Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi kar
matematikus szak

Illeszkedési problémák az euklideszi térben

DIPLOMAMUNKA

Készítette: Tóth Csaba
Témavezető: Szabó László

1997.

Tartalom:

Jelölések:

- $[a, b] = \{n \in \mathbf{N} \ : \ a \leq n \leq b\}$,
- $M[X] =$ az X valószínűségi változó várható értéke,
- (G, E) gráf, melynek csúcshalmaza G, élhalmaza E,
- $\mathcal{P}$ lesz általában egy n elemű ponthalmaz $\mathbf{R}^d$-ben,
- $\mathcal{E}$ egy e elemű részhalmaza $\mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ hatványhalmaznak,
- $e_t = \{s \in \mathcal{E} \ : \ |s \cap \mathcal{P}| \geq t\}$.

  Ha $\bar{x} \in \mathbf{R}^d$ és $f, g : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$, akkor

- $g(\bar{x}) = O(f(\bar{x}))$ esetén $\frac{g(\bar{x})}{f(\bar{x})}$ létezik és korlátos,
- $g(\bar{x}) = o(f(\bar{x}))$ esetén $\frac{g(\bar{x})}{f(\bar{x})} \to 0$, míg $\|\bar{x}\|_\infty \to \infty$,
- $g(\bar{x}) = \Omega(f(\bar{x}))$ esetén $\frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$ létezik és korlátos.

Bevezetés

E dolgozat célja, hogy áttekintést adjon a Szemerédi-Trotter tétel eddig ismert alkalmazási területeiről és általánosításairól. A kombinatorikus geometriának ez az alapvető tétele aszimptotikusan éles becslést ad az euklideszi sík n pontja és e egyenese közt fellépő illeszkedések maximumára n, e függvényében: $I = O(n^{2/3}e^{2/3} + n + e)$. Vagy ezzel ekvivalens módon (lásd az 1.2. tételt) $t \in [2, C\sqrt{n}]$ esetén a t pontú egyenesek száma $e_t = O(\frac{n^2}{t^3})$. A triviális becslés e_t-re $\binom{n}{2} = O(n^2)$. De a pontok és egyenesek kombinatorikus tulajdonságaiból levezethető $O(\frac{n^2}{t^2})$, ugyanis az $\binom{n}{2}$ lehetséges pontpárból legalább $\binom{t}{2}$ esik egy minimum t pontú egyenesre, ezért $e_t \leq \binom{n}{2}/\binom{t}{2} = O(\frac{n^2}{t^2})$. Ez a becslés éles is a véges geometriák esetében, ahol $n = e = k^2+k+1$ és $e_k = n(k+1) = e(k+1) = O(\frac{n^2}{k^2})$.

A problémakör első áttörése Beck József 1982-es tétele volt, melyben megmutatta, hogy euklideszi síkon $t \in [2, C\sqrt{n}]$ esetén $e_t = O(\frac{n^2}{t^{2.05}})$ és ezzel egy kombinatorikus állítással tett különbséget az euklideszi és a véges projektív geometriák között. Még ugyanebben az évben Szemerédi és Trotter javított ezen a becslésen. Az ő eredményük élesnek bizonyult, azonban az azóta vizsgált más illeszkedési problémákra már csak néhány esetben ismert a pontos aszimptotika.

1995-ben Székely László talált egy elegáns bizonyítást a Szemerédi-Trotter tételre extremális topológikus gráfelmélet felhasználásával. A Székely féle bizonyítás ötletére alapozva Pach János és Micha Sharir adott felső becslést síkbeli pontok és görbék illeszkedési számára. A görbékre csak kombinatorikus megszorításokat tettek úgy, mint: k adott pontra legfeljebb s görbe illeszkedhet és két görbe legfeljebb s pontban metszi egymást. Így például $k = 3, s = 1$ konstans paraméterekkel n pont ill. e kör illeszkedéseire érvényes korlát $I = O(n^{3/5}e^{4/5} + n + e)$.

Ugyanez a kombinatorikus tulajdonság jellemzi a háromdimenziós euklideszi tér síkjait is, ha kikötjük, hogy semelyik három adott pont ne legyen kollineáris. Ezzel a feltétellel Edelsbrunner, Guibas, Sharir talált 1990-ben az előzőnél alig gyengébb felső korlátot a pontok és síkok illeszkedésére: $I = O(n^{3/5-\delta}e^{4/5+2\delta} + n + e)$ tetszőlegesen kicsi pozitív δ-ra. Ennek a korlátnak a bizonyítása egy rekurzív eljáráson alapul és használja K.L. Clarkson 1987-es véletlen módszeres eredményeit. A tetszőleges dimenzióban érvényes felső korlát pontok és hipersíkok illeszkedéseinek számára a Szemerédi-Trotter tételből vezethető le indukcióval, de még ennél is gyengébb eredményt ad. Az ismert legjobb alsó korláttól mindkettő messze van.

Más megközelítésban a Szemerédi-Trotter tétel háromdimenziós általánosításának tekinthetjük azt a pontokra és síkokra vonatkozó illeszkedési problémát, ahol a síkokról csak annyit teszünk fel, hogy tertalmaznak három affin független adott pontot. Erre Clarkson, Edelsbrunner, Guibas, Sharir és Haussler eredményei nyomán már ismert a (log faktortól eltekintve) pontos aszimptotika.

Ki fog derülni, hogy az illeszkedési problémák és eredmények szoros kapcsolatban állnak másik két régi probláemakörrel: az ún. egységtávolság problémával és az elrendezések komplexitásával. Az egységtávolság problémának több változatára az eddig ismert legjobb eredmény illeszkedési számokra adott felső becslésekből származik. Míg e hipersík elrendezésében n cella komplexitására sok esetben felülről becsli e hipersík és n pont illeszkedéseinek számát.

A felhasznált módszerek a kombinatoriai, geometriai ismeretek mellett véletlen módszerekre, algoritmusok bonyolultságára és a topológia elemeire is támaszkodnak.

1. A Szemerédi-Trotter tétel

Szemerédi Endre és W.T.Trotter 1982-ben bizonyította a következőt

1.1. TÉTEL: Legyen adott $\mathbf{R}^2$-ben n különböző pont és e különböző egyenes. Ekkor a pont-egyenes illeszkedések száma $I = C(n^{2/3}e^{2/3} + n + e)$, $(C > 0)$.

$\square$

A tétel átfogalmazásai is Szemerédi-Trotter tételként ismertek, ezért mi is így fogunk rájuk hivatkozni. Itt belátjuk ezek ekvivalenciáját.

1.2 ÁLLÍTÁS: Legyen adott $\mathbf{R}^2$-ben n pont és e egyenes. Ekkor az illeszkedések I számára egyszerre teljesül

$$I = O(n^{2/3}e^{2/3} + n + e); \tag{1}$$

$$\sqrt{n} \le e \le n^2 \text{ esetén } I = O(n^{2/3}e^{2/3}); \tag{2}$$

$$e_t = O\left(\frac{n^2}{t^3} + \frac{n}{t}\right), \quad \text{ha} \quad t \in [2, n], \tag{3}$$

ahol e_t jelöli a legalább t pontú egyenesek számát.

BIZONYÍTÁS: (1) $\Rightarrow$ (2). $\sqrt{n} \le e \le n^2$ esetén $n = n^{2/3}n^{1/3} \le n^{2/3}e^{2/3}$ és $e = e^{2/3}e^{1/3} \le e^{2/3}n^{2/3}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Először azt látjuk be, hogy $2 \le t \le D\sqrt{n}$ esetén $e_t = O\left(\frac{n^2}{t^3}\right)$, $(D > 1)$. Legyen $C > 0$ olyan, hogy $\sqrt{n} \le e \le n^2$ esetén $I < Cn^{2/3}e^{2/3}$ teljesüljön. Indirekte tegyük fel. hogy található $e = C^3D^3n^2/t^3$ darab legalább t pontú egyenes. Ezek illeszkedéseinek száma $I \ge et = C^3D^3\frac{n^2}{t^2}$. Másrészt $t \in [CD, C\sqrt{n}]$ esetén $\sqrt{n} \le e \le n^2$ és (2)-ből $I \le Cn^{2/3}e^{2/3} = C^3D^2n^2/t^2$ következik, ellentmondás. $t \in [2, CD-1]$ esetén pedig $e_t \le \binom{n}{2} = O\left(\frac{n^2}{t^3}\right)$

Most azt látjuk be, hogy $t \in [\sqrt{2n}+1, n]$ esetén $e_t = O\left(\frac{n}{t}\right)$. Tekintsük az összes legalább t pontú egyenest. Az első k darab egyenes ($k \in [1, e_t]$) legalább $t+(t-1)+(t-2)+\cdots+(t-j+1)$ adott pontot fed le, hiszen indukcióval a k-adik maximum $k-1$ adott pontban metsz kisebb indexű egyeneseket; és a szummába nem kerülhetnek negatív tagok, mert $t+(t-1)+\cdots+2+1 = \frac{t(t-1)}{2} > \frac{\sqrt{2n}^2}{2} = n$. Így az e_t egyenes által lefedett összes pontra: $n \ge t+(t-1)+\cdots+(t-e_t+1) >$ $> te_t/2$, ahonnan $e_t < 2n/t$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Tudjuk, hogy $t \in [2, D\sqrt{n}]$ esetén $e_t \leq C\frac{n^2}{t^3}$. Becsüljük felülről az illeszkedések számát. Legyen l a legkisebb olyan természetes szám, hogy $Cn^2/l^3 \leq e$. Ekkor $l \leq 8(Cn^2/e)^{1/3}$ A legfeljebb $D\sqrt{n}$ pontú egyenesek. összes illeszkedéseit felülről becsli

$$e + el + \sum_{t=l}^{D\sqrt{n}} C\frac{n^2}{t^3} \leq e + e8\left(C\frac{n^2}{e}\right)^{1/3} + Cn^2\int_l^{D\sqrt{n}} \frac{1}{t^3}dt =$$

$$= e + O\left(n^{2/3}e^{2/3}\right)\frac{C}{2}n^2\left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{D^2 n}\right) \leq e + O(n^{2/3}e^{2/3}).$$

A $D\sqrt{n}$-nél több pontú egyenesek száma legfeljebb $\frac{C}{D^3}\sqrt{n}$. Illeszkedjen az egyes egyenesekre $a(i) \geq D\sqrt{n}$ pont. Ezen egyenesek összes illeszkedése $I' = \sum_i a(i)$. Ha egyenként rakjuk le az egyeneseket a síkra, akkor a j-edik legalább $a(j) - (j-1)$ újabb pontot fed le, mert az első $(j-1)$-gyel legfeljebb $j-1$ metszéspontja van. $n \geq \sum_i (a(i) - (i-1)) \geq \sum_i a(i) - \sum_{i=1}^{\frac{C}{D^3}\sqrt{n}} (i-1) \geq \sum_i a(i) - O(n)$. Ebből $I' = O(n)$.

□

1.a. Bizonyítás metszési számokkal

A Szemerédi-Trotter tétel eredeti bizonyítása hosszadalmas és a konstans faktor is $C = 10^{60}$. Azóta több rövidebb bizonyítás is született (Pl. lásd [11]-t). Minden felső becslést bizonyító tétel alapja egy az euklideszi tér elválasztásait jellemző segédtétel és egy statisztikus becslés. Székely László 1995-ös bizonyítása [27] a geometriai gráfok metszési számának alsó becslésére épül, ami csak az Euler-féle poliédertételt és a Jensen-egyenlőtlenséget használja. Eszerint az 1.1. tételbeli konstans faktor $\sqrt[3]{100}$.

Székely László bizonyításához célszerű bevezetni néhány egyszerű fogalmat.

1.4. Definíció: Geometriai gráf: (G, E) egyszerű[1] absztrakt gráf és annak

$$f : (G, E) \to (\mathbf{R}^2, \mathcal{P}(\mathbf{R}^2))$$

síkbaágyazása úgy, hogy semelyik két gráfpont képe nem esik egybe, az élek képei pedig a pontokat összekötő folytonos nyílt görbék, és két él képeinek metszete véges halmaz.

1.5. Definíció: Egy geometriai gráf metszési száma az összes élpár metszésszámának az összege, azaz

$$\sum_{i,j \in E} |f(i) \cap f(j)|.$$

[1]hurokél és többszörös él nélküli

Jelöljük ezt a számot $cr(G,E)_f$-fel vagy $cr(G)$-vel az angol crossing szóból.

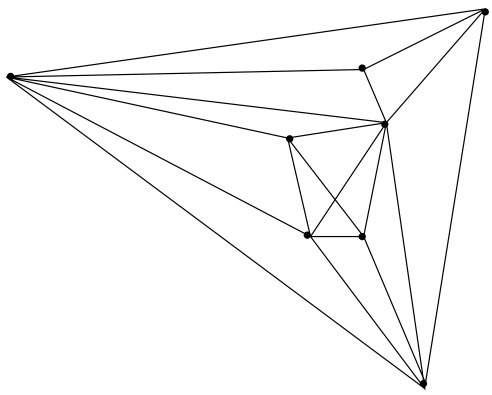
1.6. Definíció: Egy absztrakt egyszerű gráf metszési száma a minimális metszési számú síkbarajzolásának metszési száma:

$$cr(G,E) = min_f\{cr(G,E)_f : (G,E)_f \text{ geometriai gráf}\}$$

Euler poliédertétele alapján

1.7a. Tétel: (G,E) geometriai gráfban ha $|G| = n$, $|E| = l$ és $l > 3n-6$, akkor $cr(G,E) \geq 1$.

□



Ennél azonban adható jobb becslés is, ha $l \geq 4n$. Egymástól függetlenül bizonyította Leighton [21] valamint Ajtai, Chvátal, Newborn, Szemerédi [2] a következő tételt, de már Erdős és Guy is ilyen aszimptotikát sejtett [17].

1.7.b. Tétel: Ha (G,E) geometriai gráf, $|G| = n$, $|E| = l$, $l > 4n$, akkor

$$cr(G,E) \geq \frac{1}{100}\frac{l^3}{n^2}.$$

Bizonyítás: Indukcióval azt bizonyítjuk, hogy

$$cr(G,E) \geq \frac{3}{64}\binom{n}{4}\frac{l^3}{\binom{n}{2}^3}.$$

Ebből már adódik a tétel állítása. Először is $n \leq 9$ esetén $l \leq \binom{n}{2}$ miatt $l \geq$ $\geq 4n$ csak akkor teljesülhet, ha $n = 9, l = 36$ és (G,E) teljes gráf. Erre igaz a egyenlőtlenség.

$10 \leq n$ és $4n \leq l \leq 5n$ esetén az egyenlőtlenség jobb oldala legfeljebb $l - 3n$, mert felülről becsülhető $\frac{3}{64}\frac{(n-1)^3 n}{4!}\frac{l^3}{(n^2-n)^3/8} \leq \frac{l^3}{64n^2}$-vel. S az $l = \alpha n$ helyettesítéssel, az $\alpha \to (\alpha - 3) - (\alpha/4)^3$ harmadfokú függvénynek a $(4,5)$ intervallumban nincs zérushelye, $\alpha = 5$-ben pozitív.

Ha $l > 5n$, akkor készítsük el (G,E) gráfhoz és $v \in G$ csúcshoz a G_v gráfot úgy, hogy (G,E)-ből kitöröljk v-t és a rá illeszkedő éleket. Ezzel a gráf egy metszését 4-szer töröljük ki, összegezve minden $v \in G$-re:

$$(n-4)cr(G,E) = \sum_{v \in G} cr(G_v, E_v).$$

Mivel v-vel együtt legfeljebb $n-1$ élt tudunk kitörölni, G_v élszámára és csúcsszámára teljesül az indukciós feltétel, így G_v-re alkalmazható a tétel:

$$\sum_{v \in G} cr(G_v, E_v) \geq \frac{3}{64} \cdot \frac{\binom{n-1}{4}}{\binom{n-1}{2}^3} \sum_{v \in G} l_v^3 =$$

$$= \frac{3}{64}\binom{n}{4}\frac{l^3}{\binom{n}{2}}\frac{n-4}{n}\left(\frac{n}{n-2}\right)^3 \frac{\sum_{v \in G} l_v^3}{l^3}.$$

A kívánt egyelnőséghez az kell, hogy

$$\left(\frac{n}{n-2}\right)^3 \frac{1}{n}\sum_{v \in G}\left(\frac{l_v}{l}\right)^3 \geq 1$$

teljesüljön. A Jensen egyenlőtlenségből $\frac{1}{n}\sum_{v \in G} l_v^3 \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{v \in G} l_v\right)^3$. Itt $\sum_{v \in G} l_v = nl - 2l$, mert minden élt kétszer hagytunk el. Tehát

$$\left(\frac{n}{n-2}\right)^3 \frac{1}{n}\sum_{v \in G}\left(\frac{l_v}{l}\right)^3 \geq \left(\frac{n}{n-2}\right)^3 \frac{1}{l^3}\left(\frac{1}{n}\sum_{v \in G} l_v\right)^3 = 1.$$

□

Ennek segítségével már könnyen bizonyítható a Szemerédi-Trotter tétel:

Bizonyítás (1.1. Szemerédi-Trotter tétel): Hagyjuk el azokat az egyeneseket, melyekre nem illeszkedik pont. Elég a tételt erre a rendszerre bizonyítani, hiszen az illeszkedések száma ezzel nem változik, $C(n^{2/3}e^{2/3}+n+e)$ pedig nem nő. Készítsünk egy (G,E) gráfot úgy, hogy G az adott pontok halmaza, E-ben két gráfpontot akkor köt össze él, ha egy adott egyenesre illeszkednek és ezen az egyenesen nincs közöttük más adott pont.

A gráfnak metszése csak két adott egyenes metszéspontjában lehet. Így $cr(G,E) \leq \binom{e}{2} < e^2$.

Az egy egyenesre illeszkedő pontok száma eggyel több az egyenesen lévő gráfélek számánál. Tehát a pont-egyenes illeszkedések száma: $I = l + e$. A 1.6. tétel szerint: ha $I - e \geq 4n$, akkor

$$\frac{1}{100}\frac{(I-e)^3}{n^2} \leq cr(G,E) < e^2, \quad \text{ahonnan} \quad I \leq 5(ne)^{2/3} + e.$$

Azaz tetszzőleges I-re $I \leq 5(n^{2/3}e^{2/3} + e + n)$.

□

1.8. Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az euklideszi sík egyeneseinek tulajdonsági közül csak annyit használtunk ki, hogy

- két egyenes egy pontban metszi egymást, $(cr(G,E) \leq \binom{e}{2})$
- két pontra legfeljebb egy egyenes illeszkedik, (Euler T.)
- az egyenes egyszerű[2] görbe (darabjai gráfélek síkbarajzolásai),
- az egyenes nyílt görbe (egyenesen több pont van, mint gráfél),
- az egyenes két félsíkra vágja a síkot (Euler-tétel).

Az ezeket kielégítő görbeosztályra változtatás nélkül igaz a tétel. Az első két feltétel arra cserélhető, hogy bármely két görbe legfeljebb $K \in \mathbf{N}$ pontban metszi egymást. Ekkor az illeszkedések száma $I \leq 5K^{2/3}(n^{2/3}e^{2/3} + n + e)$.

Ha zárt görbéket is megengedünk, módosítani kell a bizonyítást. A legalább két pontot tartalmazó görbék minden szomszédos pontpár közötti szakaszát tekintsük gráfélnek. Az egypontú görbéket eltöröljük. Ezzel legfeljebb e darab illeszkedést hagyunk el. Így $l \leq I \leq l + e$, $I \leq 5(n^{2/3}e^{2/3} + e)$ vagy $I \leq 4n + e$. Figyelembe véve az elhagyott görbék illeszkedéseit is mindkét esetben $I \leq 5(n^{2/3}e^{2/3} + 4n + 2e) + e \leq 5(n^{2/3}e^{2/3} + e + n)$

1.b. Egységtávolság problémák

Itt célszerű megemlíteni egy, az egységtávolság problémára adott becslést. Pontosabban igaz a

1.9. Tétel: Adott n különböző pont $\mathbf{R}^2$-ben. Jelölje $d(n)$ az egymástól egységtávolságra lévő pontpárok számát. Ekkor $d(n) = O(n^{4/3})$.

[2] önmetszés nélküli

A tételt először Spencer, Szemerédi és Trotter bizonyították [28] a Szemerédi-Trotter tételből, az itt következő bizonyításban szerplőnél sokkal rosszabb konstansfaktorral. Székely bizonyításával ez már a metszési számok becsléséből is következik.

BIZONYÍTÁS: Tekintsük az n különböző pontot és a köréjük írt egységsugarú köröket. A körök olyan zárt görbék, hogy bármely kettő legfeljebb két pontban metszi egymást és bármely két pontra legfeljebb kettő illeszkedik. A rendszerben az illeszkedések számára igaz

$$I \leq 8(n^{2/3}n^{2/3} + 4n + 3n) \leq 15n^{4/3}.$$

Az illeszkedések száma pedig éppen a fellépő egységtávolságok kétszeresét adja. □

Hasznos lesz az Ajtai, Chvátal, Newborn, Szemerédi; Leighton féle metszési szám becslés egy általánosítása a többszörös élű geometriai gráfokra. Ezekre a metszési szám analóg módon definiálható. Szintén Székely László bizonyította az alábbi éles eredményt.

1.10. TÉTEL: Legyen (G, E) egy többszörös élű geometriai gráf. Minden él legfeljebb K-szoros. $|G| = n, |E| = e,\ e \geq 5nK$. Ekkor

$$cr(G, E) = \Omega\left(\frac{e^3}{n^2K}\right).$$

BIZONYÍTÁS: Az E élhalmazt diszjunkt darabokra vágjuk:

$$E = \bigcup_{i\in[0,\log_2 K]}^{*} E_i.$$

E_i-ben azok az élek szerepelnek, amelyek multiplicitása $[2^i, 2^{i+1}]$-ba esik. Jelölje E_i^* azt az élhalmazt, melyben E_i többszörös éleit egy él helyettesíti. A (G, E_i) gráfok között megkülönböztetünk ritkákat és sűrűket. (G, E_i) sűrű, ha $|E_i| >$ $> 2 \cdot 2^i n$ $(i \in [0, \log_2 K])$, egyébként ritka. A ritka élhalmazokra teljesül az, hogy $\sum_{E_i\ ritka} |E_i| \leq 4Kn$. Másrészt

$$\sum_{E_i\ \text{sűrű}} |E_i| \geq e - \sum_{E_i\ ritka} |E_i| \geq e - 4Kn \geq \frac{e}{5}.$$

Segédtétel: Ha egy (G, E) absztrakt gráfban minden él K-szoros, akkor a (G, E^*) egyszeres élű gráfban $cr(G, E^*) = cr(G, E)/K^2$.

Bizonyítás: Vegyük a (G, E^*) gráf egy síkbarajzolását $cr(G, E^*)$ metszéssel. Szorosan minden él mellé rajzoljunk még $K-1$ élt. Ez (G, E) síkbarajzolása $K^2 cr(G, E^*)$ metszéssel.

Megfordítva, nézzük (G, E) egy síkbarajzolását. Minden párhuzamos élből válasszunk ki egyet. Ezt megtehetjük $K^{|E|}$-féleképp. Ezek mindegyike legalább $cr(G, E^*)$ metszést ad. és minden metsző pár $K^{|E|-2}$-ször állt elő. $\square$

Eszerint:

$$cr(G,E) \geq \sum_{i=0}^{\log_2 K} cr(G, E_i) \geq \sum_{i=0}^{\log_2 K} 2^{2i} cr(G, E_i^*) \geq \sum_{E_i \text{ sűrű}} \frac{|E_i^*|^3}{100 n^2 2^{2i}} \geq$$

$$\geq \sum_{E_i \text{ sűrű}} \frac{|E_i^*|^3}{100 2^i n^2} = \frac{1}{100 n^2} \sum_{E_i \text{ sűrű}} \left(\frac{|E_i^*|}{2^{i/3}} \right)^3 \geq$$

a Hölder egyenlőtlenség szerint

$$cr(G,E) \geq \frac{1}{100 n^2} \left(\sum_{E_i \text{ sűrű}} \frac{|E_i^*|}{2^{i/3}} 2^{i/3} \right)^3 / \left(\sum_{E_i \text{ sűrű}} (2^{i/3})^{2/3} \right)^2 \geq 1/100 \frac{e^3}{K n^2}.$$

$\square$

A tételt egy későbbi fejezetben felhasználjuk, de emellett van közvetlen alkalmazása ismét a síkbeli pontok által maeghatározott távolságok köréből. Erdős [18] egy 1946-os sejtése szerint n pont a síkban legalább $\Omega(n/\log n)$ különböző távolságot határoz meg; ő $\sqrt{n}$-et mutatott meg. Több kisebb-nagyobb előrelépés után Chung, Szemerédi és Trotter [4] mutatott 1992-ben $n^{4/5}/(\log n)^c$ különböző távolságot. Az egy pontból induló különböző távolságok számára 1990-ben a legjobb eredmény $cn^{2/3}$ volt Clarkson, Edelsbrunner, Guibas, Sharir, Welzl [7] cikkében.

A többszörös élű gráfok metszési számának alsó becsléséből egyszerűen következik Székely László [31] alábbi tétele.

1.11. TÉTEL: Legyen adott n különböző pont $\mathbf{R}^2$-ben. Ekkor kiválasztható a pontok egyike, hogy az abból mért különböző távolságok száma $\Omega(n^{4/5})$.

BIZONYÍTÁS: Legyen t az egy pontból mért különböző távolságok maximuma. Feltehető, hogy $t = o(n/\log n)$, különben készen lennénk. Minden pont köré írjunk kört az ott fellépő távolságoknak megfelelő hosszúságú sugarakkal. Készítsünk egy geometriai gráfot, melynek az n pont a csúcshalmaza, élei pedig azon körívek szomszédos pontokat összekötő darabjai, melyeken legalább 3 pont van.

Az így kapott gráf éleinek száma legalább cn^2, de élei nem feltétlen korlátos multiplicitásúak.

Ha a p, q gráfél multiplicitása k, akkor a pq szakasz felezőmerőlegesén van legalább k körközéppont. Ha egy egyenesen k adott pont van, legfeljebb $2kt$ körívnek lehet felezőmerőlegese. Így a legalább K multiplicitású élek száma:

$$\sum_{i=K}^{n} e_{=i} 2it = 2t \sum_{i=K}^{\sqrt{n}} e_i + 2t \sum_{i=\sqrt{n}+1}^{n} e_i,$$

ahol $e_{=i}$ jelöli a pontosan i pontú egyenesek számát. A Szemerédi-Trotter tételből

$$\sum_{i=K}^{\sqrt{n}} e_i \leq \sum_{i=K}^{\sqrt{n}} Cn^2/i^3 \leq Cn^2 \int_{K-1}^{\sqrt{n}} 1/t^3 dt = O(n^2)/K^2.$$

Az 1.2. állítás (3) $\Rightarrow$ (1) bizonyításában láttuk, hogy $\sum_{i=\sqrt{n}+1}^{n} e_i = O(n)$.

Ha elhagyunk minden legalább $K = L\sqrt{t}$-szeres élt, ahol L elég nagy konstans; akkor ezzel $2Ct(n^2/(L^2t) + L\sqrt{t}n) \leq (c/2)n^2$-nél kevesebb élt hagyunk el, így még marad $\Omega(n^2)$ él a gráfban.

Erre alkalmazva az 1.10. általánosított metszésszám-tételt

$$cr(G, E') \geq \frac{cn^6}{n^2 L\sqrt{t}} = \Omega\left(\frac{n^4}{\sqrt{t}}\right).$$

Ugyanakkor legfeljebb nt kört rajzoltunk és $2n^2t^2$ metszést kaphatunk. Ebből $t = \Omega(n^{4/5})$.

$\square$

1.c. Alsó becslés

A Szemerédi-Trotter tételbeli felső becslés aszimptotikusan a legjobbnak bizonyult, ugyanis adott e, n-re található n pont és e egyenes $\mathbf{R}^2$-ban $\Omega(n^{2/3}e^{2/3}+n+e)$ illeszkedéssel. Erdőstől [1] származik a következő konstrukcó.

1.12. Tétel: Található olyan $c > 0$, hogy bármely $n, e \in \mathbf{N}$-hez van n különböző pont és e különböző egyenes, hogy a köztük létrejövő illeszkedések száma legalább $c(n^{2/3}e^{2/3} + e + n)$.

Bizonyítás: Az illeszkedések számát jelöljük I-vel. Nyilván $I \geq \max(n, e)$, hiszen ezt elérhetjük, ha az összes pont kollineáris vagy az összes egyenes konkurrens.

Arra kell konstrukciót találnunk, hogy $I \geq cn^{2/3}e^{2/3}$ valamely c-re. Legyen n helyett $\tilde{n} \in (1/20n, n)$ olyan, hogy $2|\sqrt{\tilde{n}}$ és $\tilde{n}^{1/6} \in \mathbf{N}$, (ilyen van, ha $n \geq 20$), e helyett $\tilde{e} \in (1/5e, e)$ pedig olyan, hogy $\tilde{e}^{1/3} \in \mathbf{N}$ igaz legyen. Teljesüljön még

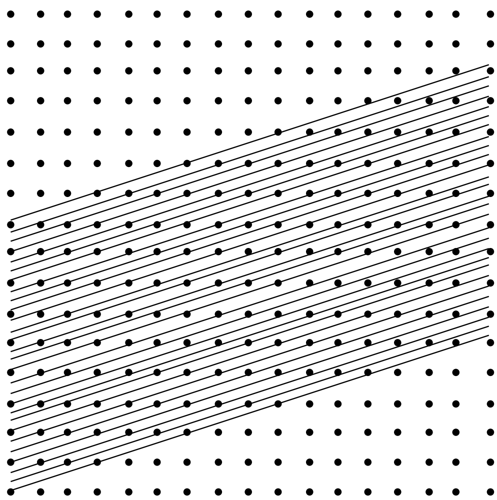
$$\left(\frac{c\tilde{e}}{\sqrt{\tilde{n}}}\right)^{1/3} = k \in \mathbf{N} \qquad (1)$$

valamely később meghatározandó $c > 0$ konstanssal.

A ponthalmazunk legyen $\mathcal{P} = \{(i,j) : i,j \in [1, \sqrt{\tilde{n}}]\} \subset \mathbf{Z}^2$ rács. Legyen $r, s \in \mathbf{N}$ olyan, hogy $s \le r,\ r, s \in [1,k]$, $\mathrm{lnko}(r,s) = 1$. Ekkor

$$L_{r,s} := \left\{ y = \frac{s}{r}(x-i) + j : i \in [1,r]\ j \in \left[1, \frac{\sqrt{\tilde{n}}}{2}\right] \right\}$$

$$|L_{r,s}| = r\frac{\sqrt{\tilde{n}}}{2},$$



$L_{3,1}$

azaz $L_{r,s}$ az összes (i,j)-t és $(i+r, j+s)$ pontot összekötő egyenes, ahol $i \in [1,r]$, $j \in [1, \frac{\sqrt{\tilde{n}}}{2}]$.

Végül legyen

$$L := \bigcup_{\substack{r,s \in [1,k],\ s<r \\ \mathrm{lnko(r,s)} = 1}} L_{r,s}$$

Mivel $\mathrm{lnko}(r,s) = 1$, a különböző $L_{r,s}$-be tartozó egyenesek meredeksége különböző. $i \in [1,r]$ miatt $L_{r,s}$-ban megadott minden egyenes különböző. Ha ugyanis $y - j_1 = \frac{s}{r}(x - i_1)$ és $y - j_2 = \frac{s}{r}(x - i_2)$ két $L_{r,s}$-beli egyenes, akkor $j_1 - j_2 = \frac{s}{r}(i_1 - i_2) \in \mathbf{Z}$, amiből $j_1 = j_2, i_1 = i_2$. Így az L-ben megadott egyenesek mind különbözőek, ezért:

$$|L| = \sum_{r,s} |L_{r,s}| = \sum_{r,s} r\frac{\sqrt{\tilde{n}}}{2} = \sum_{r=1}^{k} \phi(r) r \frac{\sqrt{\tilde{n}}}{2},$$

ahol $\phi(r) = |\{s \in [1,r] : s \nmid r\}|$ az Euler-féle ϕ függvény. Az alábbi két, a ϕ függvényre vonatkozó becslést használjuk fel. Mindkét esetben $\phi(r) = r - |\{s \in [1,r] : s|r\}|$ definíciót használjuk.

$$\sum_{i=1}^{k} \phi(i) \geq \sum_{j=1}^{k} (k - \frac{k}{j}) = k^2 - k \sum_{j=1}^{k} 1/j \geq k^2 - k \cdot ln(k-1) \geq c^* k^2 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \phi(i)\ i \leq \sum_{j=1}^{k} i^2 \leq \frac{1}{2} k^3 \qquad (3)$$

(3) alapján

$$|L| \geq \frac{\sqrt{\tilde{n}}}{4} k^3 \geq \sqrt{\tilde{n}} \frac{c\tilde{e}}{\sqrt{\tilde{n}}} = \frac{c}{4} \tilde{e}.$$

Tehát $|L| \geq \tilde{e} \geq e/5$, ha $c < 1/4$.

Másrészt az illeszkedések száma alulról becsülhető, mert minden $y - j = = \frac{s}{r}(x - i)$ egyenes illeszkedik a rács minden r-edik oszlopában egy csúcsra és (2) szerint:

$$I \geq \sum_{\substack{\text{lnko}(r,s)=1 \\ 1 \leq s \leq r \leq k}} |L_{r,s}| \frac{\sqrt{\tilde{n}}}{r} = \sum_{r=1}^{k} r\phi(r) \frac{\sqrt{\tilde{n}}}{r} \frac{\sqrt{\tilde{n}}}{2} \geq \frac{\tilde{n}}{2} c^* k^2 = \frac{c^* c^{2/3}}{2} \tilde{n}^{2/3} \tilde{e}^{2/3}.$$

Ebből $I \geq \frac{c^* c^{2/3}}{2} n^{2/3} e^{2/3}$ feltéve, hogy $n \geq 20, e \geq 5$, és $c < 1/4$ mellett (1) teljesül. A konstans faktor választható olyan kicsinek, hogy a kimaradó véges sok esetet is jól becsüljük.

□

2. Következmények

A Szemerédi-Trotter tételnek számos hasznos alkalmazása ismert. Több régi probléma oldható meg egyszerűen a segítségével.

Egy alkalmazási terület az additív számelmélet. Legyen $A \subset \mathbf{R} - \{0\}$ véges számhalmaz, $|A| = n$. Könnyen látható, hogy megadható A úgy, hogy $|A + A|$ vagy $|A \cdot A|$ komplexusszorzatok számossága legfeljebb $2n - 1$ legyen, (például számtani vagy mértani sorozattal). De számtani sorozatok komplexusszorzata, mértani sorozatok komplexusösszege nagy lesz. Erdős és Szemerédi [19] $\max\{|A + A|, |A \cdot A|\}$-ra kerestek alsó becslést. Azt sejtették, hogy $\max\{|A + A|, |A \cdot A|\} = \Omega(n^{2-\delta})$. Később Nathanson adott $\Omega(n^{32/31})$-es alsó becslést, majd Ford $\Omega(n^{16/15})$-öt.

Általánosabban Ruzsa Imre [26] problémája az, hogy valamely f szigorúan konvex függvénnyel mi a legjobb alsó becslés $\max\{|A + A|, |f(A) + f(A)|\}$-ra.

A Szemerédi-Trotter tételt használva Elekes György és Ruzsa Imre [15] találta a következőt.

2.1. Állítás: Legyen $A \subset \mathbf{R}$ véges számhalmaz, ($|A| = n$). f szigorúan konvex vagy konkáv függvény. Ekkor komplexus-összeggel

$$\max\{|A + A|, |f(A) + f(A)|\} = \Omega(n^{5/4}).$$

Még általánosabban:

2.2. Tétel: Legyen $A, B \subset \mathbf{R}$ véges számhalmaz, ($|A| = n$, $|B| = m$). f szigorúan konvex vagy konkáv függvény, ($A \subset Dom(f)$). Ekkor komplexus-összeggel

$$|A + A| \cdot |f(A) + B| = \Omega(n^2\sqrt{m}).$$

Bizonyítás: Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Definiáljuk a következő nm darab függvényt:

$$f_{i,j}(x) := f(x - a_i) + b_j, \qquad i \in [1, n], j \in [1, m]$$

Az $f_{i,j}$ függvény gráfja az $f(x)$ szigorúan konkáv (konvex) függvény gráfjának eltoltja. Az $f_{i,j}$ függvények gráfja különbözők és bármely kettőnek a metszete legfeljebb egy pontból áll.

Minden $f_{i,j}$ függvény $A + A$ legalább n elemét viszi $f(A) + B$-ba (tudniillik minden $k \in [1, n]$-ra $(a_k + a_j)$-t). Készítsük el az $(A + A) \times (f(A) + B)$ N elemű pontrácsot $\mathbf{R}^2$-ben. Itt az $f_{i,j}$ függvények nm legalább n pontú görbét írnak le; és $n \cdot n \leq |(A + A)| \cdot |(A \cdot A)| = N$.

A Szemerédi-Trotter tétel és az 1.8. megjegyzés szerint

$$nm = |\{f_{i,j}\}| = O\left(\frac{[|A+A|\cdot|f(A)+B|]^2}{n^3}\right)$$

Ez pedig a kívánt állítást szolgáltatja.

□

Ebből a 2.1. állítás azonnal adódik, hiszen legyen $B = f(A)$, ekkor $n/2 \leq$ $\leq |f(A)| \leq n$. A 2.2. tétel szerint $|A+A|\cdot|f(A)+f(A)| = \Omega(n^{5/2})$, ahonnan $\max\{|A+A|, |f(A)+f(A)|\} = \Omega(n^{5/4})$.

A Szemerédi-Erdős problémára $f(x) = \log(x)$ választással kapunk választ [14] a 2.1. állítást alkalmazva:

2.3. Állítás: Legyen $A \subset \mathbf{R} - \{0\}$ n elemű számhalmaz. Ekkor a komplexus-összegre és komplexusszorzatra

$$\max\{|A+A|, |A\cdot A|\} = \Omega(n^{5/4}).$$

□

Régi kérdés, hogy $\mathbf{R}^d$-ben adott véges sok ponthoz és egy részhalmazához hány hasonlósági transzformációja van a térnek, amivel a részhalmaz képe a véges halmazban marad. Ismert, hogy a síkon n pontú alaphalmazzal és fix C elemű részhalmazzal legfeljebb $O(n^2)$ hasonlóság fordulhat elő; és bizonyos esetekben elő is fordul $\Omega(n^2)$.

2.4. Állítás: Legyen adott $\mathbf{R}$-ben egy Cn pontból álló $\mathcal{P}$ halmaz, $(C \geq 2)$. Legyen $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}$, ahol $|\mathcal{O}| = n$. Ekkor $\mathbf{R}$ azon hasonlóságainak száma, melyek $\mathcal{O}$-t $\mathcal{P}$-be képezik, $O(n)$.

Bizonyítás: $\mathbf{R}$ minden hasonlósága előáll $x \mapsto ax+b$, $(a, b \in \mathbf{R})$ alakban. ábrázoljuk ezeket a függvényeket $\mathbf{R}^2$-ben egyenesekkel. Tekintsük az $\mathcal{O} \times \mathcal{P} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ponträcsot.

Ha $\mathbf{R}$ egy hasonlósága $\mathcal{O}-t$ $\mathcal{P}$-be viszi, akkor a neki megfelelő egyenes n pontra illeszkedik $\mathbf{R}^2$-ben. A Szemerédi-Trotter tétel szerint a $Cn \cdot n$ pontból n-et tartalmazó egyenesek száma a síkon legfeljebb

$$\frac{C(N^2)^2}{n^3} = O(n).$$

□

Ez az korlát aszimptotikusan éles Cn elemú számtani vagy mértani sorozatokra és n elemű kezdőszeleteikre.

2.5. Definíció: Legyen adott $\mathbf{R}^d$-ben egy ponthalmaz. Akkor nevezünk egy k dimenziós affin alteret kifeszítettnek, ha az tartalmaz $k+1$ darab affin független pontot.

Beck József [3] bizonyította a következőt.

2.6. Tétel: Legyen n különböző pont halmaza $\mathbf{R}^2$-ben $\mathcal{P}$. Ekkor létezik $c > 0$ konstans, hogy vagy

- a $\mathcal{P}$ által kifeszített egyenesek száma eléri cn^2-et vagy
- valamely egyenes $\mathcal{P}$ legalább $n/100$ pontját tartalmazza.

Beck ezt a tételt Szemeréditől és Trottertől függetlenül látta be azzal a segédtétellel, hogy a síkban adott n különböző pontra és e különböző egyenesre a legalább t ($t \in [2, \sqrt{2n})$ pontú egyenesek száma legfeljebb $n^2/t^{2.05}$. A Szemerédi-Trotter tételnél gyengébb állítás is elég ennek igazolására.

Bizonyítás: Jelöljük l_j-vel ($j \in J$) a ponthalmaz által kifeszített egyenesekre illeszkedő pontok számát. A pontpárok számára természetesen igaz az alábbi egyenlőség:

$$\sum_{j \in J} \binom{l_j}{2} = \binom{n}{2}.$$

A bal oldali szummát négy részre bontjuk.

$$P_1 = \sum_{l_j \in [2, 2^c]} \binom{l_j}{2}, \qquad P_2 = \sum_{l_j \in [2^c, \sqrt{2n}]} \binom{l_j}{2},$$

$$P_3 = \sum_{l_j \in [\sqrt{2n}, n/100]} \binom{l_j}{2}, \qquad P_4 = \sum_{l_j \in [n/100, n]} \binom{l_j}{2}.$$

Azt fogjuk belátni, hogy P_2-ben és P_3-ban "kevés" pár van.

$$P_2 = \sum_{c \leq i} \sum_{l_j \in [2^i, 2^{i+1}]} \binom{l_j}{2} \leq \sum_{c \leq i, 2^i \leq \sqrt{2n}} e_{2^i} | \binom{2^{i+1}}{2} \leq$$

$$\leq \sum_{c \leq i} C \frac{n^2}{2^{3i}} \binom{2^{i+1}}{2} \leq 2Cn^2 \sum_{c \leq i} 2^{-i} < \frac{1}{4} \binom{n}{2},$$

ha c-t elég nagynak választjuk.

$$P_3 = \sum_{i \geq 0} \sum_{\substack{l_j \in [2^i\sqrt{2n}, 2^{i+1}\sqrt{2n}] \\ l_j \leq n/100}} \binom{l_j}{2} \leq \sum_{2^i \in [2, \sqrt{n}/100]} e_{2^i\sqrt{2n}} \binom{2^{i+1}\sqrt{2n}}{2} \leq$$

$$\sum_{2^i \in [2,\sqrt{n}/100]} 2\frac{n}{2^i\sqrt{2n}}\binom{2^{i+1}\sqrt{2n}}{2} \leq 8n^{3/2} \sum_{2^i \in [2,\sqrt{n}/100]} 2^i < \frac{1}{4}\binom{n}{2}.$$

Eszerint

$$P_1 + P_4 > \frac{1}{2}\binom{n}{2},$$

azaz vagy van legalább $n/100$ pontú egyenes, vagy $P_4 = 0$ és a maximum 2^c pontú egyeneseken van $\frac{1}{2}\binom{n}{2}$ pontpár. De egy ilyen egyenesen legfeljebb $\binom{2^c}{2}$ pontpár van. Ezért az egyenesek száma legalább $\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{2^c}{2}^{-1} = \Omega(n^2)$

□

2.7. TÉTEL: Legyen n különböző pont halmaza $\mathbf{R}^d$-ben $\mathcal{P}$. Tekintsük az általuk kifeszített összes hipersíkot. Ekkor léteznek $A, B, C > 0$ csak d-től függő konstans, hogy

- valamely hipersíkra legalább An pont illeszkedik,
- vagy van legalább Bn^d hipersík amelyekre legfeljebb C pont illeszkedik.

BIZONYÍTÁS: Indukció a dimenzió szerint. $d = 2$-re a 2.5. tétel bizonyítása adja az állítást.

Tegyük fel, hogy igaz a tétel minden d-nél kisebb dimenziós térben ($d \geq 3$). Lássuk be $\mathbf{R}^d$-ben.

Vetítsük $\mathcal{P}$-t egy olyan síkra, amely egyetlen legalább két pontú egyenesre sem merőleges. A vetület legyen $\mathcal{P}'$.

A 2.5. Beck tétel alapján lehet, hogy $n/100$ pont egy egyenesen van a $\mathcal{P}'$ vetületben. Ekkor $\mathcal{P}$-ben van $n/100$ pont egy hipersíkon. Legyen $A \leq 1/100$; és a tételünk azonnal teljesül ebben az esetben.

Különben van legalább cn^2 kifeszített egyenes $\mathcal{P}'$-ben. Azaz $\mathcal{P}$-ben is van legalább cn^2 kifeszített egyenes.

Minden $p \in \mathcal{P}$ ponthoz vegyünk egy h_p hipersíkot, ami nem illeszkedik p-re és nem párhuzamos egyik kifeszített egyenessel sem. Vetítsük erre a többi $n-1$ pontot. Így legalább $2cn^2$ vetület pont keletkezik az n darab hipersíkon.

Vegyük azokat a h_p síkokat, amelyeken legalább cn vetületpont van. Ilyenből legalább $\frac{c}{1-c}n$-et találunk. Az indukciós feltevés szerint

- vagy valamely h_p-n van egy $(d-2)$-dimenziós hipersík, amelyre legalább $A_{d-1}cn$ pont illeszkedik, azaz $\mathcal{P}$-ban egy hipersíkra illeszkedik ennyi pont. Ekkor $A \leq A_{d-1}c$ választással készen vagyunk;
- vagy minden ilyen h_p-n van legalább $B_{d-1}(cn)^{d-1}$ darab $(d-1)$-dimenziós affin altér amelyre legalább $d-1$, maximum C_{d-1} vetületpont illeszkedik.

Definíció: Azt mondjuk, hogy egy p pontból egy rá illszkedő hipersík D pontúnak látszik, ha a h_p-beli vetülete D pontú.

Itt $\frac{c}{1-c}n$ darab $\mathcal{P}$-bei pontból összegezve a legalább D pontúnak látszó hipersíkokat $\frac{B_{d-1}c^{d-1}}{1-c}n^d$-ot kapunk, ahol $D \in [d-1, C_{d-1}-1]$.

Egy $\mathcal{P}$-beli síkot többször is számolhatunk így. Azt szeretnénk, hogy csak konstans sokszor számoljuk ezeket a kifeszített hipersíkot.

Segédtétel: Ha egy D^2-nél több pontú hipersík legalább D^2 pontjából látszik D-nél kevesebb pontúnak, akkor ezek a pontok egy egyenesen vannak.

Bizonyítás (Segédtétel): Legyen $\mathcal{R}$ egy ilyen hipersík azon pontjainak halmaza, amelyekből a hipersík D-nél kevesebb pontúnak látszik.

Ha $\mathcal{R}$ pontjai nem kollineárisak, akkor vegyünk két $\mathcal{R}$-beli pontot. $\mathcal{R}$ minden pontja e két pontra illeszkedő, egyenként maximum D egyenesű egyenesnyalábon van. Ez maximum $(D-1)^2$ pont lehet plusz a két pont egyenesére illeszkedő pontok. Ez utóbbiak is D-nél kevesebben vannak, mert egy harmadik $\mathcal{R}$-beli pontból ez az egyenes látszik maximum D pontúnak. Így a síkon legfeljebb D^2 pont lehet. $\square$

Ha $\mathcal{R}$ pontjai kollineárisak, akkor a hipersík egy egyenes és rajta kívül maximum D^2 pont lehet.

Becsüljük a következő hármasokat: (sík, egyenes,pont), ahol a sík illeszkedik az egyenesre, az egyenes illeszkedik a pontra és az egyenesnek legalább $D \geq C_{d-1}$ pontja van.

Az adott (pont,egyenes) párokhoz tartozó síkok számát mindig felülről becsülhetjük n^{d-2}-vel. Így elég a (pont,egyenes) párokat becsülni, ahol az egyenesnek legalább D pontja van.

A Szemerédi-Trotter tétel alapján a legalább j pontú egyenesek száma legfeljebb $\frac{n^2}{j^3}$, ha $j \in [2, \sqrt{n}]$ és legfeljebb $\frac{n}{j}$, ha $j \geq \sqrt{n}$. Ezért a keresett (pont,egyenes) párok száma:

$$D\frac{n^2}{D^3} + \sum_{j=1}^{\sqrt{n}} \frac{n^2}{j^3} + \sum_{j=\sqrt{n}}^{n} \frac{n}{j} \leq \frac{n^2}{D^2} + \frac{n^2}{D^2} - n + \frac{1}{2} n \log n \leq 4\frac{n^2}{D^2},$$

ha n elég nagy. Válasszuk D-t úgy, hogy $4\frac{1}{D^2} \leq \frac{1}{2}\frac{B_{d-1}c^{d-1}}{1-c}$ teljesüljön.

Ekkor van legalább $\frac{1}{2}\frac{B_{d-1}c^{d-1}}{1-c}n^d$ (pont,hipersík) pár, hogy a pontból a hipersík D-nél kevesebb pontúnak látszik, de legfeljebb D^2 pontja van, ha n elég nagy. Egy síkot így legfeljebb D^2-szer számolunk.

Van tehát legalább $\frac{1}{2}\frac{B_{d-1}c^{d-1}}{(1-c)D^2}n^d$ kifeszített hipersík, amin legfeljebb D pont van, ha n elég nagy. Legyen $C = D^2$ és található olyan $B > 0$, hogy már kis n-ekre is van legalább B kifeszített hipersík, amin legfeljebb C pont van.

$\square$

A Beck tételnek számos hasznos következménye van, amelyek régi problémákra adnak feleletet. D.A. Dirac [9] és T.S. Motzkin [22] kérdezték 1951-ben, hogy a síkban adott n nem-kollineáris pont között mindig van-e olyan, amelyre legalább cn kifeszített egyenes illeszkedik alkalmas $c > 0$-val.

A válasz igenlő. Beck tételéből könnyen levezethető az alábbi

2.8. KÖVETKEZMÉNY: Legyen adott $\mathbf{R}^d$-ben n különböző pont, nem mind egy hipersíkon. Ekkor van köztük olyan, amelyre legalább cn kifeszített hipersík illeszkedik, alkalmas $c > 0$, csak a dimenziótól függő konstanssal.

BIZONYÍTÁS: Ha az általánosított 2.7. Beck tétel állítása szerint van legalább Bn^d kifeszített hipersík, akkor van olyan pont, amelyre legalább dBn^{d-1} illeszkedik, hiszen minden kifeszített hipersíkon legalább d pont van.

Ha van egy olyan S hipersík, amire legalább $A_{d-1}n$ pont illeszkedik, akkor $d = 2$ esetén egy S-en kívüli pontra legalább $A_{d-1}n$ egyenes (itt ez a hipersík) illeszkedik. $d \geq 3$ esetén pedig indukció szerint S-ben van egy p pont, amire legalább $c_{d-1}n$ darab $(d-2)$-dimenziós hipersík illeszkedik. Vegyünk egy q pontot S-en kívül, ez S hipersíkjaival $\mathbf{R}^d$-beli hipersíkot feszít ki. Így$p$-re legalább $c_{d-1}n$ hipersík illeszkedik.

□

2.9. ÁLLÍTÁS: Legyen adott n különböző pont $\mathbf{R}^2$-ben. Az általuk kifeszített egyenesek száma legyen e. Tegyük fel, hogy minden kifeszített egyenesre legfeljebb $n - k$ adott pont illeszkedik, $(k \in [0, n-2])$. Ekkor $e > ckn$, alkalmas $c > 0$ konstanssal.

BIZONYÍTÁS: $k = 0$-ra az állítás triviális.

Ha a 2.5. Beck tétel szerint van B_2n^2 egyenes, akkor $c < B_2$ megfelel.

Ha van egy legalább $n/100$ pontú S egyenes, akkor $n/100 \leq n - k$, vagyis $k \leq n(1 - 1/100)$. Vegyünk $\lceil k/100 \rceil$ pontot S-en kívül. Ezek S pontjaival együtt kifeszítenek legalább

$$\frac{k}{100}(n-k) - \binom{\lceil k/100 \rceil}{2} \geq \frac{k}{100}(n - k - \lceil k/100 \rceil) \geq \frac{k}{100}\frac{n}{200}$$

különböző egyenest.

□

2.10. KÖVETKEZMÉNY: Ha $\mathbf{R}^2$-ben adott n különböző pont és valamelyik egyenesre k pont illeszkedik, akkor a kifeszített egyenesek száma $\Omega((n-k)k)$.

BIZONYÍTÁS: Egy egyenesre legfeljebb $\max\{k, n-k+1\}$ pont illeszkedhet; így van $c(\max\{nk, n(n-k+1)\} \geq ck(n-k)$ kifeszített egyenes.

□

G. Purdy 1951-es sejtése szerint ha $\mathbf{R}^3$-ban n különböző pont, ami nem mind egy síkon vagy két kitérő egyenesen van; e egyenest és s síkot feszít ki, akkor $n - e + s + 2 \geq 0$.

Ez általános esetben azóta sem nyert bizonyítást; de ha igaz lenne, az következne belőle, hogy $e = O(s)$. Purdy [25] belátta a következőt

2.11. TÉTEL: Legyen adott $\mathbf{R}^3$-ban n különböző pont nem mind egy síkon vagy két kitérő egyenesen. Legyen e ill. s az általuk kifeszített egyenesek ill. síkok száma. Ekkor van olyan pont, amire legalább ce sík illeszkedik alkalmas $c > 0$, konstanssal.

BIZONYÍTÁS:

(1) Ha egy síkra sem illeszkedik $c'n/2$-nél több pont (a 2.8. tételbeli c_2 konstanssal). Ekkor nem minden pont illeszkedik egy egyenesre. Ezért 2.8. szerint van egy p pont amire legalább $c'n$ kifeszített egyenes illeszkedik.

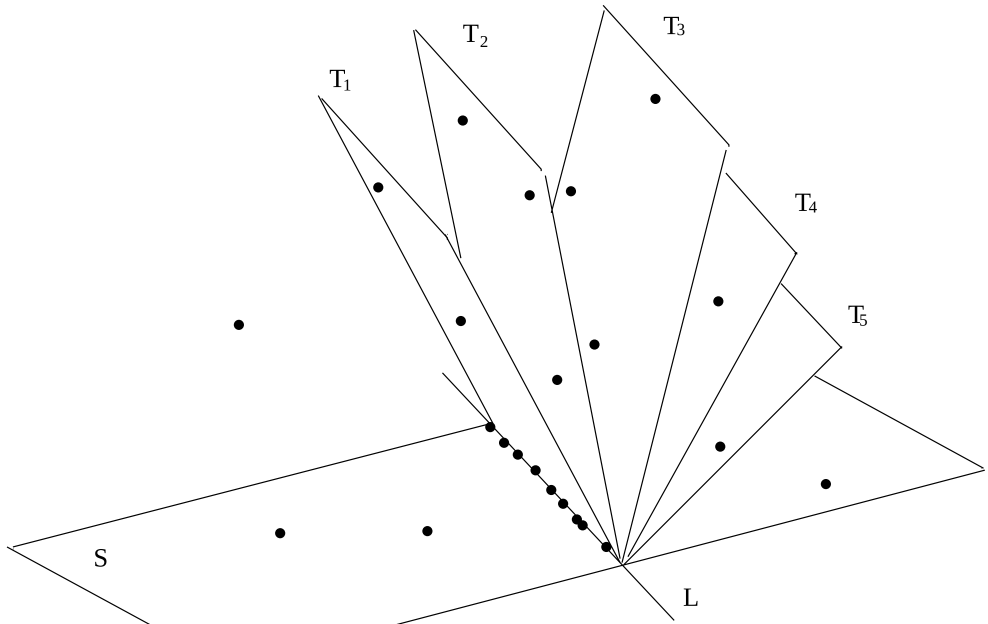
Vetítsük p-ből egy p-t nem tartalmazó S síkra a többi $n-1$ pontot; S-ben legalább $c'n$ különböző vetületpont van. S-en egy egyenesre legfeljebb $c'n/2$ vetületpont esik. A 2.9. állítás szerint ekkor S-ben van legalább $c''(1/2)n \cdot n$ kifeszített egyenes. Tehát van $\Omega(n)$ darab p-re illeszkedő sík.

(2) Ha valamely S síkon van legalább $c'n/2$ pont. Legyen l' az S kifeszített egyeneseinek száma. Ekkor egy $p \notin S$ pontra illeszkedő síkok száma legalább l'. Ha S pontjainak legfeljebb a fele van egy egyenesen, akkor a 2.9. állítás szeint $l' \geq c''(1/2)(c'n/2)^2 = \Omega(n^2) = \Omega(e)$.

Tegyük fel tehát, hogy S egy L egyenesén legalább $c'/4n$ pont van. Most $|S| = n - k$ és $|L| \geq (n-k)/2 = c'n/4$. Az S-en kívüli pontokat jelöljük $r_1, \ldots, r_k$-vel.

(2.a) Ha minden i-re r_i egy L-re illeszkedő T síkon van; legyen T egyeneseinek száma l''. A 2.10. következmény szerint $l'' \geq c''kn$. A nem az S vagy T síkokban lévő egyenesek egyik pontja egy r_i pont, ezért $l' + l'' \geq l - nk \geq l - l''/c''$, ezért $l' + l'' = \Omega(l)$, $\max\{l', l''\} = \Omega(l)$. Tehát vagy egy S-en kívüli pontra vagy egy T-n kívüli pontra illeszkedik $\Omega(l)$ sík.

(2.b) Ha minden i-re r_i illeszkedik egy L-től kitérő $\hat{L}$ egyenesre, akkor van egy p pont, ami nem illeszkedik sem $\hat{L}$-re sem L-re. p pont egy-egy L ill. $\hat{L}$-beli ponttal kőlönböző síkokat feszít ki. Ezért a p-re ileszkedő síkok száma $s_p \geq kc'n/4$. Ha $l \leq 2nk$, akkor $s_p \geq \Omega(l)$. Ha pedig $k \geq 2nk$, akkor $l' \geq l - nk \geq l/2$ és bármely S síkon kívüli pontra illeszkedik l' sík.



(2.c) Ha az r_i pontokat fedik az L-re illeszkedő $T_1, \ldots, T_t$ síkok, akkor a 2.8. következmény szerint van egy $r_i = p \notin S$, amit legalább $c'k$ egyenes köt össsze valamely más r_i ponttal. Feltehetjük, hogy ezen egyenesek közűl $c'k/2$ valamely más T_j síkbeli r_i pontba vezet; különben az r_i pontok fele p síkjában lenne és egy másik T_j síkbeli q pontból vezetne p síkjába legalább $c'k/2$ egyenes. A 2.10. következmény szerint ez a $c'k/2$, L-től kitérő egyenes és L pontjai $c''(c'k/2)(c'n/4)$ darab különböző, p-re illeszkedő síkot feszítenek ki. A p-re illeszkedő síkok számára $s_p \geq c^*nk, s_p \geq l'$. Ebből $(1+(c^*)^{-1})s_p \geq l'_n k \geq l$, ahonnan $s_p = \Omega(l)$.

□

2.12. TÉTEL: Legyen adott $\mathbf{R}^3$-ban n különböző pont, nem mind egy síkon. Legyen e ill. s az általuk kifeszített egyenesek ill. síkok száma. Ekkor $e^2 \geq cns$ alkalmas $c > 0$ konstanssal.

BIZONYÍTÁS:

(1) Ha nincs $n/2$ pontú egyenes, akkor a 2.9. állítás szerint $e \geq c''(1/4)n^2$. Ugyanakkor $s \leq \binom{n}{3} \leq n^3/6$. Így $e^2 \geq (c''/4)^2 n^4 = \Omega(ns)$.

(2) Ha egy L egyenesre legalább $n/2$ pont illeszkedik, akkor legyen $|L| = n-k$. A kifeszítet síkok számát becsülni tudjuk a következőképpen,

$$s \leq k^3/6 + 1/2(n-k)k^2 + k \leq \frac{1}{2}k^2,$$

mert a kifeszített síkokon legfeljebb két L-beli pont lehet. Egy síkot három L-en kívüli pont vagy egy L-beli és két L-en kívüli vagy L és egy rajta kívüli pont feszít ki. Hasonlóképpen becsülhető alulról a kifeszített egyenesek száma az L-beli pontot L-en kívülivel összekötő egyenesek számával:

$$e \geq k(n-k) - \binom{k}{2} \geq \frac{1}{4}kn, \quad \text{ahonnan} \quad e^2 \geq \frac{1}{16}k^2n^2 = \Omega(ns).$$

$\square$

3. Kombinatorikus görbék

Az 1. fejezetben felsoroltuk, hogy az egyenes mely tulajdonságait használta ki a Szemerédi-Trotter tétel Székely-féle bizonyítása. Három feltétel enyhítése csak konstans faktorral rontotta a felső becslésünket. Most a második feltételt vizsgáljuk meg; tudniillik "két pontra legfeljebb K görbe illeszkedik". A feltételt teljesen elhagyni nem lehet, mert akkor mind az e darab görbe illeszkedne az n adott pontra $I = ne$ illeszkedést produkálva. Ha azt mondjuk, hogy k diszjunkt pontra legfeljebb $K \in \mathbf{N}$ görbe illeszkedik, akkor már nem működik a Székely féle bizonyítás, hiszen az Euler tétel nem igaz, ha megengedünk akárhányszoros éleket.

Igaz viszont a következő tétel az említett görbeosztályra, amit most pontosan definiálunk.

3.1. DEFINÁCIÓ: Az euklideszi tér egyszerű[3] görbéinek $\mathcal{E}$ osztályát k-paraméterűnek nevezzük, ha található olyan $s \in \mathbf{N}$, hogy

- Bármely k ponthoz legfeljebb s darab $\mathcal{E}$-beli görbe van, amely mindegyikre illeszkedik,
- $\mathcal{E}$ bármely két eleme legfeljebb s pontban metszi egymást.

3.2. TÉTEL: Legyen adott $\mathbf{R}^2$-ben egy n elemü $\mathcal{P}$ ponthalmaz és egy e elemű, k-paraméterű $\mathcal{E}$ görbeosztály. Ekkor a létrejövő illeszkedések száma

$$I = O(n^{k/(2k-1)}e^{(2k-2)/(2k-1)} + n + e).$$

Egyenesekre ($k = 2$), a korlát megegyezik a Szemerédi-Trotter tétel korlátjával. A tételt Pach János és Micha Sharir látta be 1996-ban [24]. Tipikus k-paraméterű görbeosztály a k valós paraméterű algebrai görbék halmaza. Erre a görbeosztályra már 1992-ben belátta a tételt Pach és Sharir más technikákkal [23]. Itt a Székely-féle bizonyítást általánosítják.

Felhasználnak még egy tisztán kombinatorikus korlátot is az illeszkedések számára. Ez Kővári, T.Sós és Turán [20] 1954-es eredménye.

3.3. LEMMA: Ha egy $e \times n$-es $0-1$ mátrix nem tartalmaz $k \times (s+1)$-es csupa 1 részmátrixot, (ahol $k \in [1, n-1], s+1 \in [1, e-1]$), akkor az egyesek száma

$$I \leq ke + s^{1/k}ne^{1-1/k}.$$

[3] önmetszés nélküli

BIZONYÍTÁS: Legyen $\hat{I} = ke + s^{1/k}ne^{1-1/k}$; és legyen az $i \in [1,e]$-edik sorban lévő egyesek száma a_i. Tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^{e} a_i > \hat{I}$. Rendezzük át a sorokat úgy, hogy valamely $m \in [1,e]$-re $a_1, a_2, \ldots, a_m \geq k$, a többi kisebb k-nál. Ekkor a Hölder-egyenlőtlenségből

$$\sum_{i=1}^{e} \binom{a_i}{k} = \sum_{i=1}^{m} \binom{a_i}{k} \geq \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{m} (a_i - k)^k \geq$$

$$\frac{e^{1-k}}{k!} \left(\sum_{i=1}^{e} a_i - \sum_{i=m+1}^{e} a_i - mk \right)^k > \frac{e^{1-k}}{k!} (\hat{I} - ek)^k = \frac{e^{1-k}}{k!} sn^k e^{k-1} \geq s \binom{n}{k}.$$

Tehát ha minden sorból kiválasztunk k darab egyest az összes lehetséges módon, akkor több mint s-szeresét kapjuk a lehetséges mintázatoknak. Azaz kiválasztható $s+1$ sor, amelyben ugyanabban a k oszlopban egyesek vannak.

□

3.4. KÖVETKEZMÉNY: $\mathbf{R}^2$-ben adott n különböző pont halmaza és egy e elemű, k-paraméterű görbeosztályra a létrejövő illeszkedések száma

$$O(ne^{1-\frac{1}{k}} + e).$$

BIZONYÍTÁS: Alkalmazzuk a lemmát az n pont és az e görbe illeszkedési mátrixára. Ha lenne a mátrixban $k \times (s+1)$-as csupa 1 részmátrix, akkor lenne k pont, amire $s+1$ görbe illeszkedik. Az egyesek száma pedig az illeszkedések számával egyenlő.

BIZONYÍTÁS (3.2. TÉTEL): Hagyjuk el az összes olyan görbét, ami nem tartalmaz legalább k pontot. Ezzel az illeszkedések számát legfeljebb $(k-1)n$-nel csökkentettük, a kérdéses $n^{k/(2k-1)}e^{(2k-2)/(2k-1)}$ mennyiség pedig nem nőtt.

Legyen $d_A = I/n$ az egy pontra illeszkedő görbék átlagos száma, $p \in \mathcal{P}-$re d_p a p-re illeszkedő görbék száma.

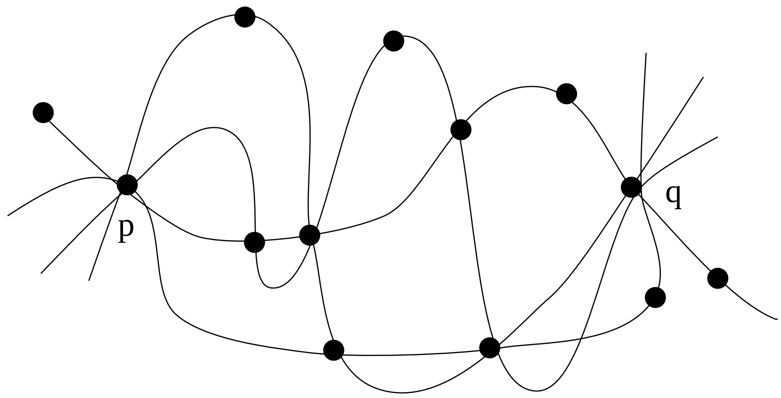
1. Eset. Tegyük fel, hogy minden $p \in \mathcal{P}$-re $d_p \in [d, 2d]$, ahol $d \in [d_A/2, d_A]$.

Készítsünk a $(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ rendszerhez egy (G, E) többszörös élű geometriai gráfot: $G = \mathcal{P}$, továbbá ha $p, q \in \mathcal{P}$ egy görbén van és a közöttük lévő egyik görbedarabon legfeljebb $k-2$ pont van, akkor legyen a gráf éle ez a görbegarab[4]. Ekkor $I \leq$ $\leq |E| < (k-1)I$.

Készítsünk egy kisebb (G, H) gáfot is. H-t E-ből úgy kapjuk, hogy kitöröljük E minden $Ad^{1-\frac{1}{k-1}}$-nél többszörös élét; valamely később megadandó $A > 0$ konstanssal.

Azt szeretnénk belátni, hogy $|H| = \Omega(I)$ is igaz. Ehhez elég lenne igazolni, hogy minden $p \in \mathcal{P} = G$ pont H-beli foka, $d_H = \Omega(d)$; mert akkor $|E| \leq n \cdot \Omega(d) =$ $= I$ teljesülne.

[4] Az élek így egymásba érhetnek



Legyen $p, q \in \mathcal{P}$-re $E(p,q) \subseteq E$ a p-t és q-t összekötő E-beli élek halmaza; $E(p)$ a p-ből induló élek halmaza; $E(p \mapsto q)$ pedig az öszes olyan él, ami egy pq összekötő görbén van, p-ből indul de végpontja nem q.

Itt $d_H(p) = |E(p) \cap H|$. Egy pr él legfeljebb $(2k-3)$-szor szerepel valamely $E(p \mapsto q)$ élhalmazban, mert ehhez q-nak a pr él görbéjén kell lennie maximum $(k-1)$-edik pontként és $q \neq r$. Így $|E(p) \cap H| \geq (1/(2k-3)) \sum_{q \in \mathcal{P}} |E(p \mapsto q) \cap H|$. $pq \in H$ esetén becsüljük $|E(p \mapsto q) \cap H|$-t görbénként $|E(p,q)|$-val. A becslés csak azokon a görbéken nem működik, ahol semelyik p-ből induló pq-n kívüli él sincs H-ban.

Legyen $R = \{r \in \mathcal{P} : pr \in E(p \mapsto q), pr \notin H\}$. Erre

$$|R| \leq \frac{d_G(p)}{Ad^{1-\frac{1}{k-1}}} \leq \frac{2d(2k-1)}{Ad^{1-\frac{1}{k-1}}} < \frac{4k}{A} d^{\frac{1}{k-1}}.$$

De p, q és $(k-2)$ darab R-beli pont legfeljebb s görbére illeszkedhet, ezért

$$|E(p \mapsto q) \cap H| \geq |E(p,q)| - s\binom{|R|}{k-2} \geq |E(p,q)| - s\left(\frac{4k}{A(k-2)!}\right)^{k-2} Ad^{1-\frac{1}{k-1}}.$$

Ez pedig nagyobb $\frac{1}{2}|E(p,q)|$-nál, ha A-t elég nagynak választjuk, mert $pq \in H$ esetén $|E(p,q)| \leq Ad^{1-\frac{1}{k-1}}$. Összefoglalva

$$|E(p) \cap H| \geq \frac{1}{2k-3} \sum_{q \in \mathcal{P}} |E(p \mapsto q) \cap H| \geq \frac{1}{(2k-3)} \sum_{q \in \mathcal{P}} \frac{|E(p,q)|}{2} \geq$$

$$\geq \frac{1}{(4-6k)} |E(p)| \geq \frac{d(k-1)}{4k-6} \geq d/4.$$

Ezzel $|H| = \Omega(d)$.

A (G,E) és (G,H) élei egy görbe egy tetszőleges pontját legfeljebb $\binom{k}{2}$-szeresen fedik le. Ezért létezik $(G,H') \subseteq (G,H)$ részgráf, aminek élei nem fedik többszörösen a görbéket és $|H'| \geq |H|/\binom{k}{2}$.

Ha $|H'| < 5nAd^{1-\frac{1}{k-1}}$, akkor $I = O(|H|) = O(|H'|) = O(nd^{1-\frac{1}{k-1}})$. Itt $d \leq$ $\leq I/m$ és $I = O(Id^{-\frac{1}{k-1}})$ miatt $d = O(1)$. Ha pedig minden pont konstans sok görbére illeszkedhet, akkor $I = O(n)$.

Ha $|H'| \geq 5nAd^{1-\frac{1}{k-1}}$, akkor (g, H') gráfra alkalmazhatjuk az 1.10. tételt és

$$cr(G, H') = \Omega\left(\frac{|H'|^3}{n^2 Ad^{1-\frac{1}{k-1}}}\right) = \Omega\left(\frac{I^3}{n^2(I/n)^{1-\frac{1}{k-1}}}\right).$$

Másrészt $cr(G, H') \leq s\binom{e}{2}$, mert két görbe legfeljebb s pontban metszi egymást.

Innen $I^{3-(1-\frac{1}{k-1})} = O(e^2 n^{2-(1-\frac{1}{k-1})})$, ahonnan $I = O(n^{k/(2k-1)} e^{(2k-2)/(2k-1))})$.

2.Eset. Tetszőleges $\mathcal{P}, \mathcal{E}$ esetén legyen $\mathcal{P}^*$ azon pontok halmaza, melyek legfeljebb $I/(2n)$ görbére illeszkednek. A $\mathcal{P}^*, \mathcal{E}$ közti illeszkedésekre $I(\mathcal{P}^*, \mathcal{E}) \leq$ $\leq I/2$, ezért elég $I(\mathcal{P} - \mathcal{P}^*, \mathcal{E})$-t becsülni.

Becsüljük az egyes pontokra illeszkedő görbék számát. Ehhez osszuk $\mathcal{P}^*$-t diszjunkt ponthalmazokra:

$$\mathcal{P}^* = \bigcup_{i\in\mathbf{N}}^{*} \mathcal{P}_i, \quad \text{ahol} \quad \mathcal{P}_i = \{p \in \mathcal{P} - \mathcal{P}^* : d_p \in [2^{i-1}I/n + 1, 2^i I/n]\},$$

és legyen $n_i = |\mathcal{P}_i|$. Most már becsülhetjük a $\mathcal{P}_i$-beli pontok és az összes görbe illeszkedését az 1.eset alapján, hiszen $I \geq n_i \cdot \min_i d_{p_i} > n_i 2^{i-1} I/n$ szerint $n_i <$ $< n/2^{i-1}$. Így

$$I(\mathcal{P}_i, \mathcal{E}) = O(n_i^{k/(2k-1)} e^{(2k-2)/(2k-1))} + n_i + e) =$$

$$= O(2^{-ik/(2k-1)} n^{k/(2k-1)} e^{(2k-2)/(2k-1))} + n_i + e).$$

Alkalmazzuk a 3.3. következményt azokra a $\mathcal{P}_i$-kre, amlyekre

$$|\bigcup\{\mathcal{P}_i : n_i^k < e/2^i\}| = \sum_{n_i^k < e/2^i} n_i = O(e^{1/k}).$$

Ezek összes illeszkedése $O(ne^{1-\frac{1}{k}} + e) = O(e)$.

Ha $n_i^k \geq e/2^i$, akkor

$$e = e^{1/(2k-1)} e^{(2k-2)/(2k-1)} \leq 2^{i/(2k-1)} n_i^{k/(2k-1)} e^{(2k-2)/(2k-1)} =$$

$$O(2^{-j(k-1)/(2k-1)} n^{k/(2k-1)} e^{(2k-2)/(2k-1)}).$$

Az ilyen $\mathcal{P}_i$-kre

$$\sum_i I(\mathcal{P}_i, \mathcal{E}) = \sum_i O(2^{-j(k-1)/(2k-1)} n^{k/(2k-1)} e^{(2k-2)/(2k-1)} + n_i) +$$

$$= O(n^{k/(2k-1)} e^{(2k-2)/(2k-1)} + n).$$

□

Ennek a tételnek is léteznek ekvivalens alkajai, itt látjuk be az 1.2. állítás megfelelőjét:

3.5. ÁLLÍTÁS: Legyen adott $\mathbf{R}^2$-ben n pont és egy e elemű, k paraméterű görbeosztály. Ekkor az illeszkedések I számára egyszerre teljesül

(1) $$I = O(n^{k/(2k-1)} e^{(2k-2)/(2k-1)} + n + e),$$

(2) $$\sqrt{n} \le e \le n^k \text{ esetén } I = O(n^{k/(2k-1)} e^{(2k-2)/(2k-1)}),$$

(3) $$e_t = O\left(\frac{n^k}{t^{2k-1}} + \frac{n}{t}\right), \quad \text{ha} \quad t \in [k, n],$$

ahol e_t jelöli a legalább t pontú görbék számát.

BIZONYÍTÁS: (1) $\Rightarrow$ (2) $\sqrt{n} \le e \le n^k$ esetén $n = n^{k/(2k-1)} n^{(k-1)/(2k-1)} \le$ $\le n^{k/(2k-1)} e^{(2k-2)/(2k-1)}$ és $e = e^{(2k-2)/(2k-1)} e^{1/(2k-1)} \le e^{(2k-2)/(2k-1)} n^{k/(2k-1)}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Belátjuk, hogy $2 \le t \le D\sqrt{n}$ esetén $e_t = O\left(\frac{n^k}{t^{2k-1}}\right)$, $(D > 1)$. Legyen $C > 0$ olyan, hogy $\sqrt{n} \le e \le n^k$ esetén $I < C(n^{k/(2k-1)} e^{(2k-2)/(2k-1)})$ teljesüljön. Indirekt tegyük fel, hogy van $e = (CD)^{2k-1} n^k / t^{2k-1}$ darab k-paraméterű görbe legalább t ponttal. Itt az illeszkedések száma $I \ge et \ge (CD)^{2k-1} n^k / t^{2k-2}$. Másrészt ha $t \in [CD, C\sqrt{n}]$, akkor $\sqrt{n} \le e \le n^k$ teljesül, és (2) szerint $I <$ $< C(n^{k/(2k-1)} e^{(2k-2)/(2k-1)}) \le C^{2k-1} D^{2k-2} n^k / t^{2k-2}$, ellentmondás. Ha pedig $t \in$ $\in [k, CD-1]$, akkor $e_t \le s\binom{n}{k} = O\left(\frac{n^k}{t^{2k-1}}\right)$.

Most azt látjuk be, hogy $t \in [D\sqrt{n}+1, n]$ esetén $e_t = O\left(\frac{n}{t}\right)$. Tudjuk, hogy $e_t \le e_{D\sqrt{n}} = O\left(\frac{n^k}{(D\sqrt{n})^{2k-1}}\right) = O(\sqrt{n})$. Tekintsük az n pont és az e_t legalább t pontú görbe rendszerét. Ez nem feltétlen felel meg (2) feltételének. Ezért osszuk fel az n pontot $\lceil n/e_t^2 \rceil$ darab legfeljebb e_t elemű részre. Ezekre már (2) alkalmazható és az összes illeszkedés: $I = \sum_{i=1}^{\lceil n/e_t^2 \rceil} I_i = \lceil n/e_t^2 \rceil O((e_t^2)^{k/(2k-1)} e_t^{(2k-2)/(2k-1)}) =$ $= O(n)$. Tehát $e_t t \le I \le O(n)$, s így $e_t = O\left(\frac{n}{t}\right)$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Tudjuk, hogy $t \in [k, D\sqrt{n}]$ esetén $e_t \leq C\frac{n^k}{t^{2k-1}}$. Becsüljük felülről az illeszkedések számát. Legyen l a legkisebb olyan természetes szám, hogy

$$C^{2k-1}\frac{n^k}{l^{2k-1}} \leq e.$$

Ekkor $l = O(n^{k/(2k-1)}/e^{1/(2k-1)})$; és az $[1, l]$-beli pontszámú görbék összes illeszkedéseit felülről becsli

$$(k-1)e + le + \sum_{t=l}^{D\sqrt{n}} \frac{n^k}{t^{2k-1}} \leq (k-1)e + eO\left(\frac{n^{k/(2k-1)}}{e^{1/(2k-1)}}\right) + \int_l^{D\sqrt{n}} \frac{n^k}{t^{2k-1}}dt =$$

$$= O(e + n^{k/(2k-1)}e^{(2k-2)/(2k-1)}) + O(n^k)\left(\frac{1}{l^{2k-2}} - \frac{1}{D^{2k-2}n^{k-1}}\right) \leq$$

$$\leq O(e + n^{k/(2k-1)}e^{(2k-2)/(2k-1)}).$$

A $D\sqrt{n}$-nél több pontú görbéket osszuk fel olyan darabokra, amelyeken legalább $D\sqrt{n}$ legfeljebb $2D\sqrt{n}$ pont van. A rendszerre ekkor is igaz, hogy $e_{D\sqrt{d}} = O(\sqrt{n})$. Az ilyen görbék összes illeszkedése tehát $D\sqrt{n}O(\sqrt{n}) = O(n)$.

$\square$

4. Több dimenziós általánosítások

A Szemerédi-Trotter tétel általánosítása három- vagy magasabb dimenzióban többféle alakot ölthet.

$\mathbf{R}^3$-ban pontok és egyenesek illeszkedésére persze a Szemerédi-Trotter féle felső becslés érvényes lesz. Vetítsük ugyanis a pontokat és egyeneseket egy olyan síkra, amely nem párhuzamos egy egyenessel sem és nem merőleges semelyik pontpár egyenesére és semelyik egyenespár (esetleges) síkjára. Ekkor diszjunkt pontok vetületei diszjunkt pontok lesznek, diszjunkt egyenesek vetületei diszjunkt egyenesek. A vetítés az illeszkedést megtartja. Ez a becslés éles is, hiszen ha a pontok mind egy síkban vannak, megismételhetjük az Erdős féle konstrukciót.

Pontok és síkok illeszkedésénél a nehézséget az okozza, hogy n kollineáris pont és az egyenesükre illeszkedő e sík ne illeszkedést ad. Ennél jobb becslések eléréséhez további feltételeket kell szabni a pontok és síkok elhelyezkedésére.

4.a. Kifeszített síkok

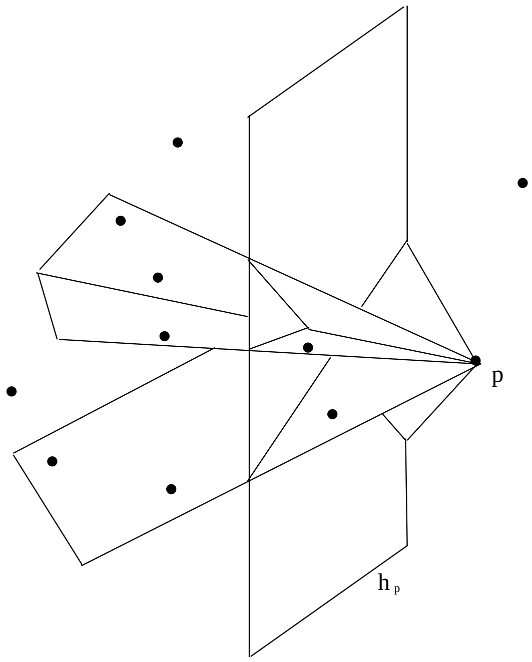
Az egyik lehetőség az, hogy az n különböző ponthoz csak olyan síkokat engedünk meg, amelyeket a pontok kifeszítenek, azaz tartalmaznak három nemkollineáris pontot. Ebben az esetben Clarkson, Edelsbrunner, Guibas és Sharir [11] bizonyították egy rekurzív eljárással a következőt.

4.1. TÉTEL: Legyen adott $\mathbf{R}^3$-ban n különböző pont és a pontok által kifeszített e sík. Ekkor az illeszkedések száma $I = O(n^2 + e^{2/3} n \log n)$.

4.2. SEGÉDTÉTEL: Legyen adott különböző pontok $\mathcal{P}_a$ és $\mathcal{P}_b$ diszjunkt halmazai. Legyen $n_a = |\mathcal{P}_a|$, továbbá $|\mathcal{P}_a|$ és $|\mathcal{P}_b|$ különbsége legfeljebb egy. $\mathcal{E}$ legyen e darab sík, melyeket $\mathcal{P}_a \cup \mathcal{P}_b$ kifeszít, de $\mathcal{P}_a$ vagy $\mathcal{P}_b$ nem. Ekkor $\mathcal{P}_a \cup \mathcal{P}_b$ és $\mathcal{E}$ közötti illeszkedések száma: $I = O(n_a^2 + e^{2/3} n_a)$.

BIZONYÍTÁS: Az $\mathcal{E}$-beli síkok illeszkednek egy $\mathcal{P}_a$-beli pontra és egy $\mathcal{P}_b$-beli kifeszített egyenesre, vagy egy $\mathcal{P}_a$-beli kifeszített egyenesre és egy $\mathcal{P}_b$-beli pontra. Most nézzük csak az előbbieket. Számoljuk az ilyen síkok illeszkedéseit. Felső becslést kapunk, ha összegezzük minden $p \in \mathcal{P}_a$ ponthoz a pontra és egy $\mathcal{P}_b$ által kifeszített, p-t nem tartalmazó egyeneshez tartozó $\mathcal{E}$-beli síkok (ezeket jelölje $\mathcal{E}_p$) illeszkedéseit. (Így esetleg egy síkot többször számolhatunk).

Vegyünk egy $p \in \mathcal{P}_a$ pontot. Vetítsük $\mathcal{P}_b$ pontjait egy tetszőleges, p-t nem tartalmazó h_p síkra, a vetület legyen $\mathcal{P}_b'$. Nyilván $|\mathcal{P}_b'| \leq n_b$. Az $\mathcal{E}_p$-beli síkok metszetei a vetületsíkon képezzék az $\mathcal{E}_p'$ egyeneseket, ($|\mathcal{E}_p'| = e_p \leq e$).



A Szemerédi-Trotter tétel szerint a h_p síkon

$$I(\mathcal{P}'_b, \mathcal{E}'_p) = O(n_b^{2/3} e_p^{2/3} + n_b), \quad \forall p \in \mathcal{P}_a.$$

Összegezve ezen egyenlőségeket minden $p \in \mathcal{P}_a$-ra a Hölder-egyenlőtlenség segítségével:

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_a} O(n_b^{2/3} e_p^{2/3} + n_b) \leq O((\sum_{i=1}^{n_a} e_p^{2/3}) n_b^{2/3} + n_b) \leq$$

$$\leq O(e^{2/3} n_a^{1/3} n_b^{2/3} + n_a n_b) \leq O(n_a^2 + n_a e^{2/3}).$$

Ugyanígy becsülve a $p \in \mathcal{P}_b$ pontokra illeszkedő síkok összes illeszkedéseit:

$$I = O(e^{2/3} n_a^{1/3} n_b^{2/3} + n_a n_b) + O(e^{2/3} n_b^{1/3} n_a^{2/3} + n_a n_b) = O(n_a^2 + e^{2/3} n_a)$$

□

Bizonyítás (4.1. tétel): Osszuk két közelítőleg egyforma elemszámú részre, $\mathcal{P}_a, \mathcal{P}_b$-re az n pont halmazát. Ekkor az alábbi rekurzív formulát kapjuk az illeszkedések számára:

$$I(n, e) = 2I(n/2, e) + O(n^2 + ne^{2/3})$$

A rekurzív osztogatást akkor hagyjuk abba, ha $(1/2)e^{1/3} \leq n_i \leq e^{1/3}$. Ekkor $I(n_i, e)$-t az $O(n^3)$ korláttal becsülhetjük. (Ez mindig igaz, hiszen n pont van és egy pontra legfeljebb $\binom{n}{2}$ sík illeszkedhet, mert egy síkot még két affin független pont feszít ki). Most $O(n^3) = O(e) = O(e^{2/3}e^{1/2}) = O(ne^{2/3})$. Ezt felhasználva a rekurziós képlet $I = O(n^2 + ne^{2/3} \log n)$-et szolgáltat. $\square$

Az itt kapott felső becslés a log faktor nélkül aszimptotikusan elérhető. Edelsbrunner és Haussler [12] mutatta meg az alábbit.

4.3. ÁLLÍTÁS: $e \leq n$ esetén megadható $\mathbf{R}^3$-ban n különböző pont és e darab általuk kifeszített sík, hogy az illeszkedések száma

$$I = \Omega(ne).$$

BIZONYÍTÁS: Két kitérő egyenesen legyen $n/2, n/2$ pont. Az ezek által kifeszített $2(n/2) = n$ sík közűl vegyünk e darabot. Most minden síkra $n/2 + 1$ pont illeszkedik, így $I = \Omega(ne)$.

$\square$

4.4. ÁLLÍTÁS: $n^3/8 \geq e \geq n$ esetén megadható $\mathbf{R}^3$-ban n különböző pont és e, általuk kifeszített sík, hogy az illeszkedések száma

$$I = \Omega(ne^{2/3}).$$

BIZONYÍTÁS: Az 1.12. tételben megadott Erdős-féle konstrukciót készítsük el egy S síkban $n' = n/2, e' = 2e/n$ ponttal és egyenessel. Itt $\sqrt{n'} \leq e' \leq n'^2$, vagyis $n^{2/3}/2\sqrt{2} \leq e \leq n^3/8$ feltétellel a konstrukció $O(n'^{2/3}e'^{2/3})$ illeszkedést ad. Vegyük észre, hogy a konstrukcióban minden egyenesre legalább 2 pont illeszkedik. Az S síkon kívül vegyünk fel egy L egyenest, ami nem párhuzamos egy S-beli egyenessel sem. Ezen legyen $n/2$ pont. S egyenesei és L pontjai $e'n/2 = e$ síkot feszítenek ki. Ezzel minden S-beli illeszkedés $n/2$-szeres pont-sík illeszkedés lett. Az n pontnak és az általuk kifeszített e síknak az összes illeszkedése

$$I = O(n'^{2/3}e'^{2/3})\frac{n}{2} = O(e^{2/3}n).$$

$\square$

Itt érdemes megjegyezni, hogy az $\mathbf{R}^d$-beli pont-hipersík illeszkedéskre adott alsó becslések egy másik problémának is alsó becslést szolgáltatnak. $\mathbf{R}^d$-ben adott e hipersík a teret cellákra vágja. Egy cella definiálható úgy, hogy minden pontja minden hipersíkra az általa meghatározott egyik féltérben van. A cellák d-dimenziós konvex politópok vagy poliédrikus halmazok.

Definíció: Az e hipersík és a celláinak rendszerét elrendezésnek hívjuk.

Definíció: e hipersík elrendezésében megadott n cella bonyolultsága a cellák ($(d-1)$-dimenziós) lapszámainak összege. $C_d(n, e)$ a d-dimenzióban e hipersíkal és n cellával elérhető maximális bonyolultság.

4.5. ÁLLÍTÁS: Ha $I_d(n, e)$ az $\mathbf{R}^d$-ben adott n pont és e általuk kifeszített hipersík illeszkedéseinek maximuma, akkor

$$C_d(n, 2e) \geq 2I_d(e, n).$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $|\mathcal{P}| = e, |\mathcal{E}| = n$ olyan, amire az illeszkedések száma $I_d(e, n)$. Tekintsük a duális teret. Itt pont képe hipersík, hipersík képe pont, az illeszkedés megmarad. Az, hogy $\mathcal{E}$ hipersíkjait kifeszítik a pontok, azaz minden hipersíkra illeszkedik d affin független pont; azt jelenti, hogy a duális térben minden pontra illeszkedik d hipersík, melyek normálisai lineárisan függetlenek.

Minden $p^* \in \mathcal{E}^*$ duális pont köré írjunk egy kis ε sugarú gömböt. Toljuk el a pontra illeszkedő duális hipersíkokat úgy, hogy két oldalról érintsék a pont körüli gömböt. A duális hipersíkok affin függetlensége miatt az eltolt hipersíkok az ε sugarú gömböket érintő politóp lapjai. Ha ε elég kicsi, akkor a különböző $p^* \in \mathcal{E}^*$ pontokhoz tartozó érintő politópok diszjunktak és cellát alkotnak $\mathcal{P}^*$ elrendezésében. Ekkor $C_d(n, 2e) \geq 2I_d(e, n)$. □

Az e hipersík elrendezésében adott n cella maximális bonyolultsága nagyobb e hipersík és n metszéspontjának maximális illeszkedéseinél. 1990-ben Edelsbrunner, Guibas, Sharir és Welzl [7] belátta, hogy $C_2(n, e) = O(n^{2/3}e^{2/3} + n + e) = I_2(n, e)$.

4.b. Megszorítások az affin alterekre

Egy másik természetes megszorítás, hogy egy egyenesre legfeljebb konstans sok pont illeszkedjen, hiszen az ne-t megközelítő illeszkedés éppen akkor keletkezett, ha egy egyenesre sok pont illeszkedett.

A Szemerédi-Trotter tételből könnyen levezethető egy az ilyen rendszerekre vonatkozó

4.6. TÉTEL: Legyen adott $\mathbf{R}^d$-ben n különböző pont halmaza $\mathcal{P}$ és e hipersík halmaza $\mathcal{E}$, $(d \geq 2)$. Tegyük fel, hogy minden $(d-2)$-dimenziós affin altérben legfeljebb K pont van valamely $K \geq d-1$ konstanssal. Ekkor $t \in [K+1, n^{(d-1)/d}]$ esetén a legalább t pontú hipersíkok száma

$$e_t = O\left(\frac{n^d}{e^{d+1}}\right).$$

BIZONYÍTÁS: Indukció d szerint. $d = 2$-re a Szemerédi-Trotter tétel szolgáltatja az állítást.

Ha $\mathbf{R}^{d-1}$-re már tudjuk, lássuk be $\mathbf{R}^d$-ben. Minden p adott ponthoz vegyünk fel egy rá nem illeszkedő h_p hipersíkot, ami nem párhuzamos egyetlen pontpár egyenesével sem és vetítsük erre a többi $n-1$ pontot. Az így kapott vetületpontok halmaza legyen $\mathcal{P}_p$. Itt $|\mathcal{P}_p| \geq \frac{n-1}{K-1} \geq n/K$ (ha $n \geq K$). $\mathcal{E}_p$ pedig legyen a p-re illeszkedő adott hipersíkok metszeteinek halmaza h_p-síkkal. Ha $h \in \mathcal{E}$ sík illeszkedik p-re és a $h \cap h_p$ metszetben A darab vetületpont van, azt mondjuk, hogy a h hipersík a p ponból A pontúnak látszik, (mint a 2.7. tételben).

Az indukciós feltétel szerint a $(d-1)$-dimenziós h_p hipersíkban a legalább $t-1$ pontú $(d-2)$ dimenziós hipersíkok száma

$$e_{p,t-1} \leq C\frac{|\mathcal{P}_p|^{d-1}}{(t-1)^d} \leq \frac{C}{2^d}\frac{n^{d-1}}{t^d},$$

ha $t-1 \in [K+1, (n/K)^{(d-2)/(d-1)}]$, valamely csak a dimenziótól függő $C > 0$ konstanssal. Egy h_p-beli legalább $t-1$ pontú hipersík p-vel együtt t pont, ez már kifeszít egy $\mathbf{R}^d$-beli t pontú hipersíkot.

Ha $t \in [K+1, K(K+1)]$, használjuk a triviális becslést: $e_t \leq n^d \leq (K(K+ +1))^{d+1}n^d/t^{d+1}$.

Ha $t \in [K(K+1), (n/K)^{(d-2)/(d-1)}+1]$ becsüljük azokat a (p,h) párokat, ahol $p \in \mathcal{P}$, $h \in \mathcal{E}$ legalább Kt pontú és legalább $t-1$ pontúnak látszik p-ből. Ezek számát felülről becsüljük, ha h befutja az összes p-ből legalább $t-1$ pontúnak látszó $\mathcal{E}$-beli hipersíkot. Ezt feülről becsli $nC/2^d\frac{n^{d-1}}{t^d}$.

Egy-egy legalább Kt pontú hipersík viszont minden pontjából minimum t ponúnak látszik, mert egy pontjából a többi legalább $\geq (Kt-1)$ pont legalább $\frac{Kt-1}{K-1}$ pontnak látszik.

Eszerint ekkor

$$e_{Kt} \leq \frac{n}{t}(C/2^d)\frac{n^{d-1}}{t^d} = (C/2^d)\frac{n^d}{t^{d+1}}.$$

Tehát egy tetszőleges t helyett K többszörösét véve $e_t \leq e_{t/K} \leq C/(2K^2)^d\frac{n^d}{t^{d+1}}$, ahogy kívántuk.

Ha $t \in [(n/K)^{(d-2)/(d-1)}+1, n^{(d-1)/d}]$, akkor

$$e_t = O(n/t) \leq O(n/t)\left(\frac{n^{(d-1)/d}}{t}\right)^d = O(n^d/t^{d+1}).$$

Vegyük ugyanis egyenként a legalább t pontú hipersíkokat. Összesen legfeljebb

$$O\left(\frac{n^d}{((n/K)^{(d-1)/d})^{d+1}}\right) = O(n^{1/d})$$

ilyen hipersík van. Az i-edik hipersík legalább $t-K(i-1)$ pontot tartalmaz, mert minden korábbival legfeljebb K metszéspontja van. Így $n \geq \sum_{i=1}^{e_t}(i-K(i- -1)) \geq te_t - Kn^{2/d} > te_t - Kn$ ebből $e_t \leq (K+1)n/t$. $\square$

Kimondható itt is az 1.2. és 3.5. állítás megfelelője:

4.7. ÁLLÍTÁS: Legyen adott $\mathbf{R}^d$-ben n pont és egy e hipersík. Minden $(d-2)$-dimenziós affin altérben legfeljebb K pont van valamely $K \geq d-1$ konstanssal. Ekkor az illeszkedések I számára egyszerre teljesül

(1) $$I = O(n^{k/(k+1)}e^{k/(k+1)} + n + e),$$

(2) $$n^{1/k} \leq e \leq n^k \text{ esetén } I = O(n^{k/(k+1)}e^{k/(k+1)}),$$

(3) $$e_t = O\left(\frac{n^k}{t^{k+1}} + \frac{n}{t}\right), \quad \text{ha} \quad t \in [d, n].$$

BIZONYÍTÁS:

(1) $\Rightarrow$ (2). $n^{1/k} \leq e \leq n^k$ esetén $n = n^{k/(k+1)}n^{1/(k+1)} \leq n^{k/(k+1)}e^{k/(k+1)}$ és $e = e^{k/(k+1)}e^{1/(k+1)} \leq e^{k/(k+1)}n^{k/(k+1)}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Először azt látjuk be, hogy $2 \leq t \leq Dn^{(k-1)/k}$ esetén $e_t = O\left(\frac{n^k}{t^{k+1}}\right)$, $(D > 1)$. Legyen $C > 0$ olyan, hogy $n^{1/k} \leq e \leq n^k$ esetén $I < Cn^{k/k+1}e^{k/k+1}$ teljesüljön. Indirekt tegyük fel. hogy található $e = C^{k+1}D^{k+1}n^k/t^{k+1}$ legalább t pontú hipersík. Ezek illeszkedéseinek száma $I \geq et = C^{k+1}D^{k+1}\frac{n^k}{t^k}$. Másrészt $t \in [CD, Cn^{(k-1)/k}]$ esetén $n^{1/k} \leq e \leq n^k$ és $I \leq Cn^{k/k+1}e^{k/k+1} = C^{k+1}D^k n^k/t^k$ következik, ellentmondás. $t \in [2, CD-1]$ esetén pedig $e_t \leq \binom{n}{k} = O\left(\frac{n^k}{t^{k+1}}\right)$

Most azt látjuk be, hogy $t \in [\sqrt{2Kn}, n]$ esetén $e_t = O\left(\frac{n}{t}\right)$. Tekintsük az összes legalább t pontú hipersíkot. Az első k darab hipersík ($k \in [1, e_t]$) legalább $t + (t-K) + (t-2K) + \cdots + (t-(j+1)K)$ adott pontot fed le, hiszen indukcióval a k-adik maximum $(k-1)K$ adott pontban metsz kisebb indexű egyeneseket; és a szummába nem kerülhetnek negatív tagok, mert $t + (t-K) + \cdots + 1 \geq \frac{t(t-1)}{2K} >$ $> \frac{\sqrt{2Kn}^2}{2K} = n$. Így az e_t egyenes által lefedett összes pontra: $n \geq t + (t-K) +$ $+ \cdots + (t - e_t K + 1) > te_t/2K$ amiből $e_t < 2Kn/t$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Tudjuk, hogy ha $t \in [k, Dn^{(k-1)/k}]$ esetén $e_t \leq C\frac{n^k}{t^{k+1}}$. Becsüljük felülről az illeszkedések számát. Legyen l a legkisebb olyan természetes szám, hogy

$$C^{k+1}\frac{n^k}{l^{k+1}} \leq e.$$

Ekkor $l = O\left(\frac{n^{k/(k+1)}}{e^{1/(k+1)}}\right)$; és a legfeljebb $Dn^{1/k}$ pontú hipersíkok összes illeszkedéseit felülről becsli

$$Ke + Kle + \sum_{t=l}^{Dn^{(k-1)/k}} \frac{n^k}{t^{k+1}} \leq Ke + O(n^{k/k+1}e^{k/k+1}) + \int_l^{Dn^{(k-1)/k}} \frac{n^k}{t^{k+1}}dt =$$

$$Ke + 1/kn^k(\frac{1}{l^k} - \frac{1}{D^k n}) \leq Ke + O(n^{k/(k+1)}e^{k/(k+1)}).$$

A $Dn^{(k-1)/k}$-nél több pontú hipersíkok száma legfeljebb $\frac{C}{D^{k+1}}n^{1/k}$. Illeszkedjen az egyes görbékre $a(i) \geq Dn^{(k-1)/k}$ pont. Ezen görbék összes illeszkedése $I' = \sum_i a(i)$. Ha egyenként rakjuk le az görbéket a síkra, akkor a j-edik legalább $a(j) - K(j-1)$ újabb pontot fed le, mert az első $(j-1)$-gyel legfeljebb $K(j-1)$ metszéspontja van. $n \geq \sum_i(a(i) - K(i-1)) \geq \sum_i a(i) - \sum_{i=1}^{D\sqrt{n}} K(i-1) \geq \sum_i a(i) - O(n)$. Ebből $I' = O(n)$.

□

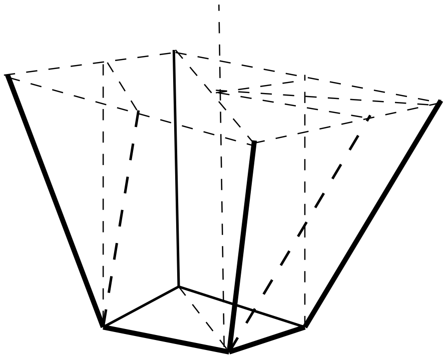
A több dimenziós Beck-tétel módszereit alkalmaztuk, a Beck tétel pedig a lehető legjobb becslést adja a kifeszített hipersíkok számára. Az illeszkedések számára viszont ismert a fentinél jobb felső becslés is, de az élességről még ott sem ismert eredmény.

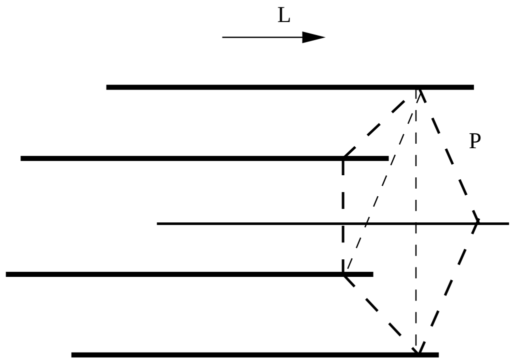
Az illeszkedések számlálását az nehezíti, hogy három vagy több dimenzióban két hipersík metszete nem foglalható egy véges tartományba. Ezt küszöböli ki a K.L. Clarksontól [6] származó, véletlen mintákat használó

4.8. TÉTEL: Legyen S hipersíkok véges halmaza $\mathbf{R}^d$-ben, $R \subset S$ véletlen minta S-ből. Ekkor 1/2-nél nagyobb valószíűséggel az R elrendezés által megadott cellák háromszögelésben minden általánosított szimplexet $sO(\log r/r)$ darab S-beli hipersík metsz. (Ahol $|S| = s, |R| = r$, metszésnek azt nevezzük, hogy a sík metszete a szimplex relatív belsejével nem üres). □

A véges sok hipersík által definiált cellák háromszögelése magyarázatra szorul, mivel egy elrendezés cellái közt nem-korlátosak is vannak, politópokra darabolni nem lehet őket.

Definíció: e darab hipersík elrendezésének celláira a háromszögelést úgy értjük, hogy a korlátos cellák szimplexfelbontását vesszük. A nem-korlátos cellák esetében dimenzió szerint rekurzíve definiáljuk a háromszögelés általánosított szimplexeit. 1 dimenzióban egy félegyenes általánosított szimplex. A cellák nem-korlátos (1-dimenziós) éleit is "végtelen távoli" csúcsnak tekintjük. Ha van a cellának csúcsa, akkor a cella határának háromszögeléséből minden általánosított szimplexre egy csúccsal vett konvex burkok az általánosított szimplexek. Ha a cellának nincs csúcsa, akkor előáll $P + L$ alakban, ahol L az $\mathbf{R}^d$ egy lineáris altere, P pedig egy kisebb dimenziós cella, aminek már van csúcsa. Ilyenkor a cella háromszögelésének általánosított szimplexei $K + L$ alakban állnak elő, ahol K a P cella egy általánosított szimplexe.





Minden cella felbontható diszjunkt belsejű általánosított szimplexek uniójára.

Egy valószínűségi lemmát használunk fel. Előbb azonban célszerű bevezetni az alábbi jelöléseket: $b(j;t,\alpha) := P(t$ független α valószínűségű eseményből j következik be $) = \binom{t}{j}\alpha^j(t-\alpha)^{t-j}$.

$A \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ halmazcsaládra és $B \subset \mathbf{R}^d$ tartományra jelölje $\#(A,B) = = |\{a \in A : a \cap B \neq \emptyset\}|$.

4.9. Lemma: Legyenek $S, \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ halmazcsaládok, $|S| = s$; $i, l \in \mathbf{N}$ fix konstansok. Tekintsük leképezéseknek egy $v_k : S^i \mapsto \mathcal{F}$ $(k \in [1,l])$ rendszerét, azaz olyan leképezéseket, melyek S-beli rendezett i-esekhez rendelnek $\mathcal{F}$-beli halmazokat. Legyen R véletlen minta S-ből, $|R| = r$ (R elemei nem feltétlen különbözőek).

$$\mathcal{F}_R := \{v_k(R^i) : k \in [1,n]\},$$

azaz $\mathcal{F}_R$ legyen az R minta által definiált összes $\mathcal{F}$-beli halmaz. Ekkor $m \in \mathbf{N}$-re és $0 \leq \alpha \leq 1$-re, ahol $m \leq (r-i)^\alpha$, teljesül

$$P(\exists A \in \mathcal{F}_R :\ \#(A,R) \geq m,\ \#(A,S) < \alpha s) \leq O(r^i) \sum_{j \leq m} b(j; r-i, \alpha).$$

4.10. Következmény:

$$P(\exists A \in \mathcal{F}_R :\ \#(A,R) = 0, \#(A,S) > \alpha s) \leq O(r^i)(1-\alpha)^{r-i}$$

minden fix i-re és n-re. Alkalmas $\alpha = O(\log r/r)$-rel ez a valószínűség 1/2-nél kisebb.

Ha S halmaznak a 4.8. tételbeli síkok halmazát vesszük, $\mathcal{F}$ pedig az $R \subset S$ véletlen minta elrendezésében a cellák általánosított szimplexei, akkor ez éppen azt jelenti, hogy 1/2-nél nagyobb valószínűséggel minden általánosított szimplexet legfeljebb αs sík metsz.

Bizonyítás (4.10. Következmény): Alkalmazva az előző tételt $m = 0$ esetben a felső korlátban $\sum_{j\leq m}\binom{r-i}{j}\alpha^j(1-\alpha)^{r-i-j} = (1-\alpha)^{r-i}$. $\alpha = c\log r/r$ választással alkalmas c konstanssal ez $O(r^i(1-\log r/r)^{r-i} \leq 1/r^r \to 0, \quad (r\to\infty)$. Megadható c úgy, hogy ez mindig kisebb legyen 1/2-nél.

Bizonyítás (4.9. Lemma): A valószínűségszámításból csak annyit használunk fel, hogy valamely X, Y eseménypárra $P(X \wedge Y) \leq P(X) + P(Y)$ és $P(X \wedge Y) \leq P(X|Y)$.

Jelöljük R elemeit $[1, r]$-beli számokkal. Ezzel $\tau \in [1, r]^i$ vektorra értelmes $v_k(\tau) \in \mathcal{F}_R, \quad (k \in [1, l])$ halmaz is, ez R választásától függő valószínűségi változó.

Itt

$$P(\exists A \in \mathcal{F}_k \,:\, \#(A, R) \leq m,\ \#(A, S) > \alpha s) =$$

$$= P(\exists \tau \in [1, r]^i \exists k \in [1, l] \,:\, \#(v_k(\tau), R) \geq m,\ \#(v_k(\tau), S) > \alpha s),$$

mert a két esemény azonos. Ez utóbbit felülről becsli

$$\sum_{r\in[1,r]^i, k\in[1,l]} P(\#(v_k(\tau), R) \leq m,\ \#(v_k(\tau), S) > \alpha s) \leq$$

$$\leq l|[1, r]^i| \max_{\tau\in[1,r]^i, k\in[1,l]} P(\#(v_k(\tau), R) \leq m\, |\#(v_k(\tau), S) > \alpha s);$$

elég tehát $P(\#(v_k(\tau), r) \leq m\, |\#(v_k(\tau), S) > \alpha s)$-et becsülni minden τ-ra és $k \in [1, l]$-re.

Jelölje R' a τ-beli számokkal indexelt mintahalmazokat. Mivel a τ-beli számokkal indexelt minták függetlenek azoktól, amelyek nem ilyenek, annak valószínűsége, hogy egy $(R - R')$-beli halmaz metszi $v_k(\tau)$-t pontosan $\#(v_k(\tau), S)/s$; annak valószínűsége pedig, hogy $\#(v_k(\tau), R) = j$ éppen $b(j; r - i, \#(v_k(\tau), S)/s)$. Végül annak valószínűsége, hogy a $v_k(\tau)$-t metsző minták száma legfeljebb m pont $\sum_{j\leq m} b(j; r - i, \#(v_k(\tau), S)/s)$.

Az olyan τ-kra, melyekre $\#(v_k(\tau), S)/s > \alpha s$,

$$b(j; r - i, \alpha) > b(j; r - i, \#(v_k(\tau), S)/s),$$

mivel $b(j; r - i, \beta)$-nak a β szerinti deriváltja negatív, ha $\beta > j/(r - i)$ és $j/(r - - i) \leq m/(r - i) \leq \alpha < \#(v_k'(\tau), S)/s$.

Így aztán

$$P(\#(v_k(\tau), R) \leq m\, |\#(v_k(\tau), S) > \alpha s) \leq \sum_{j\leq m} b(j; r - i, \alpha).$$

□

4.11. Megjegyzés: Ha kikötjük, hogy R minden eleme legyen diszjunkt, akkor is igaz a fenti állítás, mert $r \ll s$ esetén annak valószínűsége, hogy R két eleme egybeessen nagyon kicsi és $P(X) \mapsto 1, P(Y) > c > 0$ esetén $P(Y|X) \mapsto P(Y)$.

BIZONYÍTÁS (4.8. TÉTEL): Alkalmazzuk az előbbi lemmát az iménti következmény szerint választott $m = 0$-val és $\alpha = O(\log r/r)$-rel. Legyen $S = S, i = = d(d+1)$. A v leképezés-családot úgy fogjuk megadni, hogy minden olyan tartomány belseje, ami az R elrendezés celláinak háromszögelésében van, $\mathcal{F}_R$ eleme legyen. Ekkor a lemma következménye éppen a kívánt állítást szolgáltatja.

Indexeljük a v leképezéseket $v_{m,d'}$-val, ahol $m \in [0,d], d' \in [2,d]$. Ezzel a v leképezések száma $d(d+1)$. A különbözően indexelt leképezések rendre a háromszögelés különböző fajta általánosított szimplexeit adják meg. $d' < d$-re $v_{m,d'}$ az elfajuló $\mathcal{F}_R$ elrendezések esetében jut szerephez. Ha valahol nem akarjuk értelmezni v leképezést, v képezzen az üreshalmazra.

$v_{0,d}$ képezzen a háromszögelés szimplexeinek belsejére. v argumentumát osszuk $d+1$ darab S^d-re. Ha mindegyik hipersík d-es metszete egy-egy pont, legyen $v(\vec{s})$ az általuk meghatározott szimplex; különben az üreshalmaz.

$v_{m,d}, (0 < m)$ az olyan általánosított szimlexeket definiálja, melyeknek van valódi csúcsa és m darab "végtelen távoli" csúcsa van. Az első $(d+1-m) \times d$ argumentum által meghatározott $d+1-m$ pont (ha ezek pontok) és a következő $m \times (d-1)$ által megadott m irány által kifeszített általánosított szimplex legyen $v_{m,d}(\vec{s})$.

$v_{m,d'}$, $(d' < d)$ az elfajuló cellák háromszögeit definiálja, ahol a cella $L+P$ felbontásában L egy d' dimenziós altér. Az argumentum első d' hipersíkja definiálja L irányát, a többi pedig a fent leírt módon megadja $L^{\perp}$-ban a P általánosított szimplexeit.

Ezzel az R elrendezés háromszögfelbontásának minden általánosított szimplexe szerepel $\mathcal{F}_R$-ben.

□

4.12. SEGÉDTÉTEL: $\mathbf{R}^d$-ben r darab hipersík elrendezésének van háromszögelése, ahol az általánosított szimplexek száma $O(r^d)$.

BIZONYÍTÁS: Dimenzió szerinti indukcióval. Az állítás $d = 1$-re nyilvánvaló. $d > 1$-re pedig készítsük el az r hipersíkon a többi $r-1$ hipersík metszetének háromszögelését $O(r^{d-1})$ általánosított szimplexszel. Az r hipersík elrendezésének celláit úgy háromszögeljük, hogy a cella határának háromszögeléséből minden szimplexet egy ponttal kötünk össze.

Így minden általánosított szimplexnek egy lapja valamely hipersík háromszögeléséből való, és egy ilyen $(d-1)$-dimenziós általánosított szimplex két d-dimenziós általénosított szimplexet határol. Tehát az általánosított szimplexek számát felükről becsli $2rO(r^{d-1}) = O(r^d)$.

□

Ezen előkészítések után kimondhatjuk Edelsbrunner-Guibas-Sharir tételét pontok és síkok illeszkedéséről három dimenzióban:

4.13. TÉTEL: Legyen adott n különböző pont és e különböző sík $\mathbf{R}^3$-ben, a pontok közt nincs k kollineáris (k fix). Ekkor az illeszkedések száma:

$$I = O(n^{3/5-\delta} e^{4/5+2\delta} + e + n \log e).$$

A bizonyítás egy algoritmusra épül, amely az illeszkedéseket számlálja az "Oszd-meg-és-uralkodj" elv szerint. A kiszámítandó részfeladatokat egy véletlen mintavétel szerint választjuk ki figyelembe véve a tér duálisát is, ahol pont képe sík, sík képe pont, a tartalmazás megfordul, de az illeszkedés megmarad.

BIZONYÍTÁS: Legyen $\mathcal{P}$ a ponthalmaz, $\mathcal{E}$ pedig a síkhalmaz. $\mathcal{P}^*$ a duális síkok halmaza, $\mathcal{E}^*$ a duális pontok halmaza.

Válasszunk ki egy r elemű véleteln mintát a duális síkok $\mathcal{P}^*$ halmazából, ($r \in \mathbf{N}$ később megadandó nagy szám). A minta elemei a $\mathbf{R}^d$ teret konvex poliédrikus halmazokra bontják. A poliédrikus halmazok felbonthatók általánosított szimplexekre. Rögzítsúnk egy szimplex-felbontást a véletlen mintához.

A 4.12. lemma szerint van olyan felbontás, amelyben az általánosított szimplexek száma $O(r^3)$.

Minden T szimplexre elkészítünk egy részproblémát. Ebben $\mathcal{E}_T$ jelöli azon $s \in \mathcal{E}$ síkokat, melyekre az s^* duális sík T-ben van, és $\mathcal{P}_T$ azon $p \in \mathcal{P}$ pontokat, melyekre p^* metszi T-t. A részprobléma számolja a $\mathcal{P}_T$ és $\mathcal{E}_T$ közötti illeszkedéseket, I_T-t.

A Clarksontól származó 4.8. tétel és a 4.10 következmény szeint pozitív valószínűséggel egy mintához tartozó minden T szimplexet legfeljebb $(cn/r) \log r$ duális sík metsz, valamely $c > 0$ konstanssal. Rögzítsünk egy ilyen mintát.

Az "Oszd meg-és-uralkodj" elv szerint így osztjuk tovább a részfeladatokat egészen addig, míg $n_T \geq e_T^2$ nem teljesül ($n_T = |\mathcal{P}_T|, e_T^2 = |\mathcal{E}_T|$). Ekkor kiszámítjuk a részproblémát.

Ha a részproblémában egy pont csak egy síkra illeszkedik, az egy illeszkedést ad, ez n_T pontra legfeljebb n_T illeszkedés. Nézzük azokat a pontokat, amelyek több síkra illeszkednek. Ezek rajta vannak két $\mathcal{E}_T$-beli sík metszésvonalán. Egy metszésvonalon legfeljebb k pont van, egy síkot legfeljebb $e_T - 1$ másik metsz, ez síkonként ke_T-nél kevesebb illeszkedés, összesen ke_T^2. A részproblémában tehát $I_T \leq n_T + ke_T^2 \leq 2kn_T$.

Legyen $B_T = \{p \in \mathcal{P} : p^* \cap T = \emptyset\}$ az összes olyan pont halmaza, melyek duálisai elkerülik T-t. $b_T = |B_T|$. Ekkor a $p^* \in B_T^*$ duális sík vagy minden $s_T^* \in \mathcal{E}_T^* \subset T$ pont fölött van vagy mindegyik alatt. A dualitás megtartja az alatta-fölötte relációt, ezért $p \in B_T$ pont vagy minden $s_T \in \mathcal{E}_T$ sík fölött van vagy mindegyik alatt. Legyen $U_T^+, U_T^- \subset \mathbf{R}^3$ az a két konvex halmaz, melynek elemei minden $\mathcal{E}_T$-beli sík fölött, ill. vannak.

Számoljuk az illeszkedéseket B_T és $\mathcal{E}_T$ közt. Ha $p \in B_T$ pontosan egy $\mathcal{E}_T$-beli síkra illeszkedik, az egy illeszkedés, összesen b_T. Ha p több síkra is illeszkedik, rajta van U_T^+ vagy U_T^- valamely élén. Vetítsük U_T^+ határát egy vízszintes síkra. Tekintsük élnek a $\mathcal{E}_T$-beli síkpárok határra eső részét. (Megengedünk többszörös éleket is) Az élek egy síkgráfot adnak. Tudjuk, hogy ez a síkgráf legfeljebb e_T tartományra bontja a síkot. Az Euler-féle poliédertételt alkalmazva a duális síkgráfra azt kapjuk, hogy éleinek száma kisebb $3e_T$-nél. Egy élen legfeljebb k pont lehet, ezzel $3ke_T$-nél kevesebb illeszkedést kaphatunk. Ugyanígy számolva U_T^--on, összesen legfeljebb $2n_T + 6ke_T$ illeszkedést kaphatunk.

Az eljárás végén úgy számoljuk össze az illeszkedéseket, hogy rekurzíve kiszámítjuk az egyes szimplexek belsejére és hozzáadjuk a megfelelő T-hez tartozó B_T illeszkedéseit. Tehát az alábbi rekurzív formulát kapjuk:

$$I(n,e) = \begin{cases} O(n) & \text{ha } n \geq e^2, \\ \sum_{i=1}^{N} I(n_i e_i) + O(n+m) & \text{ha } n < e^2 \end{cases}$$

ahol $N = O(r^3)$ az r darab sík felbontásából származó szimplexek száma, és így persze $n = \sum_{i=1}^{N} e_i \leq e$.

Az $I(n,e)$-re felső becslést adunk a rekurzív formula segítségével. Azt szeretnénk belátni, hogy

$$I(n,e) = O(n^{3/5-\delta} e^{4/5+2\delta} + e + n \log e).$$

Ehhez rögzítsük $\delta \in (0, 1/12)$-t. r legyen δ-tól függő konstans a rekurzióban.

A rekurziós képlet $O(e_i)$ adaléka a rekurzió fájának egy szintjén legfeljebb $O(e)$. Mivel az eljárás $\log n$ lépésben véget ér, ez az egész rekurzióban $O(e \log n)$ lesz.

Ha $n \geq e^2$, akkor $I = O(n)$, készen vagyunk. Ekkor $I \leq Cn$.

Ha $n < e^2$ az indukció szerint

$$I \leq \sum_{i=1}^{N} [C(n_i^{3/5-\delta} e_i^{4/5+2\delta} + e \log n_i + n_i] + O(n).$$

Clarkson 4.8. tétele szerint $n_i \leq (cn/r) \log r$ minden i-re, ezért

$$\sum_{i=1}^{N} O(n_i) \leq c_1 (Nc/r) \log rn,$$

és így

$$I \leq C \left(\sum_{i=1}^{N} n_i^{3/5-\delta} e_i^{4/5+2\delta} \right) + [c_1 \frac{Nc}{r} \log r + c_2] n$$

alkalmas $c_1, c_2 > 0$ konstansokkal. Itt a második tagban n becsülhető

$$n = n^{3/5-\delta} n^{2/5+\delta} \leq n^{3/5-\delta} e^{4/5-2\delta} \text{–vel.}$$

$n_i \leq cn/r \log r$ miatt, a Hölder-féle egyenlőtlenség alapján, valamint $N = O(r^3)$ miatt

$$\sum_{i=1}^{N} n_i^{3/5-\delta} e_i^{4/5+2\delta} \leq (cr/\log r)^{3/5-\delta} n^{3/5-\delta} \sum_{i}^{N} e_i^{4/5+2\delta} \leq$$

$$\leq (cr/\log r)^{3/5-\delta} n^{3/5-\delta} N^{1/5-2\delta} \left(\sum_{i=1}^{N} e_i \right)^{4/5+2\delta} \leq$$

$$\leq c_3 \frac{\log^{3/5-\delta} r}{r^{8\delta}} n^{3/5-\delta} e^{4/5+2\delta}$$

$$I \leq (C c_3 \frac{\log^{3/5-\delta} r}{r^{8\delta}} + c_4 r^2 \log r + c_2) n^{3/5-\delta} e^{4/5+2\delta}.$$

Válasszuk r-et olyan nagynak, hogy $c_3 \frac{\log^{3/5-\delta} r}{r^{8\delta}} \leq \frac{1}{2}$ legyen. Válaszuk a C konstans értékét $2c_4 r^2 \log r + c_2$-nak. Ezzel

$$I \leq C(n^{3/5-\delta} e^{4/5+2\delta}).$$

□

A legjobb alsó becslés messze van a 4.13 tétel által sugallt $I = O(n^{3/5} e^{4/5} + n + e)$ korláttól. Erickson [16] konsrtukciója az Erdős 2-dimenziós éles konstrukciójához hasonlóan az Euler-féle ϕ függvény elemi tulajdonságait használja és az $\mathbf{R}^3$ kockarácsán ad meg síkokat.

4.14. Állítás: Bármely $n, e \in \mathbf{N}$-re, melyre $e^{1/3} \leq n \leq e$, található n különböző pont és különböző e sík $\mathbf{R}^3$-ben, hogy a pontok közt nincs 3 kollineáris és az illeszkedések száma: $I = \Omega(n^{1/2} e^{5/6})$

Bizonyítás: A duális problémára adunk konstrukciót. Azaz megadunk n különböző pontot és e síkot ($n^{1/3} \leq e < n$), ahol nem illeszkedik három sík egy egyenesre; az illeszkedések száma $\Omega(n^{5/6} e^{1/2})$.

Tegyük fel, hogy $8 | n^{1/3} \in \mathbf{N}$.[5]

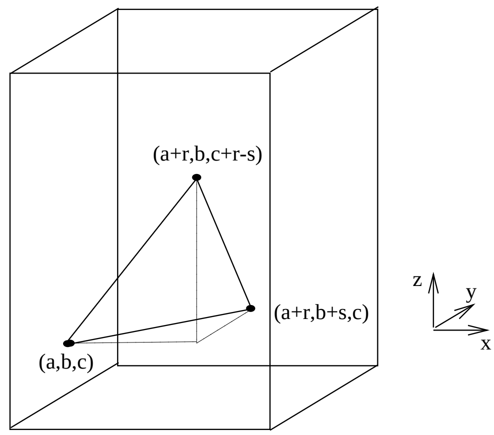
Az n pont halmaza legyen $[1, n^{1/3}]^3 \subset \mathbf{R}^3$ és $l = \lfloor \alpha (e/n^{1/3})^{1/4} \rfloor \in \mathbf{N}$.

Definiáljuk a $h(a, b, c; r, s)$-t, mint az (a, b, c), $(a+r, b+s, c)$, $(a+r, b, c+r-s)$ pontokra illeszkedő síkot.

A síkok halmaza legyen

$$H = \bigcup \{ H_{r,s} | r \in [1, l],\ s \in [1, r].\ \mathrm{lnko}(r, s) = 1 \},$$

[5] Ez csak konstansszoros eltérést okoz, mint azt az 1.12. tételben láthattuk.



ahol
$$H_{r,s} = \{h(a,b,c;r,s) | a \in [1,r], b \in [1,s], c \in [1, n^{1/3}/2]\}.$$
Mivel lnko$(r,s) = 1$, így $r, s, (r-s)$ páronként relatív primek, ezért különböző r,s-re $H_{r,s}$ síkjai különböző irányúak. $H_{r,s}$ elemei pedig ismét csak különbözőek. Eszerint
$$|H| = \sum_{r=1}^{l} r \sum_{\substack{s \in [1,r] \\ \text{lnko}(r,s)=1}} s \left\lfloor \frac{n^{1/3}}{2} \right\rfloor \le \frac{n^{1/3}}{2} \sum_{r=1}^{l} r \frac{r\phi(r)}{2} \le$$
$$\le \frac{n^{1/3}}{4} \sum_{r=1}^{l} r^3 = n^{1/3} O(l^4) = O(e).$$
Ha H-ban lenne három egy egyenesre illeszkedő sík, akkor a síkok metszete a $(x=0)$ síkkal három egy pontra illeszkedő egyenest tartalmazna. A konstrukciónkban minden síknak van $(1,1,1)$-re illeszkedő eltoltja, ezért feltehetjük, hogy a három sík $h(1,1,1;r,s)$ alakú, valamely r,s párra. A $h(1,1,1;r,s) \cap (x=0)$ metszet az $(0, 1-s/r, 1), (0, 1, s/r)$ pontra illeszkedő egyenes. Ezek mind különbözőek és egy parabolát érintenek, ezért nem lehet háromnak közös pontja.

Az illeszkedések számát annak a ténynek a felhasználásával becsülhetjük, hogy $k \in [1, n^{1/3}/2r]$ esetén $h(a,b,c;r,s) \cap (x = a + ki)$ metszet legalább k rácspontot tartalmaz. Ebből
$$|[1, n^{1/3}]^3 \cap h(a,b,c;r,s)| \ge \sum_{k=1}^{\lfloor n^{1/3}/2r \rfloor} k > 1/2 \left\lfloor \frac{n^{1/3}}{2r} \right\rfloor^2 \ge 1/2 \left(\frac{n^{1/3}}{2r} - 1 \right)^2;$$
$$I \ge \frac{n^{1/3}}{2} \sum_{r=1}^{l} r \sum_{\substack{s \in [1,r] \\ \text{lnko}(r,s)=1}} \frac{s}{2} \left\lfloor \frac{n^{1/3}}{2r} \right\rfloor^2 \ge \frac{n^{1/3}}{4} \sum_{r=1}^{l} \sum_{\substack{s \in [1,r] \\ \text{lnko}(r,s)=1}} \frac{s}{2} \frac{n^{2/3} - 2n^{1/3}}{4r} \ge$$

$$\geq \Omega(n)\sum_{r=1}^{l}\phi(r) - O(n^{2/3})\sum_{r=1}^{l} r\phi(r) \geq \Omega(nl^2) - O(n^{2/3}l^3) \geq \Omega(n^{5/6}e^{1/2}) - O(n^{5/12}e^{3/4}).$$

Tehát $n^{1/3} \leq e \leq n$ esetén $I = \Omega(n^{5/6}e^{1/2})$.

□

MEGJEGYZÉS: Ha $n \geq e$, akkor a kétdimenziós esetből származó triviális alsó becslés az ismert legjobb. Egy S síkon legyen n pont és e egyenes $\Omega(n^{2/3}e^{2/3} + n + e)$ illeszkedéssel (1.12-nek megfelelően). Minden egyenesre illesszünk egy S-re merőleges síkot. Mozgassunk el minden pontot az S síkból $S^{\perp}$ irányba úgy, hogy ne legyen köztük három kollineáris. Ekkor $I = \Omega(n^{2/3}e^{2/3} + n + e)$.

4.c. Egy cellában lévő pontok

Fontos alkalmazásai vannak annak a speciális esetnek is, melyben az $\mathbf{R}^d$-ben adott e hipersík egy zárt cellájában adott n pont. Az illeszkedések csak a cella határán jöhetnek létre. Ebben az esetben is előfordulhatna, hogy minden pont a cella határának egy egyenesén van, ami *ne* illeszkedést adna. Bizonyos megszorításokkal itt is elérhető jobb eredmény.

Edelsbrunner és Sharir [13] bizonyította a négydimenziós esetre a következőt.

4.15.TÉTEL: Legyen adott $\mathbf{R}^4$-ben n pont $\mathcal{P}$ halmaza és e hipersík $\mathcal{E}$ halmaza úgy, hogy

1. minden hipersíknak egyik zárt félterében van az összes pont,
2. nincs három kollineáris pont $\mathcal{P}$-ben,
3. nincs három $\mathcal{E}$-beli hipersík, melyek metszete 2-dimenziós affin altér.

Ekkor a $\mathcal{P}$ és $\mathcal{E}$ között fellépő illeszkedések száma

$$I = O(n^{2/3}e^{2/3} + n + e).$$

A tétel bizonyítása ezúttal is véletlen módszereket használ. Clarkson és Shor [8] valószínűségi lemmáihoz kiegészítjük a 4.10. előtt bevezetett jelöléseket.

$S, \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ halmazcsaládok. Vezessük be a $v : \mathcal{F} \mapsto S^b$, ($b \in \mathbf{N}$ fix) függvényeket; $\{v(F)\}$ a $v(F)$ rendezett b-es elemeinek halmaza. $n : \mathcal{F} \mapsto \mathbf{N}$ multiplicitásfüggvény minden $F \in \mathcal{F}$-re megadja F azon $\mathcal{F}$-beli példányainak számát, amelyekre $v(F)$ is megegyezik.[6]

[6] $\mathcal{F}$ multihalmaz

Jelölje $\mathcal{F}_R$ azokat a $F \in \mathcal{F}$ halmazokat, melyre $v(F) \in R^b$. Végül pedig legyen $\mathcal{F}_R^j = \{F \in \mathcal{F}_R : \#(F,S) = j\}$, $(j \in \mathbf{N})$.

4.16. LEMMA: Legyen $R \subset S$ véletlen minta, melynek r különböző elemből áll. Ekkor

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_S} \#(F,S) \binom{s-b-\#(F,S)}{r-b-1} \le \binom{s}{r} M[|\mathcal{F}_R^1|].$$

BIZONYÍTÁS: Minden $F \in \mathcal{F}_S$-re legyen I_F az $\{F \in \mathcal{F}_R^1\}$ eseménynek az indikátorfüggvénye. Ezzel

$$M[|\mathcal{F}_R^1|] = M\left[\sum_{F \in \mathcal{F}_S} I_F\right] = \sum_{F \in \mathcal{F}_S} M[I_F] = \sum_{F \in \mathcal{F}_S} P(F \in \mathcal{F}_R^1).$$

Vegyük észre, hogy egy $F \in \mathcal{F}_S$ halmazra $F \in \mathcal{F}_R^1$ teljesül, ha $\#(F,R) = 1, \{v(F)\} \subset R$. Eszerint a $P(F \in \mathcal{F}_R^1)$ valószínűséget alulról becsülhetjük úgy, hogy e feltételnek megfelelő r elemű minták számát osztjuk az összes lehetséges minta számával. A feltételnek eleget tesz R, ha $\#(F,S)$-ből kiválasztunk egy elemet, beválasztjuk az F-et definiáló $|\{v(F)\}|$ elemet és további $r - |\{v(F)\}| - 1$ elemet választunk S fennmaradó legalább $s - i_F - 1$ eleméből.

$$P(F \in \mathcal{F}_R^1) \ge \#(F,S) \binom{s-|\{v(F)\}|-\#(F,S)}{r-|\{v(F)\}|-1} \Big/ \binom{s}{r}.$$

Végül $|\{v(F)\}| \le b$ miatt

$$\binom{s-|\{v(F)\}|-\#(F,S)}{r-|\{v(F)\}|-1} \ge \binom{s-b-\#(F,S)}{r-b-1}.$$

□

Legyen g konkáv, monoton növő valós függvény. Ezzel igaz lesz az alábbi

4.17. TÉTEL: A bevezetett jelölésekkel

$$M\left[\sum_{F \in \mathcal{F}_R^0} g(\#(F,S))\right] \le g\left(\frac{s-r-1}{r-b}\frac{M[|\mathcal{F}_R^1|]}{|\mathcal{F}_R^0|}\right)|\mathcal{F}_R^0|.$$

BIZONYÍTÁS: Most I_F legyen az $\{F \in \mathcal{F}_R^0\}$ eseménynek az indikátorfüggvénye. Ekkor

$$M\left[\sum_{F \in \mathcal{F}_R^0} g(\#(F,S))\right] = M\left[\sum_{F \in \mathcal{F}_S} I_F g(\#(F,S))\right] = \sum_{F \in \mathcal{F}_S} M\left[I_F g(\#(F,S))\right] =$$

$$\sum_{F\in\mathcal{F}_S} P(F\in\mathcal{F}_R^0)g(\#(F,S)) \le M\left[|\mathcal{F}_R^0|\right] g\left(\sum_{F\in\mathcal{F}_S} P(F\in\mathcal{F}_R^0)g(\#(F,S))/|\mathcal{F}_R^0|\right)$$

a Jensen-egyenlőtlenség szerint és mert $M\left[|\mathcal{F}_R^0|\right] = \sum_{F\in\mathcal{F}_S} P(F\in\mathcal{F}_R^0)$.

Használhatjuk a 4.16. lemmát g argumentumának becslésében,

$$\sum_{F\in\mathcal{F}_S} P(F\in\mathcal{F}_R^0)\#(F,S) = \sum_{F\in\mathcal{F}_S} \#(F,S)\binom{s-|\{v(F)\}|-\#(F,S)}{r-b-1}\Big/\binom{s}{r} \le$$

$$\le \frac{s-r+1}{r-b}\sum_{F\in\mathcal{F}_S}\#(F,S)\binom{s-b-\#(F,S)}{r-b}\Big/\binom{s}{r} = \frac{s-r+1}{r-b}M\left[|\mathcal{F}_R^1|\right].$$

Behelyettesítve a tétel állítását kapjuk.

□

Az illeszkedéseket most is az "Oszd-meg-és uralkodj" elve alapján számoljuk. A részproblémák valamelyikét viszont már meg kell tudnunk oldani. Triviális eszköz erre a 3.2. Kővári, T.Sós, Turán tétel, ami a 2.,3. feltételek szerint azt adná, hogy $I = O(ne^{2/3}+e)$, $I = O(n+n^{2/3}e)$. Az 1. feltétel azonban jobb becslést tesz lehetővé.

4.18. Lemma: A 4.15. tétel 1.-3., feltételeivel

$$I = O(n\sqrt{e}+e), \qquad I = O(n+\sqrt{n}e).$$

Bizonyítás: A duális térben a 2., és a 3., feltétel felcserélődik, míg az 1. feltétel önduális. Ezért elég belátni, hogy $I = O(n+\sqrt{n}e)$.

Legyen T a $\mathcal{E}$-beli hipersíkok által határolt zárt politóp, amely tartalmazza a $\mathcal{P}$ ponthalmazt. Feltehetjük, hogy az origó T belsejében van. Számoljuk az illeszkedéseket pontonként.

Ha egy $p\in\mathcal{P}$ pont T egy (3-dimenziós) lapjának belsejében van, akkor egy illeszkedést ad. Ha egy $p\in\mathcal{P}$ pont T egy 2-dimenziós lapján van, akkor a 3. feltétel miatt két illeszkedést ad. Így az eddig számolt pontok összesen $O(n)$ illeszkedést adnak.

A 2. feltétel miatt T egy 2-dimenziós lapján legfeljebb 2 adott pont lehet. T egy csúcsában egy pont lehet.

Egy politópot egyszerűnek nevezünk, ha minden i-dimenziós lapját $d-i$ darab hiperlap tartalmazza, ahol $i\in[0,d-1]$. Az Euler formulát általánosító Dehn-Sommerville relációnak következménye, hogy egy egyszerű politópban a csúcsok és élek száma $O(e^{\lfloor d/2\rfloor})$, itt $O(e^2)$ [10]. Eszerint a csúcsban lévő és él belsejében lévő pontok illeszkedéseinek száma $O(e^2)$, ha T egyszerű.

Ha T nem egyszerű, akkor toljuk el $\mathcal{E}$ minden olyan hipersíkját, ami T-nek csak csúcsát vagy élét tartalmazza, a T belsejében lévő origó felé ε-nal úgy, hogy az új politópot egy lapban messe. Majd mozgassuk a laphipersíkokat úgy, hogy minden csúcsra csak három laphipersík illeszkedjen. Ezzel az él-hipersík és csúcs-hipersík illeszkedések száma nem csökkent, és most már $O(e^2)$.

Eddig az illeszkedések számára $O(n+e^2)$-es korlátot kaptunk. $e < \sqrt{n}$ esetén ez $O(n)$. Egyébként vágjuk az $\mathcal{E}$ halmazt $\lceil e/\sqrt{n} \rceil$ darab $\sqrt{n}$ elemű részre. Mindegyik részben $O(n + (\sqrt{n})^2) = O(n)$ illeszkedést kapunk $\mathcal{P}$ és $\mathcal{E}'$ között. Összegezve ez $O(\sqrt{n}e)$.

□

BIZONYÍTÁS (4.15. TÉTEL): T most is az $\mathcal{E}$-beli hipersíkok által határolt, $\mathcal{P}$-t tartalmazó zárt cella; az origó T belsejében van.

A 4.17. Tételt szeretnénk alkalmazni. Legyen $S = \mathcal{E}$, R egy r elemű véletlen minta a hipersíkok halmazából.

Definiáljuk az $\mathcal{F}$ tartományokat. T_R legyen az R minta hipersíkjainak T politópot tartalmazó cellája. Háromszögeljük T_R-t a következőképpen: Jelöljünk ki minden 2-dimenzióss lapon egy csúcsot és minden (3-dimenziós) lapon egy csúcsot. A 2-dimenziós lapokat háromszögeljük úgy, hogy minden csúcsukat összekötjük a kijelölt csúccsal. A (3-dimenziós) lapokat pedig úgy, hogy a 2-dimenziós lapjaik minden háromszögének a konvex burkát vesszük a kijelölt csúccsal. Végül ezek a 3-dimenziós szimplexek az origóval képzett konvex burkai T háromszögelését adják.

A háromszögelés szimplexeinek száma legyen k, ezt felülről becsli T él, 2-dimenziós lap illeszkedéseinek száma. Az egy élre illeszkedő 2-lapok száma kisebb az élre illeszkedő lapok számánál; erről pedig már tudjuk, hogy az összes élre legfeljebb $O(e^2)$. A háromszögelésben tehát $O(r^2)$ szimplex van. $\mathcal{F}$ legyen ezen szimplexek uniója az összes lehetséges R mintára.

Adjuk meg a v függvényt, $v : \mathcal{F} \mapsto S^{10}$. T_R egy szimplexét R elemeivel adjuk meg. Elég a szimplex origóval szemközti lapját megadni. Ez T_R egy lapján van; $v(F)_1$ legyen a lap hipersíkja. $v(F)_2, \ldots, v(F)_4$ kimetszi a hipersíkból T_R megfelelő lapjának kijelölt ponját, l_F-et. $v(F)_5$ kimetszi $v(F)_1$-ből az l_F-fel szembeni 2-dimenziós lap 2-dimenziós affin alterét. Ebből $v(F)_6, v(F)_7$ kimetszi a megfelelő 2-lap kijelölt csúcsát. $v(F)_8, \ldots, v(F)_{10}$ pedig kimetszi a 2-lapból az ezzel szemközti él egyenesét és annak két csúcsát.

Adott R mintára az i-edik szimplex belsejében lévő pontok száma legyen n_i, a szimplex belsejét metsző hipersíkok száma e_i, ($i \in [1,k]$, $\sum_{i=1}^k n_i \leq n$). A 4.18. lemma szerint a szimplexek belsejében lévő illeszkedések száma $\sum_{i=1}^k O(e_i + n_i\sqrt{e_i})$. Alkalmazva a 4.17. tételt ennek a várható értéke $O(n\sqrt{e/r} + ke/r)$ lesz, ahol $k = O(r^2)$. Ugyanis 1 multiplicitással és $g = id$ választással

$$M\left[\sum_{i=1}^{k} O(e_i)\right] = O\left(\frac{e-r-1}{r-10} M\left[|\mathcal{F}_R^1|\right]\right) = O(kn/r).$$

$n(F) = |F \cap \mathcal{P}|$multiplicitással és $g : x \mapsto \sqrt{x}$-szel

$$M\left[\sum_{i=1}^{k} O(n_i\sqrt{e_i})\right] = O\left(\sqrt{\frac{e-r-1}{r-10}|\mathcal{F}_R^0| M\left[|\mathcal{F}_R^1|\right]}\right) = O(n\sqrt{e/r}).$$

Van tehát egy olyan R minta, melyre ez a mennyiség nem nagyobb a várható értéknél.

Ezen kívül számolnunk kell a szimplexek határán, azaz R hipersíkjain lévő illeszkedéseket. Legyen $H \in R$ és $\mathcal{P}_H = H \cap \mathcal{P}$. $\mathcal{P}_H$ konvex burka egy legfeljebb 3-dimenziós politóp; a lapjainak és éleinek száma az Euler-tétel szerint $O(|\mathcal{P}_H|)$. A 2. és 3. feltétel miatt a lapot alkotó hipersíkok $O(|\mathcal{P}_H|)$ illeszkedést adnak. A politópot csak élben vagy csúcsban metsző hipersíkok $O(e)$ illeszkedést adnak. Ezt összegezve R hipersíkjaira: $\sum_{i=1}^{r} O(O(|\mathcal{P}_H|) + n) = O(I(n,r) + er) = O(n + r\sqrt{n} + e)$ a 4.18. lemma szerint.

Eddig azt tudjuk az összes illeszkedések számáról, hogy $I = O(n\sqrt{e/r} + er + r\sqrt{n} + n)$. Most $\sqrt{e} \leq n \leq e^2$ esetén legyen $r = \lceil n^{2/3}e^{1/3}\rceil$. Ekkor $I = O(n^{2/3}e^{2/3} + n + n^{7/6}e^{1/3}) = O(n^{2/3}e^{2/3} + n)$. Ha pedig $\sqrt{e} > n$ vagy $n > e^2$, akkor a 4.18. lemmából $I = O(n + m)$.

□

A fenti tétel 1. feltétele, mely szerint minden pontnak a hipersíkok elrendezésének egy cellájában kell lennie, erősnek tűnik; mégsem ismert jó alsó becslés I-re ebben a speciális esetben. A tétellel ennek ellenére lehetett javítani $\mathbf{R}^3$-beli távolságproblémák becslésein. Egy egyszerű eljárás adja az Edelsbrunnertől és Shariról [13] származó tételt.

4.19. TÉTEL: Legyen adott $\mathbf{R}^3$-ban n diszjunkt pont és e gömb[7] és sík úgy, hogy

- minden síkra és gömbre a $\mathcal{P}$ az általa meghatározott egyik zárt féltérben van.
- nincs három sík, egyenes, amelyek metszete egy kör vagy egyenes lenne.

Ekkor a létrejövő illeszkedések száma

$$I = O(n^{2/3}e^{2/3} + n + e).$$

BIZONYÍTÁS: Használjuk az előző 4.15. tételt. A $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbf{R}^3$ pont helyett vegyük a $p' = (p_1, p_2, p_3, p_1^2 + p_2^2 + p_3) \in \mathbf{R}^4$ felemelt pontot a $g = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^4 : x_4 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\}$ paraboloidon.

[7]értsd: gömbfelszín

Egy gömb vagy sík képe a pontonkénti felemeltjükre illeszkedő hipersík $\mathbf{R}^4$-ben. Ez egyértelmű, mert minden $\mathbf{R}^3$-beli gömb vagy sík előáll g hipersíkmetszetének vetületeként.

A tételünk első feltétele a 4.15. tétel első feltételét elégíti ki, hiszen a paraboloid-felületen a gömbök és 3-dimenziós parabolák elválasztásai a megfelelő hipersíkok elválasztásait jelentik.

4.15. második feltétele abból következik, hogy a g paraboloidnak nincs három kollineáris pontja. A harmadik pedig a mostani második feltételből.

□

4.20. KÖVETKEZMÉNY: Legyenek $\mathcal{P}_a$ és $\mathcal{P}_b$ rendre n_a, n_b elemű diszjunkt ponthalmazok $\mathbf{R}^3$-ban. Ekkor a $\mathcal{P}_a$ és a $\mathcal{P}_b$ pontjai közt előforduló távolságok közűl a minimális $O(n_a^{2/3} n_b^{2/3} + n_a + n_b)$-szer lép fel.

BIZONYÍTÁS: Legyen a minimális távolság $l > 0$. Rajzoljunk $\mathcal{P}_a$ minden pontja köré l sugarú gömböt. Az n_a gömb és $\mathcal{P}_b$ rendszerére teljesülnek a fenti 4.19. tétel feltételei: $\mathcal{P}_b$ minden pontja a gömbökön kívül van; és három azonos sugarú de különböző centrumú gömb metszete nem lehet egy kör.

□

Áttekintés:

A gráfok metszési számának felhasználásával Székely László elegáns bizonyítást talált a Szemerédi-Trotter tételre; Pach János és Micha Sharir pedig nemtriviális felső korlátot adott pontok és kombinatorikus görbék illeszkedéseinek számára. Magasabb dimenzióban ez a módszer nem használható, mert a több dimenziós affin altereket reprezentálni képes (hiper-)gráfokra nem ismert még az Euler-tételnek megfelelő eredmény. A Szemerédi-Trotter tételből $\mathbf{R}^d$-ben csak pontok és egyenesek vagy pedig dualitással 1 ill. 2 kodimenziós affin alterek illeszkedéseire nyerhető éles becslés.

Véleményem szerint érvényes felső korlátot ad $\mathbf{R}^d$-ben a Pach-Sharir-tételbeli $I = O(n^{k/(2k-1)} e^{(2k-2)/(2k-1)} + n + e)$, ahol e a kombinatorikus felületek számát jelöli (l dimenziós felület az $f : \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^d$ függvény gráfja.), azzal a feltétellel, hogy k adott pontra legfeljebb s felület illeszkedhet és két felület metszetében legfeljebb s adott pont lehet. Ezt a sejtést közelíti meg a 4.13. tétel $\mathbf{R}^3$-ban síkokkal és pontokkal, és ennek a duálisának felel meg a 4.15. ill. 4.19. tétel. Ezeknek a tételeknek az ismert (ismertetett) bizonyítása nehezen általánosítható ad-hoc elemeket tartalmaz. A 4.13. tételben az U^+ határán a síkbeli Euler-tételt használjuk, a 4.15. tételben az egyszerű politópokra vonatkozó formulákat.

A $(d-1)$-nél kisebb dimenziós affin alterek kezelésekor az is nehézséget jelent, hogy ezek nem adnak elválasztást $\mathbf{R}^d$-ben.

Köszönetnyilvánítás:

Köszönettel tartozom Elekes Györgynek a problémakörben és a kapcsolódó szakirodalomban való eligazodás megkönnyítéséért és a dolgozat elkészültét kísérő segítő figyelméért, Szabó Endrének és Csikós Balázsnak hasznos megjegyzéseikért és tanácsaikért, valamint Fleiner Balázsnak az xfig program használatához nyújtott segítségéért.

Irodalom

[1] P.K. Agarwal, Pach J.:Combinatorial Geometry, 1995; 180-181. old.; John Wiley & Sons., New York

[2] M. Ajtai, V. Chvátal, M. Newborn, Szemerédi E. :Crosing-free subgraphs; 1982; Annals of Discrete Mathematics, **12.**, 9-12.

[3] Beck József: On the lattice property of the plane and some problems of Dirac, Motzkin and Erdős in combinatorial geometry; 1983; Combinatorica, **3.**, 281-297.

[4] F.R.K.Chung, Szemerédi E., W.T. Trotter: The number of differnet distances determined by a set of points in the Eucledean plane; 1992; Discrete and Computational Geometry, **7.**, 1-11.

[5] F.R.K.Chung: Point-and-Sphere incidence relation in high dimensions with applications to unit distances and furthest-neighbour pairs; 1989; Discrete and Computational Geometry, **2.**,195-222.

[6] K.L. Clarkson: New application of random sampling in computational geometry; 1987; Discrete and Computational Geometry, **2.**, 195-222.

[7] K.L. Clarkson, H. Edelsbrunner, L.J. Guibas, M. Sharir és E. Welzl: Combinatorial complexity bounds for arrangements of curves and spheres; 1990, Discrete and Computational Geometry, **5.**, 99-160.

[8] K.L. Clarkson, P.W. Shor: Applications of random sampling in computational geometry II.; 1989; Discrete and Computational Geometry, **4.**, 387-421.

[9] G.A. Dirac: Collinearity properties of sets of points; 1951; Quarterly Journal of Mathematics, **2.**, 221-227.

[10] Herbert Edelsbrunner: Algorithms in Combinatorial Geometry; 1987; Springer-Verlag, EATCS.

[11] H. Edelsbrunner, L. Guibas, M. Sharir: The complexity of many cells in arrangements of planes and related problems; 1990; Discrete and Computational Geometry, **5.**, 197-216.

[12] E. Edelsbrunner, D. Haussler: The complexity of cells in three-dimensional arrangements; 1986; Discrete Mathematics, **60.**, 139-147.

[13] H. Edelsbrunner, M. Sharir: A hyperplane incidence problem with applications to counting distances; 1991; Discrete and Computational Geometry, **4.**,253-263.

[14] Elekes György: On the number of sums and products; 1997; megjelenés alatt

[15] Elekes György, Ruzsa Imre: Convexity and sumsets; 1997; megjelenés előtt

[16] J. Ericson: New lower bounds for Hopcroft's problem; 1996; Discrete and Computational Geometry, **16.**, 389-418.

[17] Erdős P., R.K. Guy: Crossing number problems; 1973; American Mathematical Monthly, **80.**, 50-58.

[18] Erdős Pál: On sets of distances of n points; 1946; American Mathematical Monthly, **53.**, 248-250.

[19] Erdős Pál, Szemerédi Endre: On sums and products of integers; 1983; in Erdős P., Alpár L., Halász G.: Studies in pure math, To the memory of Paul Turán; Akadémiai kiadó-Birkhäuser Verlag; 213-218.

[20] Kővári T., T.Sós Vera, Turán Pál: On a problem of Zarankiewicz; 1954; Colloquium Mathematicum, **3.** , 50-57.

[21] F.T. Leighton: Complexity issues in VLSI, Foundations of computing series; 1983; MIT Press, Cambridge, Mass.

[22] T.S. Motzkin: The lines and planes connecting the points of a finite set; 1951; Transactions of American Mathematical Society, **70.**, 451-464.

[23] Pach János, Micha Sharir: Repeted angles in the plane and related problems; 1992; Journal of Combinatorial Theory, **Ser. A, 59.**, 12-22.

[24] Pach J., M. Sharir: On the number of incidences between points and curves; 1996, megjelenés alatt.

[25] George Purdy: Two results about points, lines and planes; 1986; Discrete Mathematics, **60.**, 215-218.

[26] Ruzsa Imre: Arithmetical prograssions and the number of sums; 1992; Periodica Mathematica **25.**, 105-111.

[27] F.Shahrokhi, O. Sýkora, Székely L., I. Vŕto: Crossing numbers: bounds and applications; Intuitive Geometry; Budapest, 1995; Bolyai Society Mathematical Studies **6.**

[28] J.Spencer, Szemerédi E., W.T. Trotter: Unit distances in the Euclidean plane; in Graph Theory and Combinatorics, 1984, Academic Press, London, 293-303.

[29] Szemerédi E., W.T.Trotter: Extremal problems in discrete geometry; 1983; Combinatorica, **3.**, 381-392.

[30] Szemerédi E., W.T. Trotter: A combinatorial distinction between the Euclidean and projective planes; 1983; European Journal of Combinatorics, **4.**, 385-394.

[31] Székely László: Crossing numbers and hard Erdős problems in discrete geometry; megjelenés alatt; Combinatorics, Probability and Computing.