topologikus terek, és X fixpont-tér, akkor Y is fixpont-tér.*

Bizonyítás. Legyen $h : X \longrightarrow Y$ topologikus leképezés és $f : Y \longrightarrow Y$ folytonos függvény. Ekkor a $g = h^{-1} \circ f \circ h : X \longrightarrow X$ függvény folytonos, ezért a feltételek miatt létezik $x \in X$, melyre $g(x) = x$, azaz $h^{-1}(f(h(x))) = x$, amiből következik, hogy a $h(x) \in Y$ pont az f függvény fixpontja. □

1.1.7. Megjegyzés. Az előző állításból triviális, hogy bármely n-dimenziós kocka fixpont-tér, mert nyilvánvalóan homeomorf $[0,1]^n$-nel.

1.1.8. Példa. A $[0,1]^\omega$ Hilbert-kocka fixpont-tér. Legyen ugyanis $f : [0,1]^\omega \longrightarrow [0,1]^\omega$ folytonos függvény. A Hilbert kocka metrizálható a $\varrho(x,y) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j}|x_j - y_j|$ metrikával. Tekintsük minden $n \in \mathbb{N}$-re a $B_n = \pi_n([0,1]^\omega)$ halmazt, ahol π_n az első n koordinátára való vetítést jelöli, azaz $\pi_n(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. Nyilvánvaló, hogy az altértopológiával ellátott B_n homeomorf $[0,1]^n$-nel, ezért az 1.1.6. Állítás miatt B_n fixpont-tér. Ezért a $\pi_n \circ f \circ \pi_n : B_n \longrightarrow B_n$ folytonos függvénynek létezik egy $x_n \in B_n \subseteq [0,1]^\omega$ fixpontja.

Ha végtelen sok különböző x_n adódik, akkor $[0,1]^\omega$ kompaktsága miatt létezik egy $x_0 \in [0,1]^\omega$ torlódási pontja (x_n)-nek; feltehető, hogy már $x_n \to x_0$. Állítjuk, hogy x_0 fixpontja az f függvénynek. Legyen ugyanis $\varepsilon > 0$, és $m \in \mathbb{N}$. Ekkor $\varrho(x_0, f(x_0)) \leq \varrho(x_0, x_m) + \varrho(f_m(x_m), f(x_m)) + \varrho(f(x_m), f(x_0))$, hiszen x_m fixpontja f_m-nek. Mivel $x_m \to x_0$ $m \to +\infty$ esetén, f folytonos, és a metrika definíciójában szereplő sor konvergens, azért választhatjuk m-et olyan nagyra, hogy az egyenlőtlenség jobb oldalán álló összeg kisebb, mint ε. Ebből következik, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra $\varrho(x_0, f(x_0)) < \varepsilon$, ami mutatja, hogy $f(x_0) = x_0$.

Ha véges sok x_n adódik, akkor végtelen sok m indexre az f_m függvényeknek van egy közös z fixpontja. Ekkor az előbbi esethez hasonlóan $\varrho(z, f(z)) = \varrho(f_m(z), f(z)) \leq \varepsilon$, ha m elegendően nagy, tehát z fixpontja f-nek.

1.1.9. Állítás. *Ha az Y topologikus tér fixpont-tér, akkor összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen A az Y egy összefüggőségi komponense, B a többi komponens uniója, és $a \in A$, $b \in B$ két tetszőleges pont. Ekkor a

$$g(x) := \begin{cases} b & \text{ha } x \in A \\ a & \text{ha } x \in B \end{cases}$$

$g : Y \longrightarrow Y$ függvény nyilván folytonos, és nincs fixpontja. □

1.1.10. Definíció. Legyen X topologikus tér. Egy $Y \subseteq X$ halmaz retraktuma X-nek, ha létezik olyan $r : X \longrightarrow Y$ folytonos leképezés, melyre $r\big|_Y = id_Y$. Ekkor r-et retrakciónak nevezzük.

1.1.11. Állítás. *Ha az X topologikus tér fixpont-tér, és Y retraktuma X-nek, akkor Y is fixpont-tér.*

Bizonyítás. Legyen $r : X \longrightarrow Y$ retrakció és $f : Y \longrightarrow Y$ folytonos függvény. Ekkor a $g = f \circ r : X \longrightarrow X$ függvény folytonos, tehát a feltételek következtében létezik $x \in X$, melyre $f(r(x)) = x$. Mivel $ran f \subseteq Y$, ezért $x \in Y$. Ekkor viszont $r(x) = x$, ami mutatja, hogy x az f leképezésnek is fixpontja. □

1.1.12. Tétel. *$\mathbb{R}^n$ bármely nemüres, korlátos, konvex, zárt részhalmaza teljesíti a fixpont-feltételt.*

Bizonyítás. Ismeretes, hogy tetszőleges $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, zárt halmaz retraktuma $\mathbb{R}^n$-nek. Ha C korlátos is, akkor belefoglalható egy I n-dimenziós kockába (ami az 1.1.7. Megjegyzés értelmében fixpont-tér). Legyen $r : \mathbb{R}^n \longrightarrow C$ retrakció. Ekkor $r\big|_I : I \longrightarrow C \subseteq I$ retrakciója I-nek C-re, így az 1.1.11. Állításból következik, hogy C fixpont-tér. □

Még általánossaban a következő tételt nyerjük:

1.1.13. Tétel. (Általánosított Brouwer tétel) *Legyen X véges dimenziós, szeparált topologikus vektortér $\mathbb{F}$ felett. Ekkor bármely nemüres, korlátos, konvex, zárt részhalmaza X-nek teljesíti a fixpont-feltételt.*

Bizonyítás. Legyen $A : X \longrightarrow \mathbb{F}^{dim X}$ lineáris bijekció. A 0.2.1. tétel szerint ez homeomorfizmus is, ezért A a korlátos, konvex, zárt halmazokat ugyanilyen tulajdonságú halmazokra képezi. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ esetén $\mathbb{F}^{dim X}$-re, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ esetén $\mathbb{F}^{dim X}$ alatt fekvő valós vektortérre alkalmazhatjuk az 1.1.12. Tételt, így az 1.1.6. Állításra hivatkozva befejezhetjük a bizonyítást. □

1.1.14. Példa. Az előző tételben a szeparáltság nem hagyható el. Lássuk el $\mathbb{F}^n$-et az antidiszkrét topológiával, ami nem Hausdorff-topológia. Ebben a topologikus vektortérben $\mathbb{F}^n$ korlátos, konvex, zárt halmaz. Tetszőleges $\mathbf{0} \neq b \in \mathbb{F}^n$-re tekinthetjük a b-vel való eltolást, azaz $R_b(x) := x + b$ $(x \in \mathbb{F}^n)$. Ez nyilvánvalóan folytonos $\mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ leképezés, és nincs fixpontja.

1.2. Példák

Kézenfekvő a kérdés, hogy végtelen dimenziós normált térben igaz-e, hogy minden, a zárt egységgömböt önmagába képező folytonos függvénynek van fixpontja. A következőkben példákon keresztül rámutatunk arra, hogy Brouwer tétele még Hilbert terekben sem marad igaz teljes általánosságban.

1.2.1. Példa. (Kakutani) A ℓ^2-beli B zárt egységgömbön az

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots) := (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots)$$

függvény B-t a határára képezi, hiszen $\|f(x)\|^2 = (1 - \|x\|^2) + \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = 1$, és nyilvánvalóan folytonos, mert folytonos leképezések kompozíciójaként áll elő. A leképezésnek nincs fixpontja, ugyanis a $(\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$ egyenlőségből az következne, hogy $x_n = \sqrt{1 - \|x\|^2}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, vagyis a konstans $x = (\sqrt{1 - \|x\|^2})$ sorozat benne van ℓ^2-ben. Ez csak akkor lehetséges, ha $x = \mathbf{0}$, de ez esetben $\|x\| = 0$, és így $\sqrt{1 - \|x\|^2} = 1$, ami nem 0.

1.2.2. Példa. Legyen C a $\ell^2(\mathbb{Z})$ sorozattér zárt egységgömbje. Jelölje S az eltolás-operátort, azaz ha $x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, akkor $Sx = (x_{j+1})_{j\in\mathbb{Z}}$. Nyilvánvaló, hogy S izometrikusan képezi önmagára C-t, amiből triviális, hogy $S(\partial C) = \partial C$. Tekintsük a

$$g : C \longrightarrow C \qquad g(x) := \frac{1}{2}(1 - \| x\|)e_0 + Sx = S(\frac{1}{2}(1 - \| x\|)e_{-1} + x)$$

leképezést, ahol e_k ($k \in \mathbb{Z}$) a $(\delta_{j,k})_{j\in\mathbb{Z}}$ sorozat.

A g függvény valóban a C halmazba képez, hiszen $\| g(x)\| = \| \frac{1}{2}(1-\| x\|)e_0+Sx\| \leq \frac{1}{2}(1 - \| x\|) + \| Sx\| = \frac{1}{2}(1 + \| x\|) \leq 1$, és Lipschitz-folytonos is, mert $\| g(x) - g(y)\| \leq \frac{1}{2}\big|\| y\| - \| x\|\big| + \| S(x - y)\| \leq \frac{3}{2}\| x - y\|$.

Könnyen láthatóan g C-re képez. Ha $y \in \operatorname{ran} g$, azaz valamely $x \in C$-vel $y = \frac{1}{2}(1-\| x\|)e_0+Sx$, akkor tetszőleges $t \in [0, 1]$-re kapjuk, hogy $ty = \frac{1}{2}(t-\| tx\|)+S(tx)$. Ebből következik, hogy $ty + (1 - t)\frac{1}{2}e_0 = \frac{1}{2}(1 - \| tx\|)e_0 + S(tx) = g(tx)$, tehát ha $y \in \operatorname{ran} g$, akkor $[\frac{1}{2}e_0, y] \subsetneqq \operatorname{ran} g$. Mivel $g\big|_{\partial C} = S\big|_{\partial C}$, ezért $\operatorname{ran} g \supseteq \{\| x\| = 1\}$. Következésképpen $\operatorname{ran} g \supseteq \bigcup\limits_{\| y\|=1} [\frac{1}{2}e_0, y] = C$.

g injektív, mert $g(x) = g(y)$ esetén $S(x - y) = \frac{1}{2}(\| x\| - \| y\|)e_0$ áll fenn, amiből S invertálhatósága folytán

$$x - y = \frac{1}{2}(\| x\| - \| y\|)e_{-1}, \tag{1.3}$$

tehát x és y legfeljebb a -1-edik koordinátában térhetnek el egymástól. (1.3) miatt igaz az $\| x-y\| = \big|\| x\|-\| y\|\big|$ egyenlőség is, ami viszont pontosan akkor teljesül, ha $y = rx$ valamely $r \in [0, +\infty)$-re. Ezért ha $x \neq y$, akkor $x = \lambda e_{-1}$ és $y = r\lambda e_{-1}$ valamely $\lambda \in \mathbb{F}$-re. Ebből és (1.3)-ból $\lambda e_{-1} - r\lambda e_{-1} = \frac{1}{2}(| \lambda| - |r\lambda|)e_{-1}$, amiből $\lambda(1 - r) = \frac{1}{2}| \lambda|(1 - r)$ adódik. Ez az egyenlőség csak $r = 1$ vagy $\lambda = 0$ esetén teljesülhet, azonban ez jelen esetben lehetetlen.

Létezik tehát $g^{-1} : C \longrightarrow C$, amely g-hez hasonlóan Lipschitz-folytonos. Legyen ugyanis $x \in C$; ekkor $x = (g\circ g^{-1})(x) = \frac{1}{2}(1-\| g^{-1}(x)\|)e_0+S(g^{-1}(x))$, amiből $g^{-1}(x) = S^{-1}(x - \frac{1}{2}(1 - \| g^{-1}(x)\|)e_0)$. Ezért $x, y \in C$-re fennáll, hogy $\| g^{-1}(x) - g^{-1}(y)\| \leq \| S^{-1}\|\| (x - y) + \frac{1}{2}(\| g^{-1}(x)\| - \| g^{-1}(y)\|)e_0\| \leq \| x - y\| + \frac{1}{2}\big|\| g^{-1}(x)\| - \| g^{-1}(y)\|\big| \leq \| x - y\| + \frac{1}{2}\| g^{-1}(x) - g^{-1}(y)\|$, amiből $\| g^{-1}(x) - g^{-1}(y)\| \leq 2\| x - y\|$.

A g függvénynek nincs fixpontja, mert $x = g(x) = \frac{1}{2}(1 - \| x\|)e_0 + Sx$-ből az következne, hogy Sx és x csak a 0. koordinátában különböznek. Ekkor viszont $x_0 = (Sx)_1 = x_1 = (Sx)_2 = x_2 = \ldots$ és $x_{-1} = (Sx)_{-1} = x_{-2} = (Sx)_{-2} = \ldots$ teljesül. Így az x sorozat csak akkor lehet $\ell^2(\mathbb{Z})$-ben, ha $x = \mathbf{0}$. Azonban $\mathbf{0}$ nem fixpontja g-nek: $g(\mathbf{0}) = \frac{1}{2}e_0$.

1.2.3. Példa. A c_0 téren tekintsük a

$$T : c_0 \longrightarrow c_0 \qquad T(x_1, x_2, \dots) := (1, x_1, x_2, \dots)$$

leképezést. Ekkor nyilván $T\big|_{B(\mathbf{0},1)} : B(\mathbf{0}, 1) \longrightarrow \partial B(\mathbf{0}, 1)$, valamint T izometrikus, hiszen $\|\, T(x_1, x_2, \dots) - T(y_1, y_2, \dots)\| = \|\,(0, x_1, x_2, \dots) - (0, y_1, y_2, \dots)\|$, és nincs fixpontja. Ellenkező esetben az $(x_1, x_2, \dots) = (1, x_1, x_2, \dots)$ egyenlőségből következne, hogy $x_j = 1$ $(j = 1, 2, \dots)$, vagyis a konstans $\mathbf{1}$ sorozat benne lenne a c_0 térben.

A fentiekből látható, hogy nagyon erős tulajdonságokkal (Banach téren izometrikus, Hilbert téren Lipschitz-folytonos, amelynek az inverze is ilyen) rendelkező függvények is lehetnek fixpontmentesek. Ezért szigorúbb feltételeket kell megkövetelnünk, ha általánosítani szeretnénk Brouwer tételét.

2. fejezet

Fixpontok végtelen dimenzióban

Ez a fejezet ma már klasszikusnak mondható, folytonos függvényekkel kapcsolatos általánosításokat tárgyal, de modernebb eredmények is szóba kerülnek. Topologikus vektorterek részhalmazain értelmezett leképezésekkel foglalkozunk, a legtöbb esetben lokálisan konvex vagy Banach térre szorítkozva. Azt vizsgáljuk meg három függvénycsalád esetében, milyen feltételek mellett lesz fixpontja az adott leképezésnek. Bizonyos esetekben több függvény közös fixpontjának létezését is kimondhatjuk; ez a tény fontos szerepet kap a negyedik fejezetben. Végül a kapott eredmények segítségével világossá tesszük, hogy Brouwer tétele végtelen dimenzióban milyen mértékben érvényes.

2.1. Nemexpanzív függvények

A Banach féle fixpont-tétel szerint teljes metrikus téren értelmezett kontrakciónak létezik egyértelmű fixpontja. Az 1.2.3. Példa azonban mutatja, hogy korlátos, konvex, zárt halmazon értelmezett, 1 Lipschitz-konstansú függvény nem rendelkezik feltétlenül fixponttal. Ebben a szakaszban azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy igaz-e ez minden Banach térre. Kiderül, hogy vannak a Banach tereknek olyan osztályai (például $p \in (1, \infty)$-re az $\mathcal{L}_p$ terek), melyekre pozitív válasz adható.

2.1.1. Definíció. Legyen (M, ϱ) metrikus tér. Egy $f : X \longrightarrow X$ függvény nemexpanzív, ha tetszőleges $x, y \in X$-re $\varrho(f(x), f(y)) \leq \varrho(x, y)$ teljesül.

2.1.2. Definíció. Egy X normált tér egyenletesen konvex, ha minden $\varepsilon \in (0, 2]$-höz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha $x_1, x_2 \in X$, $\|x_1\| \leq 1$, $\|x_2\| \leq 1$ és $\|x_1 - x_2\| \geq \varepsilon$, akkor $\|\frac{x_1+x_2}{2}\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$.

2.1.3. Példa. $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ triviális példa egyenletesen konvex térre. Legyen ugyanis $z_1, z_2 \in \mathbb{F}$; ekkor $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$-ből $|\frac{z_1+z_2}{2}|^2 \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$ adódik, és így $\delta(\varepsilon) := 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$. Látható egyébként, hogy csak a parallelogramma-azonosságot használtuk fel, ezért tetszőleges Hilbert tér is egyenletesen konvex.

2.1.4. Megjegyzés. A definícióból nyilvánvaló, hogy minden egyenletesen konvex tér szigorúan konvex. Ezért a $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ tér nem egyenletesen konvex, amit az $id_{[0,1]}$ és az $\mathbf{1}$ függvények is mutatnak.

2.1.5. Tétel. *Minden egyenletesen konvex Banach tér reflexív.*

Bizonyítás. Azonosítsuk X-et a $\widehat{\ }: X \longrightarrow X^{**}$ kanonikus beágyazás általi $\widehat{X}$ képével. Elegendő megmutatnunk, hogy minden olyan $z \in X^{**}$, melyre $\|z\| = 1$, benne van X zárt egységgömbjében. Jelölje ezt a gömböt K. Mivel $K^{\circ\circ}$ X^{**} zárt egységgömbje, azért a 0.2.2. Bipoláris tétel miatt z $\sigma(X^{**}, X^*)$, azaz gyenge-* torlódási pontja K-nak. Van tehát olyan $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ K-ban haladó általánosított sorozat, hogy $x_\alpha \to z$ X^{**} gyenge-* topológiája szerint.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és legyen $\delta = \delta(\varepsilon)$ az egyenletes konvexitásból adódó pozitív szám. $\|z\| = 1$ miatt van olyan $u_0 \in X^*$, melyre $\|u_0\| = 1$ és $|z(u_0) - 1| < \frac{\delta}{4}$. A $W_{u_0,\frac{\delta}{4}} = \{y \in X^{**} \,|\, |z(u_0) - y(u_0)| < \frac{\delta}{4}\}$ halmaz z-nek gyenge-* környezete, ezért van olyan $\beta \in A$, hogy ha $\alpha \geq \beta$, akkor $x_\alpha \in W_{u_0,\frac{\delta}{4}}$. Ezekből következik, hogy $\alpha \geq \beta$-ra $|u_0(x_\alpha) - 1| = |\widehat{x_\alpha}(u_0) - 1| < |\widehat{x_\alpha}(u_0) - z(u_0)| + |z(u_0) - 1| < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2}$. Így ha $\alpha_1, \alpha_2 \geq \beta$, akkor

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2}}{2}\right\| \geq \frac{1}{2}|u_0(x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2})| \geq |u_0(x_{\alpha_1})| - \frac{1}{2}|u_0(x_{\alpha_2} - x_{\alpha_1})| >\\ > 1 - |u_0(x_{\alpha_1}) - 1| - \frac{\delta}{2} > 1 - \delta\end{aligned}$$

teljesül. Ezért az egyenletes konvexitás miatt $\|x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}\| \geq \varepsilon$ nem állhat fenn, ami azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\beta \in A$, hogy minden $\alpha_1, \alpha_2 \in A$-ra, melyekre $\alpha_1 \geq \beta$,$\alpha_2 \geq \beta$, $\|x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}\| < \varepsilon$ áll fenn. Tehát $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ általánosított Cauchy sorozat K-ban a normatopológia szerint, és így K teljessége miatt konvergens. Az pedig ismeretes, hogy a gyenge-* határérték nem lehet más, csak a normatopológia szerinti határérték, amiből $z \in K$ adódik. □

2.1.6. Példa. ℓ^1 és ℓ^∞ nem egyenletesen konvex terek, mert nem reflexívek.

2.1.7. Lemma. *Legyen X egyenletesen konvex normált tér, $1 < p < \infty$. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta_p(\varepsilon) > 0$, hogy ha $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ és $\|x - y\| \geq \varepsilon$, akkor*

$$\left\|\frac{1}{2}(x + y)\right\|^p \leq (1 - \delta_p(\varepsilon))\left(\frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}\right). \tag{2.1}$$

Bizonyítás. Elegendő $m = \max\{\|x\|, \|y\|\} = 1$ esetén bizonyítanunk a lemmát, mert általános esetben $\frac{1}{m}x$-re és $\frac{1}{m}y$-ra adódó egyenlőtlenséget m^p-nel szorozva következik (2.1).

Tegyük fel, hogy van olyan ε, amelyhez nem létezik (2.1)-et teljesítő δ_p. Ezek szerint léteznek olyan (x_n), (y_n) sorozatok, melyekre $\|x_n\| = 1$, $\|y_n\| \leq 1$, $\|x_n - y_n\| \geq \varepsilon$, és

$$\frac{\|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\|^p}{\frac{1}{2}(\|x_n\|^p + \|y_n\|^p)} \to 1 \qquad (n \to +\infty) \tag{2.2}$$

Legyen $\delta(\varepsilon)$ az egyenletes konvexitás definíciójában szereplő pozitív szám. Először megmutatjuk, hogy (2.2) csak $\|y_n\| \to 1$ esetén lehetséges. Legyen ugyanis (y_n) olyan sorozat, amelyre $\|y_n\| \leq q < 1$. Ekkor felhasználva az ismert $(\frac{1}{2}(1+c))^p < \frac{1}{2}(1+c^p)$, $(c \in [0, 1))$ egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy valamely $\eta < 1$-gyel

$$\|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\|^p \leq \big(\frac{1}{2}(1 + \|y_n\|)\big)^p \leq \frac{\eta}{2}(1 + \|y_n\|^p) = \frac{\eta}{2}(\|x_n\|^p + \|y_n\|^p)$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}$-re, és így (2.2) nem állhat fenn. Viszont $\|y_n\| \to 1$ esetén (2.2) miatt $\|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\| \to 1$, ami ellentmond az egyenletes konvexitásnak, hiszen $\frac{1}{2}\|x_n + y_n\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$. $\square$

2.1.8. Tétel. *Legyen* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *mértéktér. Ekkor* $1 < p < \infty$*-re az* $X = \mathcal{L}_p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *Banach tér egyenletesen konvex.*

Bizonyítás. Legyen $f, g \in X$, $\|f\|_p \leq 1$, $\|g\|_p \leq 1$, és $\|f - g\| \geq \varepsilon$. Legyen

$$M = \big\{\omega \in \Omega \big| |f(\omega) - g(\omega)|^p \geq \frac{\varepsilon^p}{4}(|f(\omega)|^p + |g(\omega)|^p)\big\}$$

Így $\omega \in M$-re $|f(\omega) - g(\omega)|^p \geq \frac{\varepsilon^p}{4}\max\{|f(\omega)|^p, |g(\omega)|^p\}$. Könnyű látni, hogy $\omega \in M$ esetén a 2.1.7. Lemmából

$$\big|\frac{1}{2}(f(\omega) + g(\omega))\big|^p \leq \big(1 - \delta_p\big(\varepsilon 4^{-\frac{1}{p}}\big)\big)\big(\frac{1}{2}(|f(\omega)|^p + |g(\omega)|^p)\big) \tag{2.3}$$

áll fenn. Valóban, $m := \max\{|f(\omega)|^p, |g(\omega)|^p\} = 0$ esetén triviális, egyébként a lemmát $\frac{f(\omega)}{m}$-re és $\frac{g(\omega)}{m}$-re alkalmazva adódik (2.3), közben felhasználva a 2.1.3. Példát. Legyen $N = \Omega \setminus M$; az M halmaz definíciójából adódóan $\int_N |f - g|^p d\mu \leq \frac{\varepsilon^p}{4}\int_\Omega(|f|^p + |g|^p)d\mu \leq \frac{\varepsilon^p}{2}$. Mivel $\|f - g\|_p \geq \varepsilon$, azért $|f - g|^p$ M-en vett integráljára $\int_M |f - g|^p d\mu \geq \frac{\varepsilon^p}{2}$ teljesül. Ha f_M-mel és g_M-mel jelöljük azt két a függvényt, amelyek M-en megegyeznek f-fel és g-vel, valamint $\Omega \setminus M$-en eltűnnek, akkor az előzőek miatt $\|f_M - g_M\|_p \geq \varepsilon 2^{-\frac{1}{p}}$, és ezért $\max\{\|f_M\|_p, \|g_M\|_p\} \geq \frac{\varepsilon}{2}2^{-\frac{1}{p}}$, azaz

$$\max\big\{\int_M |f|^p d\mu, \int_M |g|^p d\mu\big\} \geq \frac{\varepsilon^p}{2^{p+1}} \tag{2.4}$$

áll fenn. Mindezekből adódik, hogy

$$1 - \int_\Omega \big(\frac{1}{2}|f+g|\big)^p d\mu \geq \int_\Omega \big(\frac{1}{2}(|f|^p + |g|^p) - \big(\frac{1}{2}|f+g|\big)^p\big) d\mu \geq^1$$
$$\geq \int_M \big(\frac{1}{2}(|f|^p + |g|^p) - \big(\frac{1}{2}|f+g|\big)^p\big) d\mu \geq^2 \int_M \delta_p(\varepsilon 4^{-\frac{1}{p}})\big(\frac{1}{2}(|f|^p + |g|^p) d\mu \geq^3$$
$$\geq \delta_p(\varepsilon 4^{-\frac{1}{p}}) \frac{\varepsilon^p}{2^{p+2}},$$

ahol ^{1}: az integrandus a 2.1.7. Lemma miatt μ-majdnem mindenütt nemnegatív; ^{2}: (2.3) átrendezéséből adódik; ^{3}: (2.4) közvetlen alkalmazása. Átrendezve, majd $\frac{1}{p}$-edik hatványra emelve az egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy $\|\frac{1}{2}(f+g)\|_p \leq (1 - \delta_p(\varepsilon 4^{-\frac{1}{p}})\frac{\varepsilon^p}{2^{p+2}})^{\frac{1}{p}} = 1 - (1 - (1 - \delta_p(\varepsilon 4^{-\frac{1}{p}})\frac{\varepsilon^p}{2^{p+2}})^{\frac{1}{p}})$, tehát az egyenletes konvexitás definíciójában ε-hoz $\delta(\varepsilon) = 1 - (1 - \delta_p(\varepsilon 4^{-\frac{1}{p}})\frac{\varepsilon^p}{2^{p+2}})^{\frac{1}{p}}$ megfelel. □

2.1.9. Következmény. *Minden Hilbert tér egyenletesen konvex.*

Bizonyítás. Triviális a 2.1.3. Példa alapján, vagy az előző tételből, hiszen minden Hilbert tér izometrikusan izomorf $\ell^2(\Lambda)$-val valamely Λ-ra. □

2.1.10. Definíció. Legyen X Banach tér, és $D \subseteq X$ konvex halmaz.

(1) Ha D korlátos, akkor $r(D) := \inf\{r > 0 |\ \exists y \in D : D \subseteq \overline{B(y,r)}\}$ a D halmaz minimális sugara.

(2) D szabályos, ha tetszőleges olyan konvex, korlátos és zárt $D_0 \subseteq D$ halmazra, melyre $\mathrm{diam}(D_0) > 0$, fennáll az $r(D_0) < \mathrm{diam}(D_0)$ egyenlőtlenség.

2.1.11. Állítás. *Legyen X egyenletesen konvex Banach tér, $D \subseteq X$ korlátos, konvex, zárt, melyre $\mathrm{diam}(D) > 0$. Ekkor D szabályos.*

Bizonyítás. Legyen $D_0 \subseteq D$ korlátos, konvex, zárt halmaz. Az egyenletes konvexitás miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz és $r > 0$-hoz van olyan $\delta_0 > 0$, hogy ha $\|x\| \leq r$, $\|y\| \leq r$ és $\|x - y\| \geq \varepsilon$, akkor $\|x + y\| \leq 2(r - \delta_0)$. Ugyanis a definícióból adódóan létezik $\delta > 0$, hogy $\|\frac{x}{r} + \frac{y}{r}\| \leq 2(1 - \delta)$, ezért $\delta_0 = r\delta$ megfelel. Legyen $x_0, x_1 \in D_0$, $y := \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$, $\varepsilon := \|x_0 - x_1\|$ és $r := \mathrm{diam}(D_0)$. Ha $x \in D_0$ tetszőleges vektor, akkor $\|2(x-y)\| = \|(x - x_0) + (x - x_1)\| \leq 2(r - \delta_0)$, mert $\|(x - x_0) - (x - x_1)\| = \varepsilon$. Ez pedig azt jelenti, hogy $D_0 \subseteq \overline{B(y, \mathrm{diam}(D_0) - \delta_0)}$, és így $r(D_0) < \mathrm{diam}(D_0)$. □

2.1.12. Tétel. *Legyen X Banach tér, $\emptyset \neq D \subseteq X$ gyengén kompakt, konvex és szabályos. Ha $f : D \longrightarrow D$ nemexpanzív, akkor D-nek létezik fixpontja.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(D)$ azon $C \subseteq D$ nemüres, konvex, zárt halmazok halmazát, melyekre $f(C) \subseteq C$. Ekkor $\mathcal{K}$ nemüres, mert $D \in \mathcal{K}$. Rendezzük $\mathcal{K}$-t a halmazelméleti tartalmazással ellentétesen: $C_1 \leq_{\mathcal{K}} C_2$ pontosan akkor, ha $C_1 \supseteq C_2$; ez nyilván részbenrendezés $\mathcal{K}$-n. Mivel $C \in \mathcal{K}$ gyengén kompakt, konvex, $f(C) \subseteq C$, azért $\mathcal{K}$-beli halmazok tetszőleges metszete is ilyen, valamint nemüres, gyengén kompakt halmazok fogyó sorozatának metszete nemüres, ezért a $(\mathcal{K}, \leq_{\mathcal{K}})$ halmazban minden növő $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ láncnak létezik felső korlátja: $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha$. A Zorn-lemma szerint tehát létezik a tartalmazásra nézve minimális elem $\mathcal{K}$-ban; legyen ez D_0. Ha egypontú halmaz, akkor készen vagyunk.

Tegyük fel, hogy D_0 nem egypontú halmaz; ekkor $\operatorname{diam}(D_0) > 0$. Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges. Legyen $z \in D_0$ tetszőleges, és minden $n \in \mathbb{N}$-re legyen $f_n = \frac{1}{n}z + (1 - \frac{1}{n})f$. Ekkor $f(D_0) \subseteq D_0$, és a D_0 konvexitása miatt $f_n(D_0) \subseteq D_0$ is fennáll. f nemexpanzív, ezért bármely $x, y \in D_0$-ra $\| f_n(x) - f_n(y)\| = \| (1 - \frac{1}{n})(f(x) - f(y))\| \leq (1 - \frac{1}{n})\| x - y\|$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy f_n a D_0 teljes metrikus teret önmagába képező kontrakció, így a Banach-féle fixponttétel miatt létezik egy $x_n \in D_0$ fixpontja. Állítjuk, hogy ekkor minden $x \in D_0$-ra $\| x_n - x\| \to \operatorname{diam}(D_0)$ teljesül, amiből $r(D_0) = \operatorname{diam}(D_0)$ következik, és ez ellentmondásban van D szabályosságával. Tegyük fel, hogy van olyan $x \in D_0$, melyre $r := \liminf_{n\to+\infty} \| x_n - x\| < \operatorname{diam}(D_0)$. Legyenek a gyenge kompaktságból adódóan (x_{k_n}) és $x_0 \in D_0$ olyanok, hogy $\| x_{k_n} - x\| \to r$ és $x_{k_n} \to x_0$ gyengén.

Legyen $D_1 = \{y \in D_0 \,|\, \limsup_{n\to+\infty} \| x_{k_n} - y\| \leq r\} \subseteq D_0$. D_1 nemüres, hiszen $x \in D_1$, valamint konvex, zárt és $f(D_1) \subseteq D_1$. A konvexitás és a zártság nyilvánvaló. Mivel $x_{k_n} = f_{k_n}(x_{k_n}) = \frac{1}{k_n}z + (1 - \frac{1}{k_n})f(x_{k_n})$, azért $\| x_{k_n} - f(x_{k_n})\| \to 0$, így $y \in D_1$-re f nemexpanzivitása miatt

$$\| x_{k_n} - f(y)\| \leq \| x_{k_n} - f(x_{k_n})\| + \| f(x_{k_n}) - f(y)\| \leq \| x_{k_n} - f(x_{k_n})\| + \| x_{k_n} - y\|$$

adódik. Ebből határátmenettel $\limsup_{n\to+\infty} \| x_{k_n} - f(y)\| \leq r$, tehát $f(y) \in D_1$. D_0 minimális olyan konvex, zárt halmaz, melyet f önmagába képez, ezért $D_1 = D_0$. Ezért ha $y \in D_0$ tetszőleges, akkor az (x_n) sorozat $\overline{B(y, r)}$-ban halad, ami konvex és zárt, így az (x_{k_n}) részsorozat x_0 gyenge határértéke is $\overline{B(y, r)}$-nak eleme. Ebből $\| x_0 - y\| \leq r$ következik, és mivel y tetszőleges volt, azért $D_0 \subseteq \overline{B(x_0, r)}$ teljesül.
Tekintsük a $D_2 = \{v \in D_0 \,|\, D_0 \subseteq \overline{B(v, r)}\}$ halmazt, melyre az előzőek miatt $x_0 \in D_2$ teljesül. Indukcióval definiálunk egy D_0-ban haladó, monoton növő, konvex halmazokból álló sorozatot. Legyen $C_1 = \operatorname{conv}(\{x_0\} \bigcup f(\{x_0\}))$. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$-re C_n-et már definiáltuk, és legyen $C_{n+1} = \operatorname{conv}(\{x_0\} \bigcup f(C_n))$. Mivel $f(D_0) \subseteq D_0$, és D_0 konvex, azért $C_n \subseteq D_0$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$-re. Teljes indukcióval belátjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $C_n \subseteq C_{n+1}$. Mivel $C_1 = [x_0, f(x_0)] \subseteq \operatorname{conv}(\{x_0\} \bigcup f([x_0, f(x_0)])) = C_2$, azért $n = 1$ esetén igaz. Legyen $n \geq 2$, és tegyük fel, hogy $C_{n-1} \subseteq C_n$. Ekkor

$C_{n+1} = \mathrm{conv}(\{x_0\} \bigcup f(C_n)) \supseteq \overline{\mathrm{conv}(\{x_0\} \bigcup f(C_{n-1}))} = C_n$, amit bizonyítani akartunk. Ezen tulajdonságok miatt a $D_3 = \overline{(\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n)}$ halmaz konvex, zárt, és D_0 részhalmaza. Mivel $a \in C_n$ esetén $f(a) \in C_{n+1}$, azért f folytonossága miatt $f(D_3) \subseteq D_3$.

Így ismét D_0 minimalitása miatt következik, hogy $D_3 = D_0$. A (C_n) halmazsorozat segítségével indukcióval megmutatjuk, hogy $\mathrm{diam}(D_3) \leq r$, ami ellentmondás, hiszen $r < \mathrm{diam}(D_0)$. $n = 1$ esetén $\mathrm{diam}(C_1) \leq r$, mert $x_0 \in D_2$. Tegyük fel, hogy $\mathrm{diam}(C_n) \leq r$. Ekkor f nemexpanzivitása miatt $\mathrm{diam}(f(C_n)) \leq r$, és így $x_0 \in D_2$ miatt $\mathrm{diam}(\{\{x_0\} \bigcup f(C_n)\}) \leq r$. Ismeretes, hogy normált terekben tetszőleges halmaz konvex burkának az átmérője egyenlő az eredeti halmaz átmérőjével, így $\mathrm{diam}(C_{n+1}) \leq r$. Mivel a (C_n) halmazsorozat monoton növő, és az átmérő hossza a lezárásnál nem növekszik, azért $\mathrm{diam}(D_3) \subseteq r$.

Az előzőekből tehát következik, hogy bármely $x \in D_0$-ra $\lim_{n\to+\infty} \| x_n - x\| = \mathrm{diam}(D_0)$, ez azonben ellentmond D szabályosságának, így $\mathrm{diam}(D_0)$ nem lehet pozitív. □

2.1.13. Következmény. *Legyen X reflexív Banach tér, $\emptyset \neq D \subseteq X$ korlátos, konvex, zárt és szabályos, $f : D \longrightarrow D$ nemexpanzív. Ekkor f-nek van fixpontja.*

Bizonyítás. Mivel minden Banach tér hordós tér, azért a 0.2.3. Tétel szerint D gyengén kompakt, így az előző tétel miatt f-nek van fixpontja. □

2.1.14. Következmény. *Ha $D \neq \emptyset$ korlátos, konvex és zárt halmaz egy X egyenletesen konvex Banach térben (speciálisan: Hilbert térben), és $f : D \longrightarrow D$ nemexpanzív függvény, akkor f-nek van fixpontja.*

Bizonyítás. A 2.1.5. Tétel és a 2.1.11. Állítás következtében X reflexív és D szabályos, tehát az előző következmény adja az állítást. □

Máig megoldatlan probléma, hogy reflexív tér bármely korlátos, konvex, zárt D részhalmazára igaz-e, hogy minden $D \longrightarrow D$ nemexpanzív leképezésnek van fixpontja. Nem reflexív, speciális terek esetére pozitív és negatív eredmények is születtek. A ℓ^1 térben Goebel és Kuczumow [16] mutatott példát a következőkre:

(a) Ha $K \subseteq \ell^1$ konvex, zárt, valamint minden $g : K \longrightarrow K$ nemexpanzív függvénynek van fixpontja, akkor ez egy $K_1 \subseteq K$ konvex és zárt halmazra nem feltétlenül igaz.

(b) Van olyan $K_\infty \subseteq \ell^1$ korlátos, konvex, zárt halmaz, hogy $K_n \to K_\infty$ a Hausdorff tavolságban, minden $n \in \mathbb{N}$-re K_n konvex, zárt, és bármely $g : K_n \longrightarrow K_n$ nemexpanzív függvénynek van fixpontja, és K_∞-re ez nem igaz.

Alspach [15] az $\mathcal{L}_1([0,1],\mathfrak{L},\lambda)$ nem reflexív Banach téren mutatott példát egy D gyengén kompakt, konvex halmazon értelmezett nemexpanzív leképezésre, mely a D halmazt önmagába képezi, és nincs fixpontja. Ennek tükrében igen meglepő Maurey [26] 1981-ben publikált eredménye, amely szerint az $\mathcal{L}_1([0,1],\mathfrak{L},\lambda)$ tér reflexív altereiben elhelyezkedő, korlátos, konvex és zárt D halmazon értelmezett, D-t önmagába képező nemexpanzív függvénynek van fixpontja. Valószínűségelméletet is felhasználó bizonyítása meglehetősen bonyolult.
Maurey egy másik, Hardy terekkel kapcsolatos eredményét is érdemes megemlíteni. Jelölje $\mathfrak{H}_1$ azon egységkörben reguláris $f(z)$ függvények halmazát, melyekre

$$\| f\|_1 = \sup_{0\le r<1} \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | f(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta\Big) < +\infty.$$

Ekkor $(\mathfrak{H}_1, \|\cdot\|_1)$ Banach tér. Maurey komplex függvénytani eszközök felhasználásával megmutatta, hogy ha D gyengén kompakt, konvex részhalmaza $\mathfrak{H}_1$-nek, és $g : D \longrightarrow D$ nemexpanzív, akkor g-nek létezik fixpontja.

A továbbiakban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy egyenletesen konvex Banach térben felcserélhető, nemexpanzív függvények rendszerének milyen feltételek mellett lesz közös fixpontja. Kiderül, hogy létezik egy könnyen ellenőrizhető ekvivalens feltétel. Ehhez először a fixponthalmaz szerkezetét kell megvizsgálnunk.

2.1.15. Tétel. *Legyen X szigorúan konvex normált tér, $K \subseteq X$ konvex, zárt halmaz. Ha $f : K \longrightarrow K$ nemexpanzív függvény, akkor $Fix(f)$ konvex és zárt.*

Bizonyítás. Fix(f) zárt az f folytonossága miatt. A konvexitás belátásához legyen $x, y \in \mathrm{Fix}(f)$, $t \in [0,1]$, és $z := (1-t)x + ty$. Ekkor $\| x - f(z)\| + \| f(z) - y\| = \| f(x)-f(z)\|+\| f(z)-f(y)\| \le \| x-z\|+\| z-y\| = \| x-y\| \le \| x-f(z)\|+\| f(z)-y\|$, azaz $\| x - y\| = \| x - f(z)\| + \| f(z) - y\|$. A szigorú konvexitás miatt következik, hogy $f(z)$ az x és y pontok által meghatározott valós egyenesen helyezkedik el. Az előzőekből igaz az is, hogy $\| x - f(z)\| = \| x - z\|$ és $\| f(z) - y\| = \| z - y\|$, ezért $f(z) \in [x, y]$, amiből $f(z) = z$ következik. □

A tétel nem marad igaz, ha a szigorú konvexitást elhagyjuk. Az is előfordulhat, hogy a fixpontok halmaza nem összefüggő; ezek kiderülnek a következő példákból.

2.1.16. Példa. Tekintsük az $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ Banach teret. Ekkor a $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x,y) := (x, |x|)$ függvény nemexpanzív, és $\mathrm{Fix}(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = |x|\}$, ami nem konvex részhalmaza $\mathbb{R}^2$-nek. Igaz egyébként tetszőleges $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nemexpanzív függvény esetén, hogy a $T(x,y) = (x, f(x))$ egyenlőséggel definiált T leképezés fixponthalmaza az f függvény gráfja.

2.1.17. Példa. A c_0 valós sorozattéren tekintsük a $T : c_0 \longrightarrow c_0$, $T(x_1, x_2, \dots) = (x_1, 1 - |x_1|, x_2, x_3, \dots)$ függvényt, amely nyilvánvalóan nemexpanzív. Ha $(x_1, x_2, \dots)$ fixpontja T-nek, akkor $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ miatt $1 - |x_1| = x_2 = x_3 = \dots = 0$, ezért $\mathrm{Fix}(T) = \{(1, 0, 0, \dots), (-1, 0, 0, \dots)\}$, ami nem összefüggő.

2.1.18. Tétel. *Legyen X egyenletesen konvex Banach tér, $\emptyset \neq D \subseteq X$ korlátos, konvex, zárt, és legyen $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ felcserélhető, nemexpanzív $D \longrightarrow D$ függvények rendszere. Ekkor $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} Fix(f_\lambda) \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. X reflexív Banach tér a 2.1.5. Tétel miatt, így a 0.2.3. Tétel értelmében D gyengén kompakt. $\mathrm{Fix}(f_\lambda)$ minden $\lambda \in \Lambda$-ra a 2.1.15. Tétel következtében konvex és zárt, így a 0.2.4. Mazur tétel miatt gyengén is zárt. Ezért D gyenge kompaktsága miatt elegendő megmutatnunk, hogy a $\mathrm{Fix}(f_\lambda)$ halmazok véges metszetei nemüresek.

Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $f_1, \dots, f_n \in \{f_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ véges sok függvény. Ha $n = 1$, akkor a 2.1.14. Következmény miatt $\mathrm{Fix}(f_1) \neq \emptyset$. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$, és $F = \bigcap_{j=1}^{n-1} \mathrm{Fix}(f_j) \neq \emptyset$. Az F halmaz konvex, korlátos és zárt, hiszen ilyen tulajdonságú halmazok metszete. Ezt a halmazt f_n önmagába képezi: $x \in F$ és $j = 1, \dots, n-1$ esetén $f_j(f_n(x)) = f_n(f_j(x)) = f_n(x)$ a felcserélhetőség miatt. Ezért ismét alkalmazható a 2.1.14. Következmény, így az f_n függvénynek van fixpontja F-ben, ami pontosan azt jelenti, hogy $\bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{Fix}(f_j) \neq \emptyset$.

Megmutattuk tehát, hogy a $\{\mathrm{Fix}(f_\lambda) \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ rendszer centrált, amiből következik, hogy $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Fix}(f_\lambda) \neq \emptyset$. □

2.1.19. Megjegyzés. A tétel nem igaz tetszőleges folytonos függvények rendszerére. Boyce [5] mutatott meglehetősen bonyolult példát olyan $f, g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ folytonos függvényekre, amelyek felcserélhetőek, közös fixpontjuk viszont nincs.

2.1.20. Tétel. *Legyen X egyenletesen konvex Banach tér, $\emptyset \neq D \subseteq X$ konvex és zárt. Legyen $\mathcal{S} = \{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ nemexpanzív $D \longrightarrow D$ függvények kommutatív félcsoportja. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

(i) $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} Fix(f_\lambda) \neq \emptyset$.

(ii) Létezik $x_0 \in D$, melyre az $A = \left\{ f_\lambda(x_0) \,\middle|\, \lambda \in \Lambda \right\}$ halmaz korlátos.

Bizonyítás. *(i)$\Longrightarrow$ (ii)* Triviális, mert ha x_0 egy közös fixpontja az $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ rendszernek, akkor $\{f_\lambda(x_0) \,|\, \lambda \in \Lambda\} = \{x_0\}$, ami korlátos halmaz.

(ii)$\Longrightarrow$ (i) Belátjuk, hogy van olyan $D_0 \subseteq D$ korlátos, konvex és zárt halmaz, hogy minden $\lambda \in \Lambda$-ra $\mathrm{ran}\, f\big|_{D_0} \subseteq D_0$, és így alkalmazhatjuk a 2.1.18. Tételt.

A korlátossága miatt van olyan $r_0 > 0$, hogy minden $\lambda \in \Lambda$ esetén $f_\lambda(x_0) \in \overline{B(x_0, r_0)}$. Legyen $r = 2r_0$, és

$$D_1 := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \bigcap_{\mu\in\Lambda} \overline{B(f_\lambda(f_\mu(x_0)), r)} \bigcap D, \; D_0 := \overline{D_1}.$$

Ekkor tetszőleges $\lambda \in \Lambda$-ra a $D_\lambda = \bigcap_{\mu\in\lambda} \overline{B(f_\lambda(f_\mu(x_0)), r)} \bigcap D$ konvex és zárt részhalmaza $\overline{B(x_0, 2r)}$-nek, és r választása miatt $x_0 \in D_\lambda$. A D_1 halmaz is konvex. Legyen ugyanis $x, y \in D_1$; ekkor $x \in D_\sigma$, $y \in D_\eta$ valamely $\sigma, \eta \in \Lambda$ mellett. $\mathcal{S}$ félcsoport, ezért van olyan $\varrho \in \Lambda$, hogy $f_\sigma \circ f_\eta = f_\varrho$, és így $D_\sigma \subseteq \bigcap_{\mu\in\Lambda} \overline{B((f_\sigma \circ f_\eta \circ f_\mu)(x_0), r)} \bigcap D = D_\varrho$; hasonlóan adódik, hogy $D_\eta \subseteq D_\varrho$. Ez utóbbi halmaz konvex, így $[x, y] \subseteq D_\varrho \subseteq D_1$, tehát D_1 konvex. Azt kell még megmutatnunk, hogy minden $\lambda \in \Lambda$-ra $f_\lambda(D_1) \subseteq D_1$, mert ekkor a folytonosság miatt $f_\lambda(\overline{D_1}) \subseteq \overline{D_1}$. Ha $z \in D_1$, akkor $z \in D_\alpha$ valamely $\alpha \in \Lambda$-ra. Ismét az $\mathcal{S}$ félcsoport volta miatt $f_\lambda \circ f_\alpha = f_\beta$ valamely $\beta \in \Lambda$-ra. Ekkor a nemexpanzivitás miatt $\| f_\lambda(z) - f_\beta(f_\mu(x_0))\| \leq \| z - f_\alpha(f_\mu(x_0))\| \leq r$ teljesül tetszőleges $\mu \in \Lambda$ esetén, amiből következik, hogy $f_\lambda(z) \in D_\beta \subseteq D_1$.

Beláttuk tehát, hogy $\mathcal{S}$ és $D_0 = \overline{D_1}$ teljesítik a 2.1.18. Tétel feltételeit, ezért az $\mathcal{S}$-beli függvényeknek van közös fixpontja. □

2.2. Kompakt leképezések

Ebben a szakaszban tárgyaljuk a Brouwer tétel talán legközismertebb általánosítását, a Schauder-Tyihonov tételt. Ez az eredmény további messzemenő tételek kiindulópontja, mint az kiderül a dolgozat következő szakaszaiból. Mindenekelőtt bevezetjük az alábbi fogalmakat, melyekre az említett tételek támaszkodnak.

2.2.1. Definíció. Legyen X és Y topologikus tér, $f : X \longrightarrow Y$ függvény.

(1) f kompakt, ha f folytonos, valamint $f(X)$-et tartalmazza Y valamely kompakt részhalmaza.

(2) Ha X metrikus tér vagy topologikus vektortér, akkor f-et teljesen folytonosnak mondjuk, ha f folytonos, és bármely X-beli korlátos halmaz képe része Y valamely kompakt részhalmazának.

(3) Ha Y topologikus vektortér, f kompakt és $\dim \mathcal{L}(f(X)) < \infty$, akkor f véges rangú.

Az X-ből Y-ba képező kompakt függvények halmazát jelölje $\mathfrak{K}(X, Y)$.

2.2.2. Megjegyzés. Ha $(Y, \| \cdot \|_Y)$ Banach tér, akkor az $\| f\|_{\mathfrak{K}} = \sup_{x\in X} \| f(x)\|_Y$ normával ellátva $\mathfrak{K}(X, Y)$ Banach tér.

2.2.3. Definíció. Legyen E topologikus vektortér, V egy nullkörnyezet és $A \subseteq E$ tetszőleges halmaz. Egy $g : A \longrightarrow E$ függvény V-fixpontjának nevezünk minden olyan $a \in A$-t, amelyre $g(a) - a \in V$ teljesül.

2.2.4. Állítás. *Legyen A nemüres halmaz az E szeparált topologikus vektortérben, és legyen $\mathfrak{B}$ $\mathbf{0}$-nak egy környezetbázisa E-ben. Ekkor egy $f : A \longrightarrow A$ kompakt leképezésnek pontosan akkor van fixpontja, ha minden $V \in \mathfrak{B}$-re van V-fixpontja.*

Bizonyítás. *(i)* Ha az f függvénynek van fixpontja, akkor ez nyilván minden $V \in \mathfrak{B}$-re V-fixpont is.

(ii) A megfordításhoz tegyük fel, hogy f-nek minden $V \in \mathfrak{B}$-re van egy a_V V-fixpontja. Írányítsuk $\mathfrak{B}$-t a tartalmazással ellentétesen. Ha véges sok a_V adódik, akkor valamely V-re $a_V - f(a_V) = \mathbf{0}$, azaz f-nek van fixpontja. Végtelen sok különböző a_V esetén a szeparáltság miatt $f(a_V) - a_V \to \mathbf{0}$. Az $(f(a_V))_{V\in\mathfrak{B}}$ általánosított sorozatnak létezik egy $a_0 \in \overline{f(A)} \subseteq A$ torlódási pontja $\overline{f(A)}$ kompaktsága miatt; feltehető, hogy már $f(a_V) \to a_0$. $f(a_V) - a_V \to \mathbf{0}$, ezért $a_V \to a_0$, így az f folytonosságából adódik, hogy $f(a_0) = \lim_{V,\mathfrak{B}} f(a_V) = a_0$, azaz a_0 fixpontja f-nek. □

2.2.5. Definíció. Legyen E szeparált, lokálisan konvex tér, $N = \{c_1, \dots, c_n\} \subseteq E$ véges halmaz, és U legyen $\mathbf{0}$-nak konvex, kiegyensúlyozott, nyílt környezete. Legyen $N_U = \bigcup_{j=1}^{n}(c_j + U)$, és jelölje p_U az U nullkörnyezet Minkowski-funkcionálját. Minden $j = 1, \dots, n$-re értelmezzünk egy $\mu_j : N_U \longrightarrow [0,1]$ függvényt a következő módon: $\mu_j(x) := \max\{0, 1 - p_U(x - c_j)\}$. Ekkor az N-hez és U-hoz tartozó Schauder-projekciót következőképpen definiáljuk:

$$\pi_{U,N} : N_U \longrightarrow \operatorname{conv} N \quad ; \quad \pi_{U,N}(x) := \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j(x)} \sum_{j=1}^{n} \mu_j(x) c_j .$$

2.2.6. Megjegyzés. $\pi_{U,N}$ definíciója értelmes. Legyen ugyanis $x \in N_U$, ekkor $x = c_k + u$ valamely k-ra és $u \in U$-ra, ezért $\mu_k(x) = \max\{0, 1 - p_U(u)\}$. Ismeretes, hogy egy U konvex, nyílt nullkörnyezet p_U Minkowski-funkcionáljára fennáll az $U = \{p_U < 1\}$ egyenlőség. Következésképpen $\mu_k(x) = 1 - p_U(u) > 0$, és így $\sum_{j=1}^{n} \mu_j(x) > 0$.

2.2.7. Állítás. *A $\pi_{U,N}$ Schauder-projekcióra teljesülnek a következők:*

(a) $\pi_{U,N} : N_U \longrightarrow \operatorname{conv} N$ *véges rangú leképezés.*

(b) $x - \pi_{U,N}(x) \in U$ *minden* $x \in N_U$ *esetén.*

(c) Ha $N = \{c_1, \dots, c_k, -c_1, \dots, -c_k\}$, *akkor* $\pi_{U,N}(x) = -\pi_{U,N}(-x)$ *teljesül tetszőleges* $x \in N_U$ *esetén.*

Bizonyítás. *(a)* μ_j-k folytonosak, hiszen a p_U Minkowski-funkcionál folytonos, ezért $\pi_{U,N}$ is folytonos. $\pi_{U,N}(N_U) \subseteq \operatorname{conv}(N)$, ez utóbbi halmaz pedig a véges dimenziós $\mathcal{L}(N)$ altér egy korlátos részhalmaza. A szeparáltság miatt a 0.2.1. Tétel alapján az E-ből örökölt topológiával $\mathcal{L}(N)$ teljesen normálható topologikus vektortér, ezért $\overline{\operatorname{conv}}(N)$ kompakt, és így $\pi_{U,N}(N_U)$ is kompakt, tehát $\pi_{U,N}$ véges rangú.

(b) $U = \{p_U < 1\}$ miatt elegendő belátnunk, hogy $p_U(x - \pi_{U,N}(x)) < 1$.

$$p_U(x - \pi_{U,N}(x)) = p_U\Big(\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j(x)} \sum_{j=1}^{n} \mu_j(x)x - \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j(x)} \sum_{j=1}^{n} \mu_j(x)c_j\Big) =$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j(x)} p_U\big(\sum_{j=1}^{n} \mu_j(x)(x - c_j)\big) \leq \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j(x)} \sum_{j=1}^{n} \mu_j(x) p_U(x - c_j) < 1,$$

mert ha $p_U(x - c_j) \geq 1$, akkor $\mu_j(x) = 0$.

(c) Vezessük be a $c_{-j} = -c_j$ jelölést. Ekkor μ_j definíciójából közvetlenül látszik, hogy $\mu_j(x) = \mu_{-j}(-x)$, ebből pedig rögtön adódik az állítás. □

2.2.8. Tétel. (Approximációs tétel) *Legyen X topologikus tér, E szeparált, lokálisan konvex tér, $\emptyset \neq C \subseteq E$ konvex halmaz és $f : X \longrightarrow C$ kompakt függvény. Ekkor a $\mathbf{0}$ bármely konvex, nyílt, kiegyensúlyozott U környezetéhez létezik olyan $N = \{c_1, \ldots, c_n\} \subseteq f(X)$ véges halmaz és $f_U : X \longrightarrow C$ véges rangú leképezés, hogy:*

(a) $f(x) - f_U(x) \in U$ *teljesül tetszőleges* $x \in X$*-re.*

(b) $f_U(X) \subseteq conv(N) \subseteq C$.

Bizonyítás. Az $f(X)$ halmaz C-beli lezárása kompakt, így létezik egy $N = \{c_1, \ldots, c_n\}$ véges halmaz, hogy $f(x) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n}(c_j + U) = N_U$. Definiáljuk az f_U függvényt: $x \in X$-re $f_U(x) := \pi_{U,N}(f(x))$, ahol $\pi_{U,N}$ az N-hez és U-hoz tartozó Schauder-projekció. A 2.2.7. Állításból pedig nyilvánvaló, hogy *(a)* és *(b)* fennáll. □

2.2.9. Tétel. (Schauder-Tyihonov) *Legyen C nemüres, konvex halmaz az E szeparált, lokálisan konvex térben, és legyen $f : C \longrightarrow C$ kompakt függvény. Ekkor f-nek létezik fixpontja.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{B}$ $\mathbf{0}$-nak konvex, nyílt, kiegyensúlyozott halmazokból álló környezetbázisa, a tartalmazással ellentétesen irányítva. A 2.2.4. Állítás miatt elegendő megmutatni, hogy f-nek minden $V \in \mathfrak{B}$-re van V-fixpontja.

f kompaktsága miatt a 2.2.8. Approximációs tétel szerint létezik olyan $N \subseteq f(C)$ véges halmaz és $f_V : C \longrightarrow C$ véges rangú leképezés, hogy $f_V(C) \subseteq \mathrm{conv}(N) \subseteq C$, és minden $x \in C$-re $f(x) - f_V(x) \in V$. Igaz az, hogy $f_V(\mathrm{conv}(N)) \subseteq f_V(C) \subseteq \mathrm{conv}(N)$, tehát a folytonos f_V a kompakt konvex $\mathrm{conv}(N)$ halmazt önmagába képezi, amely az $\mathcal{L}(N)$ véges dimenziós altérben helyezkedik el. Így az 1.1.13. Általánosított Brouwer tétel szerint f_V-nek van egy $x_V \in C$ fixpontja. Ekkor $x_V - f(x_V) = f_V(x_V) - f(x_V) \in V$, tehát f-nek van V-fixpontja. □

2.2.10. Megjegyzés. Az előző tételt normált tér esetén Schauder-tételnek nevezik.

2.2.11. Tétel. (Tyihonov) *Egy E szeparált, lokálisan konvex tér minden nemüres, kompakt, konvex részhalmaza fixpont-tér.*

A 2.2.11. Tyihonov tétel figyelemre méltó általánosítása Brouwer tételének. A következő fejezetben viszont olyan E topologikus vektorterekre is bizonyítjuk a tételt, amelyet E^* topologikus duálisa szétválaszt.

A továbbiakban a leképezések kompaktsága helyett egy gyengébb feltétellel élünk. Következésképpen nem mindig lesz az adott függvénynek fixpontja, viszont ekkor is megállapíthatunk egy nagyon érdekes geometriai tényt. A következő tétel bizonyításának ötlete egyébként megegyezik a 2.1.12. Tételével.

2.2.12. Tétel. (1. Nemlineáris alternatíva) *Legyen U nemüres és nyílt halmaz az (E,τ) kváziteljes, szeparált, lokálisan konvex térben, $f : \overline{U} \longrightarrow E$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy létezik $x_0 \in U$, amellyel U teljesíti az alábbi feltételt:*

$$Ha\ M \subseteq U, \left|M\right| \leq \omega, M \subseteq \overline{conv}(\{x_0\} \bigcup f(M)), akkor\ \overline{M}\ kompakt. \tag{2.5}$$

*Ekkor vagy **(i)** létezik $x \in \partial U$ és $\lambda > 1$, hogy $f(x) - x_0 = \lambda(x - x_0)$, vagy **(ii)** f-nek létezik fixpontja.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy ***(i)*** nem teljesül; azt kell belátnunk, hogy f-nek van fixpontja.

Az általánosság csorbulása nélkül feltehetjük, hogy $\mathbf{0} \in U$, mert áttérhetünk $U - x_0$-ra és $f(x + x_0) - x_0$-ra.

Konstruálunk egy $V \subseteq E$ halmazt, melyre $V = \text{conv}(f(V \bigcap U) \bigcup \{\mathbf{0}\})$, és $W = \overline{V}$ kompakt. Legyen $\Omega_0 = \{\mathbf{0}\}$. Tegyük fel, hogy Ω_n-et már definiáltuk; ekkor $\Omega_{n+1} := \text{conv}(f(\Omega_n \bigcap U) \bigcup \{\mathbf{0}\})$.
Teljes indukcióval belátjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$-ra $\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1}$. Mivel $\{\mathbf{0}\} = \Omega_0 \subseteq \text{conv}(\{\mathbf{0}\} \bigcup f(\{\mathbf{0}\})) = \Omega_1$, ezért $n = 0$ esetén igaz. Legyen $n \geq 1$, és tegyük fel, hogy $\Omega_{n-1} \subseteq \Omega_n$. Ekkor $\Omega_{n+1} = \text{conv}(\{\mathbf{0}\} \bigcup f(\Omega_n \bigcap U)) \supseteq \text{conv}(\{\mathbf{0}\} \bigcup f(\Omega_{n-1} \bigcap U)) = \Omega_n$, amit bizonyítani akartunk.
Minden $n \in \mathbb{N} \bigcup \{\mathbf{0}\}$-ra az Ω_n halmaz szeparábilis. Ugyanis $\Omega_1 = [\mathbf{0}, f(\mathbf{0})]$ része egy véges dimenziós altérnek, ezért szeparábilis, valamint szeparábilis halmazok folytonos képe is az, így $f(\Omega_1 \bigcap U)$ is szeparábilis. Ekkor persze $\Omega_2 = \text{conv}(\{\mathbf{0}\} \bigcup f(\Omega_1 \bigcap U))$ is szeparábilis, amiből már teljesen hasonló módon adódik, hogy Ω_n szeparábilis. Mindezekből következik, hogy minden $n \in \mathbb{N} \bigcup \{\mathbf{0}\}$-ra van olyan $C_n \subseteq \Omega_n$ megszámlálható halmaz, hogy $\overline{C_n} = \overline{\Omega_n \bigcap U}$.
Legyen $V = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \Omega_n$. Mivel az $\{\Omega_n\}$ halmazsorozat monoton növő, kapjuk, hogy $V = \text{conv}(\{\mathbf{0}\} \bigcup f(V \bigcap U))$, amiből az is következik, hogy a $W = \overline{V}$ halmaz konvex és

zárt. $C = \bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n$-re pedig

$$C \subseteq \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n} = \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} (\Omega_n \bigcap U)} \subseteq \overline{V} = \overline{\mathrm{conv}}(\{\mathbf{0}\} \bigcup f(V \bigcap U)) =$$

$$= \overline{\mathrm{conv}}(\{\mathbf{0}\} \bigcup f(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (\Omega_n \bigcap U))) = \overline{\mathrm{conv}}(\{\mathbf{0}\} \bigcup f(C))$$

adódik, ezért C megszámlálható volta és (2.5) következtében $\overline{C}$ kompakt. Ekkor viszont $W = \overline{\mathrm{conv}}(\{\mathbf{0}\} \bigcup f(C))$ is kompakt: $f(C) \subseteq f(\overline{C})$, ami kompakt, ezért a 0.2.5. KREIN tétel miatt $\overline{\mathrm{conv}}(\{\mathbf{0}\} \bigcup f(\overline{C}))$ is kompakt, amelynek W zárt részhalmaza.

Készen vagyunk, ha az f függvénynek van fixpontja ∂U-ban. Ha nincs, akkor (mivel ***(i)*** nem teljesül) minden $x \in \partial U$-ra és $t \in [0,1]$-re kapjuk, hogy $tf(x) \neq x$. Ebből következik, hogy a $\mathbf{0} \in M = \bigcup_{t \in [0,1]} \mathrm{Fix}(tf) \subseteq \overline{U}$ halmazra $M \bigcap \partial U = \emptyset$. Megmutatjuk, hogy az $M \bigcap W$ halmaz kompakt részhalmaza W-nek. Legyen ugyanis $F : [0,1] \times (\overline{U} \bigcap W) \longrightarrow E$ az a függvény, melyre $F(t,x) = tf(x) - x$. F kompakt halmazon értelmezett folytonos leképezés, ezért $F^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ kompakt részhalmaza $[0,1] \times (\overline{U} \bigcap W)$-nek. Az $M \bigcap W$ halmaz nem más, mint az $F^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ kompakt halmaz projekciója $\overline{U} \bigcap W$-be, és ez a projekció folytonos, ezért $M \bigcap W$ kompakt. Mivel E topológiája Hausdorff, azért W az E-ből örökölt topológiával kompakt Hausdorff tér, ezért $M \bigcap W$ zárt halmaz W-ben; ráadásul diszjunkt az $U \bigcap W$ halmaz W-beli $\partial_W(U \bigcap W)$ határától (ami zárt W-ben): $\partial_W(U \bigcap W) \subseteq \partial U \bigcap W$, és ez utóbbi halmaz diszjunkt M-től. Adott tehát két diszjunkt zárt halmaz a kompakt Hausdorff W térben, és mint ismeretes, az ilyen terek normálisak. Ezért az Uriszon-lemma miatt van olyan $\varphi : W \longrightarrow [0,1]$ folytonos függvény, hogy $\varphi(x) = 1$ $M \bigcap W$-n, és $\varphi(x) = 0$ a $\partial_W(U \bigcap W)$ halmazon. Definiáljunk egy $G : W \longrightarrow E$ leképezést a következőképpen:

$$G(x) := \begin{cases} \varphi(x) f(x) & \text{ha } x \in \overline{U \bigcap W}^W \\ \mathbf{0} & \text{ha } x \in W \setminus \overline{U \bigcap W}^W \end{cases}$$

Mivel $\partial_W(\overline{U \bigcap W}) = \partial_W(U \bigcap W)$, és $\varphi = 0$ ezen a halmazon, azért a G függvény folytonos. Továbbá igaz az is, hogy

$$G(W) \subseteq \mathrm{conv}(\{\mathbf{0}\} \bigcup f(\overline{U} \bigcap \overline{V})) \subseteq \overline{\mathrm{conv}}(\{\mathbf{0}\} \bigcup f(U \bigcap V)) = \overline{V} = W,$$

tehát a G folytonos függvény a W konvex és kompakt halmazt önmagába képezi. E topológiája szeparált és lokálisan konvex, ezért a 2.2.11. TYIHONOV tétel következtében G-nek van egy z_0 fixpontja W-ben. Ekkor $z_0 \in \overline{U \bigcap W}$, mert a lehetséges fixpontok $\overline{U \bigcap W}^W$-ban vannak, ez a halmaz pedig része $\overline{U \bigcap W}$-nek. Így $\varphi(z_0) f(z_0) = z_0$, tehát $z_0 \in \mathrm{Fix}(\varphi(z_0) f) \bigcap W$. Ez utóbbi halmaz viszont részhalmaza $M \bigcap W$-nek, ahol $\varphi = 1$. Kapjuk tehát azt, hogy $\varphi(z_0) = 1$, ezért $f(z_0) = z_0$, azaz f-nek van fixpontja. $\square$

2.2.13. Megjegyzés. A tétel igaz Frèchet, speciálisan Banach térre, mert minden Frèchet tér kváziteljes, szeparált és lokálisan konvex.

Ha f kompakt, akkor (2.5) tetszőleges $x_0 \in U$-ra teljesül, mert a 0.2.5. Krein tétel miatt $\overline{\text{conv}}(\{x_0\} \bigcup f(M))$ kompakt.

A következő fejezetben még szó esik egy másik, fixpontokhoz kapcsolódó nemlineáris alternatíváról.

2.2.14. Következmény. *Legyen U korlátos, nyílt halmaz az X Banach térben, melyre $\mathbf{0} \in U$, és legyen $f : \overline{U} \longrightarrow X$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy $x_0 = \mathbf{0}$-val teljesül* (2.5), *és az alábbi feltételek valamelyike fennáll f-re:*

(a) U konvex, $f(\partial U) \subseteq \overline{U}$

(b) $\| f(x) - x\|^2 \geq \| f(x)\|^2 - \| x\|^2$ minden $x \in \partial U$-ra.

(c) Ha $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert tér, akkor $\mathcal{R}\boldsymbol{e}\langle f(x), x\rangle \leq \| x\|^2$ minden $x \in \partial U$-ra.

(d) $\| f(x)\| \leq \| x\|$ $(x \in \partial U)$

Ekkor f-nek létezik fixpontja.

Bizonyítás. Azt látjuk be, hogy ezen feltételek mellett a 2.2.12. Tételbeli **(i)** nem teljesülhet $x_0 = \mathbf{0}$ esetén, azaz $f(x) \neq \lambda x$ minden $\lambda > 1$-re és $x \in \partial U$-ra.

(a) Ha $f(x) = \lambda x$ valamely $x \in \partial U$-ra és $\lambda > 1$-re, akkor a feltétel miatt $\lambda x \in \overline{U}$, azonban ez U konvexitása miatt nem lehetséges.

(b) Tegyük fel, hogy valamely $x \in \partial U$-ra és $\lambda > 1$-re $f(x) = \lambda x$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\| f(x) - x\|^2 &= \| x\|^2 |\lambda - 1|^2 = \\
&= \| x\|^2(\lambda^2 + 1 - 2\lambda) = \\
&= \| x\|^2(\lambda^2 - 1) + \| x\|^2(2 - 2\lambda) = \\
&= (\| f(x)\|^2 - \| x\|^2) + \| x\|^2(2 - 2\lambda) < \| f(x)\|^2 - \| x\|^2,
\end{aligned}$$

mert $x \neq \mathbf{0}$ és $\lambda > 1$. Ez viszont ellentmond a feltételnek.

(c) Ez a feltétel ekvivalens *(b)*-vel:

$$\begin{aligned}
&2\,\mathcal{R}\boldsymbol{e}\,\langle f(x), x\rangle \leq 2\| x\|^2 \Leftrightarrow \\
&0 \leq 2\langle x, x\rangle - 2\,\mathcal{R}\boldsymbol{e}\,\langle f(x), x\rangle \Leftrightarrow \\
&\langle f(x), f(x)\rangle \leq 2\langle x, x\rangle - 2\,\mathcal{R}\boldsymbol{e}\,\langle f(x), x\rangle + \langle f(x), f(x)\rangle \Leftrightarrow \\
&\langle f(x), f(x)\rangle - \langle x, x\rangle \leq \langle f(x) - x, f(x) - x\rangle,
\end{aligned}$$

ami éppen a *(b)*-beli feltétel.

(d) Triviális.

Ezek alapján a 2.2.12. Tétel adja a következmény állítását. □

2.2.15. Tétel. *Legyen E szeparált, lokálisan konvex tér, $D \subseteq E$ konvex zárt, és $f : D \longrightarrow D$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy létezik $x_0 \in D$, amellyel D teljesíti a (2.5) feltételt. Ekkor f-nek létezik fixpontja.*

Bizonyítás. A 2.2.12. Tétel bizonyításához teljesen hasonló módszerrel adódik egy $V = \mathrm{conv}(\{x_0\} \bigcup f(V)) \subseteq D$ halmaz, amelyre $\overline{V} \subseteq D$ kompakt konvex . Ezt a $\overline{V}$ halmazt f önmagába képezi, így a 2.2.11. TYIHONOV tétel miatt van fixpontja. $\square$

A 2.2.15. Tétel Frèchet terek esetén általánosítja a 2.2.11. TYIHONOV tételt. Azonban a (2.5) feltételt tetszőleges folytonos függvényre nem könnyű ellenőrizni. Ezért Banach terekben mutatunk egy olyan egyszerűbben kezelhető függvényosztályt, amely (2.5)-öt automatikusan teljesíti.

2.2.16. Definíció. Legyen X Banach tér. Jelölje $\mathcal{B}$ X korlátos részhalmazainak halmazát. Értelmezzünk két $\mathcal{F}(\mathcal{B}, [0, +\infty))$-beli függvényt a következő módon. Ha $B \in \mathcal{B}$, akkor:

(a) $\alpha(B) := \inf \left\{ \; d > 0 \;\middle|\; \exists (H_j)_{j \in J}, \left|J\right| < \infty, \mathrm{diam}\, H_j \leq d, B \subseteq \bigcup_{j \in J} H_j \; \right\}$

(b) $\beta(B) := \inf \left\{ \; r > 0 \;\middle|\; \exists (B(x_j, r))_{j \in J}, \left|J\right| < \infty, B \subseteq \bigcup_{j \in J} B(x_j, r) \; \right\}$

α a Kuratowski féle, β a gömbi nemkompaktsági mérték.

2.2.17. Állítás. *Legyen X végtelen dimenziós Banach tér, és jelölje $\gamma : \mathcal{B} \longrightarrow [0, +\infty)$ α vagy β valamelyikét. Ekkor γ-nak a következő tulajdonságai vannak:*

(i) $\gamma(B) = 0$ *pontosan akkor, ha* $\overline{B}$ *kompakt.*

(ii) $\gamma(\lambda B) = |\lambda| \gamma(B)$ *teszőleges* $\lambda \in \mathbb{F}$*-re.*

(iii) $\gamma(B_1 + B_2) \leq \gamma(B_1) + \gamma(B_2)$.

(iv) *Ha* $B_1 \subseteq B_2$*, akkor* $\gamma(B_1) \leq \gamma(B_2)$.

(v) $\gamma(B_1 \bigcup B_2) = \max \left\{ \gamma(B_1), \gamma(B_2) \right\}$.

(vi) $\gamma(conv(B)) = \gamma(B)$.

(vii) $\gamma(B) = \gamma(\overline{B})$

(viii) γ *folytonos a* ϱ_H *Hausdorff távolságra nézve.*

Bizonyítás. Az *(i), (ii), (iii), (iv), (v), (vii), (viii)* pontok a definíciókból nyilvánvalóak.

(vi) Elegendő megmutatnunk, hogy $\gamma(\mathrm{conv}(B)) \leq \gamma(B)$, hiszen $B \subseteq \mathrm{conv}(B)$. Legyen $\mu > \gamma(B)$, és $B \subseteq \bigcup_{j=1}^m M_j$, ahol $\gamma = \alpha$ esetén $\mathrm{diam}\, M_j \leq \mu$, $\gamma = \beta$ esetén $M_j = B(x_j, \mu)$.

Mivel $\mathrm{diam}(\mathrm{conv}(M_j)) \leq \mu$, és $B(x_j, \mu)$ konvex, feltehető, hogy M_j is konvex. Nyilvánvalóan igaz, hogy

$$\begin{aligned}\mathrm{conv}(B) &\subseteq \mathrm{conv}\left(M_1 \bigcup \mathrm{conv}(\bigcup_{j=2}^m M_j)\right) \subseteq \\ &\subseteq \mathrm{conv}\left(M_1 \bigcup \mathrm{conv}\left(M_2 \bigcup \mathrm{conv}(\bigcup_{j=3}^m M_j)\right)\right) \subseteq \dots,\end{aligned}$$

ezért *(v)* miatt elegendő megmutatnunk, hogy bármely konvex és korlátos C_1, C_2 esetén $\gamma(\mathrm{conv}(C_1 \bigcup C_2)) \leq \max\{\gamma(C_1), \gamma(C_2)\}$ teljesül.

C_1 és C_2 korlátossága miatt létezik $r > 0$, hogy $\|x\| \leq r$ minden $x \in C_1 - C_2$-re, és könnyű látni, hogy

$$\mathrm{conv}(C_1 \bigcup C_2) \subseteq \bigcup_{t \in [0,1]} (tC_1 + (1-t)C_2). \tag{2.6}$$

Adott $\varepsilon > 0$-hoz $[0,1]$ kompaktsága miatt léteznek olyan $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ számok, hogy $[0,1] \subseteq \bigcup_{k=1}^n B(t_k, \frac{\varepsilon}{r})$, így (2.6)-ból $\mathrm{conv}(C_1 \bigcup C_2) \subseteq \bigcup_{k=1}^n (t_k C_1 + (1-t_k)C_2 + \overline{B(\mathbf{0}, \varepsilon)})$. Ennek alapján *(ii), (iii), (v)* és a nyilvánvaló $\gamma(\overline{B(\mathbf{0}, \varepsilon)}) \leq 2\varepsilon$ felhasználásával

$$\begin{aligned}\gamma(\mathrm{conv}(C_1 \bigcup C_2)) &\leq \max_k \{t_k \gamma(C_1) + (1-t_k)\gamma(C_2)\} + 2\varepsilon \leq \\ &\leq \max\{\gamma(C_1), \gamma(C_2)\} + 2\varepsilon\end{aligned}$$

adódik minden $\varepsilon > 0$-ra, ami bizonyítja *(vi)*-ot. □

2.2.18. Definíció. Legyen X Banach tér, $D \subseteq X$, $f : D \longrightarrow X$ folytonos függvény, és jelölje γ a Kuratowski vagy a gömbi nemkompaktsági mértéket. Ekkor f-et γ-tömörítésnek mondjuk, ha minden $B \subseteq D$ korlátos halmazra, melyre $\gamma(B) > 0$, $\gamma(f(B)) < \gamma(B)$ teljesül.

2.2.19. Tétel. *Legyen X Banach tér, $C \subseteq X$ nemüres, korlátos, konvex, zárt, és $f : C \longrightarrow C$ folytonos γ-tömörítés. Ekkor f-nek létezik fixpontja.*

Bizonyítás. A 2.2.15. Tétel alapján elegendő megmutatnunk, hogy van olyan $x_0 \in C$, amellyel C teljesíti a (2.5) feltételt.

Azt állítjuk, hogy bármely $x_0 \in C$ megfelel. Legyen ugyanis $x_0 \in C$, $M \subseteq C$ megszámlálható, és

$$\overline{M} \subseteq \overline{\text{conv}}(f(M) \bigcup \{x_0\}). \tag{2.7}$$

Azt kell belátnunk, hogy $\overline{M}$ kompakt. Ha $\gamma(\overline{M}) = 0$, akkor a 2.2.17. Állítás *(i)* pontja miatt $\overline{M}$ kompakt. Ha $\gamma(\overline{M}) > 0$, akkor $\gamma(\overline{f(M)}) < \gamma(\overline{M})$, felhasználva, hogy f γ-tömörítés. (2.7)-ből, valamint a 2.2.17. Állítás *(v)* és *(vi)* pontjából viszont az adódik, hogy $\gamma(\overline{M}) \leq \gamma(\overline{\text{conv}}(f(M) \bigcup \{x_0\})) = \gamma(f(M))$, ami ellentmondás. Tehát azt kaptuk, hogy $\overline{M}$ kompakt, amivel bizonyítottuk a tételt. $\square$

2.2.20. Megjegyzés. Kváziteljes, szeparált, lokálisan konvex terekben is értelmezhető a nemkompaktsági mértékhez hasonló fogalom. Ehhez kapcsolódó eredmények találhatóak Reich [34] munkájában.

2.3. Affin transzformációk

A fejezet első részében szó esett nemexpanzív leképezések közös fixpontjairól. A kulcs az volt, hogy egy konvex és zárt halmazon értelmezett nemexpanzív függvény fixponthalmaza konvex és zárt. Egy affin függvény azon tulajdonsága, hogy konvex halmazt konvex halmazba képez, lehetővé teszi, hogy erről a függvénytípusról is hasonló eredményeket kapjunk.

Az alábbiakban a félcsoport- és a csoportművelet a függvénykompozíció, és minden tétel érvényes szeparált, lokálisan konvex térre is a 0.2.6. Szeparációs tétel alapján.

2.3.1. Definíció. Legyen X topologikus tér. Egy $\emptyset \neq \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{F}(X)$ függvénycsalád disztális X-en, ha bármely $x \neq y$, $x, y \in X$-hez létezik X-nek egy $\{V_\alpha | \alpha \in A\}$ nyílt fedése, amelyre teljesül, hogy bármely $T \in \mathfrak{F}$-re $T(y) \notin \bigcup\{V_\alpha | T(x) \in V_\alpha\}$.

2.3.2. Megjegyzés. Az előbbi definíció azt jelenti, hogy az $X \times X$ szorzattérben a $\{(Tx, Ty) | T \in \mathfrak{F}\}$ halmaz a $\{(z, z) | z \in X\}$ átló egy x-től és y-tól függő, $\bigcup\{V_\alpha \times V_\alpha | \alpha \in A\}$ alakú környezetén kívül helyezkedik el. Ez magyarázza a disztális elnevezést.

2.3.3. Definíció. Legyen $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{F}(X)$ függvénycsalád. Egy $Y \subseteq X$ halmaz $\mathfrak{F}$-invariáns, ha $T(Y) \subseteq Y$ teljesül minden $T \in \mathfrak{F}$-re. Y minimális, ha nincs valódi $\mathfrak{F}$-invariáns részhalmaza.

2.3.4. Megjegyzés. Könnyen látható, hogy ha $\mathfrak{F}$ folytonos, affin függvényekből álló félcsoport egy E topologikus vektortéren, és Y_α $\mathfrak{F}$-invariáns halmazok rendszere, akkor $\overline{Y_\alpha}$, $\text{conv}(Y_\alpha)$ és $\bigcap Y_\alpha$ is $\mathfrak{F}$-invariáns halmazok. $\overline{Y_\alpha}$ esetén a folytonosságot kell kihasználni, $\text{conv}(Y_\alpha)$ esetén pedig azt, hogy egy affin függvény a konvex kombinációt konvex kombinációba képezi.

2.3.5. Állítás. *Legyen E szeparált topologikus vektortér, $\emptyset \neq C \subseteq E$ kompakt halmaz, és $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{F}(C)$ folytonos függvények nemüres családja. Ekkor ekvivalens:*

(a) $\mathfrak{F}$ disztális C-n.

(b) Bármely $(T_j)_{j\in J}$ $\mathfrak{F}$-beli általánosított sorozatra és $x, y \in C$, $x \neq y$-ra igaz, hogy ha $T_j(x) \to u \in C$, $T_j(y) \to v \in C$, akkor $u \neq v$.

(c) Tetszőleges $x \neq y$, $x, y \in C$-re $\mathbf{0} \notin \overline{\{T(x) - T(y) | T \in \mathfrak{F}\}}$.

Bizonyítás. (a)$\Longrightarrow$ (b) Legyen $x, y \in C$, $x \neq y$, $T_j(x) \to u$, $T_j(y) \to v$ $(j \in J)$, és $\{V_\alpha | \alpha \in A\}$ nyílt fedése C-nek a 2.3.1. Definícióból adódóan. Tegyük fel, hogy $u = v$ teljesül. Mivel V_α-k lefedik C-t, ezért $u \in V_\beta$ valamely $\beta \in A$-ra. Ehhez a V_β-hoz van olyan $r \in J$, hogy $T_r(x) \in V_\beta$ és $T_r(y) \in V_\beta$, ami ellentmond annak, hogy $\mathfrak{F}$ disztális.

(b)$\Longrightarrow$ (c) Legyen $x, y \in C$, $x \neq y$. Ha *(c)* nem teljesülne, akkor létezne olyan $(T_j)_{j\in J}$ $\mathfrak{F}$-ben haladó általánosított sorozat, hogy $T_j(x) - T_j(y) \to \mathbf{0}$. C kompaktsága miatt feltehető, hogy valamely $u, v \in C$-re $T_j(x) \to u$ és $T_j(y) \to v$. (b) miatt $u \neq v$, ez viszont ellentmondásban van azzal, hogy $T_j(x) - T_j(y) \to \mathbf{0}$.

(c)$\Longrightarrow$ (a) Tegyük fel, hogy $\mathfrak{F}$ nem disztális; létezik tehát olyan $x, y \in C$, $x \neq y$, hogy tetszőleges U nullkörnyezetre a $\{C \bigcap (U + c) | c \in C\}$ nyílt fedéshez van $T_U \in \mathfrak{F}$, melyre $T_U(x), T_U(y) \in U$. $\mathbf{0}$-nak van olyan $\mathfrak{B}$ környezetbázisa, hogy minden $U \in \mathfrak{B}$-re $U = -U$ és $U + U \subseteq U$. Egy ilyen U halmazra az előzőekből az következik, hogy $T_U(x) - T_U(y) \in U - U \subseteq U$. Mivel E Hausdorff tér, ezért $\bigcap_{U\in\mathfrak{B}} = \{\mathbf{0}\}$. Így ha $\mathfrak{B}$-t a tartalmazással ellentétesen irányítjuk, akkor $\lim_{U,\mathfrak{B}} T_U(x) - T_U(y) = \mathbf{0}$, ami ellentmond *(c)*-nek. □

2.3.6. Megjegyzés. A bizonyításból látható, hogy a C halmaz kompaktságát csak *(b)$\Longrightarrow$ (c)* bizonyításánál használtuk fel.

2.3.7. Tétel. *Legyen E olyan topologikus vektortér, melyre E^* szétválaszt E felett, és $\emptyset \neq C \subseteq E$ kompakt, konvex halmaz. Ha $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{F}(C)$ folytonos, affin függvényekből álló félcsoport, amely disztális minden minimális, zárt $\mathfrak{F}$-invariáns halmazon, akkor $\bigcap\limits_{T\in\mathfrak{F}} Fix(T) \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. A bizonyítás ötlete teljesen hasonló a 2.1.12. Tételéhez. Jelölje $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(C)$ a nemüres, $\mathfrak{F}$-invariáns, kompakt, konvex halmazokból álló halmazt. Ekkor $\mathcal{K}$ nemüres, mert $C \in \mathcal{K}$. Rendezzük $\mathcal{K}$-t a halmazelméleti tartalmazással ellentétesen: $K_1 \leq_{\mathcal{K}} K_2$ pontosan akkor, ha $K_1 \supseteq K_2$; ez nyilván részbenrendezés $\mathcal{K}$-n. Mivel kompakt, konvex, $\mathfrak{F}$-invariáns halmazok tetszőleges metszete is ilyen, és nemüres kompakt halmazok fogyó sorozatának metszete nemüres, ezért a $(\mathcal{K}, \leq_{\mathcal{K}})$ halmazban minden növő $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$ láncnak létezik felső korlátja: $\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha$. A Zorn-lemma szerint tehát létezik a tartalmazásra nézve minimális elem $\mathcal{K}$-ban; legyen ez C_0.

Legyen $\mathcal{K}_0$ a C_0-beli nemüres, kompakt, $\mathfrak{F}$-invariáns halmazok rendszere. A Zorn-lemma alkalmazásával az előzőekhez hasonlóan egy minimális nemüres, kompakt, $\mathfrak{F}$-invariáns $Z \subseteq C_0$-t kapunk.

Belátjuk, hogy ez a Z halmaz egyelemű. Tegyük fel, hogy van két különböző pontja Z-nek; legyenek ezek x és y. Mivel $x, y \in C_0$, valamint C_0 konvex és $\mathfrak{F}$-invariáns, ezért $\frac{x+y}{2} \in C_0$, és $A = \{T(\frac{x+y}{2}) | T \in \mathfrak{F}\} \subseteq C_0$. Következésképpen $B := \overline{A} \subseteq C_0$ kompakt halmaz; a 2.3.4. Megjegyzés miatt $\mathfrak{F}$-invariáns, valamint az $\mathfrak{F}$ rendszer affin függvényekből áll, ezért $\overline{\mathrm{conv}}(B) \subseteq C_0$ is $\mathfrak{F}$-invariáns. Így C_0 minimalitásából az következik, hogy $\overline{\mathrm{conv}}(B) = C_0$. E^* szétválaszt E felett, ezért a 0.2.7. Krein-Milman tételből adódik, hogy létezik z extremális pontja C_0-nak, és $z \in B = \overline{A}$, hiszen B kompakt. Ezért van olyan $(T_j(\frac{x+y}{2}))_{j \in J}$ A-ban haladó általánosított sorozat, hogy $T_j(\frac{x+y}{2}))_{j \in J} \to z$. Mivel Z $\mathfrak{F}$-invariáns, azért $T_j(x)$ és $T_j(y)$ a kompakt Z halmaz elemei minden $j \in J$-re. A kompaktság miatt létezik $(T_j(x))_{j \in J}$-nek és $(T_j(y))_{j \in J}$-nak torlódási pontja; feltehető, hogy már $T_j(x) \to u \in Z$ és $T_j(y) \to v \in Z$. Ebből $z = \lim_{j,J} \frac{1}{2}(T_j(x) + T_j(y)) = \frac{u+v}{2}$, azonban z extremális pont, ezért $u = v = z$. Ez viszont ellentmond a 2.3.5. Állítás *(b)* részének, hiszen $\mathfrak{F}$ disztális C_0-on a feltételek szerint. Kaptuk tehát, hogy Z egyelemű, ami közös fixpontja az $\mathfrak{F}$-beli függvényeknek. □

2.3.8. Következmény. (Hahn) *Legyen E topologikus vektortér, E^* szétválasztó E felett, $C \subseteq E$ nemüres, kompakt, konvex halmaz. Ha $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{F}(C)$ folytonos, affin függvények félcsoportja, amely disztális C-n, akkor $\bigcap_{T \in \mathfrak{F}} Fix(T) \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. A 2.3.5. Állítás *(b)* pontjából látható, hogy $\mathfrak{F}$ disztális C minden zárt $\mathfrak{F}$-invariáns részhalmazán, így a minimális halmazokon is, tehát az előző tételt alkalmazva adódik a következmény állítása. □

2.3.9. Tétel. (Ryll-Nardzewski) *Legyen C nemüres, konvex, gyengén kompakt halmaz az (E, τ) szeparált, lokálisan konvex térben, és legyen $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{F}(C)$ gyengén folytonos, affin fügvényekből álló félcsoport. Ha $\mathfrak{F}$ $\tau\big|_C$-disztális a C halmazon, akkor $\bigcap_{T \in \mathfrak{F}} Fix(T) \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy minden $T \in \mathfrak{F}$-re $\mathrm{Fix}(T) \subseteq C$ gyengén zárt, és ezért gyengén kompakt. Elég tehát megmutatnunk, hogy a $\{\mathrm{Fix}(T) | T \in \mathfrak{F}\}$ halmazrendszer centrált.

Legyen tehát $T_1, \ldots, T_n$ véges sok $\mathfrak{F}$-beli függvény, és legyen $\mathfrak{S}$ az általuk generált részfélcsoportja $\mathfrak{F}$-nek. $\mathfrak{S}$ nyilván megszámlálható, és elegendő azt bizonyítanunk, hogy $\mathfrak{S}$ elemeinek van közös fixpontja.

Legyen $c_0 \in C$, és tekintsük a $Q := \overline{\mathrm{conv}}(\{T(c_0) | T \in \mathfrak{S}\}) \subseteq C$ halmazt (a 0.2.4. Mazur tétel értelmében mindegy, hogy τ szerinti vagy gyenge lezárást veszünk). Az $\mathfrak{S}$ megszámlálható volta miatt Q τ-szeparábilis, valamint gyengén zárt részhalmaza a C gyengén kompakt halmaznak, tehát maga is gyengén kompakt. Mivel minden $T \in \mathfrak{S}$ affin függvény, ezért a 2.3.4. Megjegyzés értelmében Q $\mathfrak{S}$-invariáns is.

Bizonyítjuk, hogy Q-ban van közös fixpontja az $\mathfrak{S}$-beli leképezéseknek. Az (E, τ) szeparált, lokálisan konvex tér gyenge topológiája is Hausdorff és lokálisan konvex, tehát a gyengén folytonos lineáris funkcionálok halmaza (amely egyébként azonos a τ-folytonos lineáris funkcionálok halmazával) a 0.2.6. Szeparációs tétel miatt szétválasztó E felett. Így a 2.3.7. Tétel alapján készen leszünk, ha megmutatjuk, hogy $\mathfrak{S}$ gyengén disztális minden minimális, gyengén zárt $\mathfrak{S}$-invariáns $Z \subseteq Q$ halmazon.

Legyenek $x, y \in Z$ különböző pontok. Mivel $\mathfrak{F}$ $\tau\big|_C$ disztális C-n, ezért $\mathfrak{S}$ is az, és Q $\mathfrak{S}$-invarianciája miatt $\mathfrak{S}$ $\tau\big|_Q$-disztális Q-n, és így Z-n is disztális. Legyen x-hez és y-hoz $\{V_\alpha | \alpha \in A\}$ $(Z, \tau\big|_Z)$-beli nyílt halmazok rendszere a 2.3.1. Definíciónak megfelelően. Mivel E lokálisan konvex, azért $\{V_\alpha | \alpha \in A\}$-nak létezik olyan $\mathcal{W} := \{Z \bigcap B_\mu | \mu \in M\}$ nyílt finomítása, hogy minden $\mu \in M$-re B_μ konvex, τ-nyílt halmaz E-ben, és $Z \bigcap \overline{B_\mu} \subseteq V_\alpha$ valamely $\alpha \in A$-ra. A τ-szeparabilitás miatt $\mathcal{W}$-ből kiválasztható egy megszámlálható $\{Z \bigcap B_k | k \in \mathbb{Z}\}$ fedése Z-nek. $\overline{B_k}$ konvex és τ-zárt, így gyengén is zárt, tehát $\{Z \bigcap \overline{B_k} | k \in \mathbb{Z}\}$ egy megszámlálható, gyengén zárt halmazokból álló fedése a gyengén kompakt Z-nek. Felhasználva, hogy minden lokálisan kompakt, Hausdorff tér Baire-féle, kapjuk, hogy valamely $k \in \mathbb{Z}$-re $Z \bigcap B_k$ tartalmaz egy gyengén nyílt U halmazt.

Belátjuk, hogy x-hez és y-hoz $\mathcal{U} = \{T^{-1}(U) | T \in \mathfrak{F}\}$ olyan gyengén nyílt halmazrendszere Z-nek, amely kielégíti a 2.3.1. Definíció követelményeit. Ehhez először megmutatjuk, hogy az $\mathcal{U}$-beli halmazok lefedik Z-t. Ha nem így lenne, akkor $Z \setminus \bigcup \mathcal{U}$ egy gyengén kompakt, valódi részhalmaza lenne Z-nek, amely $\mathfrak{S}$-invariáns. Valóban, ha $x_0 \in Z \setminus \bigcup \mathcal{U}$, és valamely $T_0 \in \mathfrak{S}$-re $T_0(x_0) \in \bigcup \mathcal{U}$, akkor $x_0 \in \{(T \circ T_0)^{-1}(U) | T \in \mathfrak{S}\}$, ami lehetetlen. Tehát $Z \setminus \bigcup \mathcal{U}$ $\mathfrak{S}$-invariáns és gyengén kompakt, így Z minimalitása miatt az üres halmaz. Végül megmutatjuk, hogy bármely $S \in \mathfrak{S}$-re $S(x)$ és $S(y)$ nem tartozhatnak egyazon $T^{-1}(U)$ halmazhoz. Ha nem így lenne, akkor $T(S(x)) \in U$ és $T(S(x)) \in U$ állna fenn. Azonban $U \subseteq Z \bigcap \overline{B_k}$, ez utóbbi halmaz pedig része valamely V_α-nak, tehát $T(S(x)), T(S(y)) \in V_\alpha$. Mivel $\mathfrak{S}$ félcsoport, ez ellentmondana V_α 2.3.1. Definícióban leírt tulajdonságának.

Bizonyítottuk tehát azt, hogy $\mathfrak{S}$ gyengén disztális minden minimális $\mathfrak{S}$-invariáns, gyengén zárt halmazon, amiből a tétel állítása következik. □

Emlékeztetünk arra, hogy egy E topologikus vektortér C részhalmazán ekvifolytonosnak nevezünk egy $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{F}(C)$ függvénycsaládot, ha a $\mathbf{0}$ tetszőleges W környezetéhez van olyan V nullkörnyezet, hogy ha $x, y \in C$ és $x - y \in V$, akkor $T(x) - T(y) \in W$ minden $T \in \mathfrak{F}$ esetén. Triviális, hogy az $\mathfrak{F}$-beli függvények folytonosak C.

2.3.10. Tétel. (Kakutani) *Legyen E topologikus vektortér, E^* szétválasztó E felett, $\emptyset \neq C \subseteq E$ kompakt, konvex halmaz. Ha $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{F}(C)$ affin transzformációkból álló csoport, és $\mathfrak{F}$ ekvifolytonos C-n, akkor $\bigcap\limits_{T \in \mathfrak{F}} Fix(T) \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. A 2.3.8. HAHN-féle következmény alapján elegendő megmutatnunk, hogy $\mathfrak{F}$ disztális C-n. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{F}$ nem disztális C-n. Ebből következik, hogy vannak olyan $x, y \in C$, $x \neq y$ pontok, melyekre teljesül: a $\mathbf{0}$ bármely U környezetéhez van olyan $T_U \in \mathfrak{F}$, hogy $T_U(x)$ és $T_U(y)$ a C $\{(U+c)\bigcap C \,|\, c \in C\}$ nyílt fedésének ugyanazon a halmazában vannak.
Legyen W olyan nullkörnyezet, hogy $y \notin x+W$. Mivel a $\mathbf{0}$ bármely V környezetéhez van olyan U nullkörnyezet, melyre $U - U \subseteq V$, amiből következik, hogy $T_U(x) - T_U(y) \in V$. Így ha a W környezethez az ekvifolytonosságból adódóan megválasztunk egy V nullkörnyezetet, akkor az előzőek miatt azt kapjuk, hogy $F(T_U(x)) - F(T_U(y)) \in W$ minden $F \in \mathfrak{F}$-re. $\mathfrak{F}$ viszont csoport, így $T_U^{-1} \in \mathfrak{F}$, és $T_U^{-1}(T_U(x)) - T_U^{-1}(T_U(y)) = x - y \notin W$, ami ellentmondás. □

2.3.11. Megjegyzés. Érdemes megjegyezni, hogy az eddigi tételek alkalmazásai szeparált, lokálisan konvex terek esetében felhasználják a 0.2.8. HAHN-BANACH tételt, hiszen ezen alapul a 0.2.6. Szeparációs tétel (amit a 2.3.9. RYLL-NARDZEWSKI tétel bizonyítása során is felhasználtunk). A következő, az eddigiektől független tételből viszont levezethető a HAHN-BANACH tétel.

2.3.12. Tétel. (MARKOV-KAKUTANI) *Legyen E szeparált, lokálisan konvex tér, $\emptyset \neq C \subseteq E$ kompakt, konvex halmaz. Ha $\emptyset \neq \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{F}(C)$ folytonos, affin függvények kommutatív családja, akkor $\bigcap\limits_{T \in \mathfrak{F}} Fix(T) \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. A 2.1.15. Tétel bizonyításához teljesen hasonló módon járunk el. A 2.2.11. TYIHONOV tételből következik, hogy $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ tetszőleges $T \in \mathfrak{F}$-re, továbbá $\mathrm{Fix}(T)$ zárt részhalmaza C-nek, és így kompakt, valamint konvex is T affin volta miatt. Tehát C kompaktsága miatt elegendő bizonyítanunk, hogy a $\{\mathrm{Fix}(T) \,|\, T \in \mathfrak{F}\}$ kompakt halmazokból álló rendszer centrált, azaz a halmazok véges metszetei nemüresek. Ezt megmutatjuk n-szerinti teljes indukcióval.
Az $n = 1$ esetet már megvizsgáltuk (TYIHONOV tétel); tegyük fel, hogy $k < n$-re $\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Fix}(T_j) \neq \emptyset$, és legyenek $T_1, \ldots, T_n \in \mathfrak{F}$ tetszőleges függvények. Tekintsük a $K := \bigcap_{j=1}^{n-1} \mathrm{Fix}(T_j)$ halmazt, amely nyilván kompakt és konvex. Ha $x \in K$, akkor bármely $j = 1, \ldots, n-1$-re $T_j(T_n(x)) = T_n(T_j(x)) = T_n(x)$, mert $\mathfrak{F}$ Abel félcsoport. Ez azt mutatja, hogy T_n a K kompakt, konvex halmazt önmagába képezi, ezért a 2.2.11. TYIHONOV tétel miatt van K-ban fixpontja. Ez pontosan azt adja, hogy $\mathrm{Fix}(T_n) \bigcap K = \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{Fix}(T_j) \neq \emptyset$. □

2.3.13. Megjegyzés. A MARKOV-KAKUTANI tétel valóban nem következik a többi, affin függvénnyel kapcsolatos tételből. Legyen ugyanis $C = \{\lambda \in \mathbb{F} \,|\, |\lambda| \leq 1\}$, amely $\mathbb{F}$-nek kompakt, konvex részhalmaza, és valamely $|\alpha| < 1$-re $\mathfrak{F} := \{\alpha^n \, \mathrm{id}_C \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Ekkor $\mathfrak{F}$-re alkalmazható az előző tétel, a korábbiak viszont nem, mert $\mathfrak{F}$ nem disztális C-n $\alpha^n \to 0$ miatt.

2.3.14. Következmény. *E szeparált, lokálisan konvex tér, $\emptyset \neq C \subseteq E$ konvex, zárt. Ha $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{F}(C)$ folytonos, affin leképezések kommutatív félcsoportja, és létezik $T_0 \in \mathfrak{F}$, melyre $\overline{T_0(C)}$ kompakt, akkor $\bigcap_{T \in \mathfrak{F}} Fix(T) \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. A $K := \overline{T_0(C)}$ kompakt, konvex halmaz része C-nek, és $\mathfrak{F}$-invariáns a kommutativitás miatt. Így K-ra és $\mathfrak{F}\big|_K$-ra alkalmazható a 2.3.12. MARKOV-KAKUTANI tétel, amely egy közös fixpont létezését bizonyítja. □

2.4. Fixpont-terek

A fejezet korábbi szakaszaiban speciális tulajdonságú folytonos függvényekkel foglalkoztunk, általános folytonos leképezésekkel nem. Itt, a fejezet utolsó részében lesz róluk szó: az eddig elért eredmények ismeretében vizsgáljuk azt a kérdést, hogy mely normált terek esetében igaz Brouwer tétele. A válasz Klee fixpont-terekre adott jellemzésének következménye.

2.4.1. Definíció. Legyen Y topologikus tér. Egy $R \subseteq Y$ halmaz topologikus sugár, ha a $[0, +\infty)$ intervallum homeomorf képe.

2.4.2. Tétel. *Ha Y normális topologikus tér, és zárt részhalmazként tartalmaz egy R topologikus sugarat, akkor létezik $\tilde{f} : Y \longrightarrow Y$ folytonos leképezés, melynek nincs fixpontja.*

Bizonyítás. Legyen $R = \operatorname{ran} h$, ahol $h : [0, +\infty) \longrightarrow Y$ topologikus beágyazás, és legyen $g : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ olyan folytonos függvény, amelynek nincs fixpontja (például az $\mathrm{id}_{[0,+\infty)} + \mathbf{1}$ függvény ilyen). Ekkor $g \circ h^{-1} : R \longrightarrow [0, +\infty)$ folytonos függvény. Az R halmaz zárt az Y normális térben, ezért Tietze tétele szerint létezik olyan $f : Y \longrightarrow [0, +\infty)$ folytonos függvény, hogy $f\big|_R = g \circ h^{-1}$. Így az $\tilde{f} = h \circ f$ olyan folytonos $Y \longrightarrow Y$ leképezés, amelynek nincs fixpontja. □

2.4.3. Definíció. Egy E topologikus vektortér B részhalmaza teljesen korlátos, ha $\mathbf{0}$ bármely V környezetéhez létezik véges sok $b_1, \ldots, b_n \in B$, hogy $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (b_j + V)$.

2.4.4. Megjegyzés. Metrizálható topologikus vektorterek esetében a teljesen korlátos halmaz fogalma ekvivalens a metrikus terekre bevezetett teljesen korlátos halmaz fogalmával.

2.4.5. Tétel. (KLEE) *Legyen (E, τ) szeparált topologikus vektortér, $C \subseteq E$ konvex halmaz. Tegyük fel, hogy a következő feltételek közül legalább egy teljesül:*

(i) $\mathcal{L}(C)$ *véges dimenziós és* C *nem kompakt.*

(ii) (E,τ) *lokálisan konvex és* C *nem korlátos.*

(iii) (E,τ) *metrizálható, és ha* ϱ *olyan* E *feletti transzláció-invariáns metrika, amely* τ*-t indukálja, akkor* C *nem teljes* ϱ *szerint.*

(iv) (E,τ) *izomorf lokálisan korlátos terek szorzatának egy alterével, és* C *valamely korlátos részhalmaza nem teljesen korlátos.*

(v) C *zárt, lokálisan kompakt és nem korlátos.*

(vi) (E,τ) *lokálisan konvex, metrizálható, és* C *nem kompakt.*

(vii) (E,τ) *lokálisan korlátos, metrizálható és* C *nem kompakt.*

Ekkor C *tartalmaz relatív zárt topologikus sugarat.*

Bizonyítás. (i) C részhalmaza az $\mathcal{L}(C)$ véges dimenziós topologikus vektortérnek, amely a 0.2.1. Tétel szerint teljesen normálható. C nem kompakt, tehát vagy nem zárt, vagy nem korlátos. Ha nem zárt, akkor létezik $z \in \partial C$, hogy $z \notin C$. Van olyan $x \in C$, hogy $[x,z) \subseteq C$; ez zárt részhalmaza C-nek, és nyilván $[0,+\infty)$ homeomorf képe. Ha C zárt és nem korlátos, akkor valamely $x \in C$-re tartalmaz x kezdőpontú, C-ben haladó félegyenest, amely nyilván relatív zárt topologikus sugár.

(ii) Mivel (E,τ) lokálisan konvex tér, azért a 0.2.9. Mackey tétel következtében van olyan valós $l \in (E_{\mathbb{R}},\tau)^*$ folytonos lineáris funkcionál, amelyre $\sup_C l = +\infty$. Legyen $p_1 \in C$ tetszőleges, és minden $n \in \mathbb{N}$-re legyen $p_n \in C$ olyan, amelyre $l(p_n) = l(p_1) + n$. l folytonossága miatt a (p_n) sorozat nem torlódik, ezért az $R = \bigcup_{n=1}^{+\infty}[p_n,p_{n+1}]$ halmaz zárt részhalmaza C-nek. Így R-et a folytonos $l\big|_R$ a linearitás miatt bijektíven képezi a $[l(p_1),+\infty)$ intervallumra, és 0.2.10. Tétel miatt $(l\big|_R)^{-1} : [l(p_1),+\infty) \longrightarrow R$ is folytonos, hiszen $l\big|_R$ is nyílt leképezés. Ezért $R \subseteq C$ relatív zárt topologikus sugár.

(iii) Feltehető, hogy $E \subseteq \widetilde{E}$, ahol $\widetilde{E}$ az E teljesítése. A feltételek miatt létezik $q \in \overline{C}^{\widetilde{E}} \setminus C$, valamint *(i)* miatt feltehető, hogy $\dim \mathcal{L}(C) = \infty$. Legyen $\{U_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ a q egy $\widetilde{E}$-beli környezetbázisa, és minden $n \in \mathbb{N}$-re $U_{n+1} \subseteq U_n$. Indukcióval definiálunk egy $p_n \in C \bigcap U_n$ sorozatot. Legyen $p_1 \in U_1 \bigcap C$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy $p_1,\dots,p_n$ már adott, és legyen $L_n = \mathcal{L}(\{p_1,\dots,p_n\})$. Ez az L_n altér véges dimenziós, így nem tartalmazza C-t, de akkor $C \bigcap U_{n+1}$-et sem. Ezért $(C \bigcap U_{n+1}) \setminus L_n \neq \emptyset$; p_{n+1} legyen ennek a halmaznak egy tetszőleges eleme. A konstrukcióból látható, hogy a $[p_n,p_{n+1}]$ szakaszok a végpontjaikban csatlakoznak egymáshoz, egyéb metszéspontjuk nincs, és a konvexitás miatt C-nek részhalmazai. A (p_n) sorozat $\widetilde{E}$-ban tart q-hoz, ezért E-ben és így C-ben nincs torlódáspontja. Következésképpen az $R = \bigcup_{n=1}^{+\infty}[p_n,p_{n+1}]$ halmaz zárt részhalmaza C-nek, és nyilvánvalóan homeomorf $[0,+\infty)$-nel.

(iv) Legyen $E \subseteq X \times Y$, ahol X lokálisan korlátos tér, Y lokálisan korlátos terek szorzata.
A C-re vonatkozó feltétel miatt van E-ben $\mathbf{0}$-nak egy U környezete és egy $A \subseteq C$ korlátos végtelen halmaz, hogy ha $x, x' \in A$ különböző pontok, akkor $x \notin x' + U$. Legyen ugyanis $F \subseteq A$ nem teljesen korlátos halmaz. Van E-ben $\mathbf{0}$-nak olyan U környezete, hogy ha $F_0 \subseteq F$ véges, akkor létezik $y \in F$, hogy $y \notin \bigcup_{y' \in F_0} y' + U$. Legyen $a_0 \in F$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy $a_1, \ldots, a_n \in F$-et már megadtuk úgy, hogy $a_k \notin a_j + U$, ha $k \neq j, j, k = 0, \ldots, n$. Ekkor van $a_{n+1} \in F \setminus \bigcup_{j=0}^{n} a_j + U$. Így az $A = \{a_j \,|\, j \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}\}$ halmaz megfelel.
Mivel X lokálisan korlátos, létezik egy $Q \subseteq X$ korlátos halmaz, hogy a $V = (Q \times Y) \bigcap E$ halmaz kiegyensúlyozott, zárt környzete $\mathbf{0}$-nak E-ben, valamint $V + V + V + V \subseteq U$. Az A halmaz korlátos, ezért létezik E-ben $\mathbf{0}$-nak egy szimmetrikus $W \subseteq V$ környezete, hogy $A + W \subseteq mV$ valamely $m \in \mathbb{N}$-re.
Elegendő megmutatnunk egy olyan (p_k) A-ban haladó sorozat létezését, hogy ha $L_k = \mathcal{L}(\{p_1, \ldots, p_k\})$, akkor $p_{k+1} + W \bigcap L_k = \emptyset$. Ekkor ugyanis ennek a (p_k) sorozatnak nincs torlódási pontja, ezért $R = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [p_k, p_{k+1}]$ zárt részhalmaza C-nek, és nyilvánvalóan homeomorf $[0, +\infty)$-nel.
Bizonyítjuk, hogy ha $L \subseteq E$ véges dimenziós altér, akkor létezik olyan $x \in A$, hogy $(x + W) \bigcap L = \emptyset$. Legyen $V_L = L \bigcap V$ és $Y_L = L \bigcap (\{\mathbf{0}\} \times Y)$. Legyen M egy kiegészítő altere Y_L-nek L-ben, valamint $J := M \bigcap V_L$. Ekkor nyilván $V_L = J + Y_L$, és J korlátos halmaz a véges dimenziós M-ben, és így teljesen korlátos is. Ezért mJ is teljesen korlátos, tehát létezik egy véges $B \subseteq mJ$, hogy $mV_L \subseteq \bigcup_{b \in B} (b + V_L)$. Ha $x \in A$ olyan, hogy $(x + W) \bigcap L \neq \emptyset$, akkor

$$(x + W) \bigcap L \subseteq (A + W) \bigcap L \subseteq (mV) \bigcap L = mV_L \subseteq \bigcup_{b \in B} (b + V_L)$$

miatt $x + W$ metszete $b + V_L$-lel valamely $b_0 \in B$-re nemüres. Ha $x' \in A$ és $x' \neq x$, akkor $(x' + W) \bigcap (b_0 + V_L) = \emptyset$, mert különben $x - x' \in (W - W + V_L - V_L) \subseteq (V + V + V + V) \subseteq U$ adódna $W \subseteq V$, valamint W és V szimmetrikussága folytán, de ez lehetetlen a bizonyítás elején mondottak szerint. Kaptuk tehát, hogy A két különböző x, x' elemére $x + W$ és $x' + W$ egyszerre nem metszheti L-et. Mivel B véges halmaz, A pedig végtelen, következik, hogy valamely $x \in A$-ra $x + W$ nem metszi az L alteret.

(v) Feltehető, hogy $\mathbf{0} \in C$, hiszen egy $x_0 \in C$-re a $-x_0$ vektorral való eltolás homeomorfizmus, ezért ha $C - x_0$ tartalmaz relatív zárt topologikus sugarat, akkor C is.
C nem korlátos, ezért van a $\mathbf{0}$-nak olyan kiegyensúlyozott U környezete, amely nem nyeli el C-t, így minden $n \in \mathbb{N}$-re $C \nsubseteq nU$. C lokálisan kompakt, van $\mathbf{0}$-nak olyan V környezete E-ben, hogy $V \subseteq U$, és $V \bigcap C$ kompakt. Ekkor a $Q = \partial V \bigcap C$ halmaz is kompakt, $\mathbf{0} \notin Q$, és $C \subseteq [0, +\infty)Q$. C nem korlátos volta miatt így minden $n \in \mathbb{N}$-re

van olyan $q_n \in Q$ és $t_n \in [0, +\infty)$, hogy $t_n q_n \in C \setminus nU$. Megmutatjuk, hogy $t_n \to +\infty$. Ha nem így lenne, akkor a (t_n) valamely (t_{k_n}) részsorozata tart egy $t \in [0, +\infty)$ számhoz. Q kompakt, ezért a (q_{k_n}) sorozatnak van egy $q \in Q$ torlódási pontja. Így t_n és q_n választása folytán tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re az következne, hogy $tq \in C \setminus nU$, ami képtelenség, hiszen $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} nU$. Ezért $t_n \to +\infty$, és mivel C konvex és zárt, valamint $\mathbf{0} \in C$, és (q_n) nem torlódhat $\mathbf{0}$-hoz, kapjuk, hogy ha y valamely torlódási pontja (q_n)-nek, akkor $[0, +\infty)\{y\} \subseteq C$. Ez a halmaz pedig egy relatív zárt topologikus sugár.

(vi) Ha C nem korlátos, akkor *(ii)*-ből adódik az állítás. Ha pedig nem teljes valamely τ-t indukáló transzláció-invariáns metrika szerint, akkor *(iii)*-ból következik. A még bizonyítandó esetben C korlátos, teljes és nem kompakt. Ekkor C nyilván nem teljesen korlátos (E metrizálható, tehát a 2.4.4. Megjegyzés értelmében ez egyértelmű fogalom), hiszen egy teljes és teljesen korlátos metrikus tér kompakt. A 0.2.11. Tétel szerint E izomorf Banach terek szorzatának egy alterével, és mivel minden normált tér lokálisan korlátos, azért *(iv)*-ből következik az állítás.

(vii) Ha C nem teljes valamely τ-t indukáló transzláció-invariáns metrika szerint, akkor *(iii)*-ból adódik az állítás. Ha C-nek van korlátos, de nem teljesen korlátos részhalmaza, akkor *(iv)*-ből következik. A fennmaradó eset az, amikor C teljes, és minden korlátos részhalmaza teljesen korlátos. Maga C nem lehet teljesen korlátos a *(vi)* pontban említettek szerint, így korlátos sem lehet. A teljesség miatt C zárt. E lokális korlátossága miatt C minden pontjának van korlátos, zárt környezete, és ezek C-vel vett metszetei teljesek és teljesen korlátosak, vagyis kompaktak. Ezért C lokálisan kompakt, zárt és nem korlátos, ami a már bizonyított *(v)* pont. □

2.4.6. Tétel. (Klee) *Legyen E lokálisan konvex, metrizálható topologikus vektortér, $\emptyset \neq C \subseteq E$ konvex halmaz. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(i) C kompakt.

(ii) C fixpont-tér.

(iii) Nincs C-ben relatív zárt topologikus sugár.

Bizonyítás. *(i)$\Longrightarrow$(ii)* Ez a már bizonyított 2.2.11. Tyihonov tétel.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) C az örökölt topológiával metrikus tér, ezért normális. Így ha C fixpont-tér, a 2.4.2. Tétel alapján nem tartalmazhat zárt topologikus sugarat.

(iii)$\Longrightarrow$(i) Ha C nem lenne kompakt, akkor Klee előző tételének *(vi)* pontja szerint C-nek tartalmaznia kellene zárt topologikus sugarat. □

2.4.7. Következmény. *Legyen X normált tér. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

(i) Bármely folytonos $f : \overline{B(\mathbf{0}, 1)} \longrightarrow \overline{B(\mathbf{0}, 1)}$ függvénynek létezik fixpontja.

(ii) X véges dimenziós.

Bizonyítás. Az előző tétel alapján egy normált tér konvex részhalmaza pontosan akkor fixpont-tér, ha kompakt. A zárt egységgömb viszont pontosan akkor kompakt Riesz tétele szerint, ha a tér véges dimenziós. □

3. fejezet

Halmazértékű leképezések

Ebben a fejezetben bemutatásra kerülnek a halmazértékű leképezések fixpontelméletének legáltalánosabb tételei. A témakör kiindulópontja a Brouwer-féle fixponttétel, és Neumann János 1928-ban született játékelméleti tétele [32]; ezek az eredmények indították el az elmélet kifejlődését. Alkalmazásaik messze túlnyúlnak a funkcionálanalízisen, szoros kapcsolatban állnak a játék- és optimalizálás-elmélettel is.
A legalapvetőbb tulajdonságok körüljárása után az Ernest Michael által kidolgozott, a topológia szempontjából is fontos szeléselméletet ismertetjük, amely kapcsolatot létesít a folytonos függvények és bizonyos halmazértékű leképezések között; ezeket az összefüggéseket példákkal is illusztráljuk. Végül a nevezetes Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz tétel topologikus vektorterekre általánosított változatának segítségével halmazértékű leképezésekre vonatkozó fixponttételeket bizonyítunk. Ezek egyes alkalmazásait bemutatjuk a negyedik fejezetben.

3.1. Topologikus tulajdonságok

Ebben a részben bevezetjük a folytonos és félig folytonos leképezések fogalmát, majd megvizsgáljuk a leképezések és az alaphalmaz között fennálló kapcsolatokat.

3.1.1. Definíció. Legyenek X, Y és Z tetszőleges topologikus terek. Ekkor egy $\Gamma : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)\setminus\{\emptyset\}$ függvényt halmaz- vagy többértékű leképezésnek nevezünk. További definíciók:

(i) Egy $A \subseteq X$ halmaz képe a $\Gamma(A) = \bigcup_{x\in A} \Gamma(x)$ halmaz.

(ii) $\mathrm{graph}(\Gamma) = \{(x, y) \in X \times Y \,|\, x \in X, y \in \Gamma(x)\}$ a Γ leképezés gráfja.

(iii) A $\Gamma^{-1} : \Gamma(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)\setminus\{\emptyset\}$, $\Gamma^{-1}(y) = \{x \in X \,|\, y \in \Gamma(x)\}$ leképezés a Γ inverze.

Ha $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$ és $\Psi : Y \longrightarrow \mathcal{P}(Z) \setminus \{\emptyset\}$ is halmazértékű függvények, akkor

(iv) Γ és Φ uniója az $x \longmapsto (\Gamma(x) \bigcup \Phi(x))$, metszete az $x \longmapsto (\Gamma(x) \bigcap \Phi(x))$ leképezés.

(v) Γ és Ψ kompozíciója az $x \longmapsto \Psi(\Gamma(x))$ függvény.

(vi) Ha Y topologikus vektortér $\mathbb{F}$ felett, akkor $(\Gamma + \Phi)(x) := \Gamma(x) + \Phi(x)$, és $\lambda \in \mathbb{F}$ esetén $(\lambda\Gamma)(x) := \lambda\Gamma(x)$.

3.1.2. Definíció. Ha X és Y topologikus terek, $\Gamma : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$ halmazértékű leképezés, $x_0 \in X$, akkor Γ

(i) x_0-ban felülről félig folytonos, ha bármely $V \supseteq \Gamma(x_0)$ nyílt halmazhoz létezik olyan $U \ni x_0$ X-beli nyílt halmaz, hogy $\Gamma(U) \subseteq V$.

(ii) x_0-ban alulról félig folytonos, ha bármely $y \in \Gamma(x_0)$ tetszőleges V környezetéhez létezik x_0-nak olyan U környezete, hogy ha $x \in U$, akkor $\Gamma(x) \bigcap V \neq \emptyset$.

(iii) x_0-ban folytonos, ha alulról és felülről félig folytonos x_0-ban.

(iv) felülről félig folytonos, ha minden $x \in X$-ben felülről félig folytonos.

(v) alulról félig folytonos, ha minden $x \in X$-ben alulról félig folytonos.

(vi) folytonos, ha minden $x \in X$-ben folytonos.

(vi) pontonként kompakt, ha minden $x \in X$-re $\Gamma(x)$ kompakt.

(vii) kompakt, ha $\overline{\Gamma(X)}$ Y kompakt részhalmaza.

A későbbiek folyamán sokszor alkalmazzuk a következő állítást.

3.1.3. Állítás. *Ha X és Y topologikus terek, akkor egy $\Gamma : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$ leképezésre a következők teljesülnek:*

(a) Γ pontosan akkor felülről félig folytonos, ha bármely $V \subseteq Y$ nyílt halmazra az $\{x \in X \,|\, \Gamma(x) \subseteq V\}$ halmaz nyílt X-ben, ami pontosan akkor teljesül, ha minden $B \subseteq Y$ zárt halmazra a $\Gamma^{-1}(B) = \{x \in X \,|\, \Gamma(x) \bigcap B \neq \emptyset\}$ halmaz zárt X-ben.

(b) Γ pontosan akkor alulról félig folytonos, ha bármely $B \subseteq Y$ zárt halmazra az $\{x \in X \,|\, \Gamma(x) \subseteq B\}$ halmaz zárt X-ben, ami pontosan akkor teljesül, ha minden $V \subseteq Y$ nyílt halmazra a $\Gamma^{-1}(V) = \{x \in X \,|\, \Gamma(x) \bigcap V \neq \emptyset\}$ halmaz nyílt X-ben.

(c) Ha $f : X \longrightarrow Y$ függvény, $\Gamma(x) = \{f(x)\}$, akkor f pontosan akkor folytonos, ha Γ alulról félig folytonos, ami pontosan akkor teljesül, ha Γ felülről félig folytonos.

Bizonyítás. Nyilvánvaló a félig folytonosság definíciójából, és abból, hogy tetszőleges $V \subseteq Y$ esetén $\{x \in X \,|\, \Gamma(x) \subseteq V\} = \{x \in X \,|\, \Gamma(x) \bigcap V^c \neq \emptyset\}^c$. □

3.1.4. Állítás. *Legyen X és Y topologikus tér, Y T_1, $\Gamma : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$.*

(a) Ha Γ alulról félig folytonos, akkor $\Delta(x) := \overline{\Gamma(x)}$ is alulról félig folytonos.

(b) Ha Γ felülről félig folytonos, és minden $x \in X$-re $int\Gamma(x) \neq \emptyset$, akkor $\Psi(x) := int\Gamma(x)$ is felülről félig folytonos.

(c) Ha Y reguláris, Γ felülről félig folytonos és minden $x \in X$-re $\Gamma(x)$ zárt, akkor $graph(\Gamma)$ zárt.

(d) Ha Γ kompakt és $graph(\Gamma)$ zárt, akkor Γ felülről félig folytonos.

(e) Ha X kompakt, Γ felülről félig folytonos és pontonként kompakt, akkor $\Gamma(X)$ kompakt.

(f) Pontonként kompakt, felülről félig folytonos leképezések kompozíciója, véges uniója, teszőleges metszete felülről félig folytonos és pontonként kompakt.

(g) Alulról félig folytonos leképezések tetszőleges uniója és véges metszete alulról félig folytonos.

Bizonyítás. (a),(b) Nyilvánvaló a 3.1.3. Állításban megfogalmazott ekvivalenciákból.

(c) Legyen $(x_0, y_0) \in \mathrm{graph}(\Gamma)^c$, azaz $y_0 \notin \Gamma(x_0)$. Y reguláris, ezért léteznek olyan Y-beli V_1 és V_2 diszjunkt nyílt halmazok, melyekre $y_0 \in V_1$ és $\Gamma(x_0) \subseteq V_2$. Mivel Γ felülről félig folytonos, azért V_2-höz létezik x_0-nak olyan U nyílt környezete, hogy $\Gamma(U) \subseteq V_2$. Ezért (x_0, y_0) $U \times V_1$ környzete diszjunkt graph(Γ)-tól, amiből következik, hogy graph$(\Gamma)^c$ nyílt.

(d) Legyen $B \subseteq Y$ zárt halmaz. Belátjuk, hogy $\Gamma^{-1}(B)$ X-nek zárt részhalmaza. Legyen $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ $\Gamma^{-1}(B)$-ben haladó konvergens általánosított sorozat, $\lim_{\alpha,A} x_\alpha = x_0 \in X$, és legyen $y_\alpha \in \Gamma(x_\alpha) \bigcap B$. Megmutatjuk, hogy $x_0 \in \Gamma^{-1}(B)$. $\overline{\Gamma(X)}$ kompakt, B zárt, ezért feltehető, hogy $y_\alpha \to y_0 \in \overline{\Gamma(X)} \bigcap B$. Így $(x_\alpha, y_\alpha) \to (x_0, y_0) \in X \times Y$, de akkor Γ gráfjának zártsága miatt $(x_0, y_0) \in \mathrm{graph}(\Gamma)$, azaz $y_0 \in \Gamma(x_0) \bigcap B$, tehát $x_0 \in \Gamma^{-1}(B)$.

(e) Legyen $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ nyílt fedése $\Gamma(X)$-nek. Ha $j \in J$, akkor minden $y \in \Gamma(X) \bigcap V_j$ eleme $\Gamma(x)$-nek valamely $x \in X$-re, ezért Γ felülről félig folytonossága miatt van olyan U_x^j nyílt környezete x-nek, hogy $\Gamma(U_x^j) \subseteq V_j$. Ekkor $X \subseteq \bigcup_{j \in J} \bigcup_{x \in X} U_x^j$, ezért X kompaktsága miatt van egy véges $\mathcal{U} = \{U_{x_k}^{j_l} \,|\, k = 1, \ldots, m; l = 1, \ldots, n; j_l \in J\}$ rendszer amely fedi X-et. Ekkor $\Gamma(X) = \Gamma(\bigcup \mathcal{U}) \subseteq \bigcup_{l=1}^n V_{j_l}$, vagyis a $\{V_{j_l}\}_{l=1}^n$ rendszer $\mathcal{V}$-ből kiválasztott véges fedése $\Gamma(X)$-nek, ami ezért kompakt.

(f) A pontonkénti kompaktság az unióra és a metszetre nyilvánvaló, a kompozíció esete pedig *(e)*-ből következik. Legyen $x_0 \in X$ tetszőleges.
Legyen Z topologikus tér, $\Phi : Y \longrightarrow \mathcal{P}(Z) \setminus \{\emptyset\}$ felülről félig folytonos, és Γ felülről félig folytonos. Legyen $V \subseteq Z$ nyílt, amelyre $\Phi(\Gamma(x_0)) \subseteq V$. Ekkor Φ felülről félig folytonossága miatt minden $y \in \Gamma(x_0)$-nak létezik olyan W_y nyílt környezete, hogy

$\Phi(W_y) \subseteq V$. Az $W = \bigcup_{y \in \Gamma(x_0)} W_y$ nyílt halmazhoz Γ felülről félig folytonossága miatt van x_0-nak olyan U nyílt környezete, hogy $\Gamma(U) \subseteq W$. Ezért $\Phi(\Gamma(U)) \subseteq \Phi(W) \subseteq V$, tehát Φ és Γ kompozíciója tetszőleges $x_0 \in X$-ben felülről félig folytonos.
Elegendő bizonyítanunk két leképezés uniójára, hogy felülről félig folytonos, az általános eset teljes indukcióval adódik. Legyenek $\Gamma_1, \Gamma_2 : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$ felülről félig folytonosak. Legyen $V \subseteq Y$ nyílt, $(\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2)(x_0) \subseteq V$. Ekkor van x_0-nak olyan U_1 és U_2 nyílt környezete a felülről folytonosság miatt, hogy $\Gamma(U_1) \subseteq V$ és $\Gamma_2(U_2) \subseteq V$. Ezért $(\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2)(U) \subseteq V$, ami mutatja, hogy $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ felülről félig folytonos.
Legyen $\Gamma_j : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}, (j \in J)$ felülről félig folytonos leképezések. Legyen $B \subseteq Y$ zárt halmaz. Megmutatjuk, hogy a $D = (\bigcap_{j \in J} \Gamma_j)^{-1}(B)$ zárt halmaz X-ben. Legyen (x_α) D-ben haladó konvergens általánosított sorozat, $x_\alpha \to x_0$. Mivel $(\bigcap_{j \in J} \Gamma_j)^{-1}(B) = \bigcap_{j \in J} \Gamma_j^{-1}(B)$, és minden $j \in J$-re Γ_j felülről félig folytonos, azért $\Gamma_j^{-1}(B)$ zárt, és így $x_0 \in \Gamma_j^{-1}(B)$. Ezért $x_0 \in \bigcap_{j \in J} \Gamma_j^{-1}(B)$, amiből következik, hogy a D halmaz zárt.

(g) Legyenek $\Psi_j : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}, (j \in J)$ alulról félig folytonos leképezések, és legyen $V \subseteq Y$ nyílt. Ekkor $(\bigcup_{j \in J} \Psi_j)^{-1}(V) = \bigcup_{j \in J} \Psi_j^{-1}(V)$ nyílt, mert az alulról félig folytonosság miatt a $\Psi_j^{-1}(V)$ halmazok nyíltak.
A metszet esetét elegendő két leképezésre bizonyítani, mert az általános eset teljes indukcióval egyszerűen adódik. Ha $\Psi_1, \Psi_2 : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$ alulról félig folytonosak, akkor tetszőleges $V \subseteq Y$ nyílt halmazra $(\Psi_1 \bigcap \Psi_2)^{-1}(V) = \Psi_1^{-1}(V) \bigcap \Psi_2^{-1}(V)$ nyílt halmaz. Ezzel a bizonyítást befejeztük. □

3.1.5. Állítás. *Legyen X topologikus tér, E lokálisan konvex tér, $Z \subseteq E$ tetszőleges halmaz, $f : X \longrightarrow E$ folytonos, és $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ alulról félig folytonos. Ekkor:*

(a) $\Gamma : X \longrightarrow \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$; $\Gamma(x) = conv(\Phi(x))$ *alulról félig folytonos.*

(b) $\Psi : X \longrightarrow \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$; $\Psi(x) = f(x) + Z$ *alulról félig folytonos.*

Bizonyítás. (a) Belátjuk, hogy Γ minden $x_0 \in X$-ben alulról félig folytonos. Legyen $x_0 \in X$, $y_0 \in \Gamma(x_0)$, és V egy környezete y-nak, amelyről feltehető, hogy konvex. Ekkor $y_0 = \sum_{j=1}^n t_j y_j$, valamely $t_j \in [0,1]$, számokkal, melyekre $\sum_{j=1}^n t_j = 1$, és $y_j \in \Phi(x_0)$-lal. Mivel Φ alulról félig folytonos, azért $y_j - y_0 + V$-hez x_0-nak létezik olyan U_j $(j = 1, \ldots, n)$ környezete, hogy minden $x \in U_j$ esetén $\Phi(x) \bigcap (y_j - y_0 + V) \neq \emptyset$. Legyen $U = \bigcap_{j=1}^n U_j$. Ekkor $x \in U$ esetén létezik $v_j \in V$, hogy $y_j - y_0 + v_j \in \Phi(x)$, és így $z = \sum_{j=1}^n t_j(y_j - y_0 + v_j) \in \mathrm{conv}(\Phi(x))$. Viszont $\sum_{j=1}^n t_j(y_j - y_0 + v_j) = y_0 - y_0 + \sum_{j=1}^n t_j v_j \in V$, ezért $\mathrm{conv}(\Phi(x)) \bigcap V \neq \emptyset$.

(b) Megmutatjuk, hogy tetszőleges $B \subseteq E$ zárt halmaz esetén a $D = \{x \in X \,|\, \Psi(x) \subseteq B\}$ halmaz zárt. Legyen $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ D-ben haladó konvergens általánosított sorozat, melyre $x_\alpha \to x_0 \in X$. Tegyük fel, hogy $x_0 \notin D$. Ekkor van olyan $z_0 \in Z$, hogy $f(x_0) + z_0 \notin B$. Az f függvény folytonos, ezért $f(x_\alpha) + z_0 \to f(x_0) + z_0$. Ez azt jelenti, hogy $(f(x_\alpha) + z_0)_{\alpha \in A}$ a B zárt halmazban haladó konvergens általánosított sorozat, és így $f(x_0) + z_0 = \lim_{\alpha, A}(f(x_\alpha) + z_0) \in B$, ami ellentmondás. □

3.1.6. Megjegyzés. Az *(a)* pont és a 3.1.4. Állítás *(a)* pontja szerint $\overline{\mathrm{conv}}\Phi$ is alulról félig folytonos.

Kézenfekvő kérdés, hogy milyen (X,τ_X), (Y,τ_Y) topologikus terek és $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$ folytonos leképezés esetén adható meg olyan Υ topológia $\mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$-on, hogy a Φ függvény $\tau_X - \Upsilon$ folytonos legyen. Ehhez a problémához szorosan kötődő témákkal foglalkozik Michael [27] cikke.

A következő állításból kiderül, hogy ha Y metrikus tér, akkor speciális tulajdonságú leképezések folytonossága a Hausdorff-távolsággal áll kapcsolatban.

3.1.7. Állítás. *Legyen (X,τ) topologikus tér, (Y,ϱ) metrikus tér, $D \subseteq X$ és $\Gamma : D \longrightarrow \mathcal{P}(Y)\setminus\{\emptyset\}$ olyan, hogy minden $x \in D$-re $\Gamma(x)$ korlátos és zárt. Jelölje τ_{ϱ_H} az Y korlátos és zárt részhalmazain értelmezett ϱ_H Hausdorff-távolságból származó topológiát. Ekkor a következők igazak:*

(a) *Ha minden $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ D-ben haladó konvergens általánosított sorozatra, melyre $x_\alpha \to x_0 \in D$, $\lim_{\alpha,A} \sup\{\varrho(y,\Gamma(x_\alpha))\,|\,y \in \Gamma(x_0)\} = 0$ teljesül, akkor Γ alulról félig folytonos.*

(b) *Ha Γ felülről félig folytonos, akkor egy $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ D-beli konvergens általánosított sorozatra, melyre $x_0 = \lim_{\alpha,A} x_\alpha \in D$, fennáll, hogy $\lim_{\alpha,A} \sup\{\varrho(y,\Gamma(x_0))\,|\,y \in \Gamma(x_\alpha)\} = 0$.*

(c) *Ha Γ $\tau - \tau_{\varrho_H}$ folytonos, akkor Γ alulról félig folytonos.*

(d) *Ha Γ pontonként kompakt, akkor Γ pontosan akkor folytonos, ha $\tau - \tau_{\varrho_H}$ folytonos.*

Bizonyítás. (a) Tegyük fel, hogy valamely $V \subseteq Y$ nyíltra $\Gamma^{-1}(V)$ nem nyílt D-ben. Ekkor van olyan D-ben konvergens $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ általánosított sorozat, hogy $x_\alpha \to x_0 \in D$, minden $\alpha \in A$-ra $\Gamma(x_\alpha) \bigcap V = \emptyset$, és $\Gamma(x_0) \bigcap V \neq \emptyset$. Legyen $y_0 \in \Gamma(x_0) \bigcap V$, valamint $r > 0$ olyan, hogy $B(y_0, r) \subseteq V$. Ekkor viszont $\Gamma(x_\alpha) \bigcap V = \emptyset$ miatt $\varrho(y_0, \Gamma(x_\alpha)) \geq r$ teljesül minden $\alpha \in A$-ra, ami ellentmond a feltételnek.

(b) Ha $x_\alpha \to x_0$ és $\varepsilon > 0$, akkor Γ felülről félig folytonossága miatt $U = \{x \in D\,|\,\Gamma(x) \subseteq \bigcup_{z\in\Gamma(x_0)} B(z,\varepsilon)\}$ nyílt halmaz D-ben, így egy $\beta \in A$ indextől kezdve $x_\alpha \in U$. Ezért $\Gamma(x_\alpha) \subseteq \bigcup_{z\in\Gamma(x_0)} B(z,\varepsilon)$, ha $\alpha \geq \beta$, amiből $\sup\{\varrho(y,\Gamma(x_0))\,|\,y \in \Gamma(x_\alpha)\} \leq \varepsilon$ adódik. Ezzel a *(b)* pont bizonyított.

(c) A $\tau - \tau_{\varrho_H}$ folytonossággal ekvivalens tulajdonság létezését bizonyítjuk: minden $x_0 \in D$-re igaz, hogy ha $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ D beli általánosított sorozat, $x_\alpha \to x_0$, akkor $\varrho_H(\Gamma(x_\alpha),\Gamma(x_0)) \to 0$. Felírva a Hausdorff-távolság definíciójából adódó

$$\begin{aligned}&\varrho_H(\Gamma(x_\alpha),\Gamma(x_0)) =\\ &= \max\big\{\sup\{\varrho(x,\Gamma(x_0))\,|\,x \in \Gamma(x_\alpha)\}, \sup\{\varrho(x,\Gamma(x_\alpha))\,|\,x \in \Gamma(x_0)\}\big\}\end{aligned}$$

egyenlőséget, az állítás azonnal következik *(a)*-ból.

(d) Tegyük fel, hogy Γ $\tau - \tau_{\varrho_H}$ folytonos. A *(c)* pont miatt elegendő belátnunk, hogy Γ felülről félig folytonos. Legyen $B \subseteq Y$ zárt, $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ $\Gamma^{-1}(B)$-ben haladó, D-ben konvergens általánosított sorozat. Belátjuk, hogy $\lim_{\alpha,A} x_\alpha = x_0 \in \Gamma^{-1}(B)$. Legyen $y_\alpha \in \Gamma(x_\alpha) \bigcap B$; ekkor Γ $\tau - \tau\varrho_H$ folytonossága miatt $\varrho(y_\alpha, \Gamma(x_0)) \to 0$. Ezért létezik olyan (z_α) $\Gamma(x_0)$-beli általánosított sorozat, melyre $\varrho(y_\alpha, z_\alpha) \to 0$. A feltételek szerint $\Gamma(x_0)$ kompakt, így feltehető, hogy $z_\alpha \to y_0 \in \Gamma(x_0)$, ekkor nyilván $y_\alpha \to y_0$. Mivel $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ a B zárt halmazban haladó általánosított sorozat, azért $y_0 \in \Gamma(x_0) \bigcap B$, ami azt jelenti, hogy $x_0 \in \Gamma^{-1}(B)$.
Megfordítva, tegyük fel, hogy Γ alulról és felülről félig folytonos. Megmutatjuk, hogy ha $x_\alpha \to x_0$, akkor $\varrho_H(\Gamma(x_\alpha), \Gamma(x_0)) \to 0$. A *(b)* pont miatt $\sup\{\varrho(y, \Gamma(x_0)) \,|\, y \in \Gamma(x_\alpha)\} \to 0$, ezért a Hausdorff-távolság definíciója miatt elegendő belátnunk, hogy $\sup\{\varrho(y, \Gamma(x_\alpha)) \,|\, y \in \Gamma(x_0)\} \to 0$. Ha ez nem teljesül, akkor létezik $r > 0$ és minden $\alpha \in A$-ra $y_\alpha \in \Gamma(x_0)$, hogy $\varrho(y_\alpha, \Gamma(x_\alpha)) \geq r$. $\Gamma(x_0)$ kompaktsága miatt feltehető, hogy $y_\alpha \to y_0 \in \Gamma(x_0)$. Ekkor egy $\beta \in A$ indextől kezdve $\varrho(y_0, \Gamma(x_\alpha)) > \frac{r}{2}$. Valóban, ha $\beta \in A$ olyan, hogy $\alpha \geq \beta$ esetén $\varrho(y_\alpha, y_0) < \frac{r}{2}$, akkor $r \leq \varrho(y_\alpha, \Gamma(x_\alpha)) \leq \varrho(y_\alpha, y_0) + \varrho(y_0, \Gamma(x_\alpha))$, amiből látható, hogy $\varrho(y_0, \Gamma(x_\alpha)) > \frac{r}{2}$. Ekkor viszont $\alpha \geq \beta$ esetén a $V = B(y_0, \frac{r}{2})$ nyílt halmazra $\Gamma(x_\alpha) \bigcap V = \emptyset$ teljesül, ami $\Gamma(x_0) \bigcap V \neq \emptyset$ miatt azt jelenti, hogy $\Gamma^{-1}(V)$ nem nyílt. Ez viszont ellentmond annak, hogy Γ alulról félig folytonos. □

A következő, gyakorlati alkalmazásokban előforduló példák segítségével rávilágítunk arra, hogy az alulról és a felülről félig folytonosság fogalma még nagyon speciális esetben is független egymástól.

3.1.8. Példa. Legyen X, Y topologikus tér, és $T : X \longrightarrow Y$ szürjektív. Definiáljuk a $\Gamma : Y \longrightarrow \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ leképezést a $\Gamma(y) = T^{-1}(\{y\})$ egyenlőséggel. Mivel tetszőleges $V \subseteq X$ esetén $\Gamma^{-1}(V) = T(V)$, azért látható, hogy $\Gamma = T^{-1}$ pontosan akkor alulról félig folytonos, ha T nyílt leképezés, és pontosan akkor felülről félig folytonos, ha T zárt halmazokat zárt halmazokra képez. Ha X és Y $\mathbb{F}$ feletti Banach terek, és $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, akkor $\operatorname{ran} T = Y$ miatt $T^{-1}(y) = x + \ker T$ valamely $x \in X$-re. Mivel T szürjektív folytonos lineáris operátor, azért Banach nyílt leképezés tétele szerint T nyílt, és így Γ alulról félig folytonos. $T \neq \mathbf{0}_{\mathcal{B}(X,Y)}$ és $\ker T \neq \mathbf{0}_Y$ esetén azonban Γ nem felülről félig folytonos, mert T nem minden zárt halmazt képez zártra. Tekintsük ugyanis $\mathbf{0}_X \neq x_0 \in \ker T$ és $x_1 \notin \ker T$ mellett a $B = \{n x_0 + \frac{1}{n} x_1 \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ zárt halmazt. Ekkor $T(B) = \{\frac{1}{n} T x_1 \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, ami nem zárt, mert $\mathbf{0}_Y \notin T(B)$.

3.1.9. Példa. Legyen X Banach tér, és $\emptyset \neq D \subseteq X$ kompakt. Tetszőleges $x \in X$-re $\Psi(x)$ legyen azon D-beli pontok halmaza, amelyekkel x és D távolsága realizálódik. Ekkor minden Ψ pontonként kompakt, és $\Psi(x)$ konvex, ha D konvex. Ψ felülről félig folytonos, hiszen ha $A \subseteq D$ zárt, és $x_n \to x_0$, melyre $\Psi(x_n) \bigcap A \neq \emptyset$, a kompaktság miatt $\Psi(x_0) \bigcap A \neq \emptyset$. Viszont nem feltétlenül alulról félig folytonos. Legyen $X = \mathbb{R}^2$ a maximum-normával ellátva, és $D := \{(z, |z|) \,|\, z \in [-1, 1]\}$. Ha $(x_n) = (z_n, y_n)$ olyan

$\mathbb{R}^2$-ben haladó sorozat, melyre $\|x_n\| < 1$, $z_n < 0$, $y_n > 0$ és $x_n \to (0,1)$. Ekkor $\Psi(x_n)$ része a $B = \{(z,y) | z \leq 0\}$ zárt halmaznak, azonban $\Psi(0,1) \nsubseteq B$, így Ψ nem alulról félig folytonos.

3.2. Folytonos szelések

Ebben a szakaszban a halmazértékű leképezésekhez kézenfekvően köthető folytonos függvényekkel foglalkozunk, amelyek nélkülözhetetlenek a halmazértékű leképezések fixpontelméletében.

3.2.1. Definíció. Legyen X és Y topologikus tér. Egy $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés folytonos szelése egy olyan $f : X \longrightarrow Y$ folytonos függvény, melyre $f(x) \in \Phi(x)$ teljesül minden $x \in X$ esetén.

3.2.2. Tétel. *Legyen (X, τ) topologikus tér, $(Y, \|\cdot\|)$ szigorúan konvex Banach tér, $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$ olyan folytonos leképezés, hogy minden $x \in X$-re $\Phi(x)$ kompakt és konvex. Ekkor Φ-nek létezik folytonos szelése.*

Bizonyítás. Jelölje ϱ az Y normájából származó metrikát, és legyen $x_0 \in X$ tetszőleges, $p_0 \in \Phi(x_0)$. Ekkor tetszőleges $x \in X$-re $f_{p_0}(x)$ legyen az az egyértelmű $\Phi(x)$-beli pont, amellyel p_0 és $\Phi(x)$ távolsága realizálódik. Ekkor minden $x \in X$-re $f_{p_0}(x) \in \Phi(x)$. Legyen $(z_\alpha)_{\alpha \in A}$ X-ben haladó konvergens általánosított sorozat, $z_\alpha \to z_0$. Mivel Φ folytonos, azért a 3.1.7. Állítás *(d)* pontja szerint $\varrho_H(\Phi(z_\alpha), \Phi(z_0)) \to 0$. Mivel tetszőleges $\alpha \in A$ esetén $\|f_{p_0}(z_\alpha) - f_{p_0}(z_0)\| \leq \operatorname{diam}(\Phi(z_0))\varrho_H(\Phi(z_\alpha), \Phi(z_0))$, f_{p_0} folytonos is. $\square$

3.2.3. Definíció. Legyen X topologikus tér, $\mathcal{U}$ nyílt fedése X-nek.

(a) Egy $Y \subseteq X$ halmaz csillaga az $\mathcal{U}$ fedésre nézve:
$\mathrm{St}(Y, \mathcal{U}) = \bigcup\{U_\alpha | Y \bigcap U_\alpha \neq \emptyset, U_\alpha \in \mathcal{U}\}$.

(b) Egy $\mathcal{V}$ fedés baricentrikus finomítása $\mathcal{U}$-nak, ha az
$\{\mathrm{St}(\{x\}, \mathcal{V})\}_{x \in X}$ rendszer finomítása $\mathcal{U}$-nak.

A következő tétel mutatja, hogy felülről félig folytonos leképezésekhez létezik egy folytonos széléshez „közeli” függvény.

3.2.4. Tétel. (Reich) *Legyen E szeparált topologikus vektortér, $X \subseteq E$ parakompakt halmaz, és $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos félnorma. Legyen továbbá $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ olyan felülről félig folytonos leképezés, hogy minden $x \in X$ esetén $\Phi(x)$ konvex és zárt. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy folytonos $f_\varepsilon : X \longrightarrow conv(\Phi(X))$ függvény, hogy minden $x \in X$-hez létezik olyan $y \in X$ és $z \in \Phi(y)$, melyekre $p(x - y) < \varepsilon$ és $p(f_\varepsilon(x) - z) < \varepsilon$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $z \in E$ esetén $B_p(z,\varepsilon) = \{y \in E \,|\, p(y-z) < \varepsilon\}$, és $x \in X$-re $U_x := \{y \in X \,|\, \Phi(y) \subseteq \Phi(x) + B_p(\mathbf{0},\varepsilon)\}$. Mivel p folytonos és Φ felülről félig folytonos, az $\mathcal{U} = \{U_x \bigcap B_p(x,\varepsilon)\}_{x\in X}$ rendszer nyílt fedése X-nek. X parakompakt, ezért $\mathcal{U}$-nak a 0.2.12. STONE tétel szerint létezik nyílt baricentrikus $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ finomítása. Legyen $\{f_j\}_{j\in J}$ a $\mathcal{V}$-nek alárendelt egységbontás. Minden $j \in J$-re legyen $z_j \in \Phi(V_j)$ tetszőleges, és definiáljuk az $f_\varepsilon : X \longrightarrow \operatorname{conv}(\Phi(X))$ függvényt az $f_\varepsilon(x) = \sum_{j\in J} f_j(x) z_j$ egyenlőséggel.
Legyen $x \in X$ tetszőleges. Mivel $\mathcal{V}$ baricentrikus finomítása $\mathcal{U}$-nak, azért $\bigcup_{j:x\in V_j} V_j \subseteq U_y \bigcap B_p(y,\varepsilon)$ valamely $y \in X$-re, amiből $p(x-y) < \varepsilon$ következik. Ha $f_j(x) \neq \emptyset$, akkor $x \in V_j$. Következésképpen $V_j \subseteq U_y$, és $z_j \in \Phi(y) + B_p(\mathbf{0},\varepsilon)$. $\Phi(y)$ konvex, ezért $f_\varepsilon(x) \in \Phi(y) + B_p(\mathbf{0},\varepsilon)$. Ezért valamely $z \in \Phi(y)$-ra $p(f_\varepsilon(x) - z) < \varepsilon$ következik. □

Ezek után arra a kérdésre keressük a választ, hogy milyen feltételek mellett lesz egy alulról félig folytonos leképezésnek folytonos szelése.

3.2.5. Lemma. *Legyen X parakompakt tér, E topologikus vektortér, és legyen $\Psi : X \longrightarrow \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ olyan alulról félig folytonos leképezés, hogy minden $x \in X$-re $\Psi(x)$ konvex. Ha $V \subseteq E$ $\mathbf{0}$-nak konvex, nyílt környezete, akkor létezik egy folytonos $f : X \longrightarrow E$ függvény, hogy minden $x \in X$-re $f(x) \in (\Psi(x) + V)$.*

Bizonyítás. Legyen tetszőleges $y \in E$-re $U_y = \{x \in X \,|\, y \in (\Psi(x)+V)\} = \{x \in X \,|\, \Psi(x) \bigcap (y - V) \neq \emptyset\}$. Mivel Ψ alulról félig folytonos, azért U_y nyílt halmaz. Az $\mathcal{U} = \{U_y\}_{y\in E}$ rendszer nyílt fedése X-nek, így X parakompaktsága folytán van egy $\mathcal{V}$ lokálisan véges, nyílt finomítása. Ismeretes, hogy létezik $\mathcal{V}$-nek alárendelt $\mathfrak{H} = \{h_\alpha\}_{\alpha\in A}$ egységbontás. Minden $h_\alpha \in \mathfrak{H}$-ra legyen $y(h_\alpha) \in E$ olyan, hogy h_α eltűnik $E \setminus U_{y(h_\alpha)}$-n. Definiáljuk f-et tetszőleges $x \in X$-re az

$$f(x) = \sum_{h_\alpha \in \mathfrak{H}} h_\alpha(x) y(h_\alpha)$$

egyenlőséggel. f nyilvánvalóan folytonos, és ha $h_\alpha(x) \neq 0$, akkor $x \in U_{y(h_\alpha)}$, és így $y(h_\alpha) \in \Psi(x) + V$. $\Psi(x)$ és V konvex halmazok, ezért $\Psi(x) + V$ is az, és előbbi megállapításunk szerint $f(x)$ $\Psi(x) + V$ elemeinek konvex kombinációja, tehát $f(x) \in \Psi(x) + V$. □

3.2.6. Tétel. (MICHAEL) *Legyen X T_1 topologikus tér. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(i) X parakompakt.

(ii) Tetszőleges Y Banach tér esetén bármely alulról félig folytonos $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$ leképezésnek, melyre $\Phi(x)$ konvex és zárt minden $x \in X$-re, van folytonos szelése.

Bizonyítás. *(i)$\Longrightarrow$(ii)* Legyen Y Banach tér, $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$ alulról félig folytonos leképezés, hogy minden $x \in X$-re $\Phi(x)$ konvex és zárt. Legyen $\{V_j\}_{j=1}^{+\infty}$ $\mathbf{0}_Y$ hordókból álló bázisa, melyre $V_{j+1} \subseteq (\frac{1}{2})^j V_j$ teljesül minden $j \in \mathbb{N}$-re. Konstruálunk egy $\{f_j\}_{j=1}^{+\infty} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ függvénysorozatot, melyre teljesül az alábbi két feltétel minden $x \in X$ esetén:

(a) $f_j(x) \in \big(f_{j-1}(x) + 2V_{j-1}\big)$ $\qquad (j = 2, 3, \dots)$

(b) $f_j(x) \in \big(\Phi(x) + V_j\big)$ $\qquad (j = 1, 2, \dots)$

Ezzel bizonyítjuk az állítást, hiszen (a) és a V_j környezetek választása miatt $\{f_j\}_{j=1}^{+\infty}$ egyenletesen Cauchy, ezért Y teljessége miatt egyenletesen konvergál egy $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ függvényhez, és (b) miatt $f(x) \in \Phi(x)$ teljesül minden $x \in X$ esetén.

Indukcióval definiáljuk az $\{f_j\}$ függvénysorozatot. $j = 1$ esetén a 3.2.5. Lemma alapján létezik (b)-t teljesítő f_1 függvény. Tegyük fel, hogy adott $f_1, \dots, f_k$ (a)-t és (b)-t $j = 1, \dots, k$ esetén kielégítő függvények. Megkonstruáljuk f_{k+1}-et. Legyen $\Phi_{k+1}(x) = \Phi(x) \bigcap (f_k(x) + V_k)$; ekkor $\Phi_{k+1}(x) \neq \emptyset$, mert az indukciós feltevés miatt k-ra (b) fennáll, és V_k hordó. A 3.1.5. Állítás *(b)* pontja miatt a $\Psi(x) = f_k(x) + V_k$ leképezés alulról félig folytonos, ezért a 3.1.4. Állítás *(g)* pontjából következik, hogy Φ_{k+1} alulról félig folytonos. A 3.2.5. Lemmát alkalmazva Φ_{k+1}-re és int V_{k+1}-re, adódik egy folytonos $f_{k+1} : X \longrightarrow E$ függvény, amelyre $f_{k+1}(x) \in (\Phi_{k+1}(x) + V_{k+1})$ teljesül minden $x \in X$ esetén. Ebből Φ_{k+1} definíciója és a V_j környezetek tulajdonsága miatt $f_{k+1}(x) \in (f_k(x) + V_k + V_{k+1}) \subseteq (f_k(x) + 2V_k)$ minden $x \in X$ esetén fennáll, ami éppen az (a) követelmény. $\Phi_{k+1}(x) \subseteq \Phi(x)$, ezért $f_{k+1}(x) \in (\Phi(x) + V_{k+1})$, ami mutatja (b)-t, és ezzel megmutattuk a kérdéses függvénysorozat létezését.

(ii)$\Longrightarrow$(i) Tegyük fel, hogy X T_1 tér. Megmutatjuk, hogy *(ii)* teljesülése esetén X parakompakt. Ismeretes, hogy T_1 terek parakompaktsága ekvivalens azzal, hogy a tér bármely $\mathcal{U}$ nyílt fedéséhez létezik a fedésnek alárendelt egységbontás.

Legyen tehát $\mathcal{U}$ nyílt fedése X-nek. Legyen $Y = \ell^1(\mathcal{U})$, és

$$C := \big\{y \in Y \big| y_U \geq 0 \ \forall U \in \mathcal{U}, \sum_{U \in \mathcal{U}} y_U = 1\big\}$$

Nyilvánvaló, hogy C konvex és zárt részhalmaza Y-nak. Tetszőleges $x \in X$ esetén legyen

$$\Phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}; \quad \Phi(x) = C \bigcap \big\{y \in Y \big| y_U = 0 \ \forall x \notin U\big\}.$$

Látható, hogy $\Phi(x)$ nemüres, konvex és zárt részhalmaza Y-nak.

Legyen $y \in C$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $y' \in C$, amelyre $\| y - y' \|_1 < \varepsilon$, $y'_U > 0$ véges sok olyan $U \in \mathcal{U}$-ra, melyekre $y_U > 0$. Legyen ugyanis $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ olyanok, hogy $y_{U_j} > 0$ $j = 1, \dots, n$ esetén, és $\sum_{j=1}^n y_{U_j} = \delta > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. $U \notin \{U_1, \dots U_n\}$ esetén $y'_U := 0$, $y'_{U_1} := y_{U_1} + (1 - \delta)$, és $j = 2, \dots, n$-re $y'_{U_j} := y_{U_j}$. Ekkor $\| y - y' \|_1 \leq 2(1 - \delta) < \varepsilon$, tehát valóban létezik egy kérdéses y'.

Megmutatjuk a 3.1.2. Definíció segítségével, hogy Φ alulról félig folytonos. Legyen $x_0 \in X$, $y \in \Phi(x_0)$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Definiáljuk y-hoz y'-t az előző bekezdésben mondottak szerint, és legyen $U = \bigcap_{j=1}^{n} U_j$. Mivel $y_{U_j} > 0$ $j = 1, \dots, n$-re, azért Φ definíciójából adódik, hogy $x_0 \in U$, és így U környezete x_0-nak. Ismét Φ definíciójából következik, hogy $y' \in \Phi(x')$ minden $x' \in U$-ra. Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges, beláttuk azt, hogy Φ minden $x_0 \in X$-ben alulról félig folytonos.

Ekkor feltevésünk szerint létezik egy $f : X \longrightarrow Y$ folytonos szelése Φ-nek. Tetszőleges $U \in \mathcal{U}$-ra legyen

$$f_U : X \longrightarrow \mathbb{R}; \quad f_U(x) = f(x)_U.$$

C és Φ definícióiból látható, hogy $\{f_U | U \in \mathcal{U}\}$ egységbontás, amely $\mathcal{U}$-nak alárendelt, hiszen minden $U \in \mathcal{U}$ esetén f_U eltűnik az U-n kívül. Ezzel bizonyítottuk a tételt. $\square$

3.2.7. Megjegyzés. A bizonyításból látható, hogy *(i)*$\Longrightarrow$*(ii)* Frèchet terekre is igaz, és itt nem használtuk fel a T_1 tulajdonságot. A későbbiek folyamán mutatunk példát olyan Y normált térre és $\Phi : X \longrightarrow Y$ konvex és zárt értékű, alulról félig folytonos leképezésre, amelynek nincs folytonos szelése.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy nem csak Banach terek esetén állíthatjuk folytonos szelés létezését.

3.2.8. Lemma. *Legyen (X, τ_X) parakompakt tér, (Y, τ_Y) topologikus tér, $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$ alulról félig folytonos, és legyen $\{\varrho_n | n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}\}$ folytonos félmetrikák rendszere Y-on, ahol ϱ_0 az azonosan 0 félmetrika. Ekkor minden $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$-ra létezik egy A_n indexhalmaz és egy $\{U_\alpha | \alpha \in A_n\}$ lokálisan véges, nyílt fedése X-nek, hogy minden $\alpha \in A_n$-hez és $x \in \overline{U_\alpha}$-hoz van olyan $y_\alpha(x) \in \Phi(x)$ és $\pi_n : A_{n+1} \longrightarrow A_n$ ráképezés, hogy teljesülnek a következők:*

(a) *Ha $\alpha \in A_n$, $x, x' \in \overline{U_\alpha}$, akkor $\varrho_n(y_\alpha(x), y_\alpha(x')) < \frac{2}{3}$.*

(b) *Ha $\alpha \in A_n$, akkor $U_\alpha = \bigcup_{\beta \in \pi_n^{-1}(\alpha)} U_\beta$.*

(c) *Ha $\alpha \in A_n$, $\beta \in \pi_n^{-1}(\alpha)$ és $x \in \overline{U_\beta}$, akkor $\varrho_n(y_\beta(x), y_\alpha(x)) < 1$.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\varrho_{n+1} \geq \varrho_n$. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $A_0 = \{\nu\}$, tetszőleges egyelemű halmaz, $U_\nu := X$, és minden $x \in X$-re $y_\nu(x)$ legyen $\Phi(x)$ egy tetszőleges eleme.

Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy már mindent definiáltunk $k \leq n$-re. $n+1$-re a következőképpen járunk el. Legyen $\alpha \in A_n$. Minden $x \in \overline{U_\alpha}$-ra

$$V_\alpha(x) := \left\{x' \in \overline{U_\alpha} \middle| \varrho_{n+1}(y_\alpha(x), \Phi(x')) < \frac{1}{3}\right\}. \tag{3.1}$$

Ekkor nyilván $y_\alpha(x) \in V_\alpha(x)$, és mivel $V = \varrho_{n+1}^{-1}(y_\alpha(x), .)((-\infty, \frac{1}{3}))$ nyílt Y-ban ϱ_{n+1} folytonossága miatt, valamint $V_\alpha(x) = \{x \in \overline{U_\alpha} \,|\, \Phi(x) \bigcap V \neq \emptyset\}$, azért Φ alulról félig folytonossága miatt $V_\alpha(x)$ nyílt $\overline{U_\alpha}$-ban. Tekintsük a $\mathcal{V}_\alpha = \{V_\alpha(x) \,|\, x \in \overline{U_\alpha}\}$ rendszert: $\mathcal{V}_\alpha$ relatív nyílt fedése $\overline{U_\alpha}$-nak. X parakompakt, ezért $\overline{U_\alpha}$ is az, így $\mathcal{V}_\alpha$-nak létezik egy lokálisan véges, relatív nyílt $\{W_\beta\}_{\beta \in B(\alpha)}$ finomítása. Ennek a finomításnak létezik olyan relatív nyílt $\{W'_\beta\}_{\beta \in B(\alpha)}$ finomítása, hogy minden $\beta \in B(\alpha)$-ra $\overline{W'_\beta} \subseteq W_\beta$. Feltehető, hogy a $\{B(\alpha)\}_{\alpha \in A_n}$ indexhalmazok diszjunktak, és legyen $A_{n+1} = \bigcup_{\alpha \in A_n} B(\alpha)$. Definiáljuk a $\pi_n : A_{n+1} \longrightarrow A_n$ függvényt: $\pi_n(\beta) = \alpha$, ha $\beta \in B(\alpha)$. Ekkor minden $\alpha \in A_n$-re $\pi_n^{-1}(\alpha) = B(\alpha)$.
Legyen $\beta \in A_{n+1}$; megadjuk az U_β nyílt halmazokat és az $y_\beta(x)$ pontokat minden $x \in \overline{U_\beta}$-ra. Legyen $\alpha = \pi_n(\beta)$, és $U_\beta = W'_\beta \bigcap U_\alpha$. Mivel $\overline{U_\beta} \subseteq V_\alpha(x_\beta)$ valamely $x_\beta \in \overline{U_\alpha}$-ra W'_β tulajdonságából adódóan, ezért (3.1) miatt minden $x \in \overline{U_\beta}$-ra választhatunk egy $y_\beta(x) \in \Phi(x)$-et, melyre

$$\varrho_{n+1}(y_\alpha(x_\beta), y_\beta(x)) < \frac{1}{3} \tag{3.2}$$

teljesül.

Ellenőrizzük a követelményeket $n+1$ esetén. Az indukciós feltevés szerint $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A_n}$ lokálisan véges, nyílt fedése X-nek, valamint $\{U_\beta\}_{\beta \in \pi_n^{-1}(\alpha)}$ lokálisan véges, nyílt fedése U_α-nak, ezért $\{U_\beta \,|\, \beta \in A_{n+1}\}$ lokálisan véges, nyílt fedése X-nek. Megmutatjuk, hogy *(a),(b),(c)* is teljesül. Ebből *(b)* nyilvánvaló, *(a)* pedig (3.2)-ből következik. *(c)* is könnyen látható, hiszen ha $\alpha \in A_n$, $\beta \in \pi_n^{-1}(\alpha)$ és $x \in \overline{U_\beta}$, akkor

$$\varrho_n(y_\beta(x), y_\alpha(x)) \leq \varrho_n(y_\beta(x), y_\alpha(x_\beta)) + \varrho_n(y_\alpha(x_\beta), y_\alpha(x)) < \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

teljesül. Ezzel a lemmát bizonyítottuk. □

3.2.9. Tétel. (Michael) *Legyen (X, τ) parakompakt tér, (Y, ϱ) metrikus tér és legyen $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \backslash \{\emptyset\}$ olyan alulról félig folytonos leképezés, hogy minden $x \in X$-re $\Phi(x)$ teljes metrikus tér az örökölt metrikával. Ekkor léteznek $\Psi, \Gamma : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$ leképezések, melyekre:*

(a) $\Psi(x) \subseteq \Gamma(x) \subseteq \Phi(x)$ *tetszőleges* $x \in X$ *esetén.*

(b) Ψ *és* Γ *pontonként kompakt.*

(c) Ψ *alulról félig folytonos.*

(d) Γ *felülről félig folytonos.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $\varrho \leq 1$, mert áttérhetünk a $\min\{\varrho, 1\}$ metrikára. Alkalmazzuk az előző lemmát $\{2^n \varrho\}_{n \in \mathbb{N}}$ rendszerre; adódik tehát A_n, π_n, U_α, $y_\alpha(x)$, mint a lemmában.

Legyen $A = \{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} | \alpha_n \in A_n, \pi_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_n \forall n \in \mathbb{N}\}$, és minden $x \in X$-re legyen

$$A(x) = \big\{(\alpha_n) \in A \big| x \in U_{\alpha_n} \forall n \in \mathbb{N}\big\},$$
$$\overline{A}(x) = \big\{(\alpha_n) \in A \big| x \in \overline{U}_{\alpha_n} \forall n \in \mathbb{N}\big\}.$$

Látható, hogy ha $a = (\alpha)_n \in A(x)$ vagy $a \in \overline{A}(x)$ és $x \in X$, akkor $y_{\alpha_n}(x)$ minden $n \in \mathbb{N}$-re definiált. Az előző lemma *(c)* pontja miatt $(y_{\alpha_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ $\Phi(x)$-ben haladó Cauchy sorozat, ezért $\Phi(x)$ teljessége miatt konvergál egy $y_a(x) \in \Phi(x)$-hez. Tetszőleges $x \in X$-re

$$\Psi_0(x) := \big\{y_a(x) \big| a = (\alpha_n) \in A(x)\big\}, \quad \Gamma_0(x) := \big\{y_a(x) \big| a = (\alpha_n) \in \overline{A}(x)\big\},$$

valamint

$$\Psi(x) := \overline{\Psi_0(x)}, \quad \Gamma(x) := \overline{\Gamma_0(x)}.$$

Az alábbiak $a = (\alpha_n)$ esetén könnyen láthatóak:

(1) Ha $a \in \overline{A}(x)$, akkor $\varrho(y_{\alpha_n}(x), y_a(x)) < 2^{-(n-1)}$.

(2) Ha $a \in \overline{A}(x)$, $a' \in \overline{A}(x')$, és valamely $n \in \mathbb{N}$-re $\alpha_n = \alpha'_n$, akkor $\varrho(y_a(x), y_{a'}(x')) < 2^{-(n-3)}$.

(3) Ha $\beta \in A_n$ és $x \in U_\beta$, akkor van olyan $a \in A(x)$, hogy $\alpha_n = \beta$.

(4) Ha $\beta \in A_n$ és $x \in \overline{U_\beta}$, akkor van olyan $a \in \overline{A}(x)$, hogy $\alpha_n = \beta$.

Valóban, (1) a 3.2.8. Lemma *(c)* pontjából, (3) és (4) a *(b)* pontból adódik, (2) pedig a lemma *(a)* pontját és (1)-et felhasználva a

$$\varrho(y_a(x), y_{a'}(x')) \le \varrho(y_a(x), y_{\alpha_n}(x)) + \varrho(y_{\alpha_n}(x), y_{\alpha'_n}(x')) + \varrho(y_{\alpha'_n}(x'), y_{a'}(x'))$$

egyenlőtlenség alapján következik.

(3)-ból következik, hogy tetszőleges $x \in X$-re $A(x)$ nem az üres halmaz, ezért $\Psi(x)$ és $\Gamma(x)$ sem az üres halmaz. Ellenőrizzük, hogy *(a),(b),(c)* és *(d)* teljesülnek.

(a) Ψ és Γ definíciójából nyilvánvaló.

(b) Mivel minden $x \in X$-re $\Psi(x)$ és $\Gamma(x)$ teljes, elegendő belátnunk, hogy teljesen korlátosak. Megmutatjuk, hogy $\Gamma_0(x)$ teljesen korlátos, ebből nyilvánvalóan következik, hogy $\Gamma(x)$ és $\Psi(x) \subseteq \Gamma(x)$ miatt $\Psi(x)$ teljesen korlátos. Az $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A_n}$ rendszer lokálisan véges, így ha $a = (\alpha_n) \in \overline{A}(x)$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$-re α_n véges sok különböző értéket vehet fel. Ezért (1) mutatja, hogy $\Gamma_0(x)$ teljesen korlátos.

(c) A 3.1.4. Állítás *(a)* pontja szerint elegendő megmutatnunk, hogy Ψ_0 alulról félig folytonos. Legyen $x \in X$, $y = y_a(x) \in \Psi_0(x)$ valamely $a \in A(x)$-re, és legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy létezik x-nek egy olyan W környezete, hogy minden $x' \in W$-re $\Psi_0(x') \bigcap B(y,\varepsilon) \ne \emptyset$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan nagy, hogy $2^{-(n-3)} < \varepsilon$, és $W := U_{\alpha_n}$. Ha $x' \in W$, akkor (3) miatt létezik $a' = (\alpha'_n) \in A(x')$, melyre

$\alpha'_n = \alpha_n$. Ekkor $y_{a'}(x') \in \Psi_0(x')$, és (2) miatt $\varrho(y_a(x), y_{a'}(x')) < 2^{-(n-3)} < \varepsilon$, tehát $\Psi_0(x') \bigcap B(y, \varepsilon) \neq \emptyset$.

(d) Legyen $V \subseteq Y$ nyílt halmaz. Megmutatjuk, hogy a $Z = \{x \in X \,|\, \Gamma(x) \subseteq V\}$ halmaz nyílt X-ben, azaz tetszőleges $x_0 \in Z$-nek van olyan W környezete, hogy $\Gamma(W) \subseteq V$. Mivel $\Gamma(x_0)$ kompakt, létezik $\varepsilon > 0$, hogy $\bigcup_{y \in \Gamma(x_0)} B(y, \varepsilon) \subseteq V$. Ezért Γ definíciója miatt elegendő olyan W-t találnunk, hogy minden $x' \in W$-re $\Gamma_0(x') \subseteq \bigcup_{y \in \Gamma_0(x_0)} B(y, \frac{\varepsilon}{2})$. Legyen az $n \in \mathbb{N}$ természetes szám olyan nagy, melyre $2^{-(n-3)} < \frac{\varepsilon}{2}$, és $W := X \setminus \bigcup\{\overline{U_\beta} | \beta \in A_n, x_0 \notin \overline{U_\beta}\}$. $W \neq \emptyset$, mert $\{U_\beta\}_{\beta \in A_n}$ fedése X-nek, és W nyilvánvalóan környezete x_0-nak.
Legyen $x' \in W$ és $y = y_{a'}(x') \in \Gamma_0(x')$ valamely $a' = (\alpha'_n) \in \overline{A}(x')$-re. Ekkor $x' \in \overline{U}_{\alpha'_n}$, ezért W definíciója miatt $x_0 \in \overline{U}_{\alpha'_n}$, így (4) miatt létezik $a = (\alpha_n) \in \overline{A}(x_0)$, melyre $\alpha_n = \alpha'_n$. Ekkor $y_a(x_0) \in \Gamma_0(x_0)$, és (2) miatt $\varrho(y_a(x_0), y_{a'}(x')) < 2^{-(n-3)} < \frac{\varepsilon}{2}$, és ezt akartuk bizonyítani. □

3.2.10. Tétel. (Michael) *Minden (X, ϱ) metrikus térhez létezik olyan $(B_X, \|\cdot\|)$ Banach tér és olyan $\check{}: X \longrightarrow B_X$ izometrikus beágyazás, hogy ha (F, τ) kváziteljes, szeparált, lokálisan konvex tér, akkor bármely folytonos $u : \check{X} \longrightarrow F$ függvény kiterjed egy lineáris $\tilde{u} : B_X \longrightarrow F$ leképezéssé, amely $\check{X}$-en és $\check{X}$ minden kompakt részhalmazának zárt konvex burkán folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $E = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$. Lássuk el E-t az Ω_X kompakt konvergencia topológiával, az $E^* = (E, \Omega)^*$ topologikus duálison pedig tekintsük a $\sigma(E^*, E)$ gyenge-* topológiát. Hasonlóan, $F^* = (F, \tau)^*$-on tekintsük az Ω_F kompakt konvergencia topológiát, ennek $F^{**} = (F^*, \Omega_F)^*$ topologikus duálisán tekintsük a $\sigma(F^{**}, F^*)$ gyenge-* topológiát. Ha $u : X \longrightarrow F$ folytonos függvény, akkor legyen az u adjungáltja

$$u^* : F^* \longrightarrow E; \qquad u^*(f) = f \circ u,$$

és legyen u^* adjungáltja

$$u^{**} : E^* \longrightarrow F^{**}; \qquad u^{**}(\phi) = \phi \circ u^*.$$

Látható, hogy u^* és u^{**} lineáris leképezések, valamint u^* $\Omega_F - \Omega_X$ folytonos, és u^{**} $\sigma(E^*, E) - \sigma(F^{**}, F^*)$ folytonos.

X-et az ismert módon azonosíthatjuk E^* egy részhalmazával: $x \in X$-nek feleltessük meg azon $\check{x} \in E^*$-ot, amelyre minden $f \in E$ esetén $\check{x}(f) = f(x)$ teljesül. Mivel X metrikus tér, azért E szétválasztja X-et, így $\check{}: X \longrightarrow E^*$ injektív. Ezek után legyen $X = \check{X}$. A 0.2.13. Mackey-Arens tétel *(b)* pontjának következtében $(F^{**}, \sigma(F^{**}, F^*)) = (F, \sigma(F, F^*))$. Ezen azonosítások mellett $u^{**} : E^* \longrightarrow F$, és $u^{**}\big|_X = u$, tehát u-nak u^{**} lineáris kiterjesztése, amely $\sigma(E^*, E) - \sigma(F, F^*)$ folytonos.

Ha $K \subseteq X$ kompakt, akkor $u(K)$ a folytonosság miatt τ-kompakt F-ben, ezért a kváziteljesség miatt a 0.2.5. KREIN tétel szerint $\overline{\text{conv}}(u(K))$ is τ-kompakt. Így $\tau\big|_{\overline{\text{conv}}(u(K))} = \sigma(F, F^*)\big|_{\overline{\text{conv}}(u(K))}$, és ha C jelöli a K halmaz $\sigma(E^*, E)$-zárt konvex burkát, akkor $u^{**}(C) \subseteq \overline{\text{conv}}(u(K))$. Ezért $u^{**}\big|_C$ $\sigma(E^*, E)\big|_C - \tau$ folytonos.

Megmutatjuk, hogy elegendő definiálunk egy olyan normát E^*-on, amelyre a következők teljesülnek:

(1) A normából származó metrika X-en azonos az eredeti ϱ metrikával.

(2) Ha $K \subseteq X \subseteq E^*$ kompakt, akkor a K halmaz C $\sigma(E^*, E)$-zárt konvex burkán a norma topológia és a $\sigma(E^*, E)$ topológia azonos.

Tegyük fel, hogy adott egy (1)-et és (2)-t teljesítő $\|\cdot\|$ norma E^*-on. (1) mutatja, hogy X izometrikusan ágyazódik E^*-ba. Az Ω_X kompakt konvergencia topológia szerint a $\mathfrak{B} = \{\{f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X) \,|\, f(K') \subseteq W\} \,|\, K' \subseteq X \text{ kompakt}, W \subseteq \mathbb{R} \text{ nullkörnyezet}\}$ halmazrendszer $\mathbf{0}_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)}$-nek környezetbázisa. Ha $K \subseteq X \subseteq E^*$ kompakt, akkor a K halmaz C $\sigma(E^*, E)$-zárt konvex burka ekvifolytonos. Legyen ugyanis $W' \subseteq \mathbb{R}$ 0-nak környezete, ez tartalmaz egy W konvex nullkörnyezetet. Ekkor $\text{conv}(K)(\{f \in E \,|\, f(K) \subseteq W\}) = \bigcup\{\text{conv}(f(K)) \,|\, f(K) \subseteq W\} \subseteq W$, mert W konvex. Ezek szerint $\text{conv}(K)$ ekvifolytonos, és ismeretes tény, hogy folytonos lineáris funkcionálok ekvifolytonos halmazának gyenge-* lezártja is ekvifolytonos. Ezért a 0.2.14. ALAOGLU-BOURBAKI tétel miatt C $\sigma(E^*, E)$-kompakt, így (2)-ből az következik, hogy C $\|\cdot\|$-kompakt. Emiatt a C halmaz a K normában vett zárt konvex burka. Így ha $(B_X, \|\cdot\|)$ jelöli $(E^*, \|\cdot\|)$ teljesítését, akkor C K-nak a zárt konvex burka B_X-ben is. Ezek után legyen $\tilde{u} : B_X \longrightarrow F$ tetszőleges lineáris (nem szükségképpen folytonos) kiterjesztése u^{**}-nak. Azt pedig már láttuk, hogy X-re és X kompakt részhalmazainak zárt konvex burkára a megszorítás folytonos.

Megadunk egy, a keresett tulajdonságokkal rendelkező normát E^*-on. Legyen (Y, d) olyan metrikus tér, amelybe (X, ϱ) zárt részhalmazként izometrikusan beágyazható, és $Y \setminus X = \{y_0\}$. Ilyen Y létezik. Legyen ugyanis $Y = X \bigcup^* \{y_0\}$, ahol $\{y_0\}$ tetszőleges egypontú halmaz, $\bigcup^*$ pedig a diszjunkt uniót jelöli. A $d : Y \times Y \longrightarrow [0, +\infty)$ metrikát a következő módon definiáljuk:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = y \\ 1 & \text{ha } x \in X \text{ és } y = y_0, \text{ vagy } x = y_0 \text{ és } y \in X \\ \varrho(x,y) & \text{ha } x, y \in X \end{cases}$$

Ha $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$, akkor terjesszük ki Y-ra $f(y_0) = 0$-val; legyen ezen függvények halmaza $\mathcal{C}_{y_0}(X)$. Tetszőleges $c \geq 0$ esetén jelölje $\text{Lip}_c(Y)$ azon korlátos $\mathcal{C}_{y_0}(X)$-beli leképezések halmazát, melyek c konstanssal Lipschitz-folytonosak, azaz $\text{Lip}_c(Y) := \{f \in \mathcal{C}_{y_0}(X) \,|\, |f(x) - f(y)| \leq c d(x,y) \ \forall x, y \in Y\}$. Legyen $\mathcal{L}_Y = \bigcup_{c \geq 0} \text{Lip}_c(Y)$, amely nyilvánvalóan vektortér $\mathbb{R}$ felett. $f \in \mathcal{L}_Y$-ra legyen $\|f\|_{\mathcal{L}} = \min\{c \in [0, +\infty) \,|\, f \in \text{Lip}_c(Y)\}$;

triviális, hogy a $\|\cdot\|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L}_Y \longrightarrow \mathbb{R}$ leképezés norma $\mathcal{L}_Y$-on, hiszen a konstans függvények közül csak $\mathbf{0}$ eleme $\mathcal{L}$-nak.
Az $\mathcal{L}_Y$-beli függvények az X-re történő megszorítással természetes módon azonosulnak az E-beli korlátos, Lipschitz-folytonos függvények $\mathcal{L}$ halmazával; ez az $\mathcal{L}$ halmaz olyan konstans függvényeket tartalmazó részalgebrája $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$-nek, amely szétválasztó X felett. Valóban, ha $f, g \in \mathcal{L}$, akkor a korlátosság miatt $f^2, g^2, (f+g) \in \mathcal{L}$, és így $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2) \in \mathcal{L}$. Az a függvény, amely y_0-ban 0-t, X pontjaiban 1-et vesz fel, 1-konstansú Lipschitz-folytonos függvény Y-on, ezért $\mathbf{1} \in \mathcal{L}$. Ha $z_1, z_2 \in X$ különböző pontok, akkor a $h(x) = \min\{1, \varrho(x, z_1)\}$ függvény korlátos, 1-konstanssal Lipschitz-folytonos, valamint szétválasztja z_1-et és z_2-t. Ezért a 0.2.15. Stone-Weierstrass tétel szerint sűrű $(\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X), \Omega_X) = (E, \Omega_X)$-ben.
$\mathcal{L}$ és $\mathcal{L}_Y$ természetes azonosítása után $\mathcal{L} \subseteq E$ miatt E^* minden eleme megfeleltethető $\mathcal{L}'_Y$ egy elemének. $\mathcal{L}$ sűrű (E, Ω_X)-ben, így a 0.2.16. Tétel miatt ez a megfeleltetés injektív. Megmutatjuk, hogy $E^* \subseteq \mathcal{L}_Y^* = (\mathcal{L}_Y, \|\cdot\|_L)^*$. Legyen $l \in E^*$, és legyen (f_n) olyan $\mathcal{L}_Y$-ban haladó függvénysorozat, hogy $c_n = \|f_n\|_{\mathcal{L}} \to 0$. Legyen $K \subseteq X$ tetszőleges kompakt halmaz. Ekkor $\max_{x\in K} |f_n(x)| = \max_{x\in K} |f_n(x) - f_n(y_0)| \leq c_n \max_{x\in K} d(x, y_0) = c_n \to 0$, vagyis az (f_n) sorozat egyenletesen tart $\mathbf{0}$-hoz minden kompakt halmazon. Mivel $l \in (E, \Omega_X)^*$, azért $l(f_n) \to 0$, amivel megmutattuk, hogy l folytonos $\mathbf{0}$-ban, így $l \in \mathcal{L}_Y^*$.

A bizonyítás befejezéséhez legyen $\|\cdot\|$ az $\mathcal{L}_Y^*$-beli funkcionálnorma megszorítása E^*-ra, és $B_X := \overline{E^*}^{\mathcal{L}_Y^*}$. Belátjuk, hogy E^* ezzel a normával teljesíti (1)-et és (2)-t.

(1) Legyen $x_1, x_2 \in X$. Ekkor

$$\|\check{x}_1 - \check{x}_2\| = \sup_{\|f\|_{\mathcal{L}}\leq 1} |\check{x}_1(f) - \check{x}_2(f)| = \sup_{\|f\|_{\mathcal{L}}\leq 1} |f(x_1) - f(x_2)| \leq d(x_1, x_2).$$

A másik irányú egyenlőtlenséghez $x \in X$ esetén $g(x) := d(x, x_2) - 1$. Ekkor g Lipschitz-folytonos 1-konstanssal, és $(\check{x}_1 - \check{x}_2)(g) = g(x_1) - g(x_2) = d(x_1, x_2)$. Mindezek mutatják, hogy $\check{\ } : (X, \varrho) \longrightarrow (E^*, \|\cdot\|)$ izometrikus.

(2) Tetszőleges $c \geq 0$ esetén a $\mathrm{Lip}_c(Y)$ halmazzal természetes módon azonosítható $\mathcal{L}$-beli $\mathcal{L}_c$ halmaz ekvifolytonos, zárt és pontonként korlátos részhalmaza $E = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$-nek. Valóban, a zártság és az ekvifolytonosság nyilvánvaló, és $f \in \mathcal{L}_c$, valamint $x \in X$ esetén $|f(x)| = |f(x) - f(y_0)| \leq c$ miatt pontonkénti korlátosság is látható. Ezért a 0.2.17. Tétel *(a)* pontja miatt $\mathcal{L}_c$ zárt E-ben.
Legyen $K \subseteq X \subseteq E^*$ kompakt. E^*-on a norma-topológia nem más, mint az $\mathcal{L}_c$ kompakt halmazokon való egyenletes konvergencia. Láttuk, hogy a $K \subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$ kompakt halmaz C $\sigma(E^*, E)$-zárt konvex burka ekvifolytonos; ekkor természetesen mint $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\mathcal{L})$ részhalmaza is ekvifolytonos. Mivel $\mathcal{L} = \bigcup_{c\in[0,+\infty)} \mathcal{L}_c$, azért a 0.2.17. Tétel *(b)* pontja miatt C-n az $\Omega_{\mathcal{L}}$ kompakt konvergencia topológia (ami az E^*-ból származó norma-topológia) és a $\sigma(E^*, \mathcal{L})$ pontonkénti konvergencia topológia azonos. Viszont $\mathcal{L}$ sűrű E-ben Ω_X szerint, ezért C-n a $\sigma(E^*, \mathcal{L})$ topológia megegyezik a $\sigma(E^*, E)$ topológiával. Ezzel beláttuk (2)-t, és így a tételt is. $\square$

3.2.11. Megjegyzés. A tétel bizonyításából könnyen láthatóak az alábbiak. $\check{X}$ lineárisan független részhalmaza E^*-nak, mert ha $\check{x}_1, \ldots, \check{x}_{n+1} \in \check{X}$ különbözőek, akkor $g(y) := d(y, \{y_0, x_1, \ldots, x_n\})$ esetén $g \in \mathcal{L}_Y$, és $j = 1, \ldots, n$-re $\check{x}_j(g) = 0$, míg $\check{x}_{n+1}(g) \neq 0$.
$\mathcal{L}$ az X-en értelmezett valós értékű, korlátos, Lipschitz-folytonos függvények halmaza. A B_X Banach tér tulajdonképpen az $\mathcal{L}$ duális terének egy zárt altere, ezért beszélhetünk a természetes $\widehat{\ }: \mathcal{L} \longrightarrow B_X^*$, $\widehat{f}(l) = l(f)$ leképezésről. Ekkor minden $f \in \mathcal{L}$ és $X = \check{X}$ esetén $\widehat{f}\big|_X = f$, mert tetszőleges $x \in X$-re $\widehat{f}(\check{x}) = \check{x}(f) = f(x)$ a leképezések definíciójából adódóan.

3.2.12. Tétel. (Michael) *Legyen (X, ϱ) metrikus tér, (F, τ) kváziteljes, szeparált, lokálisan konvex tér, $\emptyset \neq M \subseteq F$, és legyen $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$ alulról félig folytonos leképezés. Tegyük fel, hogy M metrizálható egy olyan metrikával, hogy minden $x \in X$-re $\Phi(x)$ teljes. Ekkor létezik egy folytonos $f : X \longrightarrow F$, hogy minden $x \in X$-re $f(x) \in \overline{conv}(\Phi(x))$. Ez az f olyan, hogy minden $K \subseteq X$ kompakt halmazhoz létezik olyan $K' \subseteq \bigcup_{x \in K} \Phi(x)$, amelyre $f(K) \subseteq \overline{conv}(K')$ fennáll.*

Bizonyítás. A 3.2.10. Michael tétel szerint azonosíthatjuk M-et egy B_M Banach tér részhalmazával. Így Φ-t tekinthetjük B_M nemüres részhalmazaiba képező függvénynek is.

A 3.2.9. Michael tétel alapján létezik egy pontonként kompakt, felülről félig folytonos $\Gamma : X \longrightarrow \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$, és egy pontonként kompakt, alulról félig folytonos $\Psi : X \longrightarrow \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$, hogy minden $x \in X$ esetén $\Psi(x) \subseteq \Gamma(x) \subseteq \Phi(x)$. A 3.1.6. Megjegyzés miatt $\overline{\text{conv}}\Psi$ is alulról félig folytonos, és Stone tétele szerint minden metrikus tér parakompakt, ezért a $\overline{\text{conv}}\Psi : X \longrightarrow B_M$ leképezésre alkalmazható a 3.2.6. Michael tétel. Így adódik egy folytonos $g : X \longrightarrow B_M$ függvény, melyre $g(x) \in \overline{\text{conv}}(\Psi(x))$ minden $x \in X$ esetén. Legyen $\alpha : M \subseteq B_M \longrightarrow M \subseteq F$, $\alpha(x) = x$. α folytonos, ezért létezik a 3.2.10. Michael tételben szereplő $\tilde{\alpha} : B_M \longrightarrow F$ kiterjesztés. Megmutatjuk, hogy az $f = \tilde{\alpha} \circ g$ egyenlőséggel definiált függvény kielégíti a feltételeket.

Legyen $K \subseteq X$ kompakt. Γ felülről félig folytonos és pontonként kompakt, ezért a 3.1.4. Állítás *(e)* pontja miatt $\Gamma(K)$ kompakt. $\overline{\text{conv}}(\Gamma(K))^F$ kompakt a 0.2.5. Krein tétel miatt, és $\tilde{\alpha}$ folytonos $\overline{\text{conv}}(\Gamma(K))^{B_M}$-en, így $\tilde{\alpha}(\overline{\text{conv}}(\Gamma(K))^{B_M}) = \overline{\text{conv}}(\Gamma(K))^F$. Mivel $g(K) \subseteq \overline{\text{conv}}(\Gamma(K))^{B_M}$, azért f folytonos K-n, és $f(K) \subseteq \overline{\text{conv}}(\Gamma(K))^F$ teljesül az előzőek miatt. Kaptuk tehát, hogy minden $K \subseteq X$-re $f\big|_K$ folytonos. X viszont metrikus tér, ezért f X-en is folytonos. Az pedig $\Gamma(x) \subseteq \Phi(x)$ miatt nyilvánvaló, hogy minden $x \in X$-re $f(x) \in \overline{\text{conv}}(\Phi(x))^F$. □

Néhány előzetes megjegyzést teszünk a továbbiakhoz. Legyen (M, ϱ) metrikus tér, τ_M az M nyílt halmazai, és $\mathcal{L}$ legyen az M-en értelmezett valós értékű, korlátos, Lipschitz-folytonos függvények lineáris tere. A 3.2.10. MICHAEL tétel szerint létezik egy $B_M = B$ Banach tér, amelybe M izometrikusan beágyazható, továbbá a 3.2.11. Megjegyzés szerint létezik egy $\widehat{\ }: \mathcal{L} \longrightarrow B^*$ lineáris leképezés, amelyre $\widehat{f}\big|_M = f$ teljesül minden $f \in \mathcal{L}$ esetén, ha M-et azonosítjuk a képével.

Legyen $y \in B$-re

$$\mathcal{S}(y) = \left\{U \subseteq M \middle| U \in \tau_M, \forall f \in \mathcal{L}, \mathrm{supp}(f) \subseteq U : \widehat{f}(y) = 0\right\},$$

és legyen $\sigma : B \longrightarrow \mathcal{P}(M)$, $\sigma(y) = M \setminus \bigcup_{y \in B} \mathcal{S}(y)$. Nyilvánvaló, hogy $\sigma(y)$ zárt M-ben.

3.2.13. Lemma. *Legyen $K \subseteq M$ nemüres kompakt, és $y \in \overline{conv}(K)^B$. Ekkor a következők igazak:*

(a) $\sigma(y) \subseteq K$.

(b) Ha $f \in \mathcal{L}$, és $\sigma(y) \bigcap supp(f) = \emptyset$, akkor $\widehat{f}(y) = 0$.

(c) $\sigma(y) \neq \emptyset$.

Bizonyítás. (a) Legyen $U = M \setminus K$. Ekkor $\widehat{f}(y) = 0$, ha $\mathrm{supp}(f) \subseteq U$. Valóban, $f(K) = 0$ és $\widehat{f}\big|_K = f$ alapján $\widehat{f}(K) = 0$, ezért $\widehat{f} \in B^*$ miatt $\widehat{f}(\overline{\mathrm{conv}}(K)^B) = 0$. Így $U \in \mathcal{S}(y)$, amiből $\sigma(y) \subseteq K$ következik.

(b) Mivel f felírható $f = f^+ - f^-$ alakban, ahol f^+ az f pozitív, f^- az f negatív része, valamint $f^+, f^- \in \mathcal{L}$ és $\mathrm{supp}(f^+) \bigcup \mathrm{supp}(f^-) \subseteq \mathrm{supp}(f)$, azért elegendő $f \geq 0$-ra bizonyítanunk *(b)*-t.
Legyen tehát $f \geq 0$, és $A := \mathrm{supp}(f) \bigcap K$. Ekkor A kompakt és diszjunkt $\sigma(y)$-tól, ezért létezik véges sok $V_j \subseteq M$ (j=1,...,n) nyílt halmaz, melyekre $\overline{V_j} \subseteq U_j$ valamely $U_j \in \mathcal{S}(y)$-ra, és $A \subseteq \bigcup_{j=1}^n V_j$. Legyen $j = 1, \ldots, n$ és $x \in M$ esetén $g_j(x) = \min\{\varrho(x, M \setminus V_j), 1\}$. Ekkor $g_j \in \mathcal{L}$, $\mathrm{supp}(g_j) \subseteq U_j$, így az *(a)* pontban mondottak szerint $\widehat{g_j}(y) = 0$. Ekkor nyilván $g = \sum_{j=1}^n g_j$-re $g \in \mathcal{L}$, és $\widehat{g}(y) = 0$. $x \in A$ esetén $g(x) > 0$, és mivel f és g folytonos, A kompakt, létezik $c > 0$, hogy minden $x \in A$ esetén $0 \leq f(x) \leq cg(x)$ teljesül. Ez az egyenlőtlenség az egész K halmazon fennáll, hiszen $x \in K \setminus A$-ra $f(x) = 0$. Következésképpen $x \in \overline{\mathrm{conv}}(K)^B$-re $0 \leq \widehat{f}(x) \leq c\widehat{g}(x)$, így $0 \leq \widehat{f}(y) \leq c\widehat{g}(y) = 0$.

(c) Legyen $h(x) = 1$ minden $x \in M$ esetén. Ekkor $h \in \mathcal{L}$ és $\widehat{h}(y) = 1$, így a *(b)* pont miatt $\sigma(y) \bigcap \mathrm{supp}(h) \neq \emptyset$. Következésképpen $\sigma(y) \neq \emptyset$. $\square$

3.2.14. Lemma. *Legyen* $Z = \bigcup\{\overline{conv}(K)^B \,|\, K \subseteq M$ *kompakt* $\}$. *Ekkor a* $\sigma : Z \longrightarrow \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$ *leképezés alulról félig folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $V \subseteq M$ nyílt, $y_0 \in Z$, és $\sigma(y_0) \bigcap V \neq \emptyset$. Ekkor σ definíciója miatt létezik $f_0 \in \mathcal{L}$, amelyre $\mathrm{supp}(f_0) \subseteq V$, és $\widehat{f_0}(y_0) \neq 0$. Legyen $U = \{y \in Z \,|\, \widehat{f_0}(y) \neq 0\}$. Mivel f_0 folytonos, azért U környzete y_0-nak Z-ben, és ha $y \in U$, akkor a 3.2.13. Lemma *(b)* pontja szerint $\sigma(y) \bigcap \mathrm{supp}(f_0) \neq \emptyset$, és így $\sigma(y) \bigcap V \neq \emptyset$. Következésképpen $\{y \in Z \,|\, \sigma(y) \bigcap V \neq \emptyset\}$ nyílt Z-ben, tehát σ alulról félig folytonos. □

3.2.15. Tétel. (Michael) *Legyen* X *parakompakt tér,* E *kváziteljes, szeparált, lokálisan konvex tér,* $\emptyset \neq M \subseteq E$, *és legyen* $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$ *alulról félig folytonos. Tegyük fel, hogy* M *metrizálható egy olyan metrikával, hogy minden* $x \in X$*-re* $\Phi(x)$ *teljes. Ekkor létezik egy folytonos* $f : X \longrightarrow E$ *függvény, hogy minden* $x \in X$*-re* $f(x) \in \overline{conv}(\Phi(x))$.

Bizonyítás. A 3.2.9. Michael tétel alapján létezik egy alulról félig folytonos $\Psi : X \longrightarrow \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$ leképezés, amely pontonként kompakt, és minden $x \in X$-re $\Psi(x) \subseteq \Phi(x)$.

Legyen $M \subseteq Z \subseteq B$, mint az előbbi két lemmában. A 3.1.6. Megjegyzés szerint $X \ni x \longmapsto \overline{\mathrm{conv}}(\Psi(x))^B \in B$ alulról félig folytonos leképezés, így a 3.2.6. Michael tételből a 3.2.7. Megjegyzés mellett adódik egy folytonos $g : X \longrightarrow B$ szelése. Ψ pontonkénti kompaktságából következik, hogy tetszőleges $x \in X$-re $g(x) \in Z$.

Legyen $\sigma : Z \longrightarrow \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$, mint az előző két lemmában. Mivel Z metrizálható, alkalmazhatjuk a 3.2.14. Lemma szerint alulról félig folytonos leképezésre a 3.2.12. Michael tételt. Így létezik egy folytonos $h : Z \longrightarrow E$ függvény, amelyre minden $y \in Z$ esetén $h(y) \in \overline{\mathrm{conv}}(\sigma(y))^E$ áll fenn.

Definiáljuk az $f : X \longrightarrow E$ függvényt az $f = h \circ g$ egyenlőséggel. f nyilvánvalóan folytonos, hiszen g és h is az. Ha $x \in X$, akkor $g(x) \in \overline{\mathrm{conv}}(\Psi(x))^B$, ezért a 3.2.13. Lemma *(a)* pontja miatt $\sigma(g(x)) \subseteq \Psi(x) \subseteq \Phi(x)$, és így

$$f(x) = h(g(x)) \in \overline{\mathrm{conv}}(\sigma(g(x)))^E \subseteq \overline{\mathrm{conv}}(\Phi(x))^E.$$

Ezzel a tételt bizonyítottuk. □

3.2.16. Következmény. *Legyen* X *parakompakt tér,* E *kváziteljes, szeparált, lokálisan konvex tér, és* $M \subseteq E$ *nemüres halmaz. Legyen* $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$ *olyan alulról félig folytonos leképezés, hogy minden* $x \in X$ *esetén* $\Phi(x)$ *konvex és zárt, valamint tegyük fel, hogy* M *metrizálható egy olyan metrikával, melyre minden* $x \in X$ *esetén* $\Phi(x)$ *teljes. Ekkor* Φ*-nek létezik folytonos szelése.*

Az alábbiakban a 3.2.15. Michael tétel és a 3.2.16. Következmény élességét vizsgáljuk. Kiderül, hogy a konvexitás és a teljesség feltétele nem hagyható el, valamint a képpontok nem lehetnek nyíltak.

3.2.17. Példa. Legyen $X = [0,1]$ és $Y = \mathbb{R}^2$ a kétdimenziós valós euklideszi tér. Ekkor létezik Y-beli zárt halmazok $\mathcal{S}$ rendszere, hogy minden $B \in \mathcal{S}$ homeomorf X-szel, valamint egy $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{S}$ alulról félig folytonos leképezés, hogy $0 \in X$ bármely U környezetére megszorítva Φ-t, $\Phi\big|_U$-nak nincs folytonos szelése (és így Φ-nek sincs).

Legyen $Z = \{(t, \sin\frac{1}{t})\,|\,t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \bigcup \{(0,s) \in Y\,|\,s \in [-1,1]\}$. Legyen $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$, $\Phi(x) = \{(t,s) \in Z\,|\,\frac{1}{2}x \leq t \leq x\}$, valamint $\mathcal{S} := \{\Phi(x)\}_{x \in X}$. Nyilvánvaló, hogy Φ alulról félig folytonos, és minden $x \in X$-re $\Phi(x)$ homeomorf X-szel. Viszont nem létezhet U környezete 0-nak, melyre $\Phi\big|_U$-nak van folytonos szelése. Ha lenne ilyen, akkor $[0,\varepsilon)$ alakú környezeten is létezne folytonos szelés, ami Z útösszefüggőségét eredményezné, pedig Z nem útösszefüggő.

3.2.18. Példa. Legyen $X = [0,1]$. Létezik egy Y szeparábilis normált tér, és egy $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$ alulról félig folytonos leképezés, melyre minden $x \in X$ esetén $\Phi(x)$ konvex és zárt, és Φ-nek nincs folytonos szelése. Legyen $Z = [0,1] \bigcap \mathbb{Q} = \{z_n\,|\,n \in \mathbb{N}\}$ az X-beli racionális számok egy felsorolása. Legyen $Y = \{y \in \ell^1(Z)\,|\,y_z \neq 0$ véges sok $z \in Z$ esetén $\}$, amely lineáris altér $\ell^1(Z)$-ben, és $C := \{y \in Y\,|\,y_z \geq 0\ \forall z \in Z\}$.Végül legyen

$$\Phi(x) = \begin{cases} C & \text{ha } x \in X \setminus Z \\ C \bigcap \{y \in Y\,|\,y_{z_n} \geq \frac{1}{n}\} & \text{ha } x = z_n \end{cases}$$

Ekkor minden $x \in X$-re $\Phi(x)$ konvex és zárt, és a 3.1.3. *(b)* pontjából nyilvánvaló, hogy Φ alulról félig folytonos. Megmutatjuk, hogy Φ-nek nincs folytonos szelése.

Indirekten tegyük fel, hogy van $f : X \longrightarrow Y$ folytonos szelése Φ-nek. Ekkor minden $z_n \in Z$-nek van X-ben egy U_n környezete, hogy $f(x)_{z_n} > \frac{1}{2n}$, ha $x \in \overline{U_n}$. Mivel Z sűrű X-ben, azért van olyan (k_n) indexsorozat és $z_{k_n} \in Z$, hogy $z_{k_{n+1}} \in \bigcap_{j=1}^{n} U_{k_j}$. Ezért az $\{\overline{U}_{k_n}\}_{n=1}^{+\infty}$ rendszer centrált, így X kompaktsága miatt létezik $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{U}_{k_n}$. Ekkor viszont $f(x_0)_{z_{k_n}} > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, ami ellentmond annak, hogy Y tetszőleges elemének véges kivétellel minden koordinátája 0-val egyenlő.

3.2.19. Példa. Legyen $X = [0,1]$. Ekkor létezik egy Y Banach tér, és egy $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$ alulról félig folytonos leképezés, melyre minden $x \in X$ esetén $\Phi(x)$ konvex és nyílt, és Φ-nek nincs folytonos szelése.

Legyen Y a $\ell^1(X)$ valós Banach tér, és $\Phi(x) := \{y \in Y\,|\,y_x > 0\}$, amely nyilván nyílt és konvex. Megmutatjuk, hogy Φ alulról félig folytonos.

Legyen $x' \in X$, $y' \in \Phi(x')$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor létezik x'-nek olyan U környezete, hogy ha $x \in U$, akkor létezik $y \in \Phi(x)$, amelyre $\|y - y'\|_1 < \varepsilon$. Mivel $y'_{x'} > 0$, és $y'_x < -\frac{\varepsilon}{2}$ legfeljebb véges sok $x \in X$-re, azért létezik x'-nek egy U környezete, hogy $x \in U$ esetén $y'_x \geq -\frac{\varepsilon}{2}$. Ezért $x \in U$ esetén választhatunk egy $y \in \Phi(x)$ vektort, amelyre $y_x < \frac{\varepsilon}{2}$, és $y_{x'} = y'_{x'}$, ha $x \neq x'$. Ekkor $\|y - y'\|_1 = |y_x - y'_x| < \varepsilon$. Megmutattuk tehát, hogy Φ minden $x' \in X$-ben alulról félig folytonos.

Indirekten tegyük fel, hogy létezik egy f folytonos szelése Φ-nek. Ekkor a folytonosság miatt minden $x' \in X$-nek van olyan $U_{x'}$ környezete, hogy ha $x \in U_{x'}$, akkor $f(x)_{x'} > 0$. Mivel minden U'_x tartalmaz racionális számot, valamely $r \in X \bigcap \mathbb{Q}$ nem megszámlálható sok U'_x halmaz eleme. Ekkor viszont $f(r)_{x'} > 0$ nem megszámlálható sok x'-re, ami lehetetlen, mert $f(r) \in \ell^1(X)$.

3.3. A Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz tétel

Ebben a szakaszban Knaster, Kuratowski és Mazurkiewicz 1929-ben bizonyított tételének általánosításáról és következményeiről lesz szó. Ezek az - önmagukban is érdekes - állítások a következő részt készítik elő, de a matematika más területein (például variációs egyenlőtlenségeknél, játékelméletben) is fontos alkalmazásaik ismeretesek.

3.3.1. Definíció. Legyen V vektortér $\mathbb{F}$ felett. Egy $A \subseteq V$ halmaz végesen zárt, ha bármely véges dimenziós $L \subseteq V$ affin altérre $L \bigcap A$ zárt halmaz az euklideszi topológiával ellátott L-ben.

3.3.2. Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy ha (E, τ) szeparált topologikus vektortér, akkor minden $A \subseteq E$ zárt halmaz végesen zárt, hiszen minden véges dimenziós affin altér zárt E-ben.

3.3.3. Definíció. Legyen V vektortér, $X \subseteq V$ tetszőleges halmaz. Egy $\Psi : X \longrightarrow \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$ függvényt Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz leképezésnek (röviden KKM-leképezésnek) nevezünk, ha bármely véges $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ halmazra teljesül, hogy $\operatorname{conv}(\{x_1, \dots, x_n\}) \subseteq \bigcup_{j=1}^n \Psi(x_j)$.

3.3.4. Tétel. (A KKM-leképezések tétele) *Legyen V vektortér, $X \subseteq V$ tetszőleges halmaz, és legyen $\Psi : X \longrightarrow \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$ KKM-leképezés. Tegyük fel, hogy minden $x \in X$-re $\Psi(x)$ végesen zárt. Ekkor a $\{\Psi(x) | x \in X\}$ halmazrendszer centrált.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik véges sok $\Psi(x_j)$ $(j = 1, \dots, n)$, hogy $\bigcap_{j=1}^n \Psi(x_j) = \emptyset$. Legyen $L = \mathcal{L}(\{x_1, \dots, x_n\})$, ϱ az euklideszi metrika L-en, valamint legyen $C = \operatorname{conv}(\{x_1, \dots, x_n\}) \subseteq L$. Mivel $\Psi(x_j)$ végesen zárt, azért $L \bigcap \Psi(x_j)$ zárt halmaz L-ben, és így $x \in L$ esetén $\varrho(x, L \bigcap \Psi(x_j)) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x \in L \bigcap \Psi(x_j)$. Mivel $\bigcap_{j=1}^n (L \bigcap \Psi(x_j)) = \emptyset$, ezért a $\lambda : C \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda(c) = \sum_{j=1}^n \varrho(c, L \bigcap \Psi(x_j))$ függvény sehol sem 0. Emiatt értelmezhető egy $f : C \longrightarrow L$, $f(c) = \frac{1}{\lambda(c)} \sum_{j=1}^n \varrho(c, L \bigcap \Psi(x_j)) x_j$ függvény, amely nyilván folytonos, és C konvexitása miatt $\operatorname{ran} f \subseteq C$.Az 1.1.13. Általánosított Brouwer tétel miatt f-nek létezik egy $c_0 \in C$ fixpontja. Legyen $J = \{j \,|\, \varrho(c_0, L \bigcap \Psi(x_j)) \neq \emptyset\}$. Ekkor $c_0 \notin \bigcup_{j \in J} \Psi(x_j)$, a KKM-leképezések definíciójából viszont $c_0 = f(c_0) \in \operatorname{conv}(\{x_j \,|\, j \in J\}) \subseteq \bigcup_{j \in J} \Psi(x_j)$, ami ellentmondás. $\square$

3.3.5. Tétel. (Fan) *Legyen E szeparált topologikus vektortér, $X \subseteq E$ tetszőleges halmaz, $\Psi : X \longrightarrow \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ KKM-leképezés. Ha minden $x \in X$-re $\Psi(x)$ zárt, és legalább egy kompakt, akkor $\bigcap_{x \in X} \Psi(x) \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló az előző tételből, hiszen ha valamely $x_0 \in X$-re $\Psi(x_0)$ kompakt, akkor a $\{\Psi(x_0) \bigcap \Psi(x)\}_{x \in X}$ halmazrendszer centrált $\Psi(x_0)$-ban, így $\bigcap_{x \in X} \Psi(x) \neq \emptyset$. □

3.3.6. Megjegyzés. Fan előző tételéből a 2.2.11. Tyihonov tétel levezethető. Legyen E szeparált, lokálisan konvex tér, $\emptyset \neq C \subseteq E$ kompakt, konvex halmaz, $f : C \longrightarrow C$ folytonos függvény. Belátjuk, hogy f-nek van fixpontja. Legyen $\{p_j\}_{j \in J}$ az E-n értelmezett folytonos félnormák rendszere. $j \in J$-re $A_j := \{y \in C \,|\, p_j(y - f(y)) = 0\}$, amely p_j folytonossága miatt zárt halmaz C-ben. Szeparált, lokálisan konvex térben egy vektor pontosan akkor $\mathbf{0}$, ha minden folytonos félnorma eltűnik rajta. Azt kell megmutatnunk, hogy $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$. C kompaktsága miatt elegendő belátni, hogy az $\{A_j\}_{j \in J}$ rendszer centrált. Legyen $\{j_1, \ldots, j_n\} \subseteq J$, valamint $\Psi : C \longrightarrow \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, $\Psi(x) = \{y \in C \,|\, \sum_{k=1}^n p_{j_k}(y - f(y)) \leq \sum_{k=1}^n p_{j_k}(x - f(y))\}$. Megmutatjuk, hogy Ψ KKM-leképezés. Legyen $y \in \mathrm{conv}(\{x_1, \ldots, m\}) = K$. Ha $y \notin \bigcup_{l=1}^m \Psi(x_l)$, akkor $l = 1, \ldots, m$ esetén

$$\sum_{k=1}^n p_{j_k}(y - f(y)) > \sum_{k=1}^n p_{j_k}(x_l - f(y))$$

Ez azt jelenti, hogy $l = 1, \ldots, m$ esetén $x_l \in B_p(f(y), r)$, ahol $B_p(f(y), r)$ a $p = \sum_{k=1}^n p_{j_k}$ félnorma $f(y)$ közepű, $r = p(y - f(y))$ sugarú nyílt gömbje. Mivel $B_p(f(y), r)$ konvex, ezért $y \in K \subseteq B_p(f(y), r)$, és így $p(y - f(y)) > p(y - f(y))$, ami lehetetlen. Tehát Ψ KKM-leképezés, ezért a 3.3.5. Fan tétel miatt létezik $y_0 \in C$, melyre $\sum_{k=1}^n p_{j_k}(y_0 - f(y_0)) \leq \sum_{k=1}^n p_{j_k}(x - f(y_0))$ teljesül minden $x \in C$-re. Speciálisan $f(y_0)$-ra is, így $p_{j_k}(y_0 - f(y_0)) = 0$, ami azt jelenti, hogy $y_0 \in \bigcap_{k=1}^n A_{j_k}$.

A most következő tétel tartalmilag inkább a negyedik szakaszhoz tartozik, azonban a KKM-leképezésekhez való kapcsolata miatt itt tárgyaljuk.

3.3.7. Tétel. (Browder) *Legyen E topologikus vektortér, $C \subseteq E$ nemüres, kompakt, konvex halmaz, és $\Gamma : C \longrightarrow \mathcal{P}(C) \setminus \{\emptyset\}$. Tegyük fel, hogy minden $x \in C$-re $\Gamma(x)$ konvex, és minden $y \in C$-re $\Gamma^{-1}(y)$ nyílt. Ekkor létezik olyan $x_0 \in C$, hogy $x_0 \in \Gamma(x_0)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekten, hogy minden $x \in C$-re $x \notin \Gamma(x)$. Legyen $u \in C$-re $M(u) = \{y \in C \,|\, u \notin \Gamma(y)\} = \Gamma^{-1}(y)^c$, amely a feltételek szerint zárt részhalmaza C-nek, és így kompakt.

Megmutatjuk, hogy M KKM-leképezés. Legyen $\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq C$. Tegyük fel, hogy létezik $v \in \mathrm{conv}(\{u_1, \ldots, u_k\})$, melyre $v \notin \bigcup_{j=1}^k M(u_j)$. Ez M definíciója szerint azt jelenti, hogy minden $j = 1, \ldots, k$ esetén $u_j \in \Gamma(v)$. $\Gamma(v)$ konvex, ezért $v \in \Gamma(v)$, ami ellentmond a feltevésünknek, következésképpen M KKM-leképezés. A 3.3.5. Fan tétel miatt létezik $u_0 \in C$, hogy $u_0 \in \bigcap_{u \in C} M(u)$, ami azt jelenti, hogy minden $u \in C$ esetén $u_0 \notin \Gamma^{-1}(u)$, vagyis $\Gamma(u_0) = \emptyset$. Ez pedig ellenmond annak, hogy minden $u \in C$-re $\Gamma(u) \neq \emptyset$. $\square$

3.3.8. Tétel. *Legyen E szeparált topologikus vektortér, $C \subseteq E$ nemüres, kompakt, konvex halmaz. Legyen $A \subseteq C \times C$ olyan zárt halmaz, melyre teljesülnek a következők:*

(i) Minden $x \in C$ esetén $(x, x) \in A$.

(ii) Minden rögzített $y \in C$ esetén az $A_y^c = \{x \in C \,|\, (x, y) \notin A\}$ konvex.

Ekkor létezik olyan $y_0 \in C$, melyre $C \times \{y_0\} \subseteq A$.

Bizonyítás. Minden $x \in C$ esetén legyen $\Psi(x) = \{y \in C \,|\, (x, y) \in A\}$, amely egy kompakt halmaz. Elég megmutatnunk, hogy Ψ KKM-leképezés, mert ekkor a 3.3.5. Fan tétel miatt létezik $y_0 \in \bigcap_{x \in C} \Psi(x)$, vagyis $C \times \{y_0\} \subseteq A$. Tegyük fel, hogy Ψ nem KKM-leképezés, azaz létezik $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq C$ és $y \in \operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_k\})$, hogy $y \notin \bigcup_{j=1}^{n} \Psi(x_j)$. Ez azt jelenti, hogy $j = 1, \ldots, n$ esetén $(x_j, y) \notin A$. *(ii)* miatt az $A_y^c = \{x \in C \,|\, (x, y) \notin A\}$ halmaz konvex, ezért $y \in A_y^c$. Ez viszont ellentmond *(i)*-nek. $\square$

3.3.9. Definíció. Legyen V vektortér $\mathbb{F}$ felett, $C \subseteq V$ konvex halmaz. Egy $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény kvázikonvex, ha minden $c \in \mathbb{R}$ esetén az $\{f < c\}$ halmaz konvex.

3.3.10. Tétel. *Legyen E topologikus vektortér, $C \subseteq E$ nemüres, kompakt, konvex halmaz. Legyen $\varphi : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in C$-re $\varphi(x, x) \geq 0$, és $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy minden $x_0 \in C$ esetén a $\varphi(x_0, \cdot) + f(\cdot)$ függvény kvázikonvex, valamint minden $y_0 \in C$ esetén a $\varphi(\cdot, y_0) - f(\cdot)$ függvény felülről félig folytonos. Ekkor létezik olyan $\tilde{x} \in C$, melyre $\varphi(\tilde{x}, y) + f(y) \geq f(\tilde{x})$ teljesül minden $y \in C$ esetén.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekten, hogy minden $x_0 \in C$-hez van olyan $y_0 \in C$, melyre $\varphi(x_0, y_0) + f(y_0) < f(x_0)$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in C$ esetén a $\Psi(x) = \{y \in C \,|\, \varphi(x, y) + f(y) < f(x)\}$ halmaz nemüres. Tetszőleges $x \in C$-re $\Psi(x) = \{\varphi(x, \cdot) + f(\cdot) < f(x)\}$, ami a kvázikonvexitás miatt konvex halmaz, valamint tetszőleges $y \in C$-re $\Psi^{-1}(y) = \{\varphi(\cdot, y) - f(\cdot) < f(y)\}$, ami a felülről félig folytonosság miatt nyílt. Ezért a 3.3.7. Browder tétel miatt létezik olyan $z_0 \in C$, hogy $z_0 \in \Psi(z_0)$, azaz $\varphi(z_0, z_0) + f(z_0) < f(z_0)$, ami ellentmond annak, hogy minden $x \in C$-re $\varphi(x, x) \geq 0$. $\square$

A következő halmazoknak fontos szerep jut a halmazértékű leképezések fixpontelméletében.

3.3.11. Definíció. Legyen V vektortér $\mathbb{F}$ felett, $K \subseteq V$ konvex halmaz, és $x \in K$.

- $I_K(x) := \{z \in V \big| \exists y \in K, \exists c > 0 : z = x + c(y - x)\}$
- $O_K(x) := \{z \in V \big| \exists y \in K, \exists c < 0 : z = x + c(y - x)\}$
- $IF_K(x) := \{z \in V \big| \exists y \in K, \exists \lambda \in \mathbb{F}, \mathcal{R}\boldsymbol{e}\, \lambda > \frac{1}{2} : z = x + \lambda(y - x)\}$
- $OF_K(x) := \{z \in V \big| \exists y \in K, \exists \lambda \in \mathbb{F}, \mathcal{R}\boldsymbol{e}\, \lambda < -\frac{1}{2} : z = x + \lambda(y - x)\}$

Ha V topologikus vektortér, akkor jelölje $W_K(x)$ az $\overline{I}_K(x)$ vagy az $\overline{O}_K(x)$ halmazt.

3.3.12. Állítás. *Legyen V vektortér, $K \subseteq E$ konvex halmaz, $x \in K$. Ekkor a következők teljesülnek:*

(a) $K \subseteq I_K(x)$.

(b) $O_K(x) = \{y \in V \big| x - (y - x) \in I_K(x)\}$,
$OF_K(x) = \{y \in V \big| x - (y - x) \in IF_K(x)\}$.

(c) Egy $z \in V$ vektorra $z \in IF_K(x)$ pontosan akkor teljesül, ha létezik $\beta \in \mathbb{F}$, $|\beta| < 1$, hogy $\beta x + (1 - \beta)z \in K$.

(d) Ha V valós vektortér, akkor $IF_K(x) = I_K(x)$, és $OF_K(x) = O_K(x)$.

(e) $I_K(x)$ és $O_K(x)$ konvex halmaz.

(f) Ha $\boldsymbol{0}_V \in K$, akkor $y \in I_K(x)$ esetén $\frac{1}{2}y \in I_K(x)$ teljesül, és ha V topologikus vektortér, akkor $y \in \overline{I}_K(x)$-ből $\frac{1}{2}y \in \overline{I}_K(x)$ következik.

Bizonyítás. *(a),(b)* A definíciókból nyilvánvaló.

(c) $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$ pontosan akkor teljesül ($\mathcal{R}\boldsymbol{e}\, \lambda > \frac{1}{2}$)-del és $y \in K$-val, ha $y = (1 - \frac{1}{\lambda})x + (1 - (1 - \frac{1}{\lambda}))z$. $\mathcal{R}\boldsymbol{e}\, \lambda > \frac{1}{2}$ miatt $|\lambda - 1| \le |\lambda|$, ezért $\beta = (1 - \frac{1}{\lambda})$ esetén pontosan a kívánt alakot kapjuk.

(d) A definíciókból $IF_K(x) \subseteq I_K(x)$ nyilvánvaló. Legyen $z \in I_K(x)$. Ekkor $z = (1 - c)x + cy$ valamely $c > 0$-val és $y \in K$-val. Ha $c > \frac{1}{2}$, akkor $z \in IF_K(x)$. Ha $c \le \frac{1}{2}$, akkor K konvexitása miatt $z \in K$, és így $z = x + 1(z - x) \in IF_K(x)$.
Az $O_K(x)$ és $OF_K(x)$ halmazok egyenlősége az előzőekből és a *(b)* pontból adódik.

(e) Legyen $z_1, z_2 \in I_K(x)$, és legyen $t \in (0, 1)$. Ekkor $j = 1, 2$ esetén $z_j = c_j y_j + (1 - c_j)x$ alakban írható, ahol $c_j > 0$ és $y_j \in K$. z_1 és z_2 konvex kombinációja:

$$tz_1 + (1 - t)z_2 = tc_1y_1 + t(1 - c_1)x + (1 - t)c_2y_2 + (1 - t)(1 - c_2)x =$$
$$= (1 - (tc_1 + (1 - t)c_2))x + (tc_1 + (1 - t)c_2)(\frac{tc_1}{tc_1 + (1 - t)c_2}y_1 + \frac{(1 - t)c_2}{tc_1 + (1 - t)c_2}y_2),$$

ahol az utolsó egyenlőségben az összeg második tagja K-nak eleme a konvexitás miatt, és így $tz_1 + (1-t)z_2 \in I_K(x)$.
Az iménti számolás $z_1, z_2 \in O_K(x)$ esetén is végrehajtható, ezért $O_K(x)$ is konvex.

(f) Legyen $y \in I_K(x)$. Ekkor $I_K(x)$ definíciójából létezik $t \in [0,1)$, hogy $(1-t)y + tx = z \in K$. Mivel K konvex és $\mathbf{0} \in K$, azért

$$z' = (1-\alpha)\mathbf{0} + \alpha z = (1-\beta)(\frac{1}{2}y) + \beta x \in K, \tag{3.3}$$

ahol $\alpha = \frac{1}{2-t}$ és $\beta = \frac{t}{2-t}$. $t \in [0,1)$-ből $\beta \in [0,1)$ következik, és így $z' \in [\frac{1}{2}y, x) \bigcap K$, amiből $\frac{1}{2}y \in I_K(x)$ adódik.
Ha $y \in \overline{I}_K(x)$, akkor alkalmazzuk az előző esetet és a $v \longmapsto \frac{1}{2}v$ leképezés folytonosságát. □

3.3.13. Tétel. *Legyen E valós topologikus vektortér, $K \subseteq E$ nemüres, kompakt, konvex halmaz, és $g : K \longrightarrow E^*$ folytonos függvény. Jelölje $\langle \cdot, \cdot \rangle$ az E^* és E közötti természetes dualitást. Ekkor létezik olyan $v \in K$, melyre tetszőleges $w \in W_K(v)$ esetén $\langle g(v), v-w \rangle \geq 0$.*

Bizonyítás. A $\varphi_1 : K \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_1(x,y) = \langle g(x), x-y \rangle$ függvény a $K \times K$ halmazon és a K-n értelmezett azonosan 0 függvény kielégítik a 3.3.10. Tétel követelményeit. Ezért létezik olyan $v \in K$, melyre $\langle g(v), v-w \rangle \geq 0$ teljesül minden $w \in K$-ra.

Ha $w \in I_K(v) \setminus K$, akkor létezik $u \in K$ és $c > 1$, hogy $w = v + c(u-v)$. Ekkor $\varphi_1(v,w) = \langle g(v), v - (v + c(u-v)) \rangle = c\langle g(v), v-u \rangle \geq 0$, mert $c > 1$ és $u \in K$. Mivel a szóbanforgó függvények mindegyike folytonos, határátmenettel következik, hogy az egyenlőtlenség $w \in \overline{I}_K(v)$ esetén is fennáll.

Legyen $\varphi_2 : K \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_2(x,y) = \langle g(x), y-x \rangle$. Az előző két bekezdésben foglaltakhoz teljesen hasonló módon adódik egy $v \in K$, hogy minden $w' \in I_K(v)$-re $\langle g(v), w'-v \rangle \geq 0$. A 3.3.12. Állítás *(b)* pontjából minden $w \in O_K(v)$-re $2v-w \in I_K(v)$, ezért $0 \leq \langle g(v), (2v-w)-v \rangle = \langle g(v), v-w \rangle$. Így minden $w \in O_K(v)$ esetén is teljesül az egyenlőtlenség, de akkor $w \in \overline{O}_K(v)$ esetén is. □

3.4. Halmazértékű leképezések fixpontjai

Ebben a szakaszban a Brouwer-féle fixponttétel halmazértékű leképezésekre történő általánosításait tárgyaljuk, melyek következményeként egyértékű folytonos függvényekre kapunk további általános fixponttételeket.

3.4.1. Definíció. Legyen X topologikus tér, $Z \subseteq X$, $\Phi : Z \longrightarrow \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ halmazértékű leképezés. Egy $x_0 \in Z$ a Φ fixpontja, ha $x_0 \in \Phi(x_0)$ teljesül.

3.4.2. Definíció. Legyen V vektortér $\mathbb{F}$ felett, $p : V \longrightarrow \mathbb{R}$ félnorma. Ekkor tetszőleges $v \in V$ és $\emptyset \neq B \subseteq V$ esetén jelölje $p(v - B)$ az $\inf\{p(v-u) | u \in B\}$ valós számot.

3.4.3. Lemma. *Legyen E szeparált topologikus vektortér, $X \subseteq E$ nemüres halmaz, $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos félnorma. Ha $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ folytonos leképezés, akkor a $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = p(\boldsymbol{0}_E - \Phi(x))$ függvény folytonos.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy g felülről és alulról félig folytonos. Legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A p félnorma folytonossága miatt a $\{p < c\}$ halmaz nyílt E-ben, ezért a $\{g < c\} = \Phi^{-1}(\{p < c\})$ halmaz is nyílt, mert Φ alulról félig folytonos. Ez viszont pontosan azt jelenti, hogy g felülről félig folytonos.

A p félnorma folytonossága miatt a $\{p \leq c\}$ halmaz zárt E-ben, ezért a $\{g \leq c\} = \Phi^{-1}(\{p \leq c\})$ halmaz is zárt, mert Φ felülről félig folytonos. Ez viszont pontosan azt jelenti, hogy g alulról félig folytonos. $\square$

3.4.4. Tétel. (Park) *Legyen E olyan topologikus vektortér, amelyet E^* topologikus duálisa szétválaszt, $K \subseteq E$ nemüres, kompakt, konvex halmaz. Legyen $\Phi : K \longrightarrow \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ olyan folytonos halmazértékű leképezés, hogy minden $x \in K$ esetén $\Phi(x)$ kompakt és konvex. Ekkor:*

(i) *Φ-nek létezik fixpontja,*

vagy

(ii) *létezik egy $v \in K$ és egy olyan $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos félnorma, melyekre $0 < p(v - \Phi(v)) \leq p(w - \Phi(v))$ teljesül minden $w \in W_K(v)$-re.*

Bizonyítás. Ha Φ-nek nincs fixpontja, akkor $\mathbf{0} \notin K' = \{x - z | x \in K, z \in \Phi(x)\}$, amely egy kompakt halmaz K kompaktsága és Φ folytonossága miatt. Mivel E^* szétválasztó E felett, azért minden $y \in K'$-re létezik olyan $l_y \in E^*$, hogy $l_y(y) \neq 0$. Az l_y lineáris funkcionál folytonos, ezért az $\mathcal{U} = \{U_y\}_{y \in K'}$, $U_y = \{l_y \neq 0\}$ rendszer nyílt fedése K'-nek. K' kompakt, tehát $\mathcal{U}$-ból kiválasztható egy véges $\{U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}\}$ fedés. Legyen $x \in E$ esetén

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} |\, l_{y_j}(x)|.$$

p folytonos félnorma E-n, és $K' \subseteq \{p > 0\}$. Legyen $(x, y) \in K \times E$ esetén $\varphi(x, y) = p(y - \Phi(x)) - p(x - \Phi(x))$. Minden $x \in K$-ra $\varphi(x, x) \geq 0$, rögzített $x \in K$ esetén $\varphi(x, \cdot)$ kvázikonvex, és rögzített $y \in K$ esetén $\varphi(\cdot, y)$ folytonos a 3.4.3. Lemma miatt. Ezért a 3.3.10. Tétel miatt létezik olyan $v \in K$, melyre $0 \leq \varphi(v, w) = p(w - \Phi(v)) - p(v - \Phi(v))$ minden $w \in K$ esetén. p definiciója miatt $p(v - \Phi(v)) > 0$. Ha $w \in I_K(v) \setminus K$, akkor létezik $u \in K$ és $r > 1$, hogy $w = v + r(u - v)$. Tegyük fel, hogy $p(w - \Phi(v)) < p(v - \Phi(v))$. Mivel $\frac{1}{r}w + (1 - \frac{1}{r})v = u \in K$, azért

$$p(u - \Phi(v)) \leq \frac{1}{r}p(w - \Phi(v)) + (1 - \frac{1}{r})p(v - \Phi(v)) < p(v - \Phi(v)),$$

ami lehetetlen. Következésképpen minden $w \in I_K(v)$ esetén $p(v-\Phi(v)) \leq p(w-\Phi(v))$, de akkor a folytonosság miatt $w \in \overline{I}_K(v)$-re is.

A $\Psi(x) = x - (\Phi(x) - x)$ leképezéshez is létezik $v \in K$, hogy minden $w' \in I_K(v)$-re $0 < p(v - \Psi(v)) \leq p(w - \Psi(v))$. Ha $w \in O_K(v)$, akkor $w' = 2v - w \in I_K(v)$, és így $p(v - \Phi(v)) \leq p(w - \Phi(v))$, amiből $w \in \overline{O}_K(v)$-re is adódik az egyenlőtlenség. □

3.4.5. Tétel. (2. Nemlineáris alternatíva) *Legyen E olyan topologikus vektortér, amelyet E^* topologikus duálisa szétválaszt, $K \subseteq E$ nemüres, kompakt, konvex halmaz. Legyen $f : K \longrightarrow E$ folytonos függvény. Ekkor:*

(i) *f-nek létezik fixpontja,*

vagy

(ii) *létezik $v \in K$ és egy olyan $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos félnorma, melyekre $0 < p(v - f(v)) \leq p(w - f(v))$ teljesül minden $w \in W_K(v)$-re.*

Bizonyítás. A 3.1.3. Állítás *(c)* pontja miatt a $\Phi : K \longrightarrow \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, $\Phi(x) = \{f(x)\}$ folytonos leképezés, ezért a 3.4.4. PARK tételből következik az állítás. □

3.4.6. Tétel. (FAN) *Legyen E szeparált topologikus vektortér $\mathbb{F}$ felett, $C \subseteq E$ nemüres, kompakt, konvex halmaz. Legyen $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos félnorma, és legyen $f : C \longrightarrow E$ folytonos függvény. Ekkor létezik $x_0 \in C$, amelyre $p(x_0 - f(x_0)) = \min_{x \in C} p(x - f(x_0))$ teljesül.*
Speciálisan, ha p norma és $f(C) \subseteq C$, akkor $x_0 = f(x_0)$.

Bizonyítás. Legyen $A = \{(x, y) \in C \times C \,|\, p(y - f(y)) \leq p(x - f(y))\}$. Ez az A halmaz zárt, mert f és p folytonos, valamint minden $x \in C$ esetén $(x, x) \in A$. Rögzített $y \in C$ esetén az $\{x \in C \,|\, (x, y) \notin A\} = B_p(f(y), p(y - f(y))$ halmaz konvex. Így az $A \subseteq C \times C$ halmaz teljesíti a 3.3.8. Tétel feltételeit, tehát létezik olyan $x_0 \in C$, hogy $C \times \{x_0\} \subseteq A$, azaz $p(x_0 - f(x_0)) \leq p(x - f(x_0))$ teljesül minden $x \in C$ esetén. □

3.4.7. Megjegyzés. Fan előző tétele bizonyos szempontból élesebb a 2. Nemlineáris alternatívánál, hiszen tetszőleges szeparált topologikus vektortér feletti tetszőleges félnormáról szól. A 2. Nemlineáris alternatívában viszont a minimumot bővebb halmazon keressük.

A most következő tételben talán a legáltalánosabb eredményeket bizonyítjuk kompakt és konvex halmazon értelmezett, folytonos halmazértékű leképezésekre.

3.4.8. Tétel. *Legyen E topologikus vektortér, E^* szétválasztó E felett. Legyen $K \subseteq E$ nemüres, kompakt, konvex halmaz, és $\Phi : K \longrightarrow \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ olyan folytonos leképezés, hogy minden $x \in K$ esetén $\Phi(x)$ konvex és kompakt. Ha az alábbi feltételek valamelyike teljesül, akkor Φ-nek létezik fixpontja.*

(i) *Minden $x \in \partial K$-hoz létezik olyan $\lambda \in \mathbb{F}$, $|\lambda| < 1$, hogy $(\lambda x + (1-\lambda)\Phi(x)) \bigcap W_K(x) \neq \emptyset$.*

(ii) *Minden $x \in \partial K$-ra $\Phi(x) \bigcap W_K(x) \neq \emptyset$.*

(iii) *Minden $x \in \partial K$-ra $\Phi(x) \bigcap I_K(x) \neq \emptyset$.*

(iii)' *Minden $x \in \partial K$-ra $\Phi(x) \bigcap O_K(x) \neq \emptyset$.*

(iv) *Minden $x \in \partial K$-ra $\Phi(x) \bigcap K \neq \emptyset$.*

(v) *Minden $x \in \partial K$-ra $\Phi(x) \subseteq W_K(x)$.*

(vi) *Minden $x \in \partial K$-ra $\Phi(x) \subseteq K$.*

(vii) *$\Phi(K) \subseteq K$.*

(viii) *Minden $x \in \partial K$-ra $\Phi(x) \subseteq IF_K(x)$.*

(viii)' *Minden $x \in \partial K$-ra $\Phi(x) \subseteq OF_K(x)$.*

Bizonyítás. *(i)* Tegyük fel, hogy Φ-nek nincs fixpontja. Ekkor a 3.4.4. Park tétel szerint létezik $v \in K$ és egy $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos félnorma, hogy minden $w \in W_K(v)$ esetén

$$0 < p(v - \Phi(v)) \leq p(w - \Phi(v)) \tag{3.4}$$

teljesül. Ha $v \in \operatorname{int} K$, akkor létezik $\lambda \in \mathbb{F}$, $|\lambda| < 1$ és $z_0 \in \Phi(v)$, melyekre $w = \lambda v + (1-\lambda)z_0 \in W_K(v) = E$. Tehát $v \notin \Phi(v)$ miatt $v \in \partial K$ és $v \in \operatorname{int} K$ esetén is létezik $|\lambda| < 1$ és $z_0 \in \Phi(v)$, melyre $w = \lambda v + (1-\lambda)z_0 \in W_K(v)$. Ebből viszont

$$p(w - \Phi(v)) = p((\lambda v + (1-\lambda)z_0) - \Phi(v)) \leq |\lambda| p(v - \Phi(v)) < p(v - \Phi(v))$$

következik, ami ellentmond (3.4)-nak.

(ii) Ez a feltétel $\lambda = 0$-val az *(i)*-ben megfogalmazott feltétel.

(iii),*(iii)'*,*(v)* Nyilvánvaló *(ii)*-ből.

(iv) A 3.3.12. állítás *(a)* pontja alapján $K \subseteq I_K(x)$ minden $x \in K$-ra, ezért *(iii)* adja az állítást.

(vi),*(vii)* Nyilvánvaló *(iv)*-ből.

(viii) A 3.3.12. Állítás *(c)* pontjából következik, hogy valamely $\lambda \in \mathbb{F}$, $|\lambda| < 1$-re $(\lambda x + (1-\lambda)\Phi(x)) \bigcap K \neq \emptyset$, ezért az állítás nyilvánvaló *(i)*-ből.

(viii)' Az előző pont alkalmazható a $\Psi(x) = x - (\Phi(x) - x)$ leképezésre a 3.3.12. Állítás *(b)* pontja szerint. Ezért Ψ-nek van fixpontja, és így Φ-nek is. □

3.4.9. Megjegyzés. Ha E valós topologikus vektortér, akkor van *(i)*-nél látszólag általánosabb, valójában ekvivalens feltétel:

(0) Minden $x \in \partial K$-hoz létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 1$, hogy $(\lambda x + (1-\lambda)\Phi(x)) \bigcap W_K(x) \neq \emptyset$.

Valóban, *(i)*-ből *(0)* nyilvánvalóan következik. Ha pedig $\lambda x + (1-\lambda)y_0 = (1-c)x + cy$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \leq -1$-gyel, $y_0 \in \Phi(x)$-szel, $y \in K$-val és $c > 0$-val, akkor $y_0 = (1 - \frac{c}{1-\lambda})x + \frac{c}{1-\lambda}y$, amiből határátmenettel és a 3.3.12. Állítás *(b)* kapjuk, hogy *(0)* esetén *(ii)* fennáll, és így *(i)* is.

3.4.10. Tétel. *Legyen (E, τ) topologikus vektortér, E^* szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ nemüres, kompakt, konvex halmaz. Legyen $\Psi : K \longrightarrow \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ olyan felülről félig folytonos leképezés, hogy minden $x \in X$ esetén $\Psi(x)$ konvex és kompakt. Ha az alábbi feltételek valamelyike teljesül, akkor Ψ-nek létezik fixpontja.*

(0) *Minden $x \in \partial K$-hoz létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 1$, hogy $(\lambda x + (1-\lambda)\Psi(x)) \bigcap W_K(x) \neq \emptyset$.*

(i) *Minden $x \in \partial K$-hoz létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| < 1$, hogy $(\lambda x + (1-\lambda)\Psi(x)) \bigcap W_K(x) \neq \emptyset$.*

(ii) *Minden $x \in \partial K$-ra $\Psi(x) \bigcap W_K(x) \neq \emptyset$.*

(iii) *Minden $x \in \partial K$-ra $\Psi(x) \bigcap I_K(x) \neq \emptyset$.*

(iii)' *Minden $x \in \partial K$-ra $\Psi(x) \bigcap O_K(x) \neq \emptyset$.*

(iv) *Minden $x \in \partial K$-ra $\Psi(x) \bigcap K \neq \emptyset$.*

(v) *Minden $x \in \partial K$-ra $\Psi(x) \subseteq W_K(x)$.*

(vi) *Minden $x \in \partial K$-ra $\Psi(x) \subseteq K$.*

(vii) *$\Psi(K) \subseteq K$.*

Bizonyítás. Elegendő abban az esetben bizonyítanunk a tételt, amikor E valós, mert áttérhetünk az (E, τ) alatt fekvő $(E_{\mathbb{R}}, \tau)$ valós topologikus vektortérre.

(0) Jelölje $\langle \cdot, \cdot \rangle$ az E^* és E közötti természetes dualitást. Tegyük fel, hogy Ψ-nek nincs fixpontja. Ekkor minden $u \in K$ esetén $\mathbf{0} \notin (u - \Psi(u))$, és $u - \Psi(u)$ kompakt, mert $\Psi(u)$ kompakt. Mivel E^* szétválasztja E pontjait, ezért minden $y \in (u - \Psi(u))$-hoz létezik olyan $l_y \in E^*$, melyre $l_y(y) < 0$. Ekkor az $U_y = \{z \in E \,|\, l_y(z) < 0\}$ halmaz nyílt

l_y folytonossága miatt, és az $\{U_y\}_{y\in(u-\Psi(u))}$ rendszer nyílt fedése az $u-\Psi(u)$ kompakt halmaznak. Ezért létezik egy véges $\{U_{y_1},\ldots,U_{y_k}\}$ részfedés. Legyen $x\in E$ esetén

$$h(x)=\sum_{j=1}^{k} l_{y_j}(x).$$

Ekkor $h\in E^*$, és $h(v)<0$ minden $v\in(u-\Psi(u))$ esetén. Tetszőleges $h'\in E^*$ esetén legyen

$$N_{h'}=\big\{u'\in K\big|(u'-\Psi(u'))\subseteq\{h'<0\}\big\}.$$

Mivel Ψ felülről félig folytonos, azért $N_{h'}$ nyílt részhalmaza K-nak, és minden $u'\in K$ eleme valamely $N_{h'}$-nek a fentiek szerint. Ezért $\{N_{h'}\}_{h'\in E^*}$ nyílt fedése K-nak. K kompakt, ezért létezik egy $\{N_{h'_1},\ldots,N_{h'_n}\}$ véges fedés is. Legyen $\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$ ennek a fedésnek alárendelt egységbontás, és $x\in K$ esetén legyen

$$g(x)=\sum_{m=1}^{n}\beta_m(x)h'_m.$$

Ez az $g:K\longrightarrow E^*$ függvény folytonos, valamint minden $u\in K$ és $v\in(u-\Psi(u))$ esetén kapjuk, hogy

$$\big\langle g(u),v\big\rangle=\sum_{m=1}^{n}\beta_m(u)h'_m(v)<0, \tag{3.5}$$

hiszen $\beta_m(u)>0$-ból $h'_m(v)<0$ következik, és valamely m-re $\beta_m(u)\neq 0$. Ezért a 3.3.13. Tétel alapján létezik olyan $u_0\in K$, melyre

$$\big\langle g(u_0),u_0-u\big\rangle\geq 0 \tag{3.6}$$

teljesül minden $u\in W_K(u_0)$ esetén.

A feltételből adódóan létezik olyan (w_α) $I_K(u_0)$-ban vagy $O_K(u_0)$-ban haladó általánosított sorozat, hogy valamely $\lambda<1$-gyel és $z_0\in\Psi(u_0)$-lal $w_\alpha\to w_0=(\lambda u_0+(1-\lambda)z_0)\in W_K(u_0)$. (3.6) miatt $\big\langle g(u_0),u_0-w_\alpha\big\rangle\geq 0$, ebből a folytonosság miatt határátmenettel $\big\langle g(u_0),u_0-w_0\big\rangle\geq 0$, azaz $0\leq\big\langle g(u_0),(1-\lambda)u_0-(1-\lambda)z_0\big\rangle=(1-\lambda)\big\langle g(u_0),u_0-z_0\big\rangle$. Ez viszont $\lambda<1$ és (3.5) miatt ellentmondás.

(i),(ii) Az előző 3.4.9. Megjegyzés szerint *(0),(i),(ii)* ekvivalens feltételek.

(iii),(iii)',(v) Nyilvánvaló *(ii)*-ből.

(iv) A 3.3.12. állítás *(a)* pontja alapján $K\subseteq I_K(x)$ minden $x\in K$-ra, ezért *(iii)* adja az állítást.

(vi),(vii) Nyilvánvaló *(iv)*-ből. □

3.4.11. Megjegyzés. *(i)*-ben lényeges, hogy λ valós szám. Egyébként tétel a *(ii)-(vii)* pontjai azonosak a 3.4.8. Tétel pontjaival. Fontosnak tartjuk megjegyezni, hogy kikhez köthető az iménti tétel. Lokálisan konvex terekben *(ii)*-t Halpern, *(iii)*-at és *(iii)'*-t Browder, *(vii)*-et Fan és Glicksberg bizonyította először.

3.4.12. Tétel. (Halpern) *Legyen E olyan topologikus vektortér, amelyet E^* topologikus duálisa szétválaszt, $K \subseteq E$ nemüres, kompakt, konvex halmaz. Legyen $\Psi : K \longrightarrow \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ olyan felülről félig folytonos leképezés, hogy minden $x \in K$-ra $\Psi(x)$ konvex és kompakt. Tegyük fel, hogy minden $x \in \partial K$-ra $\Psi(x) \bigcap \overline{O}_K(x) \neq \emptyset$. Ekkor $K \subseteq \Psi(K)$.*

Bizonyítás. A 3.3.12. Állítás *(b)* és *(f)* pontja miatt a $\Phi(x) = x - (\Psi(x) - x)$ leképezésre $\Phi(x) \bigcap \overline{I}_K(x) \neq \emptyset$, és $\frac{1}{2}\Phi(x) \bigcap \overline{I}_K(x)$ minden $x \in K$ esetén. Ezért a 3.4.10. Tétel *(ii)* pontja miatt létezik egy $u_0 \in K$, melyre $u_0 \in \frac{1}{2}\Phi(u_0)$. Ez azt jelenti, hogy $u_0 = u_0 - \frac{1}{2}y$ valamely $y \in \Psi(u_0)$-ra. Ebből $y = \mathbf{0}$ következik, tehát $\mathbf{0} \in K$.

Ha $z \in K$ tetszőleges pont, akkor az előzőek miatt $\mathbf{0} \in (\Psi - z)(K) = \Psi(K) - z$, tehát $z \in \Psi(K)$. □

3.4.13. Tétel. (Halpern) *Legyen E kváziteljes, szeparált, lokálisan konvex tér, C nemüres, konvex, zárt részhalmaza E-nek. Legyen $\Psi : C \longrightarrow \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ olyan kompakt, felülről félig folytonos leképezés, hogy minden $x \in C$ esetén $\Psi(x)$ konvex és zárt. Tegyük fel, hogy minden $x \in \partial C$ esetén az alábbi feltételek valamelyike teljesül:*

(i) $\Psi(x) \bigcap I_C(x) \neq \emptyset$.

(i)' $\Psi(x) \bigcap O_C(x) \neq \emptyset$.

(ii) $\Psi(x) \bigcap C \neq \emptyset$.

(iii) $\Psi(x) \subseteq C$.

(iv) $\Psi(C) \subseteq C$.

Ekkor Ψ-nek létezik fixpontja.

Bizonyítás. *(i)* Legyen $x_0 \in C$. Mivel $\overline{\Psi(C)}$ kompakt, azért a 0.2.5. Krein tétel miatt $K = \overline{\text{conv}}(\overline{\Psi(C)} \bigcup \{x_0\})$ is kompakt, és így $K_0 = C \bigcap K$ nemüres, kompakt, konvex. Megmutatjuk, hogy minden $x \in K_0$-ra $\Psi(x) \bigcap I_{K_0}(x) \neq \emptyset$, és így a 3.4.10. Tétel *(iii)* pontja alapján készen leszünk.

Legyen $x \in K_0$. Mivel $\Psi(x) \bigcap I_C(x) \neq \emptyset$, valamely $y \in \Psi(x)$-re $[y, x) \bigcap C$ nemüres. Mivel $x \in K$ és $y \in K$, és K konvex, azért $[y, x) \subseteq K$. Mivel létezik $z \in [y, x) \bigcap C$, ezért $z \in [y, x) \bigcap C \bigcap K = [y, x) \bigcap K_0$, ami azt jelenti, hogy $\Psi(x) \bigcap I_{K_0}(x) \neq \emptyset$.

(i)' A már bizonyított *(i)* pont szerint a $\Phi(x) = x - (\Psi(x) - x)$ leképezésnek van fixpontja, és így Ψ-nek is.

(ii),(iii),(iv) Ezek a pontok *(i)*-ből következnek. □

3.4.14. Állítás. *Legyen E szeparált topologikus vektortér, $\emptyset \neq K \subseteq E$ kompakt halmaz, $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos félnorma. Ekkor a $Q_p : E \longrightarrow \mathcal{P}(K) \setminus \{\emptyset\}$, $Q_p(y) = \{x \in K \,|\, p(y - x) = p(y - K)\}$ leképezés felülről félig folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $B \subseteq K$ zárt halmaz, (y_α) $Q_p^{-1}(B)$-ben haladó konvergens általánosított sorozat, $y_\alpha \to y_0 \in E$. Megmutatjuk, hogy $y_0 \in Q_p^{-1}(B)$. Legyen minden α-ra $x_\alpha \in B$ olyan, hogy $p(y_\alpha - x_\alpha) = p(y_\alpha - K)$. Mivel B zárt részhalmaza a kompakt K halmaznak, azért B is kompakt, és így feltehető, hogy $x_\alpha \to x_0 \in B$. p folytonossága miatt $p(y_0 - x_0) = \lim_\alpha p(y_\alpha - x_\alpha) = \lim_\alpha p(y_\alpha - K) = p(y_0 - K)$, tehát $y_0 \in Q_p^{-1}(B)$. □

3.4.15. Tétel. (Reich) *Legyen K nemüres, kompakt, konvex halmaz az E kváziteljes, szeparált, lokálisan konvex térben, és legyen $\Psi : K \longrightarrow E$ olyan felülről félig folytonos leképezés, hogy minden $x \in K$-ra $\Psi(x)$ konvex és kompakt. Ha tetszőleges folytonos $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ félnormára, tetszőleges $x \in K$-ra melyre $p(x - \Psi(x)) > 0$ teljesül, $y \in \Psi(x)$ esetén fennáll*

(a) $p(y - \overline{I}_K(x)) < p(x - y)$,

vagy

(b) $p(y - \overline{O}_K(x)) < p(x - y)$,

akkor Ψ-nek létezik fixpontja.

Bizonyítás. ***(a)*** Legyen p folytonos félnorma. Legyen $\Delta : K \times E \longrightarrow \mathcal{P}(K \times E) \setminus \{\emptyset\}$, $\Delta(x, y) = Q_p(y) \times \Psi(x)$, ahol Q_p az előző állításban definiált függvény. Ψ és Q_p felülről félig folytonos, ezért Δ is az. $Q_p(E) = K$, valamint Ψ pontonként kompakt a K kompakt halmazon, ezért a 3.1.4. Állítás *(e)* pontja miatt $\Psi(K)$ kompakt. Következésképpen $\overline{\Delta(K \times E)}$ kompakt halmaz $K \times E$-ben, és így a 3.4.13. Halpern tétel *(iv)* pontja miatt létezik fixpontja, azaz olyan $(x_0, y_0) \in K \times E$ melyre $p(x_0 - y_0) = p(y_0 - K)$ valamely $y_0 \in \Psi(x_0)$-ra.

Belátjuk, hogy x_0 fixpontja Ψ-nek. Ha $p(x_0 - \Psi(x_0)) > 0$, akkor a feltétel miatt $p(x_0 + c(w - x_0) - y_0) < p(x_0 - y_0)$ valamely $w \in K$-ra és $c \geq 1$-re. Ez azonban nem teljesülhet, mert

$$\begin{aligned} p(x_0 + c(w - x_0) - y_0) &\geq cp(w - y_0) - (c - 1)p(x_0 - y_0) \geq \\ &\geq cp(y_0 - K) - (c - 1)p(x_0 - y_0). \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy a p folytonos félnormához van olyan $x_0 \in K$, melyre teljesül, hogy $p(x_0 - \Psi(x_0)) = 0$. Ha P jelöli az E-n értelmezett folytonos félnormák halmazát, akkor minden $p \in P$-re a $Z_p = \{x \in K \,|\, p(x - \Psi(x)) = 0\}$ halmaz zárt és nemüres. E lokális konvexitása és szeparáltsága miatt elegendő megmutatnunk, hogy $\bigcap_{p \in P} Z_p \neq \emptyset$.

Ehhez K kompaktsága miatt elégséges, hogy a $\{Z_p\}_{p\in P}$ rendszer centrált. Ez viszont nyilvánvaló, hiszen ha $p_1, \ldots, p_n \in P$, és $q = \sum_{j=1}^{n} p_j$, akkor $\bigcap_{j=1}^{n} Z_p \subseteq Z_q$.

(b) A 3.3.12. Állítás *(b)* pontja miatt a $\Phi(x) = x - (\Psi(x) - x)$ leképezésre az ***(a)*** feltétel teljesül, ezért létezik $z_0 \in K$, hogy $z_0 \in (z_0 - (\Psi(z_0) - z_0))$, amiből $z_0 \in \Psi(z_0)$ következik. □

3.4.16. Megjegyzés. Reich iménti tétele ugyanazt állítja kváziteljes, szeparált, lokálisan konvex terekben felülről félig folytonos leképezésekre, mint a 3.4.4. Park tétel folytonos leképezésekre olyan terekben, melyet a topologikus duálisa szétválaszt. Következésképpen felülről félig folytonos leképezésekre kváziteljes, szeparált, lokálisan konvex térben eljárhatunk a folytonos esethez teljesen hasonló módon.

3.4.17. Tétel. (Reich) *Legyen E szeparált, lokálisan konvex tér, $K \subseteq E$ nemüres, kompakt, konvex halmaz. Legyen $\Psi : K \longrightarrow \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ olyan felülről félig folytonos leképezés, hogy minden $x \in X$ esetén $\Psi(x)$ kompakt és konvex, és tegyük fel, hogy az alábbi két feltétel valamelyike teljesül:*

(i) Minden $x \in K$-ra $\Psi(x) \subseteq IF_K(x)$.

(ii) Minden $x \in K$-ra $\Psi(x) \subseteq OF_K(x)$.

Ekkor Ψ-nek létezik fixpontja.

Bizonyítás. (i) Legyen $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos félnorma. Mivel minden kompakt tér parakompakt, $\varepsilon > 0$-ra legyen $f_\varepsilon : K \longrightarrow E$ a 3.2.4. Reich tételben szereplő függvény. A 3.4.6. Fan tétel miatt minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $x_\varepsilon \in K$, hogy $p(f_\varepsilon(x_\varepsilon) - K) = p(f_\varepsilon(x_\varepsilon) - x_\varepsilon)$. f_ε tulajdonsága, hogy léteznek olyan $y_\varepsilon \in K$ és $z_\varepsilon \in \Psi(y_\varepsilon)$ vektorok, hogy $p(x_\varepsilon - y_\varepsilon) < \varepsilon$, és $p(f_\varepsilon(x_\varepsilon) - z_\varepsilon) < \varepsilon$. Mivel K és $\Psi(K)$ is kompakt a 3.1.4. Állítás *(e)* pontja alapján, létezik olyan $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, $(y_\alpha)_{\alpha\in A}$ és $(z_\alpha)_{\alpha\in A}$ általánosított részsorozata (x_ε)-nak, (y_ε)-nak és (z_ε)-nak, melyek konvergensek: $x_\alpha \to x_0 \in K, y_\alpha \to y_0 \in K, z_\alpha \to z_0 \in \Psi(K)$. Mivel

$$|p(f_\varepsilon(x_\varepsilon) - x_\varepsilon) - p(z_\varepsilon - x_\varepsilon)| \le p(f_\varepsilon(x_\varepsilon) - z_\varepsilon) < \varepsilon,$$

és $|p(f_\varepsilon(x_\varepsilon) - K) - p(z_\varepsilon - K)| < \varepsilon$, x_ε extremális tulajdonságából kapjuk, hogy $p(z_0 - K) = p(z_0 - x_0) = p(z_0 - y_0)$. Ψ felülről félig folytonossága miatt $z_0 \in \Psi(y_0) \subseteq IF_K(y_0)$, és így a 3.3.12. Állítás *(d)* pontja miatt létezik $|\lambda| < 1$ és $u_0 \in IF_K(y_0)$, hogy $\lambda y_0 + (1 - \lambda)z_0 = u_0$. Ebből következik, hogy $p(z_0 - K) = p(z_0 - y_0) \le p(z_0 - u_0) = p(\lambda(z_0 - y_0)) = |\lambda| p(z_0 - y_0)$. Ezért $p(y_0 - \Psi(y_0)) = p(y_0 - z_0) = 0$, tehát minden p folytonos félnormához van olyan $y_0 \in K$, melyre $p(y_0 - \Psi(y_0)) = 0$. Ha P jelöli az E-n értelmezett folytonos félnormák halmazát, akkor minden $p \in P$-re a $Z_p = \{x \in K \,|\, p(x - \Psi(x)) = 0\}$ halmaz zárt és nemüres. E lokális konvexitása és szeparáltsága miatt elegendő megmutatnunk, hogy $\bigcap_{p\in P} Z_p \neq \emptyset$. Ehhez K kompaktsága miatt elégséges, hogy a $\{Z_p\}_{p\in P}$ rendszer centrált. Ez viszont nyilvánvaló, hiszen ha $p_1, \ldots, p_n \in P$, és $q = \sum_{j=1}^n p_j$, akkor $\bigcap_{j=1}^n Z_p \subseteq Z_q$.

(ii) Az *(i)*-beli feltétel a $\Phi(x) = x - (\Psi(x) - x)$ leképezésre teljesül, ezért Φ-nek van fixpontja, és így Ψ-nek is. □

3.4.18. Tétel. *Legyen E topologikus vektortér, E^* szétválasztó E felett. Legyen $K \subseteq E$ nemüres, kompakt, konvex halmaz, és legyen $f : K \longrightarrow E$ folytonos függvény. Ha az alábbi feltételek valamelyike teljesül, akkor f-nek létezik fixpontja.*

(i) *Minden $x \in \partial K$-hoz létezik $\lambda \in \mathbb{F}$, $|\lambda| < 1$, hogy $\lambda x + (1-\lambda) f(x) \in W_K(x)$.*

(i)' *Minden $x \in \partial K$-hoz létezik $\lambda \in \mathbb{F}$, $|\lambda| < 1$, hogy $\lambda x + (1-\lambda) f(x) \in K$.*

(ii) *Minden $x \in \partial K$-ra $f(x) \in W_K(x)$.*

(iii) *Minden $x \in \partial K$-ra $f(x) \in I_K(x)$.*

(iii)' *Minden $x \in \partial K$-ra $f(x) \in O_K(x)$.*

(iv) *Minden $x \in \partial K$-ra $f(x) \in IF_K(x)$.*

(iv)' *Minden $x \in \partial K$-ra $f(x) \in OF_K(x)$.*

(v) *Minden $x \in \partial K$-ra $f(x) \in K$.*

(vi) *$f(K) \subseteq K$.*

Bizonyítás. A 3.1.3. Állítás *(c)* pontjából következik, hogy a $\Phi : K \longrightarrow \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, $\Phi(x) = \{f(x)\}$ leképezés folytonos, ezért a 3.4.8. Tételből adódik egy $x_0 \in K$, melyre $x_0 \in \{f(x_0)\}$, azaz $x_0 = f(x_0)$. □

3.4.19. Megjegyzés. A 0.2.6. Szeparációs tétel miatt minden szeparált, lokálisan konvex teret a topologikus duálisa szétválaszt, ezért az előző tétel *(vi)* pontja (Fan eredménye) általánosítja a 2.2.11. Tyihonov tételt.

3.4.20. Tétel. (Halpern) *Legyen E kváziteljes, szeparált, lokálisan konvex tér, C nemüres, konvex, zárt részhalmaza E-nek. Legyen $f : C \longrightarrow E$ kompakt függvény. Tegyük fel, hogy minden $x \in \partial C$ esetén az alábbi feltételek valamelyike teljesül:*

(i) *$f(x) \in I_C(x)$.*

(i)' *$f(x) \in O_C(x)$.*

(ii) *$f(C) \subseteq C$.*

Ekkor f-nek van fixpontja.

Bizonyítás. A 3.1.3. Állítás *(c)* pontjából következik, hogy a $\Phi : K \longrightarrow \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, $\Phi(x) = \{f(x)\}$ leképezés felülről félig folytonos, ezért a 3.4.13. HALPERN tételből adódik egy $x_0 \in K$, melyre $x_0 \in \{f(x_0)\}$, azaz $x_0 = f(x_0)$. □

A következő állítás Banach terekben a 3.4.18. Tétel *(ii)* pontjával kapcsolatos tulajdonságokat fogalmaz meg, melyek bizonyos esetekben könnyebben ellenőrizhetőek.

3.4.21. Állítás. *Legyen X Banach tér, $D \subseteq X$ nemüres, konvex és zárt halmaz. Legyen $f : D \longrightarrow X$ tetszőleges függvény, és jelölje ϱ az Y normájából származó metrikát. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(a) Minden $x \in D$-re $f(x) \in \overline{I}_D(x)$.

(b) Tetszőleges $x \in D$ esetén $\lim\limits_{\lambda \to 0+0} \frac{1}{\lambda}\varrho(x + \lambda(f(x) - x), D) = 0$.

(c) Ha $x \in \partial D, l \in X^*$ és $\mathcal{R}\boldsymbol{e}\, l(x) = \sup\limits_{y \in D} \mathcal{R}\boldsymbol{e}\, l(y)$, akkor $\mathcal{R}\boldsymbol{e}\, l(f(x) - x) \leq 0$.

Bizonyítás. *(a)$\Longrightarrow$ (b)* Legyen $x \in D$ és $\varepsilon > 0$. A feltétel szerint van olyan $y \in I_D(x)$, hogy $\| y - f(x)\| \leq \varepsilon$, és D konvexitása folytán létezik $\mu_0 > 0$, hogy $x + \mu(y - x) \in D$, ha $0 < \mu \leq \mu_0$. Tetszőleges $0 < \mu \leq \mu_0$-re

$$\frac{1}{\mu}\varrho(x + \mu(f(x) - x), D) \leq \frac{1}{\mu}\| (1 - \mu)x + \mu f(x) - (x + \mu(y - x))\| \leq \varepsilon,$$

amiből *(b)* következik.

(b)$\Longrightarrow$ (a) Legyen $x \in D$. A feltételből adott $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\mu \in (0, 1)$ és $y \in D$, hogy $\| x + \mu(f(x) - x) - y\| \leq \varrho(x + \mu(f(x) - x), D) + \mu\varepsilon$ teljesül. Ezért $\| f(x) - ((1 - \frac{1}{\mu})x + \frac{1}{\mu}y)\| \leq \frac{1}{\mu}\varrho(x + \mu(f(x) - x), D) + \varepsilon$ áll fenn, amiből következik, hogy $f(x) \in \overline{I}_D(x)$.

(a)$\Longrightarrow$ (c) Az $I_D(x)$ halmaz definíciójából nyilvánvaló.

(c)$\Longrightarrow$ (a) Ha *(a)* nem teljesül, akkor létezik $x \in D$, hogy $f(x) \notin \overline{I}_D(x)$, amely a 3.3.12. *(e)* pontja miatt konvex. Ezért a HAHN-BANACH féle szétválasztási tétel szerint létezik olyan $l \in X^*$, hogy $\sup_{\overline{I}_D(x)} \mathcal{R}\boldsymbol{e}\, x^*(z) < \mathcal{R}\boldsymbol{e}\, x^*(f(x))$. Ebből következik, hogy minden $\lambda \geq 0$-ra és $y \in D$-re

$$\mathcal{R}\boldsymbol{e}\, x^*(f(x) - x) > x^*(x + \lambda(y - x)) - x^*(x) = \lambda x^*(y - x)$$

teljesül, és így $x^*(f(x) - x) > 0$, $x^*(y - x) \leq 0$ minden $y \in D$ esetén, tehát *(c)* sem teljesülhet. □

3.4.22. Megjegyzés. Szeparált, lokálisan konvex terekben is létezik az előző állításhoz hasonló metrikus és funkcionálokkal történő jellemzés. Ezek megtalálhatóak Reich [35] és [37] munkáiban.

A következő két tétel alulról félig folytonos leképezések fixpontjairól szól.

3.4.23. Tétel. *Legyen E kváziteljes, szeparált, lokálisan konvex tér, $\emptyset \neq K \subseteq E$ kompakt és konvex halmaz. Legyen $\Gamma : K \longrightarrow \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ alulról félig folytonos leképezés, melyre minden $x \in K$ esetén $\Gamma(x)$ konvex és zárt. Tegyük fel továbbá, hogy $\Gamma(K)$ része egy olyan metrizálható $M \subseteq E$ halmaznak, hogy minden $x \in K$ esetén $\Gamma(x)$ teljes az M metrikájára nézve. Ha az alábbi feltételek valamelyike teljesül, akkor Γ-nak létezik fixpontja.*

(i) *Minden $x \in \partial K$-hoz létezik $\lambda \in \mathbb{F}$, $|\lambda| < 1$, hogy $\lambda x + (1-\lambda)\Gamma(x) \subseteq W_K(x)$.*

(ii) *Minden $x \in \partial K$-ra $\Gamma(x) \subseteq W_K(x)$.*

(iii) *Minden $x \in \partial K$-ra $\Gamma(x) \subseteq I_K(x)$.*

(iii)' *Minden $x \in \partial K$-ra $\Gamma(x) \subseteq O_K(x)$.*

(iv) *Minden $x \in \partial K$-ra $\Gamma(x) \subseteq IF_K(x)$.*

(iv)' *Minden $x \in \partial K$-ra $\Gamma(x) \subseteq OF_K(x)$.*

(v) *Minden $x \in \partial K$-ra $\Gamma(x) \subseteq K$.*

(vi) $\Gamma(K) \subseteq K$.

Bizonyítás. K kompakt, ezért parakompakt, így a 3.2.16. Következmény alapján Γ-nak létezik folytonos szelése, azaz olyan folytonos $f : K \longrightarrow E$, melyre $f(x) \in \Gamma(x)$ minden $x \in K$-ra. Ezért a 3.4.18. Tétel alapján minden pont esetében létezik $x_0 \in K$, melyre $x_0 = f(x_0) \in \Gamma(x_0)$. □

3.4.24. Tétel. *Legyen E kváziteljes, szeparált, lokálisan konvex tér, $C \subseteq E$ nemüres, konvex, zárt halmaz. Legyen $\Gamma : C \longrightarrow \mathcal{P}(E)\setminus\{\emptyset\}$ olyan kompakt, alulról félig folytonos leképezés, hogy minden $x \in C$ esetén $\Gamma(x)$ konvex és zárt. Tegyük fel, hogy minden $x \in \partial C$ esetén az alábbi feltételek valamelyike teljesül:*

(i) $\Gamma(x) \subseteq I_C(x)$.

(ii) $\Gamma(x) \subseteq C$.

(iii) $\Gamma(C) \subseteq C$.

Ekkor Γ-nak létezik fixpontja.

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in C$. Mivel Γ kompakt, és a 0.2.5. KREIN tétel miatt $K = \overline{\mathrm{conv}}(\overline{\Gamma(C)} \bigcup \{x_0\})$ kompakt, a $K_0 = C \bigcap K$ halmaz nemüres, konvex, kompakt, és így parakompakt. A 3.2.16. Következmény alapján $\Gamma\big|_{K_0}$-nak létezik folytonos szelése, azaz olyan folytonos $f : K_0 \longrightarrow E$, melyre $f(x) \in \Gamma(x)$ minden $x \in K_0$-ra. Ezért a 3.4.20. HALPERN tétel alapján minden pont esetében létezik $x_0 \in K_0 \subseteq C$, melyre $x_0 = f(x_0) \in \Gamma(x_0)$. □

Végül a fejezet zárásaként példákat mutatunk arra, hogy a 3.4.8. és a 3.4.18. tételekben a feltételek szükségesek.

3.4.25. Példa. Legyen $E = \mathbb{R}^2$ az euklideszi normával, és legyen $\varepsilon \in (0, 1)$. Ekkor a $\Phi : \overline{B(\mathbf{0}, 1)} \longrightarrow \mathcal{P}(\overline{B(\mathbf{0}, 1)}) \setminus \{\emptyset\}$, $\Phi(x) = \{y \in \overline{B(\mathbf{0}, 1)} \,|\, |y - x| = \varepsilon\}$ leképezés pontonként kompakt, és folytonos. A pontonkénti kompaktság nyilvánvaló, a folytonosság pedig a 3.1.7. Állítás *(d)* pontjából könnyen látható: ha $x_n \to x_0$, akkor $\Phi(x_n) \to \Phi(x_0)$ a Hausdorff-távolságban. A konvexitás kivételével Φ teljesíti a 3.4.8. Tétel *(vii)*-beli feltételeket, viszont nincs fixpontja, ugyanis ha x_0 fixpont, akkor Φ definíciója szerint $|x_0 - x_0| = \varepsilon > 0$, ami képtelenség.
Érdemes megjegyezni még azt is, hogy Φ-nek nem létezhet folytonos szelése, mert ekkor a 1.1.13. Általánosított Brouwer tétel szerint lenne fixpontja.

3.4.26. Példa. Legyen $E = \mathbb{C}$ az euklideszi normával ellátva. Legyen $K = [0, 1]$. Minden $x \in K$-ra legyen $f(x) = i(x + 1)$. Ez az $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ függvény folytonos és nincs fixpontja. Minden $x \in K$ esetén $f(x) \in \overline{IF}_K(x)$, hiszen $x \neq 0$ esetén $f(x) = x + (1 - i(1 + \frac{1}{x}))(-x)$, és $f(0) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}(1 + in)$. Ebből következik, hogy a 3.4.18. Tételbeli *(iv)*-ben $f(x) \in \overline{IF}_K(x)$ nem írható, és így a 3.1.4. Állítás *(c)* pontja miatt 3.4.8. Tételbeli *(viii)*-ban sem elegendő $\Phi(x) \subseteq \overline{IF}_K(x)$.

4. fejezet

Alkalmazások

Ebben a fejezetben alkalmazásokat mutatunk be az eddig elért eredményekre. Az első részben a harmonikus analízisben nagyon fontos szerepet játszó invariáns közepekről és Haar mértékről lesz szó. A második szakaszban a Banach algebrák ábrázoláselméletében nélkülözhetetlen fogalmakat és tételeket ismertetünk. E témában áll a funkcionálanalízis talán leghíresebb megoldatlan problémája.

4.1. Invariáns funkcionálok, közepek, mértékek

4.1.1. Definíció. Legyen Z nemüres halmaz, $T : Z \longrightarrow Z$ bijekció. Ekkor egy $l \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}(Z)^*$ folytonos lineáris funkcionál invariáns a T transzformációra nézve, ha minden $f \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}(Z)$-re $l(f) = l(f \circ T)$.

4.1.2. Definíció. Legyen Z nemüres halmaz, $X \subseteq \ell^\infty_{\mathbb{R}}(Z)$ zárt altér, $\mathbf{1} \in X$. Egy olyan $l \in X^*$ pozitív lineáris funkcionált, melyre $l(\mathbf{1}) = 1$, középnek, vagy mean-nek nevezünk.

4.1.3. Tétel. *Legyen Z nemüres halmaz, $X \subseteq \ell^\infty_{\mathbb{R}}(Z)$ zárt altér, melyre $\mathbf{1} \in X$. Legyen $\mathcal{T} = \{T_\alpha : Z \longrightarrow Z \,|\, \alpha \in A\}$ olyan leképezések rendszere, hogy tetszőleges $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ esetén $T_{\alpha_1} \circ T_{\alpha_2} = T_{\alpha_2} \circ T_{\alpha_1}$. Ekkor létezik olyan $l_0 \in X^*$ mean, amely invariáns minden $T_\alpha \in \mathcal{T}$-re.*

Bizonyítás. Tekintsük a $K = \{l \in X^* \,|\, l(f) \geq 0, ha\, f \geq 0, l(\mathbf{1}) = 1\}$ halmazt. K nemüres a Hahn-Banach tétel miatt, konvex és gyenge-* zárt. Mivel $K \subseteq B(\mathbf{0}_{X^*}, 1)$, azért a Banach-Alaoglu tétel miatt gyenge-* kompakt. Minden $T \in \mathcal{T}$-re legyen $F_T : K \longrightarrow K$, $F_T(l)(f) = l(f \circ T)$. Ekkor F_T affin, mert lineárisan kiterjed X^*-ra, és gyenge-* folytonos. Legyen $l_1, l_2 \in K$. Ekkor $\| F_T(l_1) - F_T(l_2)\| \leq \| l_1 - l_2\|$, tehát F_T normafolytonos affin leképezés, ezért gyenge-* folytonos. A feltételek miatt az $\{F_T\}_{T \in \mathcal{T}}$ rendszer kommutatív. Így alkalmazhatjuk a 2.3.12. Markov-Kakutani tételt, ami a keresett folytonos lineáris funkcionál létezését bizonyítja. $\square$

4.1.4. Definíció. Legyen X Hausdorff topologikus tér, H részcsoportja az X-et önmagára képező homemorfizmusoknak, ϑ Borel mérték X-en. Ekkor ϑ H-invariáns, ha minden $h \in H$-ra és $A \subseteq X$ ϑ-mérhető halmazra $h(A)$ mérhető, és $\vartheta(A) = \vartheta(h(A))$.

4.1.5. Tétel. *Legyen K kompakt Hausdorff tér, legyen H kommutatív részcsoportja a K-t önmagára képező homeomorfizmusoknak. Ekkor létezik K-n olyan ϑ H-invariáns Borel mérték, melyre $\vartheta(K) = 1$.*

Bizonyítás. A $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ tér zárt altere $\ell^\infty_{\mathbb{R}}(K)$ térnek. A 4.1.3. Tétel szerint létezik $l \in \mathcal{C}(K)^*$ mean, amely minden $h \in H$-ra h-invariáns. Ismeretes, hogy $\mathcal{C}(K)^*$ izometrikusan izomorf a K feletti előjeles Borel mértékek $M(K)$ terével. Ezért létezik olyan $\vartheta \in M(K)$, hogy minden $f \in \mathcal{C}(K)$ esetén $l(f) = \int_K f \mathrm{d}\vartheta$. Mivel l pozitív, azért ϑ mérték, és $l(\mathbf{1}) = 1$ miatt $\vartheta(K) = 1$, valamint ϑ H-invariáns, hiszen l minden $h \in H$-ra h-invariáns. □

4.1.6. Definíció. Legyen S félcsoport. Ekkor jelölje tetszőleges $s \in S$-re γ_s az s-sel való baleltolást, δ_s az s-sel való jobbeltolást.

4.1.7. Definíció. Legyen S félcsoport. Egy $l \in \ell^\infty_{\mathbb{F}}(S)$ lineáris funkcionál balinvariáns (jobbinvariáns), ha minden $s \in S$ és $f \in \ell^\infty_{\mathbb{F}}(S)$ esetén $l(f \circ \gamma_s) = l(f)$ $(l(f \circ \delta_s))$.
l invariáns, ha bal- és jobbinvariáns is.

4.1.8. Definíció. Egy S félcsoport amenábilis, ha létezik S feletti invariáns mean, azaz $\ell^\infty_{\mathbb{R}}(S)$-en invariáns mean.

4.1.9. Példa. Legyen F_2 a két elem által generált szabad csoport. Ekkor F_2 nem amenábilis. Legyenek F_2 generátorai a és b, $A = \{w \in F_2 | w \text{ első betűje } a \text{ vagy } a^{-1}\}$. Legyen $f : F_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$, ha $x \in A$, $f(x) = 0$, ha $x \notin A$. Legyen $h : F_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(ba^{-1}x) + f(b^{-1}a^{-1}x) - f(ax) - f(x)$. Nyilvánvaló, hogy $h \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}(F_2)$. Minden $x \in F_2$ esetén $x \in A$ vagy $ax \in A$. Így ha $ba^{-1}x \notin A$ és $b^{-1}a^{-1}x \notin A$, akkor $h(x) \leq -1$. Egyébként x $ab^{-1}a^\varepsilon y$ vagy $aba^\varepsilon y$ alakú. ahol $\varepsilon = 1$ vagy -1, $y \in F_2$. Ez esetben $x \in A$ és $ax \in A$, míg $ba^{-1}x$ és $b^{-1}a^{-1}x$ közül legfeljebb egy eleme A-nak. Ebből következik, hogy $\sup_{x \in F_2} h(x) \leq -1$. Ha létezne l F_2 feletti invariáns mean, akkor $l(h) = l(f) + l(f) - l(f) - l(f) = 0$, és a pozitivitás miatt $0 = l(h) \leq l(\sup h\mathbf{1}) = \sup h \leq -1$ teljesülne, ami képtelenség.

4.1.10. Tétel. *Minden kommutatív félcsoport amenábilis.*

Bizonyítás. Legyen S kommutatív félcsoport. Alkalmazzuk a 4.1.3. Tételt a $\ell^\infty_{\mathbb{R}}(S)$ Banach térre és a $\mathcal{T} = \{\{\gamma_s\} \bigcup \{\delta_s\}\}_{s \in S}$ rendszerre. □

4.1.11. Definíció. Legyen G T_2, lokálisan kompakt csoport, $f \in \mathcal{C}^b(G, \mathbb{F})$. Legyen $\mathcal{O}_l(f) = \{f \circ \gamma_g |\ g \in G\}$. Ekkor f majdnem periodikus, ha az $\mathcal{O}_l(f)$ halmaz relatív kompakt $\mathcal{C}^b(G, \mathbb{F})$-ben. A majdnem periodikus függvények halmaza legyen $AP(G)$.

4.1.12. Megjegyzés. $AP(G)$ zárt lineáris altere $\mathcal{C}^b(G, \mathbb{F})$-nek, és $f \in AP(G)$ esetén az $\mathcal{O}_r(f) = \{f \circ \delta_g | g \in G\}$ halmaz is relatív kompakt.

4.1.13. Példa. Minden $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos periodikus függvény majdnem periodikus. Legyen ugyanis a periódusa f-nek. Ekkor $\mathcal{O}_l(f)$ folytonos képe a $[0, a]$ kompakt halmaznak.

4.1.14. Tétel. *Legyen G T_2, lokálisan kompakt csoport. Ha $f \in AP(G)$, akkor $K = \overline{conv}(\mathcal{O}_l(f))$ tartalmaz pontosan egy $\mu(f)$, $K_j = \overline{conv}(\mathcal{O}_r(f))$ tartalmaz pontosan egy $\mu'(f)$ konstans függvényt, és $\mu(f) = \mu'(f)$.*

Bizonyítás. Mivel $AP(G)$ zárt altér, ezért teljes, és így a 0.2.5 Krein tétel következtében K és K_j kompakt.

Minden $g \in G$ esetén legyen $T_g : K \longrightarrow K$, $T_g(h) = h \circ \gamma_g$. Ekkor T_g affin, hiszen lineáris, és a $\{T_g\}_{g \in G}$ rendszer ekvifolytonos, mert minden $g \in G$ és $h_1, h_2 \in K$ esetén $\| T_g(h_1) - T_g(h_2)\| \leq \| h_1 - h_2\|$. A 2.3.10. Kakutani tétel szerint $\bigcap_{g \in G} \mathrm{Fix}(T_g) \neq \emptyset$, azaz létezik $\mu(f) \in K$, hogy minden $g, x \in G$ esetén $\mu(f)(x) = \mu(f)(gx)$. Ez viszont pontosan akkor teljesül, ha $\mu(f)$ konstans.

A K_j halmaz esete ugyanúgy bizonyítható, mint a K halmazé, az $F_g : K_j \longrightarrow K_j$, $F_g(h) = h \circ \delta_g$ leképezések segítségével.

Megmutatjuk, hogy ha $c_1 \in K$ és $c_2 \in K_j$ konstans függvények, akkor $c_1 = c_2$. Legyen $\varepsilon > 0$. A feltételek miatt létezik $x_1, \ldots, x_n \in G$, $y_1, \ldots, y_m \in G$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$, $\eta_1, \ldots, \eta_m \in [0, 1]$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, $\sum_{p=1}^m \eta_p = 1$, és

$$\sup_{x \in G} |\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k x) - c_1| \leq \varepsilon, \ \sup_{x \in G} |\sum_{p=1}^{m} \eta_p f(x y_j) - c_2| \leq \varepsilon. \tag{4.1}$$

Legyen $r = \sum_{k,p} \lambda_k \eta_p f(x_k y_p)$. Ekkor $r - c_1 = \sum_{p=1}^m \eta_p a_p$, $a_p = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k y_p) - c_1$-gyel. Ekkor (4.1) miatt $p = 1, \ldots, m$ esetén $|a_p| \leq \varepsilon$, és így $|r - c_1| \leq \varepsilon$. Hasonlóan adódik, hogy $|r - c_2| \leq \varepsilon$, amiből $|c_1 - c_2| \leq 2\varepsilon$ következik. Mivel ε tetszőleges pozitív szám volt, ezért $c_1 = c_2$, amiből $\mu(f)$ egyértelműsége adódik. □

4.1.15. Tétel. *Legyen G T_2, lokálisan kompakt csoport. Ekkor $AP(G)$-n létezik invariáns mean.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint minden $f \in AP(G)$-nek megfeletethetjük a $\mu(f)$ konstans függvény $\mathbb{R}$-beli értékét. Jelölje ezt a megfeleltetést l_0. Megmutatjuk, hogy l_0 invariáns mean $AP(G)$-n. Nyilvánvaló, hogy $l_0 : AP(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény,

$l_0(\mathbf{1}) = 1$, és ha $f \in AP(G)$, $f \geq 0$, akkor $l_0(f) \geq 0$, hiszen $\overline{\text{conv}}(\mathcal{O}_l(f))$-ben nemnegatív függvények vannak. Ha $f, g \in AP(G)$, és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\text{conv}(\mathcal{O}_l(f+g)) \subseteq \text{conv}(\mathcal{O}_l(f)) + \text{conv}(\mathcal{O}_l(g))$ és $\lambda\,\text{conv}(\mathcal{O}_l(f)) = \text{conv}(\mathcal{O}_l(\lambda f))$ miatt $\mu(f+g) = \mu(f) + \mu(g)$ és $\mu(\lambda f) = \lambda\mu(f)$ adódik. Ezért $l_0 \in AP(G)^*$. A balinvariancia látható abból, hogy minden $g \in G$ esetén $\text{conv}(\mathcal{O}_l(f)) = \text{conv}(\mathcal{O}_l(f \circ \gamma_g))$, a jobbinvariancia pedig $\text{conv}(\mathcal{O}_r(f)) = \text{conv}(\mathcal{O}_r(f \circ \delta_g))$-ből és $\mu'(f) = \mu(f)$-ből. □

4.1.16. Definíció. Legyen G T_2, lokálisan kompakt csoport. G feletti bal oldali (illetve jobb oldali) Haar-mértéknek nevezünk egy olyan $\mu \in \mathcal{C}_0(G, \mathbb{C})'$ lineáris funkcionált, melyre a következők teljesülnek:

(i) μ nemzérus.

(ii) Minden $K \subseteq G$ kompakt halmazhoz létezik olyan $c \geq 0$, hogy minden $\varphi \in \mathcal{C}_0(G, \mathbb{C})$-re, melyre $\text{supp}(\varphi) \subseteq K$, fennáll, hogy $|\,\mu(\varphi)| \leq c \sup_{t \in K} |\,\varphi(t)|$.

(iii) μ pozitív, azaz ha $\varphi \in \mathcal{C}_0(G, \mathbb{C})$, $\varphi \geq 0$, akkor $\mu(\varphi) \geq 0$.

(iv) μ balinvariáns (illetve jobbinvariáns), azaz minden $g \in G$ és $f \in \mathcal{C}_0(G, \mathbb{C})$ esetén $\mu(f) = \mu(f \circ \gamma_g)$ (illetve $\mu(f) = \mu(f \circ \delta_{g^{-1}})$)).

4.1.17. Megjegyzés. Ha G kompakt, T_2 csoport, akkor egy G feletti bal oldali Haar mérték létezése ekvivalens egy $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(G)$-n értelmezett, balinvariáns mean létezésével.

4.1.18. Tétel. *Legyen G kompakt, T_2 csoport. Ekkor létezik egyértelműen μ G feletti bal oldali Haar mérték, melyre $\mu(\mathbf{1}) = 1$, és μ jobb oldali Haar mérték is.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítása hasonló a 4.1.14. és a 4.1.15. Tételek bizonyításához.

Legyen $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(G)$. Az $u, v : G \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(G)$, $u(g) = f \circ \gamma_g$, $v(g) = f \circ \delta_g$ leképezések folytonosak, ezért $\mathcal{O}_l(f)$ és $\mathcal{O}_r(f)$ kompakt. A 0.2.5. Krein tétel szerint így $K = \overline{\text{conv}}(\mathcal{O}_l(f))$ és $K_j = \overline{\text{conv}}(\mathcal{O}_r(f))$ kompakt.

Minden $g \in G$ esetén legyen $T_g : K \longrightarrow K$, $T_g(h) = h \circ \gamma_g$. Ekkor T_g affin, hiszen lineáris, és a $\{T_g\}_{g \in G}$ rendszer ekvifolytonos, mert minden $g \in G$ és $h_1, h_2 \in K$ esetén $\|\,T_g(h_1) - T_g(h_2)\| \leq \|\,h_1 - h_2\|$. A 2.3.10. Kakutani tétel szerint $\bigcap_{g \in G} \text{Fix}(T_g) \neq \emptyset$, azaz létezik $h_0 \in K$, hogy minden $g, x \in G$ esetén $h_0(x) = h_0(gx)$. Ez viszont pontosan akkor teljesül, ha $h_0 = \mu(f)\mathbf{1}$ valamely $\mu(f) \in \mathbb{R}$-re.

A K_j halmaz esetén ugyanúgy eljárhatunk, mint a K halmaznál, az $F_g : K_j \longrightarrow K_j$, $F_g(h) = h \circ \delta_g$ leképezések segítségével. Adódik tehát egy $\mu'(f) \in \mathbb{R}$, hogy $\mu'(f)\mathbf{1} \in K_j$.

Megmutatjuk, hogy ha $c_1 \in K$ és $c_2 \in K_j$ konstans függvények, akkor $c_1 = c_2$. Legyen $\varepsilon > 0$. A feltételek miatt létezik $x_1, \ldots, x_n \in G$, $y_1, \ldots, y_m \in G$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$, $\eta_1, \ldots, \eta_m \in [0,1]$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, $\sum_{p=1}^m \eta_p = 1$, és

$$\sup_{x \in G} |\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k x) - c_1| \leq \varepsilon,\ \sup_{x \in G} |\sum_{p=1}^{m} \eta_p f(x y_j) - c_2| \leq \varepsilon. \tag{4.2}$$

Legyen $r = \sum_{k,p} \lambda_k \eta_p f(x_k y_p)$. Ekkor $r - c_1 = \sum_{p=1}^{m} \eta_p a_p$, $a_p = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k y_p) - c_1$-gyel. Ekkor (4.2) miatt $p = 1, \ldots, m$ esetén $|a_p| \leq \varepsilon$, és így $|r - c_1| \leq \varepsilon$. Hasonlóan adódik, hogy $|r - c_2| \leq \varepsilon$, amiből $|c_1 - c_2| \leq 2\varepsilon$ következik. Mivel ε tetszőleges pozitív szám volt, ezért $c_1 = c_2$, amiből $\mu(f) = \mu'(f)$. Ezért a $\mu : \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(G) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto \mu(f)$ függvény jóldefiniált.

Megmutatjuk, hogy μ bal oldali Haar mérték G felett. Nyilvánvaló, hogy μ nemzérus folytonos függvény, $\mu(\mathbf{1}) = 1$, és ha $f \geq 0$, akkor $\mu(f) \geq 0$, hiszen $\overline{\text{conv}}(\mathcal{O}_l(f))$-ben nemnegatív függvények vannak. Ha $f, g \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(G)$, és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\text{conv}(\mathcal{O}_l(f+g)) \subseteq \text{conv}(\mathcal{O}_l(f)) + \text{conv}(\mathcal{O}_l(g))$ és $\lambda\,\text{conv}(\mathcal{O}_l(f)) = \text{conv}(\mathcal{O}_l(\lambda f))$ miatt $\mu(f+g) = \mu(f) + \mu(g)$ és $\mu(\lambda f) = \lambda \mu(f)$ adódik. Ezért $\mu \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(G)^*$. A balinvariancia látható abból, hogy minden $g \in G$ esetén $\text{conv}(\mathcal{O}_l(f)) = \text{conv}(\mathcal{O}_l(f \circ \gamma_g))$. μ jobb oldali Haar mérték is, hiszen $\text{conv}(\mathcal{O}_r(f)) = \text{conv}(\mathcal{O}_r(f \circ \delta_g))$, és $\mu'(f) = \mu(f)$. μ egyértelműsége pedig az eddigiek alapján nyilvánvaló. $\square$

4.1.19. Megjegyzés. A tétel általánosítható tetszőleges T_2 lokálisan kompakt csoportra. Ezt az állítást először Haar Alfréd bizonyította, M_2 csoportok esetén.

Invariáns funkcionálok, közepek, és a Haar mérték tulajdonságairól és alkalmazásairól bővebben Hewitt és Ross ír [20].

4.2. Az Invariáns altér probléma

A következőkben a funkcionálanalízis egyik leghíresebb, teljes általánosságban még megoldatlan problémájáról lesz szó.

4.2.1. Definíció. Legyen V vektortér $\mathbb{F}$ felett, $A \in \mathrm{L}(V)$, $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathrm{L}(V)$.

(a) Egy $Y \subseteq V$ lineáris altér A-invariáns, ha minden $x \in Y$ esetén $Ax \in Y$.
Y nemtriviális, ha $Y \neq X$ és $Y \neq \{\mathbf{0}\}$.

(b) Egy $Y \subseteq V$ lineáris altér $\mathcal{A}$-invariáns, ha minden $T \in \mathcal{A}$ és $x \in Y$ esetén $Tx \in Y$.

4.2.2. Definíció. Legyen X normált tér, $T \in \mathcal{B}(X)$. Jelölje $\text{Com}(T)$ a T operátor kommutáns-algebráját, azaz a $\{B \in \mathcal{B}(X) \,|\, BT = TB\}$ egységelemes algebrát. Egy $Y \subseteq X$ lineáris altér a T operátor hiperinvariáns altere, ha Y $\text{Com}(T)$-invariáns.

4.2.3. Definíció. Legyen X normált tér, $T \in \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(X)$ algebra. Egy $x \in X$ vektor

(a) T-ciklikus, ha az $\mathcal{L}_T(x) = \mathcal{L}(\{T^n x \big| n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}\})$ lineáris altér sűrű X-ben.

(b) $\mathcal{A}$-ciklikus, ha az $\mathcal{A}x = \{Ax \big| A \in \mathcal{A}\}$ lineáris altér sűrű X-ben.

4.2.4. Tétel. *Legyen V végtelen dimenziós vektortér, $A \in L(V)$. Ekkor A-nak létezik nemtriviális invariáns altere.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{0} \neq x_0 \in V$ tetszőleges. Ha $\mathcal{L}_A(x_0) \neq V$, akkor $\mathcal{L}_A(x_0)$ nemtriviális A-invariáns altér. Valóban, $x \in \mathcal{L}_A(x_0)$ esetén $y = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n A^n x_0$, ahol $\lambda_n = 0$ véges sok kivétellel, és így $Ay = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n A^{n+1} x_0 \in \mathcal{L}_A(x_0)$.

Ha $\mathcal{L}_A(x_0) = V$, akkor az $\{A^n x_0 | n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}\}$ rendszer bázisa a V vektortérnek, azaz minden $x \in V$ egyértelműen áll elő $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n A^n x_0$ alakban, ahol $\lambda_n = 0$ véges sok kivételtől eltekintve. $x \in V$ esetén legyen $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n$, amely egy jóldefiniált függvény. Ekkor $f \in V' \setminus \{\mathbf{0}_{V'}\}$, és $\ker f$ nemtriviális A-invariáns altér, mert minden $x \in V$ esetén $f(x) = f(Ax)$ □

4.2.5. Állítás. *Legyen X normált tér, $T \in \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(X)$ algebra.*

(a) Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{F}$ esetén $\ker(T - \lambda I)$ és ran$(T - \lambda I)$ T-hiperinvariáns zárt alterek.

(b) Ha T kommutál egy olyan nemzérus korlátos operátorral, melynek a képtere nem sűrű, vagy nem injektív, akkor T-nek van nemtriviális, zárt invariáns altere.

(c) T-nek pontosan akkor létezik nemtriviális, zárt invariáns altere, ha létezik nemzérus nem-ciklikus vektora.

(d) Pontosan akkor létezik nemtriviális, zárt $\mathcal{A}$-invariáns altér, ha létezik nemzérus nem $\mathcal{A}$-ciklikus vektor.

Bizonyítás. (a) Legyen $\lambda \in \mathbb{F}$ és $A \in \mathrm{Com}(T)$. Ha $y \in \ker(T - \lambda I)$, akkor $(T - \lambda I)Ay = (TA - \lambda A)y = A(T - \lambda I)y = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, ami azt jelenti, hogy $Ay \in \ker(T - \lambda I)$. Ha $y \in \mathrm{ran}(T - \lambda I)$, azaz $y = (T - \lambda I)z$ valamely $z \in X$-re, akkor $Ay = A(T - \lambda I)z = (T - \lambda I)Az$, ami azt jelenti, hogy $Ay \in \mathrm{ran}(T - \lambda I)$.

(b) Legyen $\mathbf{0} \neq A \in \mathrm{Com}(T)$, és $\overline{\mathrm{ran}} A \neq X$. Az előző pont miatt $\mathrm{ran}\, A$ T-invariáns altér. Ekkor viszont $\overline{\mathrm{ran}} A$ is T-invariáns: $y \in \overline{\mathrm{ran}} A$-hoz van olyan (Ax_n) $\mathrm{ran}\, A$-ban haladó sorozat, hogy $Ax_n \to y$. Ekkor A folytonossága és $AT = TA$ miatt $Ty = \lim_{n \to +\infty} TAx_n = A(\lim_{n \to +\infty} Tx_n)$, vagyis $Ty \in \overline{\mathrm{ran}} A$. Kaptuk tehát, hogy $\overline{\mathrm{ran}} A$ nemtriviális, zárt T-invariáns altér.
Ha $\ker A \neq \{\mathbf{0}\}$, akkor az előző pont miatt $\ker A$ T-invariáns altér, amely nemtriviális, és zárt A folytonossága miatt.

(c) Ha Y nemtriviális, zárt T-invariáns altér, akkor tetszőleges $y \in Y$ és $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ esetén $T^n y \in Y$. Következésképpen egy nemzérus $y_0 \in Y$-ra $\overline{\mathcal{L}_T(y_0)} \subseteq Y$ az Y altér zártsága miatt, és ezért y_0 nemzérus, nem-ciklikus vektora T-nek.
Megfordítva, ha y_0 nemzérus, nem-ciklikus vektora T-nek, akkor $\overline{\mathcal{L}_T(y_0)}$ nemtriviális, zárt T-invariáns altér.

(d) Az előző ponthoz hasonlóan, ha Y nemtriviális, zárt $\mathcal{A}$-invariáns altér, akkor tetszőleges nemzérus $y_0 \in Y$ esetén $\overline{\mathcal{A}y_0} \subseteq Y$, tehát y_0 nemzérus, nem $\mathcal{A}$-ciklikus vektor.
Megfordítva, ha y nemzérus, nem $\mathcal{A}$-ciklikus vektor, és $\mathcal{A}y \neq \{\mathbf{0}\}$, akkor $\overline{\mathcal{A}y}$ nemtriviális, zárt $\mathcal{A}$-invariáns altér. Ha $\mathcal{A}y = \{\mathbf{0}\}$, akkor $\{\lambda y \,|\, \lambda \in \mathbb{F}\}$ nyilván $\mathcal{A}$-invariáns altér, amely zárt, hiszen véges dimenziós. □

4.2.6. Következmény. *Legyen X nem szeparábilis normált tér, $T \in \mathcal{B}(X)$. Ekkor T-nek van nemtriviális, zárt invariáns altere.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{0} \neq x_0 \in X$ tetszőleges vektor. Ekkor $x_0 \in \overline{\mathcal{L}_T(x_0)} \neq X$, mert X nem szeparábilis. Így a 4.2.5. Állítás *(c)* pontjára hivatkozva befejezhetjük a bizonyítást. □

4.2.7. Tétel. *Legyen $(X, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér $\mathbb{F}$ felett, $T \in \mathcal{B}(X) = L(X)$, $T \notin \{\lambda I \,|\, \lambda \in \mathbb{F}\}$.*

(i) $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ *esetén T-nek van nemtriviális, zárt hiperinvariáns altere.*

(ii) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *esetén:*

- *(a)* *ha* $\dim X > 1$ *és páratlan, akkor T-nek van nemtriviális, zárt hiperinvariáns altere.*
- *(b)* *ha* $\dim X \geq 4$ *és páros, akkor T-nek van nemtriviális, zárt invariáns altere.*
- *(c)* *ha* $\dim X = 2$*, akkor előfordulhat, hogy T-nek csak triviális invariáns alterei vannak.*

Bizonyítás. *(i)* Ismeretes, hogy létezik $\lambda \in \mathbb{C}$, melyre $Y = \ker(T - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}$. Mivel T nem az identitás-operátor konstansszorosa, azért Y nemtriviális hiperinvariáns altér a 4.2.5. Állítás *(a)* pontja szerint. Y zártsága pedig nyilvánvaló abból, hogy véges dimenziós normált tér minden lineáris altere zárt.

(ii), (a) Mivel X páratlan dimenziós valós vektortér, létezik $\lambda \in \mathbb{R}$, melyre $Y = \ker(T - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}$. Mivel T nem az identitás-operátor konstansszorosa, azért Y nemtriviális hiperinvariáns altér a 4.2.5. Állítás *(a)* pontja szerint. Y zártsága pedig nyilvánvaló abból, hogy véges dimenziós normált tér minden lineáris altere zárt.

(b) Jelölje $X_{\mathbb{C}}$ az X vektortér komplexifikáltját, azaz az $X \bigoplus iX$ komplex vektorteret. Legyen $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ norma $X_{\mathbb{C}}$-n, és tekintsük a $T_{\mathbb{C}}(x + iy) = Tx + iTy$ lineáris operátort. Mivel véges dimenziós normált téren minden lineáris transzformáció folytonos, és $T_{\mathbb{C}} \notin \{\lambda I_{X_{\mathbb{C}}} \,|\, \lambda \in \mathbb{C}\}$, azért az *(i)* pont bizonyítása szerint létezik $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, melyre $\ker(T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 I) \neq \{\mathbf{0}_{X_{\mathbb{C}}}\}$. Legyen $x_0, y_0 \in X$ olyanok, hogy $x_0 + iy_0$ $T_{\mathbb{C}}$ λ_0-hoz tartozó sajátvektora. Mivel $\dim X \geq 4$, ezért $\mathcal{L}(\{x_0, y_0\})$ valódi, zárt altere X-nek, amely T-invariáns: ha $\lambda_0 = c + id$, ahol $c, d \in \mathbb{R}$, akkor $Tx_0 = cx_0 - dy_0$ és $Ty_0 = dx_0 + cy_0$, mert λ_0 sajátérték. Ezért $Tx_0, Ty_0 \in \mathcal{L}(\{x_0, y_0\})$, ami mutatja az invarianciát.

(c) Legyen $\theta \in (0,\pi)$, és legyen R_θ az origó körüli, θ szögű forgatás $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$-en. Nyilvánvaló, hogy R_θ-nak csak triviális invariáns alterei vannak, mert az origón áthaladó egyenesek közül egyiket sem önmagába képezi. Ismeretes, hogy létezik olyan $U \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}^2)$ folytonos lineáris homeomorfizmus. Ezért a $T = U^{-1}R_\theta U \in \mathcal{B}(X)$ operátornak csak triviális invariáns alterei vannak. □

4.2.8. Megjegyzés. Az előző tétel mutatja, hogy véges dimenziós komplex és legalább három dimenziós valós vektorterekben állíthatjuk nemtriviális invariáns altér létezését. Végtelen dimenziós esetben nem tudunk ilyen pozitív választ adni. ENFLO [12] mutatott példát először olyan folytonos lineáris operátorra (nemreflexív, szeparábilis Banach téren), amelynek csak a triviális, zárt invariáns alterei vannak. Ugyanilyen példa található BEAUZAMY [2] könyvében. Reflexív Banach terekre és Hilbert terekre a probléma megoldása nem ismeretes.

Ha egy X normált téren értelmezett $A \neq \lambda I$ $(\lambda \in \mathbb{F})$ korlátos operátornak nincs nemtriviális, zárt invariáns altere, akkor 4.2.5. Állítás *(a)* pontja miatt minden $T \in \mathrm{Com}(A)$-ra $\ker T = \{\mathbf{0}\}$ vagy X, $\overline{\mathrm{ran}}T = \{\mathbf{0}\}$ vagy X. Ha X komplex reflexív tér, akkor létezik olyan $T_0 \in \mathrm{Com}(A)$ operátor, amely nem az identitás konstansszorosa, és ha $B = \overline{B(\mathbf{0},1)}$, akkor $C = \overline{T_0(B)}$-re $\mathrm{int}\, C = \emptyset$, azaz C nem nullkörnyezet. Ellenkező esetben ugyanis minden $\mathbf{0} \neq T \in \mathrm{Com}(A)$ operátorra $\ker T = \{\mathbf{0}\}$, $\mathrm{ran}\, T = X$ állna fenn, amiből $T^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ következne BANACH inverz leképezés tétele miatt. Ekkor viszont a GELFAND-MAZUR tétel alapján $\mathrm{Com}(A)$ izometrikusan izomorf lenne $\mathbb{C}$-vel, ami nem lehetséges. Azt, hogy $\mathrm{ran}\, T = X$ teljesül akkor, ha C nullkörnyezet, a következő példán keresztül mutatjuk meg, amely egyébként egy eddig nem ismert példa olyan normált térre, amely nem hordós.

4.2.9. Példa. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ végtelen dimenziós reflexív Banach tér $\mathbb{F}$ felett. Legyen $T \in \mathcal{B}(X)$ olyan operátor, melyre $\overline{\mathrm{ran}}T = X$, $\mathrm{ran}\, T \neq X$. Ekkor $(\mathrm{ran}\, T, \|\cdot\||_{\mathrm{ran}\, T})$ olyan normált tér, amely nem hordós tér. Tekintsük ugyanis a $C = \overline{T(B)}^X$ halmazt, ahol B az X zárt egységgömbje. Ha $x_0 \in C$, akkor létezik olyan (z_n) B-beli sorozat, hogy $Tz_n \to x_0$. Mivel X reflexív, azért B gyengén kompakt, tehát létezik $z_0 \in B$, melyhez (z_n) valamely (z_{m_n}) részsorozata gyengén konvergál. T gyengén is folytonos, tehát $Tz_{m_n} \to Tz_0$ gyengén, azonban $Tz_{m_n} \to x_0$, ezért $Tz_{m_n} \to x_0$ gyengén, amiből a gyenge limesz egyértelműsége miatt $Tz_0 = x_0$ következik. Következésképpen $C \subseteq \mathrm{ran}\, T$. Megmutatjuk, hogy C hordó $\mathrm{ran}\, T$-ben. Az nyilvánvaló, hogy konvex, zárt és kiegyensúlyozott. C elnyelősége pedig abból adódik, hogy $\mathrm{ran}\, T = \{\lambda v \,|\, \lambda \in \mathbb{F}, v \in C\}$. C viszont nem környezete $\mathbf{0}$-nak $\mathrm{ran}\, T$-ben, mert ez esetben $\mathrm{ran}\, T$ zárt halmaz lenne X-ben. Legyen ugyanis (y_n) $\mathrm{ran}\, T$-ben haladó, X-ben konvergens sorozat, $y_n \to y_0 \in X$. Az (y_n) sorozat korlátos, így ha C nullkörnyezet, akkor elnyeli: van olyan $0 \neq \lambda \in \mathbb{F}$, hogy $(y_n) \subseteq \lambda C$. Ekkor $(\frac{1}{\lambda} y_n) \subseteq C$. C zárt halmaz X-ben is, ezért $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda} y_n = \frac{1}{\lambda} y_0 \in C$, amiből $y_0 \in \lambda C \subseteq \mathrm{ran}\, T$. Így $\mathrm{ran}\, T$ zárt, ez azonban ellentmond annak, hogy $\mathrm{ran}\, T \neq \overline{\mathrm{ran}}T$.

Könnyű példát mutatni az iménti tulajdonságú T operátorra. Legyen H végtelen dimenziós, szeparábilis Hilbert tér, $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq H$ totális ortonormált rendszer. Tetszőleges $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_n \in H$ esetén legyen $Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\lambda_n e_n$. Ekkor nyilván $T \in \mathcal{B}(H)$, és $\mathcal{L}(\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}) \subseteq \operatorname{ran} T$, tehát $\overline{\operatorname{ran}} T = H$. Viszont $\operatorname{ran} T \neq H$, mert $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} e_n \notin \operatorname{ran} T$, ellenkező esetben ugyanis $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n} e_n \in H$ teljesülne.

A most következő néhány tételben azt vizsgáljuk meg, hogy milyen összefüggés van egy folytonos lineáris operátor invariáns altereinek létezése, és az adjungált operátor invariáns altereinek létezése között.

4.2.10. Tétel. *Legyen X normált tér, $T \in \mathcal{B}(X) \setminus \{\lambda I\}_{\lambda \in \mathbb{F}}$, $T^* : X^* \longrightarrow X^*$ a T adjungált operátora. Ha T-nek vagy T^*-nak van sajátértéke, akkor T-nek és T^*-nak is van nemtriviális, zárt hiperinvariáns altere.*

Bizonyítás. Jelölje $\langle \cdot, \cdot \rangle$ az X és X^* közötti természetes dualitást. Ha $T^* f = \lambda f$ valamely $\lambda \in \mathbb{F}$-fel és nemzérus $f \in X^*$-gal, akkor a 4.2.5. Állítás *(a)* pontja miatt $\ker(T^* - \lambda I_{X^*})$ nemtriviális, zárt T^*-hiperinvariáns altér.
Tetszőleges $x \in X$ esetén teljesül, hogy $\langle (T - \lambda I_X)x, f \rangle = \langle x, (T^* - \lambda I_{X^*})f \rangle = 0$. Ez azt jelenti, hogy $\operatorname{ran}(T - \lambda I_X) \subseteq \ker f$. Mivel $\ker f \neq X$, és zárt altér X-ben f folytonossága miatt, azért $Y = \overline{\operatorname{ran}}(T - \lambda I_X)$ valódi zárt altere X-nek. Ezért a 4.2.5. Állítás *(a)* pontja miatt Y nemtriviális, zárt T-hiperinvariáns altér.
Ha λ_0 sajátértéke T-nek, akkor a már említett állítás miatt $\ker(T - \lambda_0 I_X)$ nemtriviális, zárt T-hiperinvariáns altér. Legyen $x_0 \in X$ λ_0-hoz tartozó sajátvektora T-nek. Megmutatjuk, hogy λ_0 sajátértéke T^{**}-nak. Legyen $X = \widehat{X} \subseteq X^{**}$, ahol $\widehat{\ }$ a természetes azonosítás. Ekkor tetszőleges $f_0 \in X^*$ esetén tejesül, hogy

$$\langle (T^{**} - \lambda_0 I_{X^{**}})\widehat{x}_0, f_0 \rangle = \langle x_0, (T^* - \lambda_0 I_{X^*}) f_0 \rangle = \langle (T - \lambda_0 I_X) x_0, f_0 \rangle = 0,$$

amiből $(T^{**} - \lambda_0 I_{X^{**}})\widehat{x}_0 = \mathbf{0}_{X^{**}}$. Így alkamazhatjuk az előző bekezdésben foglaltakat T helyett T^*-ra. □

4.2.11. Tétel. *Legyen X normált tér, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(X)$ algebra. Jelölje $\langle \cdot, \cdot \rangle$ az X és X^* közötti természetes dualitást. Ekkor a következők ekvivalensek:*

- *(i) Létezik nemtriviális, zárt $\mathcal{A}$-invariáns altér.*
- *(ii) Létezik egy nemzérus $x_0 \in X$ vektor és egy nemzérus $l \in X^*$ lineáris funkcionál, hogy minden $A \in \mathcal{A}$ esetén $\langle Ax_0, l \rangle = \langle x_0, A^* l \rangle = 0$.*

Bizonyítás. *(i)$\Longrightarrow$ (ii)* Legyen W nemtriviális, zárt $\mathcal{A}$-invariáns altér. Legyen $\mathbf{0} \neq x_0 \in W$ tetszőleges vektor, és legyen $Y = \overline{\mathcal{A}x_0}$. Nyilvánvaló, hogy $Y \subseteq W$, és így $Y \neq X$. Ezért a Hahn-Banach tétel miatt létezik olyan nemzérus $l \in X^*$, hogy $l(Y) = 0$, amiből *(ii)* következik.

(ii)$\Longrightarrow$ (i) Legyenek $x_0 \in X$ és $l \in X^*$ *(ii)*-t kielégítő vektorok. Ekkor $\overline{\mathcal{A}x_0} \subseteq \ker l \neq X$, ezért x_0 nem $\mathcal{A}$-ciklikus vektor, tehát a 4.2.5. Állítás *(d)* pontja miatt létezik nemtriviális, zárt $\mathcal{A}$-invariáns altér. □

4.2.12. Következmény. *Legyen X normált tér, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(X)$ algebra. Ha létezik nemtriviális, zárt $\mathcal{A}$-invariáns altér, akkor létezik nemtriviális, zárt $\mathcal{A}^* = \{A^* \mid A \in \mathcal{A}\}$-invariáns altér is.*

Bizonyítás. A 4.2.11. Tétel miatt léteznek olyan nemzérus $x_0 \in X$ és $l \in X^*$, melyekre $\langle A^{**}\widehat{x}_0, l\rangle = \langle x_0, A^*l\rangle = \langle Ax_0, l\rangle = 0$ minden $A \in \mathcal{A}$ esetén az $\widehat{X} \subseteq X^{**}$ természetes beágyazás mellett. Ekkor az előző tétel *(ii)*$\Longrightarrow$ *(i)* irányát $\mathcal{A}^*$-ra és $\mathcal{A}^{**}$-ra alkalmazva kapjuk nemtriviális, zárt $\mathcal{A}^*$-invariáns altér létezését. □

4.2.13. Megjegyzés. Az iménti következmény megfordítása igaz reflexív terekben, azaz ha $\mathcal{A}^*$-nak van nemtriviális, zárt invariáns altere, akkor $\mathcal{A}$-nak is van, mert a reflexivitás miatt $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{**}$, és így a következmény alkalmazható $\mathcal{A}^*$-ra és $\mathcal{A}^{**}$-ra.

Emlékeztetünk arra, hogy egy X normált téren értelmezett K lineáris operátort kompaktnak nevezünk, ha az egységgömböt relatív kompakt halmazba képezi. Nyilvánvaló, hogy minden kompakt operátor korlátos.
Ha X és Y normált terek, akkor az X-en értelmezett, Y-ba képező kompakt operátorok halmaza legyen $\mathcal{K}(X,Y)$; $X = Y$ esetén $\mathcal{K}(X)$.

Neumann János 1935-ben Hilbert téren értelmezett kompakt operátorra bizonyította, hogy létezik nemtriviális, zárt invariáns altere. Tizenkilenc évvel később Smith és Aronszajn általánosította ezt az eredményt Banach terekre, majd Lomonoszov 1973-ban megmutatta, hogy az állítás érvényes hiperinvariáns altérrel is. A most következő tétel ennél gyengébb eredmény, de tetszőleges normált térre érvényes.

4.2.14. Tétel. *Legyen X végtelen dimenziós normált tér, legyen $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(X)$ kommutatív algebra. Tegyük fel, hogy létezik olyan nemzérus $K \in \mathcal{K}(X)$ kompakt operátor, hogy minden $A \in \mathcal{A}$ esetén $AK = KA$. Ekkor létezik nemtriviális, zárt $\mathcal{A}$-invariáns altér.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy csak triviális zárt $\mathcal{A}$-invariáns alterek léteznek. Ekkor a 4.2.5. Állítás *(a)* pontja miatt $\ker K = \{\mathbf{0}\}$, $\overline{\operatorname{ran}} K = X$, a *(d)* pontja miatt $\overline{\mathcal{A}x} = X$ minden nemzérus $x \in X$ esetén. Legyen $\mathbf{0} \neq y \in X$ tetszőleges vektor. Ekkor létezik olyan $r > 0$, hogy $\mathbf{0} \notin \overline{K(B(y,r))}$. Ellenkező esetben minden $n \in \mathbb{N}$-re $\mathbf{0} \in \overline{K(B(y,\frac{1}{n}))}$, amiből minden $n \in \mathbb{N}$-re adódik $x_n \in B(y,\frac{1}{n})$, melyre $\| Kx_n\| < \frac{1}{n}$. Ekkor $x_n \to y$ és $Kx_n \to \mathbf{0}$ $(n \to +\infty)$, amiből $Ky = \mathbf{0}$ következik. Ez viszont $\ker K = \{\mathbf{0}\}$ és $y \neq \mathbf{0}$ miatt nem lehetséges.

Legyen tehát $r > 0$ olyan, hogy $\mathbf{0} \notin \overline{K(B(y,r))}$, és $C := \overline{B(y,\frac{r}{2})}$. Értelmezzük a $g : \overline{K(C)} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt a következő módon:

$$g(v) = \inf\left\{a \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists A \in \mathcal{A} : \| A\| \leq a, \| Av - y\| < \frac{r}{2}\right\}$$

Mivel $\mathbf{0} \notin \overline{K(C)}$, és minden nemzérus vektor $\mathcal{A}$-ciklikus, a g definíciójában szereplő halmaz tetszőleges $v \in \overline{K(C)}$-ra nemüres.

Megmutatjuk, hogy g felülről félig folytonos. Legyen $c \in \mathbb{R}$, és legyen (v_n) $\{g \geq c\}$-ben haladó konvergens sorozat, $v_n \to v_0$. Tegyük fel, hogy $g(v_0) < c$. Legyen $A_0 \in \mathcal{A}$ olyan operátor, hogy $\| A_0\| < c$, $\| A_0 v_0 - y\| < \frac{r}{2}$. Mivel A_0 folytonos, azért $A_0 v_n \to A_0 v_0$, és így valamely $n_0 \in \mathbb{N}$-re $n \geq n_0$ esetén $A_0 v_n \in B(y, \frac{r}{2})$, ami $g(v_n) \geq c$ miatt lehetetlen. Ezért a $\{g \geq c\}$ halmaz zárt, tehát g felülről félig folytonos. A $\overline{K(C)}$ halmaz kompakt, ezért g-nek van egy $a_0 \in \mathbb{R}$ maximuma a felülről félig folytonosság miatt.

Legyen $k = a_0 + 1$. Mivel $\operatorname{ran} K$ sűrű X-ben, létezik $R > 0$, hogy $K(B(\mathbf{0}, R)) \bigcap C \neq \emptyset$. Legyen $s = \max\{k(\| y\| + r), R\}$. Ekkor $C_0 = \overline{K(B(\mathbf{0}, s))} \bigcap C$ nemüres, konvex és kompakt halmaz C zártsága és a K leképezés kompaktsága miatt. Definiáljunk egy $\Gamma : C_0 \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ leképezést:

$$\Gamma(x) := \{AKx \big| A \in \mathcal{A}, \| A\| \leq k\}. \tag{4.3}$$

Ekkor a $\Psi = \overline{\Gamma} \bigcap C_0 : C_0 \longrightarrow \mathcal{P}(C_0)$ leképezés a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(a) Tetszőleges $x \in C_0$-ra $\Psi(x) \neq \emptyset$.

(b) Tetszőleges $x \in C_0$-ra $\Psi(x)$ konvex.

(c) Tetszőleges $x \in C_0$-ra $\Psi(x)$ kompakt.

(d) Ψ felülről félig folytonos.

(a) Mivel $x \in C_0$ esetén $x \in C$, azért létezik $A \in \mathcal{A}$, $\| A\| \leq k$, hogy $AKx \in C$. Ekkor $AKx = KAx$, és $\| Ax\| \leq \| A\|\| x\| \leq k(\| y\| + r) \leq s$, tehát $AKx \in \overline{K(B(\mathbf{0}, s))}$, amiből $AKx \in C_0$. Így $\Gamma(x) \bigcap C_0 \neq \emptyset$, következésképpen $\Psi(x) \neq \emptyset$.
(b) Elegendő megmutatnunk, hogy tetszőleges $x \in C_0$ esetén $\Gamma(x)$ konvex, hiszen konvex halmazok lezártja és metszete konvex. Legyen $A_1 Kx, A_2 Kx \in \Gamma(x)$, $t \in [0, 1]$. Ekkor $tA_1 Kx + (1 - t)A_2 Kx = (tA_1 + (1 - t)A_2)Kx \in \Gamma(x)$, mert $\mathcal{A}$ algebra.
(c) Nyilvánvaló, hiszen $\Psi(x)$ zárt részhalmaza a kompakt C_0 halmaznak.
(d) Legyen $B \subseteq C_0$ zárt halmaz. A 3.1.3. Állítás *(a)* pontja miatt elegendő megmutatnunk, hogy $D = \Psi^{-1}(B)$ zárt halmaz C_0-ban. Legyen (z_n) D-ben haladó, C_0-ban konvergens sorozat, $z_n \to z_0$. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re $z_n \in D$ azt jelenti, hogy létezik olyan $(A_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$ $\mathcal{A}$-ban haladó sorozat, hogy $A_{nm} K z_n \to u_n \in B, (m \to +\infty)$. Mivel C_0 kompakt, azért létezik (u_n)-nek konvergens részsorozata; feltehető, hogy már (u_n) konvergens, és $u_n \to u_0 \in B$, mert B zárt részhalmaza C_0-nak. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $m_n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\| A_{nm_n} K z_n - u_n\| < \frac{1}{n}$. Ekkor az $(A_n) = (A_{nm_n})$ $\mathcal{A}$-ban haladó sorozattal:

$$\begin{aligned} \| A_n K z_0 - u_0\| &\leq \| A_{nm_n} K z_0 - A_{nm_n} K z_n\| + \| A_{nm_n} K z_n - u_n\| + \| u_n - u_0\| \leq \\ &\leq k\| K\|\| z_0 - z_n\| + \frac{1}{n} + \| u_n - u_0\| \to 0 \quad (n \to +\infty), \end{aligned}$$

ami mutatja, hogy $u_0 \in \Psi(z_0)$, és ezért $z_0 \in \Psi^{-1}(B)$. Beláttuk tehát, hogy Ψ felülről félig folytonos.

A 3.4.10. Tétel *(vii)* pontjából következően Ψ-nek létezik fixpontja, azaz $x_0 \in C_0$, melyre $x_0 \in \Psi(x_0)$. Létezik tehát olyan (T_n) $\mathcal{A}$-ban haladó sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\| T_n\| \leq k$, és $T_n K x_0 \to x_0$. Ekkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$-ra $A(T_n K x_0) \to A x_0$, amiből $\mathcal{A}$ kommutativitása és a K-val való felcserélhetőség miatt

$$\| A x_0\| = \| A(\lim_{n\to+\infty} T_n K x_0)\| = \| \lim_{n\to+\infty} T_n(KAx_0)\| \leq k\| KAx_0\|. \tag{4.4}$$

Mivel $x_0 \neq \mathbf{0}$, ezért x_0 $\mathcal{A}$-ciklikus vektor, azaz $\overline{\mathcal{A}x_0} = X$, és így tetszőleges $x \in X$-re (4.4)-ből határátmenettel

$$\| x\| \leq k\| Kx\|$$

adódik. Ez pontosan azt jelenti, hogy a $K \in \mathcal{K}(X, \operatorname{ran} K)$ kompakt operátornak létezik korlátos $\operatorname{ran} K \longrightarrow X$ inverze, ez viszont végtelen dimenziós terek között lehetetlen. □

4.2.15. Megjegyzés. A tételben szereplő Ψ leképezés alulról is félig folytonos. Ehhez megmutatjuk, hogy a (4.3) alatt definiált Γ alulról félig folytonos. A bizonyításból látható, hogy minden $x \in C_0$ esetén $\Gamma(x) \neq \emptyset$. Legyen $B_0 \subseteq X$ zárt halmaz. Ekkor a $F = \{x \in C_0 \,|\, \Gamma(x) \subseteq B_0\}$ halmaz is zárt. Ha (w_n) F-ben haladó, C_0-ban konvergens sorozat, melyre $w_n \to w_0$, akkor $w_0 \in F$. Ha nem így lenne, akkor van olyan $A \in \mathcal{A}$, $\| A\| \leq k$, hogy $AKw_0 \notin B_0$. Ekkor viszont AK folytonossága miatt elég nagy n-re $AKw_n \notin B_0$, ami nem lehetséges $\Gamma(w_n) \subseteq B_0$ miatt. Ezért Γ alulról félig folytonos, amiből a 3.1.4. Állítás *(a)* pontja miatt $\overline{\Gamma}$ is alulról félig folytonos, és így a *(g)* pont miatt Ψ is.

Ha X teljes, akkor a folytonos szelések létezésén alapuló 3.4.23. Tétel *(vi)* pontjára hivatkozva is állíthatjuk fixpont létezését.

4.2.16. Következmény. (Aronszajn-Smith) *Legyen X $\mathbb{F}$ feletti végtelen dimenziós normált tér, $T \in \mathcal{B}(X)$. Tegyük fel, hogy létezik $p(z) = z^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{F}[z]$ nemzérus polinom, melyre a $p(T) = T^n + \cdots + a_0 I$ operátor kompakt. Ekkor T-nek van nemtriviális, zárt invariáns altere.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{A}$ a T által generált algebrát. Ekkor nyilván minden $A \in \mathcal{A}$-ra $p(T)A = Ap(T)$. Ha $p(T) \neq \mathbf{0}$, akkor a 4.2.14. Tétel miatt létezik nemtriviális, zárt $\mathcal{A}$-invariáns altér, amely így T-invariáns is.

Ha $p(T) = \mathbf{0}$, akkor $T^n = \sum_{j=0}^{n-1}(-a_j)T^j$. Legyen $x_0 \in X$ nemzérus vektor, és legyen $Y = \mathcal{L}(\{T^j x_0 \,|\, j = 0, \ldots, n-1\})$. Ez az altér véges dimenziós, tehát zárt, és valódi is. Könnyen látható, hogy T-invariáns: ha $y = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j T^j x_0$, akkor $Ty = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j T^{j+1} x_0 = \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_j T^{j+1} x_0 + \lambda_{n-1} \sum_{k=0}^{n-1}(-a_k)T^k x_0 \in Y$. □

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy Banach terekben a 4.2.14. Tételnél erősebb állítás is igaz. Ez LOMONOSZOV nevezetes invariáns altér tétele.

Előkészületként a 2.2.11. TYIHONOV tétel segítségével bizonyítunk egy fixponttételt folytonos lineáris operátorokra:

4.2.17. Tétel. (LOMONOSZOV) *Legyen X Banach tér $\mathbb{F}$ felett. Ha $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(X)$ olyan algebra, melynek csak triviális, zárt invariáns alterei vannak, akkor minden nemzérus $K \in \mathcal{K}(X)$ kompakt operátorhoz létezik $A \in \mathcal{A}$, hogy az AK operátornak van nemzérus fixpontja, azaz létezik $\mathbf{0} \neq u \in X$, melyre $AKu = u$.*

Bizonyítás. Legyen $K \in \mathcal{K}(X)\setminus\{\mathbf{0}\}$, amelyről feltehető, hogy $\|K\| = 1$. Legyen $x_0 \in X$ olyan vektor, melyre $\|Kx_0\| > 1$, és legyen $B_0 = \overline{B(x_0, 1)}$. Ekkor $\|K\| = 1$, $\|Kx_0\| > 1$ miatt $\mathbf{0} \notin B_0$, és $\mathbf{0} \notin \overline{K(B_0)}$. Valóban, $\mathbf{0} \in B_0$-ból $\|x_0\| \leq 1$ következne, ebből pedig $\|Kx_0\| \leq 1$. $\mathbf{0} \in \overline{K(B_0)}$ esetén pedig valamely (x_n) B_0-ban haladó sorozattal $Kx_n \to \mathbf{0}$, amiből

$$1 < \|Kx_0\| = \|Kx_0\| - \lim_{n\to+\infty} \|Kx_n\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|Kx_0 - Kx_n\| \leq 1,$$

ami lehetetlen.
Mivel $\mathcal{A}$-nak csak triviális, zárt invariáns alterei vannak, azért a 4.2.5. Állítás *(d)* pontja szerint minden nemzérus vektora X-nek $\mathcal{A}$-ciklikus. Ezért minden $x \in \overline{K(B_0)}$-hoz létezik olyan $A \in \mathcal{A}$, melyre $\|Ax - x_0\| < 1$. Így az $\mathcal{A}$-beli operátorok folytonossága miatt az $\{y \in X \,|\, \|Ay - x_0\| < 1\}_{A\in\mathcal{A}}$ rendszer nyílt fedése a $\overline{K(B_0)}$ kompakt halmaznak. Ezért létezik véges sok $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$, hogy

$$\overline{K(B_0)} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \big\{y \in X \big| \|A_j y - x_0\| < 1\big\}. \tag{4.5}$$

Legyen $j = 1, \ldots, m$ esetén $g_j : X \longrightarrow [0, +\infty)$, $g_j(z) = \max\{0, 1 - \|A_j z - x_0\|\}$. Nyilvánvaló, hogy $g_j(z) > 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\|A_j z - x_0\| < 1$, és a $g : \overline{K(B_0)} \longrightarrow [0, +\infty)$, $g(z) = \sum_{j=1}^{m} g_j(z)$ függvény pozitív. Ekkor az $f_j = \frac{g_j}{g}$ nemnegatív függvényekre $\sum_{j=1}^{m} f_j(z) = 1$ teljesül minden $z \in \overline{K(B_0)}$ esetén. Legyen $x \in B_0$ esetén

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} f_j(Kx) A_j Kx.$$

Ekkor $f_j(Kx) > 0$ esetén $A_j Kx \in B_0$, és így $f(x) \in B_0$, mert B_0 konvex, $f(x)$ pedig B_0-beliek konvex kombinációja. Igaz az is, hogy $\operatorname{ran} f \subseteq \overline{\operatorname{conv}}(\bigcup_{j=1}^{m} A_j K(B_0)) =: C$. Mivel $A_j K$ kompakt operátor, azért a 0.2.5. KREIN tétel miatt C kompakt. Következésképpen a folytonos f függvény a nemüres, kompakt és konvex $B_0 \bigcap C$ halmazt önmagába képezi. Ezért 2.2.11. TYIHONOV tétel szerint létezik $u \in B_0 \bigcap C$ fixpontja, amely nemzérus, hiszen $\mathbf{0} \notin B_0$. Ez azt jelenti, hogy $u = \sum_{j=1}^{m} f_j(Ku) A_j Ku$, tehát az $A = \sum_{j=1}^{m} f_j(Ku) A_j \in \mathcal{A}$ operátorral $AKu = u$. $\square$

4.2.18. Tétel. (Lomonoszov) *Legyen X Banach tér $\mathbb{C}$ felett, $T \in \mathcal{B}(X) \setminus \{\lambda I\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$. Tegyük fel, hogy létezik olyan nemzérus $K \in \mathcal{K}(X)$ kompakt operátor, hogy $TK = KT$. Ekkor T-nek létezik nemtriviális, zárt hiperinvariáns altere.*

Bizonyítás. Indirekten tegyük fel, hogy az $\mathcal{A} = \mathrm{Com}(T) \subseteq \mathcal{B}(X)$ algebrának csak triviális, zárt invariáns alterei vannak. Ekkor a 4.2.17. Lomonoszov tétel szerint létezik $A \in \mathcal{A}$, hogy az AK operátornak van nemzérus fixpontja. Következésképpen $Y = \ker(AK - I) \neq \{\mathbf{0}\}$, amely egy AK-hiperinvariáns altér a 4.2.5. Állítás *(a)* pontja miatt. Mivel $AK \in \mathcal{K}(X)$, és $AK\big|_Y = I_Y$, azért Y véges dimenziós. T felcserélhető A-val és K-val is, tehát AK-val is, amiből következik, hogy Y nemtriviális, zárt T-invariáns altér. Ekkor viszont a $T\big|_Y : Y \longrightarrow Y$ operátornak van sajátértéke, hiszen Y véges dimenziós komplex vektortér. Tehát valamely $\lambda \in \mathbb{C}$-re $Z = \ker(T - \lambda I)$ valódi altere X-nek, amely a folytonosság miatt zárt. Így a 4.2.5. Állítás *(a)* pontja Z miatt T-hiperinvariáns altér. $\square$

4.2.19. Megjegyzés. Az előző tétel feltételeiben lényeges, hogy X komplex vektortér, mert véges dimenziós valós vektorterek esetében nem állíthatjuk valós sajátérték létezését.

Hilbert terekben korlátos operátorok bizonyos osztályaira ismeretes pozitív eredmény. Ha H komplex Hilbert tér, $A \in \mathcal{B}(H) \setminus \{\lambda I\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$ normális operátor, akkor a tér felbomlik két, egymásra ortogonális, zárt A-hiperinvariáns altér direkt összegére. Mindez következik a nevezetes Spektráltétel-ből, hiszen egy normális operátor spektrálfelbontása ilyen alterek létezésén alapul.
Az invariáns altereknek rendkívül fontos szerepük van a Banach algebrák ([3]) és a topologikus csoportok ([23]) reprezentációelméletében.

Irodalomjegyzék

[1] Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis. *An Invitation to Operator Theory.* Graduate Studies in Mathematics, Volume 50, AMS (2000).

[2] B. Beauzamy. *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*. North-Holland Mathematical Library, Volume 42, (1988).

[3] F. F. Bonsall, J. Duncan. *Complete Normed Algebras.* Springer-Verlag (1973).

[4] N. Bourbaki. *Elements of Mathematics, Topological Vector Spaces, Chapters 1-5.* Springer-Verlag (1987).

[5] W. M. Boyce. *Commuting functions with no common fixed point*, Trans. Amer. Math. Soc. 137 (1969), pp. 77-92.

[6] F. E. Browder. *The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces*, Math. Ann. 177 (1968), pp. 283-301.

[7] L. Czách. *Topologikus vektorterek* Jegyzet (1998).

[8] M. M. Day. *Fixed point theorems for compact convex sets*, Ill. J. Math. 5 (1961), pp. 585-590.

[9] K. Deimling. *Nonlinear Functional Analysis.* Springer-Verlag (1985).

[10] J. Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon (1966).

[11] J. Dugundji, A. Granas. *Fixed Point Theory.* Polish Scientific Publishers (1982).

[12] P. Enflo. *On the invariant subspace problem for Banach spaces*, Seminaire Maurey-Schwarz (1975-1976); Acta Math. 158 (1987), pp. 213-313.

[13] K. Fan. *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem*, Math. Ann. 142 (1961), pp. 305-310.

[14] K. Fan. *Extension of two fixed point theorems of F. E. Browder*, Math Z. 112 (1969), pp. 234-240.

[15] K. Goebel, W. A. Kirk. *Topics in Metric Fixed Point Theory.* Cambridge University Press (1990).

[16] K. Goebel, T. Kuczumow. *Irregular convex sets with fixed point property for nonexpansive mappings*, Colloq. Math. Vol. 40 (1979), pp. 259-264.

[17] J. Gwinner. *On fixed points and variational inequalities - a circular tour*, Nonlinear Analysis, TMA. Vol. 5, No. 5, (1981) pp. 565-583.

[18] B. Halpern. *Fixed point theorems for set-valued maps in infinite dimensional spaces*, Math. Ann. 189 (1970), pp. 87-98.

[19] C. J. Himmelberg. *Fixed points of compact multifunctions*, J. Math. Anal. Appl. 38 (1972), pp. 205-207.

[20] E. Hewitt, K. A. Ross. *Abstract Harmonic Analysis Vols. I-II.* Springer-Verlag (1963), (1970).

[21] V. Klee. *Some topological properties of convex sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), pp. 30-45.

[22] G. Köthe. *Topological Vector Spaces I.* Springer-Verlag (1983).

[23] J. Kristóf. *Az Analízis Elemei IV.* ELTE (1998).

[24] H. W. Kuhn. *Some combinatorical lemmas in topology*, IBM J. of Res. and Dev. 4 (1960), pp. 518-524.

[25] G. W. Mackey. *On convex topological linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 60 (1946), pp. 519-537.

[26] B. Maurey. *Points fixes des contractions sur un convex formé de* L^1, Seminaire d' Analyse Fonctionnelle (1980-81), Expose no. VIII, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[27] E. Michael. *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), pp. 152-182.

[28] E. Michael. *Continuous selections I*, Ann. of Math. 63 (1956), pp. 361-382.

[29] E. Michael. *A theorem on semi-continuous set-valued functions*, Duke Math. J. 26 (1959), pp. 647-652.

[30] E. Michael. *Three mapping theorems*, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), pp. 410-415.

[31] E. Michael. *A Selection Theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), pp. 1404-1406.

[32] J. V. Neumann. *Zur theorie der Gesellschaftspiele*, Math. Ann. 100 (1928), pp. 295-320.

[33] S. Park. *Fixed point theorems on compact convex sets in topological vector spaces*. Contemporary Mathematics Volume 72 (1988).

[34] S. Reich. *Fixed points in locally convex spaces*, Math. Z. 125 (1972), pp. 17-31.

[35] S. Reich. *On fixed point theorems obtained from existence theorems for differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 54 (1976), pp. 26-36.

[36] S. Reich. *Approximate selections, best approximations, fixed points, and invariant sets*, J. Math. Anal. Appl. 62 (1978), pp. 104-113.

[37] S. Reich. *Fixed point theorems for set-valued mappings*, J. Math. Anal. Appl. 69 (1979), pp. 353-358.