Struktúratételek a párosításelméletben

Írta: Tóth Ádám V. matematikus
Témavezető: Dr. Szegő László tanársegéd

2003. június 17.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Dolgozatomban a párosításelmélet legfontosabb struktúratételeit veszem számba.

A második fejezetben ismertetem Gallai és Edmonds struktúratételének Lovásztól származó bizonyítását. A tétel szokásos, tanult bizonyítása Edmonds párosítási algoritmusán alapszik [8]. Itt azt fogjuk megvizsgálni, hogy mi történik, ha a Gallai–Edmonds-felbontás egyik részéből csúcsokat hagyunk el. A struktúratétel következményeképp számos, korábbról ismert párosításelméleti eredmény adódik, például Tutte tétele és a Berge–Tutte formula. Ezután ismertetem Lovász maximális párosítást keeső algoritmusát, amely a struktúratételre alapul.

A harmadik fejezetben a törtpárosításokat ismertetem. A maximális törtpárosítások nagyságának meghatározása önmagában igen egyszerű, mert a probléma visszavezethető egy páros gráfbeli maximális párosítás keresésére. Így azonban a maximális törtpárosítások szerkezetére nem derül fény. Ismertetjük Pulleyblank struktúratételét, amely az U-párosításokat (azon maximális párosításokat, amelyek törtrésze tartalmazásra nézve minimális) jellemzi. A tétel a Gallai–Edmonds-struktúratételen alapszik és számos, maximális törtpárosítokra vonatkozó eredmény következik belőle.

A negyedik fejezetben a párosítások egy általánosítását, az f-faktorokat jellemzem. Az f-faktorok létezésének problémája is visszavezethető a maximális párosítás problémájára. Tutte 1952-ből származó tétele választ ad arra, hogy mikor van a gráfban f-faktor. Ismertetjük Lovász f-faktorokról szóló struktúratételét, amelyből ez az eredmény azonnal következik.

Végezetül a maximális f-törtpárosításokat jellemzem.

Megköszönöm témavezetőmnek, Szegő Lászlónak a dolgozat írása közben nyújtott segítségét és tanácsait.

2. Maximális párosítások és a Gallai–Edmonds-féle struktúratétel

A G gráfra $M \subseteq E(G)$ párosítás, ha G minden pontját M legfeljebb egy éle fedi. Kérdés, hogy mekkora lehet a párosítás elemszáma. A G gráf maximális elemszámú párosításának méretét $\nu(G)$-vel jelöljük. Ha a gráfban van teljes, vagyis minden pontot fedő páros tás, akkor $\nu(G) = |V(G)|/2$. A gráf hiánya a fedetlen pontok minimális száma: $\mathrm{def}(G) = V(G) - 2\nu(G)$ Maximális párosítás létezésére az alábbi jól ismert tétel ad szükséges és elégséges feltételt.

2.1. tétel. *(Tutte-tétel) A G gráfban akkor és csak akkor létezik teljes páro-*

sítás, ha tetszőleges $x \subseteq V(G)$-re az X elhagyásával keletkező gráf páratlan kompnenseinek $q(X)$ számára $q(X) \leq |X|$.

A következő tétel pedig a maximális párosítás méretét adja meg.

2.2. tétel. *A G gráfban a maximális párosítás mérete*

$$\nu(G) = \max_{X \subseteq V(G)} (|V(G) - q(X) + |X|)/2$$

Ezek a tételek azonban nem szólnak arról, hogy milyen egy teljes párosítás. Az alábbiakban bebizonyítjuk Gallai és Edmonds tételét Ehhez először bevezetünk néhány definíciót

2.1. definíció. *G* faktorkritikus*, ha bármely pontját elhagyva van teljes párosítása.*

2.2. definíció. Majdnem teljes párosításnak *nevezzük G olyan párosítását, mely egy pont kivételével G összes csúcsát lefedi.*

2.1. Gallai–Edmonds-féle struktúratétel

Az alábbiakban ismertetjük Lovász bizonyítását a struktúratételre [1].

2.3. definíció. *Legyen $G = (V, E)$ gráf. Jelöljük $D(G)$-vel azon csúcsok halmazát, melyeket G legalább egy párosítása nem fed. Legyen $A(G)$ azon $V(G) - D(G)$-beli csúcsok halmaza, melyek legalább egy $D(G)$-beli csúccsal szomszédosak. Végül legyen $C(G) = V(G) - A(G) - D(G)$. A gráf ilyen módon való felosztását* Gallai–Edmonds-felbontásnak *nevezzük.*

2.3. tétel. *(Gallai–Edmonds-struktúratétel) Legyen G gráf és $D(G)$, $A(G)$, $C(G)$ a fent definiált csúcshalmazok. Ekkor a következőket állíthatjuk.*

(a) A $D(G)$ által feszített részgráf komponensei faktorkritikusak

(b) A $C(G)$ által feszített részgráfnak van teljes párosítása.

(c) Ha $C(G)$ pontjait és az $A(G)$ által feszített éleket kitöröljük, továbbá $A(G)$ komponenseit egy-egy csúccsá húzzuk, akkor az így kapott páros gráfra teljesül a szigorú Hall-feltétel (az $A(G)$ által meghatározott színosztályra nézve). ∎

(d) Legyen M a G gráf egy tetszőleges párosítása. Ekkor M a $D(G)$ rész minden komponensén majdnem teljes párosítást határoz meg, $C(G)$ minden komponensén teljes párosítást határoz meg, és $A(G)$ minden komponensét összepárosítja $D(G)$ egy-egy, egymástól diszjunkt komponensével.

(e) $\nu(G) = \frac{1}{2}(|V(G)| - c(D(G)) + |A(G)|)$, ahol $c(D(G))$ a $D(G)$ által feszített részgráf komponenseinek számát jelöli.

A tétel belátásához szükségünk van két fontos lemmára.

2.1. lemma. *(Gallai-lemma) Legyen G olyan összefüggő gráf, melynek bármely pontját elhagyva $\nu(G)$ csökken. Ekkor G faktorkritikus.*

Bizonyítás.

A második, úgynevezett stabilitási lemma arról szól, hogy hogyan változik a Gallai–Edmonds felbontás, ha az egyes csúcshalmazokból eltörlünk egy pontot. Valójában csak az (a) részt fogjuk használni, így csak azt bizonyítjuk.

2.2. lemma. *(a) Legyen $u \in A(G)$. Ekkor $A(G-u) = A(G)-u$, $C(G-u) = C(G)$ és $D(G-u) = D(G)$.*

(b) Legyen $u \in C(G)$. Ekkor $A(G-u) \supseteq A(G)$, $C(G-u) \subseteq C(G)-u$ és $D(G-u) \supseteq D(G)$.

(c) Legyen $u \in D(G)$. Ekkor $A(G-u) \subseteq A(G)$, $C(G-u) \supseteq C(G)$ és $D(G-u) \subseteq D(G)-u$

Bizonyítás. Nyilván elegendő belátni, hogy $D(G-u) = D(G)$. Legyen M a G gráf egy maximális párosítása. Ekkor M lefedi u-t, hisz $u \notin D(G)$, így $\nu(G-u) = \nu(G) - 1$. Továbbá, G bármely N maximális párosítására $N - u$ a $G - u$ gráf egy maximális párosítása.

Először belátjuk, hogy $D(G) \subseteq D(G-u)$. Ehhez válasszunk egy $v \in D(G)$ csúcsot. Legyen M_v a G gráf egy v-t elkerülő maximális párosítása. Ekkor a fenti megállapítás szerint $M_v - u$ maximális párosítása lesz $G-u$-nak. $M_v - u$ elkerüli v-t, így $v \in D(G-u)$, tehát ezt a tartalmazást beláttuk.

A másik irányú tartalmazás igazolásához vegyünk egy $v \in D(G-u)$ pontot. Ekkor van $G-u$-nak olyan M' maximális párosítása, amely elkerüli v-t. Legyen $w \in D(G)$ tetszőleges olyan pont, amely G-ben szomszédos u-val, és legyen M G-nek egy w-t elkerülő maximális párosítása. Ha M elkerüli v-t, akkor $v \in D(G)$ teljesül, tehát feltehetjük, hogy M fedi v-t. Vegyük a két párosítás unióját, $M \cup M'$-t. Mivel M' elkerüli v-t, $M \cup M'$-nek a v-t fedő komponense egy olyan P alternáló út, amely v-nél $M - M'$-beli éllel kezdődik.

Tegyük fel most, hogy a P út utolsó éle M'-beli. Ekkor véve M és $E(P)$ szimmetrikus differenciáját, egy olyan M'' párosítást kapunk, amely elkerüli v-t, ráadásul $|M''| = |M|$, tehát M'' maximális párosítás és így $v \in D(G)$.

A másik esetben a P út utolsó éle $M - M'$-beli, tegyük fel, hogy ez nem u-nál végződik. . Legyen $M_3 = M' \triangle E(P)$, ekkor erre a párosításra $|M_3| > |M'|$, így M' maximalitása miatt $M_3 \not\subseteq E(G-u)$. Tehát P az u csúcsnál végződik. Vegyük az $M \triangle E(P + uw)$ párosítást, ez G-nek egy v-t elkerülő maximális párosítása lesz, tehát $v \in D(G)$. ■

Most már bebizonyíthatjuk Gallai és Edmonds struktúratételét.

Bizonyítás. Töröljük ki egyesével a gráfból A (a továbbiakban nem írjuk ki, hogy a csúcshalmazok G-hez tartoznak) pontjait. Ekkor a stabilitási lemma (a) része miatt minden egyes kitörölt pont az A csúcshalmazhoz tartozik az aktuális gráfban és minden egyes lépésben eggyel csökken a párosítási szám, tehát

$$\nu(G - A) = \nu(G) - A \tag{1}$$

És persze

$$C(G - A) = C(G) \text{ és } D(G - A) = D(G). \tag{2}$$

Legyen M a G gráf egy tetszőleges maximális párosítása, ekkor $M \cap E(G-A)$ $G - A$-nak egy párosítása.

Jelöljük $G_1, \ldots, G_t$-vel $G - A$ D-ben fekvő komponenseit. Mivel D és C között nem mennek élek, az eredeti G gráfban a D által feszített gráfnak is ezek lesznek a komponensei. Legyen H a G gráfban a C által feszített részgráf.2 miatt $G-A$ minden maximális párosítása lefedi H-t, D-nek viszont minden pontját elkerüli maximális párosítás. Így véve $G - A$ egy maximális párosítását, ez H-n teljes párosítást határoz meg, a G_i komponenseken pedig egy-egy M_i majdnem teljes párosítást. Tehát H-nak van teljes párosítása, ezzel (b)-t beláttuk. Mivel G_i minden csúcsához van G_i-nek egy azt elkerülő maximális párosítása, így a Gallai-lemma miatt a G_i komponensek faktorkritikusak.

Most belátjuk (d)-t. Az $M \cap E(G - A)$ élhalmaz $G - A$ maximális párosítását adja, ezért $M \cap E(H)$ teljes párosítású H-n, $M \cap (G_i)$ pedig G_i-n majdnem teljes párosítás. 2-ból azonnal következik, hogy $|M \cap E(G - A)| = |M| - |A|$, és így M nem tartalmaz A által feszített élet. Mivel az M párosítás A minden pontját lefedi, így A összes pontját összeköti valamely $G - A$-beli ponttal. De A egyetlen pontját sem kötheti össze $C(G)$-beli ponttal, és A semelyik két pontját nem kötheti össze ugyanazzal a G_i komponenssel. Ezzel (d)-t beláttuk.

A (c) állítás megmutatásához be kell látnunk, hogy tetszőleges $X \subseteq A$ részhalmaz legalább $|X| + 1$ darab G_i komponenssel szomszédos???. Mivel $X \subseteq A$, ezért legalább egy G_i-vel szomszédos, jelöljük az egyiket G_h-val. Vegyük ennek egy csúcsát, u-t, és vegyük G-nek egy ezt elkerülő M_1 maximális párosítását. A tétel imént bizonyított (d) részéből következik, hogy az M_1 párosítás X minden csúcsát különböző G_i komponenssel köti össze. Mivel M_1 elkerüli $u \in V(G_h)$-t és $M \cap E(G_h)$ a G_h gráf majdnem teljes párosítását adja, így az említett $|X|$ számú G_i komponens egyike sem G_h, tehát X legalább $|X| + 1$ darab G_i komponenssel szomszédos, vagyis (c)-t beláttuk.

Végezetül (e) belátásához felhasználjuk a 1 egyenlőséget és az (a) és (b) állításokat:

$$\begin{aligned}\nu(G) = \nu(G-A) + |A| &= \sum_{i=1}^{t} \frac{|V(G_i)|-1}{2} + \frac{|C|}{2} + |A| \\ &= \frac{1}{2}\left(|V(G)| - c(D) + |A|\right). \blacksquare\end{aligned}$$

2.2. A Gallai–Edmonds-struktúratétel következményei

A tételből számos következmény azonnal adódik. Ezeket a szokásos felépítésben a struktúratétel bizonyítása előtt látjuk be, itt azonban nem használjuk őket, így következményként szerepelhetnek.

Az (e) állításból azonnal következik, hogy G hiányára teljesül $\mathrm{def}(G) = c\left(D(G)\right) - |A(G)|$, vagyis a hiány pont $D(G)$ azon a komponenseinek a számával egyezik meg, amelyeket G egy tetszőleges maximális párosítása nem párosít össze $A(G)$-vel.

Tutte tételének nehéz iránya is azonnal következik a tételből. Tegyük fel ugyanis, hogy minden $X \subseteq V(G)$-re teljesül $c_0\left(D(G)\right) \leq |X|$, ekkor $A(G)$-re is áll, hogy $c_0\left(G - A(G)\right) \leq |A(G)|$. Ekkor ezt behelyettesítve az (e) egyenlőtlenségbe, azt kapjuk, hogy

$$\nu(G) = \frac{1}{2}\left(|V(G)| - c\left(D(G)\right) + |A(G)|\right) \geq \frac{1}{2}|V(G)|,$$

tehát G-nek van teljes párosítása. Hasonlóan kaphatjuk meg a Tutte–Berge-formula nemtriviális irányát is.

Ha G-nek nincs teljes párosítása, akkor minden, $D(G)$ valamely pontjára illeszkedő él benne van maximális párosításban. Ez $D(G)$ definíciójából következik. Legyen ugyanis uv egy ilyen él ($u \in D(G)$). Definíció szerint létezik olyan M maximális párosítás, amely elkerüli u-t. M maximalitása folytán van M-ben egy v-t fedő vw él. De ekkor $M - vw + uv$ éppen megfelelő párosítás.

Másrészt az tétel (d) részéből az is következik, hogy semelyik $A(G)$ által feszített vagy $A(G)$ és $C(G)$ között menő él nincs benne maximális párosításban.

Ha G faktorkritikus, akkor a Gallai–Edmonds-felbontás egy elfajult esetével állunk szemben: $D(G) = V(G)$ és $A(G) = C(G) = \emptyset$.

Ha G-nek van teljes párosítása, akkor egy másik elfajult eset áll fenn: $D(G) = \emptyset$, így $A(G) = \emptyset$, és ekkor $C(G) = V(G)$.

Ha $G = (A, B)$ páros gráf, és az A színosztály teljesíti a szigorú Hall-feltételt, akkor $A(G) = A$ és $D(G) = B$. Ugyanis nyilvánvalóan $\nu(G) = |A|$, és a Hall-tétel miatt minden $v \in B$-re $G - v$-nek van egy A-t fedő maximális párosítása, ami így az eredeti G-ben is maximális párosítás, tehát $D(G) = B$, és így $A = A(G)$.

Tehát a Gallai–Edmonds-felbontás faktorkritikus és teljes párosítást tartalmazó gráfokra, tovább a Hall-feltételt szigorúan teljesítő gráfokra triviális. Másrészről az alábbiakban megmutatjuk, hogy tetszőleges gráf felépíthető ebből a három fajta gráfból.

Legyen $G_0 = (U, W)$ páros gráf és az U színosztályra teljesüljön a szigorú Hall-feltétel. Minden $w \in W$-re legyen G_w faktorkritikus gráf. Legyen H egy olyan gráf, amelynek létezik teljes párosítása. ?factorizable?? Az alábbiakban definiálunk egy G gráfot a $V(G) = U \cup V(H) \cup \bigcup_{w \in W} V(G_w)$ csúcshalmazon. Tartsuk meg a H és a G_w gráfok éleit. G_0 minden uw élére ($u \in U$, $w \in W$), vegyünk a gráfunkba egy u-ból G_w egy tetszőleges csúcsába menő élet. Vegyünk fel továbbá tetszőleges U-ból $V(H)$-ba menő, illetve U-n belüli éleket.

2.4. tétel. *A fent megkonstruált gráf Gallai–Edmonds-felbontása: $A(G) = U$, $C(G) = V(H)$, $D(G) = \bigcup_{w \in W} V(G_w)$. Minden gráf egyértelműen előáll ezen a módon.*

Bizonyítás. Nyilván $\text{def}(G) \geq c_0(G_U) - |U| = |W| - |U|$. Másrészt legyen M_0 a G_0 egy U-t fedő párosítása és legyen az ennek megfelelő élhalmaz G-ben M_0'. Minden $w \in W$-re legyen $x_w \in V(G_w)$ a következőképpen definiálva: ha M_0' lefedi G_w egy pontját, akkor legyen ez a pont, különben G_w egy tetszőleges pontja. Minden $w \in W$-re legyen M_w a $G_w - x_w$ gráf egy majdnem teljes párosítása. Legyen M'' H egy teljes párosítása. Ekkor $M = M_0' \cup M'' \cup \bigcup_{w \in W} G$ egy olyan párosítása, melynek hiánya $|W| - |U|$, tehát $\text{def}(G) = |W| - |U|$ és M maximális párosítás. Így könnyen látható (ez eleg???), hogy tetszőleges $u \in v(G)$ csúcsot pontosan akkor kerül el valamilyen maximális párosítás, ha $u \in \bigcup_{w \in W} V(G_w)$, tehát $D(G) = \bigcup_{w \in W} V(G_w)$, és mivel U minden pontja össze van kötve valamely $\bigcup_{w \in W} V(G_w)$-beli ponttal, viszont H egyetlen pontja sincs összekötve ezen pontok egyikével sem, így a tétel első állítását beláttuk.

A második állítás a Gallai–Edmonds struktúratétel közvetlen következménye. $\blacksquare$

3. Lovász párosítási algoritmusa

A Gallai-Edmonds-struktúratételt általában Edmonds párosítási algoritmusának segítségével bizonyítjuk. Most azonban a tételt nem algoritmikusan bizonyítottuk, ismertetjük viszont Lovász maximális párosítási algorítmusát, mely a Gallai–Edmonds-struktúratételt használja [1].

Tegyük fel, hogy már találtunk néhány k méretű párosítást. Találni szeretnénk egy nagyobbat vagy meg szeretnénk mutatni, hogy k-nál nagyobb maximális párosítás nem létezik. Jelöljük az eddig megtalált k méretű párosításokat $\mathcal{L} = (M_1, \dots, M_t)$-vel. Definiáljuk továbbá a gráf ponthalmazának alábbi felosztását:

$$D(\mathcal{L}) = \{x \in V(G) | x \notin V(M_i) \text{ valamely } i = 1, \dots, t\text{-re}\}$$
$$A(\mathcal{L}) = \{x \in v(G) - D(\mathcal{L}) | x \text{ szomszédos } D(\mathcal{L}) \text{ valamely csúcsával}\}$$
$$C(\mathcal{L}) = V(G) - D(\mathcal{L}) - A(\mathcal{L})$$

Vegyük észre, hogy abban az esetben, ha $k = \nu(G)$ és $\mathcal{L}$ tartalmazza G összes párosítását, akkor ez a Gallai–Edmonds-felbontással egyezik meg: $D(\mathcal{L}) = D(G)$, $A(\mathcal{L}) = A(G)$, $C(\mathcal{L}) = C(G)$.

3.1. lemma. *Legyen $\mathcal{L}$ a G gráf k elemű párosításainak egy részhalmaza???, és legyen $M \in \mathcal{L}$. Tegyük fel, hogy M-ben nincs $A(\mathcal{L})$-ből $A(\mathcal{L}) \cup c(\mathcal{L})$-be menő él és M a $D(\mathcal{L})$ által meghatározott gráf komponensein majdnem teljes párosítás. Ekkor M maximális párosítás.*

Bizonyítás. A feltételből következően egyrészt $D(\mathcal{L})$ minden komponense páratlan elemszámú, másrészt minden ilyen komponensben pontosan egy olyan pont van, amely nincs lefedve M-beli éllel vagy M olyan éle fedi le, amelynek másik pontja $A(\mathcal{L})$-beli. ????Ez igy ertheto? Az Is következik, hogy az M párosítás $A(\mathcal{L})$ és $D(\mathcal{L})$ között menő élei lefedik $A(\mathcal{L})$-t. Így $D(\mathcal{L})$-nek pontosan $A(\mathcal{L})| + |V(G) - V(M)|$ számú komponense van, és ebből következően:

$$\operatorname{def}(G) \geq c_)(G - A(\mathcal{L}))||A(\mathcal{L})| = |V(G) - V(M)|,$$

tehát M maximális párosítás. ■

Most már ismertethetjük az algoritmust. Kezdetben legyen $k = 0$ és $\mathcal{L} = \emptyset$. Az általános lépésben válasszuk ki $\mathcal{L}$ egyik elemét, M_1-et, ha ez teljesítia 3.1. lemma feltételeit, akkor megállunk. Ebben az esetben M_1 maximális párosítás.

Tegyük fel, hogy az M_1 párosítás nem teljesíti a 3.1. lemma egyik feltételét. A célunk az, hogy olyan párosítást találjunk, amelynek mérete k-nál nagyobb vagy olyat, amely nem fedi $(A(\mathcal{L}))$ vagy $C(\mathcal{L})$ egy pontját. Két eset lehetséges annak megfelelően, hogy M_1 a lemma melyik feltételét nem teljesíti.

1. eset. Tegyük fel, hogy M_1 egyik xy élére $x \in A(\mathcal{L})$ és $y \in A(\mathcal{L}) \cup C(\mathcal{L})$. $A(\mathcal{L})$ definíciója szerint az x csúcs szomszédos valamely $z \in D(\mathcal{L})$ csúccsal. $D(\mathcal{L})$ definíciója szerinte van olyan $M_2 \in \mathcal{L}$ párosítás, amely elkerüli z-t. Ha M_1 is elkerüli z-t, akkor $M_1 - xy \cup xz$ olyan k méretű párosítás, amely elkerüli y-t. Ha tehát ezt a párosítást hozzávesszük $\mathcal{L}$-hez, akkor $D(\mathcal{L})$ mérete megnő. Ha M_1 nem kerüli el z-t, akkor tekintsük egy olyan P (M_1, M_2)-alternáló utat, mely z-nél kezdődik. Ha a P út M_1-beli éllel kezdődik, akkor véve $M_2 \triangle P$-t, $k+1$ méretű párosítást kapunk. Ha M_2-beli éllel kezdődik, és nincs rajta az xy él, akkor $P_1 = P + zx + xy$-ra $M_1 \triangle P_1$ olyan k méretű párosítás, amely elkerüli y-t, tehát $D(\mathcal{L})$ ismét növelhető. Végül ha $xy \in P$, akkor van olyan $P_2 \subseteq P$, melyre $M_1' = M_1 \triangle P_1$ olyan k mlretű párosítás, amely elkerüli x-et vagy y-t. M_1'-t hozzávéve $\mathcal{L}$-hez $D(\mathcal{L})$ nő.

2. eset Tegyük fel, hogy $G[d(\mathcal{L})]$-nek van olyan T komponense, amelyre $M_1 \cap e(T)$ nem majdnem teljes párosítása T-nek.

2/a eset Tegyük fel, hogy $M_1 \cap E(T)$ elkerüli T legalább két pontját, mondjuk xy pontokat ($x \neq y$), és M_1 is elkerüli az egyiket, mondjuk x-et. Ha x és y szomszédosak, akkor vegyük M-hez az xy élt, és ha y-t fedi M_1 valamelyik éle, akkor töröljük azt el. Így vagy egy $k+1$ elemű párosítást kaptunk, vagy egy olyan k eleműt, amely elkerül egy $A(\mathcal{L})$-beli pontot. Mind a két esetben készen vagyunk.

Tegyük fel tehát, hogy x és y nem szomszédosak, legyen T az őket összekötő legrövidebb utak egyike. Legyen ezen az úton az x után következő pont z. $D(\mathcal{L})$ definíciójából következően van olyan $M_i \in \mathcal{L}$ párosítás, amely elkerüli z-t. Jelöljük Q-val a z-nél kezdődő (M_1, M_2)-alternáló utat. Ha Q nem x-szel végződik, akkor Q paritásától függően Q vagy $Q + xz$ növelő út M_1-re illetve M_i-re nézve. Ha a Q alternáló út x-nél végződik és keresztülmegy y-n, akkor tartalmaz legalább egy $A(\mathcal{L})$-beli pontot. De ekkor M_1-ben kicseréljük $Q + xy$ élét???? úgy, hogy a kapott párosítás kihagyja ezt az $A(\mathcal{L})$-beli pontot, akkor, ezt a párosítást hozzáadva $\mathcal{L}$-hez, $D(\mathcal{L})$ mérete megnő.

Végezetül ha a Q alternáló út x-ben végződik, de nem halad keresztül y-n, akkor az $M_1' = M_1 \triangle Q$ olyan párosítás, amely elkerüli z-t, továbbá $M_1' \cap E(T)$ elkerüli y-t. Mivel T-ben z és y távolsága kisebb mint x és y távolsága, ezért ezt az eljárást ismételve a fenti esetek egyikéhez jutunk.

2/b eset Tegyük fel, hogy $M_1 \cap E(T)$ T legalább két pontját, x-et és y-t elkerüli, de M_1 nem kerüli el T egy pontját sem. Ebben az esetben x és y össze van párosítva két $A(\mathcal{L})$-beli ponttal u-val és v-vel. Legyen $M_i \in \mathcal{L}$ egy x-et elkerülő párosítás és jelöljön Q egy x-nél kezdődő (M_1, M_i)-alternáló utat. Ha Q utolsó éle M_1-beli, akkor $M_1 \triangle Q$ $k+1$ méretű párosítás, tegyük fel tehát, hogy Q utolsó éle M_i-beli. Ha Q nem halad át az y ponton, akkor $M_1' = M_1 \triangle Q$ olyan k méretű párosítás, amely elkerüli x-et, és amelyre $M_1' \cup E(T)$ elkerüli y-t. Tehát ekkor ismét az (a) esettel állunk szemben. Ha

Q keresztülhalad y-n, és y páros távolságra van Q végpontjaitól, akkor Q megfelelő részének és M_1-nek a szimmetrikus differenciája olyan k méretű M_1' párosítás, amely elkerüli y-t és $M_1' \cap E(T)$ elkerüli x-t. Ez tehát megint a 2/a eset.

Végül, ha y páratlan távolságra van Q végpontjaitól, akkor Q megfelelő részének és M_1-nek a szimmetrikus differenciája olyan k méretű M_1' párosítás, amely valamely $v \in A(\mathcal{L})$ pontot elkerül. Az M_1' párosítást hozzáadva $\mathcal{L}$-hez, $D(\mathcal{L})$ mérete megnő.

2/c eset. Tegyük fel, hogy $M_1 \cap E(T)$ a T komponens teljes párosítását adja. Ekkor $|T|$ páros. Tegyük fel, hogy $M_i \in \mathcal{L}$ elker-li T egy pontját. Mivel $|T|$ páros, $M_i \cap E(T)$ a T komponens egy másik pontját is elkerüli, ez tehát megint a 2/a eset.

4. Törtpárosítások és 2-párosítások

4.1. definíció. *Adott G gráfra egy $x \in \mathbb{R}^E(G)$ vektort törtpárosításnak nevezünk, ha teljesíti a következő feltételeket:*

$$x(\delta(v)) \leq 1 \text{ minden } v \in V\text{-re} \tag{3}$$

$$x \geq 0 \text{ minden } e \in E\text{-re} \tag{4}$$

Ezek a feltételek meghatároznak egy poliédert, a törtpárosítási poliédert.

Abban a speciális esetben, ha x egészértékű, a G gráf egy párosítását kapjuk.

4.1. tétel. *A törtpárosítások P poliéderének minden csúcsa félegész (vagyis olyan vektor, melynek elemeit kettővel szorozva egész számokat kapunk).*

Bizonyítás. Legyen x a P törtpárosítási poliéder egy csúcsa. Ha a gráf valamely e élére $x_e = 0$, akkor $G - e$-re indukciót alkalmazhatunk, így feltehetjük, hogy $x_e > 0$ minden e élre. Ebből következően $x_e < 1$ is teljesül minden e élre, és a gráf minden csúcsának legalább kettő a foka.

Mivel x a poliédernek csúcsa, ezért a (4) feltételek közül $|E(G)|$ darab egyenlőséggel teljesül, tehát $|E(G)| \leq |V(G)|$, így G 2-reguláris. A (4) feltételeket az $x_e = \frac{1}{2}$ vektor kielégíti, és a megoldás egyértelmű (hisz x csúcs), így a tétel állítását kapjuk. ■

Vegyük észre, hogy a poliéder csúcsai olyan x törtpárosítások, melyek előállnak a következő alakban: egy M párosítás és tőle és egymástól diszjunkt $C_1, C_2, \ldots, C_n$ körök uniója. $e \in M$-re $x_e = 1$, a körök élein $\frac{1}{2}$. Nevezzük ezeket a *törtpárosításhoz tartozó párosításnak*, illetve *törtköröknek*.

Mivel $\max_{x\in P} x\mathbf{1}x$, a maximális törtpárosítás értéke a P poliéder csúcsán is felvétetik, ezek után elég csak ilyen alakú törtpárosításokkal foglalkozni, ezeket elemi törtpárosításnak vagy egyszerűen törtpárosításnak nevezzük a továbbiakban. Az x törtpárosítás tartója E azon éleiből áll, amelyeken x értéke $\frac{1}{2}$ vagy 1, ezt $S(x)$-szel jelöljük. Telített, nem telített csúcs. Az x-hez tartozó törtrészgráf azon élekből áll, amelyeken a x értéke $\frac{1}{2}$. Ha a $v \in V(G)$ csúcsra $x(\delta(v)) = 1$, akkor azt mondjuk, hogy csúcs telítve van, különben nincs telítve. A törtpárosítást teljesnek nevezzük, ha minden csúcsot telít; ha egy kivételével minden csúcsot telít, akkor majdnem teljesnek nevezzük. Legyen x maximális törtpárosítás a G gráfban Ekkor G törtpárosítási száma, $\nu_f(G)$, a telített csúcsok számának fele (vagyis $\mathbf{1}x$), G törtpárosítási hiánya $\mathrm{def}_f(G)$ pedig a telítetlen csúcsok száma.

4.1. A maximális törtpárosítás keresésének visszavezetése a maximális párosítás problémájára

Tetszőleges G gráfra a G-ben levő izolált pontok számát jelöljük $i(G)$-vel.

4.2. tétel. *Legyen G gráf. Ekkor*

$$\mathrm{def}_f(G) = \max_{S\subseteq V(G)} i(G-S) - |S|.$$

Bizonyítás. A $\geq$ irány triviális. A másik irány igazolásához definiáljuk az alábbi $G' = (A, B)$ páros gráfot: feleltessünk meg minden $u \in V$ pontnak két pontot: u'-t és u''-t. és minden uv élnek két élet az új gráfban: $u'v''$-t és $u''v'$-t. Vegyünk ezen egy maximális párosítást, legyen ez M, az ennek megfelelő vektor x' ($x'_e = 0$, ha $e \notin M$, $x'_e = 1$, ha $e \in M$. Legyen ezek után

$$x_{uv} = (x'_{u'v''} + x'_{u''v'})/2.$$

Ez nyilván törtpárosítás az eredeti gráfban, így $\mathrm{def}_f(G) \leq V(G) - |M|$. A Kőnig-tétel szerint G'-ben van $|M|$ méretű lefogó ponthalmaz, ennek egyik színosztálybeli része legyen T, és legyen S az eredeti gráf T-nek megfelelő ponthalmaza. Ekkor az eredeti gráfból elhagyva S-et, az izolált pontok számára $i(G-S) \geq |V(G)| - |M| + |S|$. Ezzel állításunkat beláttuk.

Mivel páros gráfokra jóval egyszerűbb a maximális párosítási probléma, mint nem páros gráfokra, ezért azt mondhatjuk, hogy a törtpárosítási probléma bizonyos értelemben jóval egyszerűbb, mint a párosítási probléma. A fenti visszavezetés azonban nem ad választ (vagy csak nem túl jól használható választ ad) arra a kérdésre, hogy milyenek a maximális törtpárosítások. Ennek megválaszolásához az eredeti gráfot kell megvizsgálnunk.

4.2. Az U-párosítások. Pulleyblank struktúratétele

Először belátunk két lemmát a faktorkritikus gráfokról.

4.1. lemma. *Legyen G legalább három pontú faktorkritikus gráf. Ekkor van benne olyan páratlan hosszú kör, melyet ha összehúzunk, a kapott gráf szintén faktorkritikus lesz.*

Bizonyítás. Legyen uv a gráf egy éle. Mivel G faktorkritikus, ezért $G-u$-nak és $G-v$-nek is van teljes párosítása, jelöljük ezeket M_1-gyel illetve M_2-vel. Ekkor van olyan P (M_1, M_2)-alternáló út, amely összeköti u-t és v-t. Nyilván P páros és $M_1 - E(P)$ a $G - V(P)$ gráf teljes párosítását adja. Így $P + uv$ megfelelő kör lesz.

4.2. lemma. *Legyen G faktorkritikus. Ekkor G-nek van olyan teljes törtpárosítása, amelyre $F(x)$ egyetlen körből áll*

Bizonyítás. Mivel G faktorkritikus, ezért az előző lemma szerint van benne egy C páratlan kör, melynek összehúzásával a kapott $G \times C$ gráf is faktorkritikus lesz. Jelöljük a C összehúzásából keletkező csúcsot $\tilde{C}$-vel. $G \times C$ faktorkritikus, így van olyan majdnem teljes párosítása, mely $\tilde{C}$-t hagyja ki. $G - C$-n ezt a párosítást, C élein $\frac{1}{2}$-et véve a tétel állításának megfelelő teljes törtpárosítást kapunk. ∎

4.2. definíció. *U-párosítás (Uhry francia matematikusról) Olyan maximális törtpárosítás, melyre $F(x)$ tartalmazásra nézve minimális.*

Vegyünk egy x törtpárosítást és legyenek a hozzá tartozó $F(x)$-ben a diszjunkt páratlan körök $C_1, C_2, \ldots C_n$. Ebből a törtpárosításból az alábbi, *újrapárosítás*nak nevezett eljárással könnyedén kaphatunk egy párosítást. Vegyünk egy kört C_i-k közül és vegyük egy tetszőleges csúcsát, v_j-t, majd innen indulva menjünk végig a kör élein és felváltva növeljük meg illetve csökkentsük $1/2$-del x értékét. Végezzük ezt el minden körre. Így egy olyan párosítást kapunk, amely a kiindulási pontok kivételével minden pontot telít. Be fogjuk látni, hogy U-párosítás esetén ezzel az eljárással maximális párosítást kapunk. Ehhez először belátunk egy lemmát.

4.3. lemma. *Tetszőleges x maximális törtpárosításhoz létezik olyan M maximális párosítás, amely elkerül minden telítetlen csúcsot.*

Bizonyítás. Legyen x maximális törtpárosítás G-ben és M pedig olyan maximális párosítás, amelyre a lehető legkevesebb telítetlen csúcs illeszkedik. Tegyük fel, hogy van legalább egy ilyen csúcs, jelöljük ezt u-val.

Legyen N azon élek halmaza, ahol $x = 1$, ezek G egy párosítását alkotják. Jelöljük P-vel $N \cup N$-nek azt a komponensét, amely tartalmazza u-t. P tehát egy olyan út, melynek egyik végpontja u, jelöljük a másik végpontot w-vel.

Ha P páros hosszú, akkor $M \triangle P$ olyan maximális párosítás, amely kevesebb telítetlen csúcsot tartalmaz, mint M, így ellentmondáshoz jutunk. Tehát P páratlan hosszú, és mivel x maximális törtpárosítás, w rajta van valamelyik C_j törtkörön. Ekkor azonban x megnövelhető az alábbi módon: C_j-t párosítsuk újra w-ből kiindulva, továbbá legyen $x_e := 0$, ha $e \in P \cap N$, $x_e := 1$, ha $e \in P \cap M$. ■

4.3. tétel. *Legyen x U-párosítás. Ekkor x tartója, $S(x)$ tartalmaz maximális párosítást.*

Bizonyítás. Az lemma alapján feltehetjük, hogy minden csúcs telített, hiszen a telítetlen csúcsok elhagyása nem csökkenti a maximális párosítás méretét.

Legyen N az x U-párosításhoz tartozó párosítás, M pedig egy olyan párosítás, amely a lehető legkevesebb $x_e = 0$ élet tartalmazza. Vegyük $M \cup N$ egy P komponensét, ekkor P nem lehet kör vagy vagy legalább 2 hosszú páros út, mert ebben az esetben $M \triangle P$ olyan maximális párosítás lenne, amely kevesebb olyan élet tartalmazna, amelyre $x_e = 0$, és ez ellentmond M választásának.

Ha tehát P nem egy pontból áll, akkor páratlan hosszú út, legyenek a végpontjai u és w. Mivel P nem M-növelő út, így u és w is valamely törtkörön van rajta, jelöljük ezeket C_u-val illetve C_w-vel. Ha $C_u \neq C_w$, akkor az egyik újrapárosításával olyan törtpárosítást kapunk, melynek törthalmaza kisebb szigorúan tartalmazza az eredetiét, tehát x nem volt U-párosítás. Tehát $C_u = C_w$.

Ebből következően x minden C_j törtkörön azoknak a csúcsoknak a száma, amelyeket fed M, páros, az M által fedetlen csúcsok száma pedig páratlan. Így felírhatjuk az alábbi egyenlőtlenséget (n-nel jelöljük a törtkörök számát):

$$2|M| \leq |V| - n = 2|N| + \sum_{j=1}^{n}(|C_j| - 1)$$

Így ha minden törtkört újrapárosítunk, akkor kapunk egy olyan M' párosítást, mely benne van x tartójában, és $|M'| \geq |M|$.■

4.1 következmény. *Legyen x U-párosítás. Ekkor minden törtkörét újrapárosítva maximális párosítást kapunk.*

Ezek után már kimondhatjuk Pulleyblank U-párosításokra vonatkozó struktúratételét [5], mely a Gallai–Edmonds-féle felbontáson alapszik.

4.4. tétel. *Az U-párosítások struktúratétele. Legyen a $G = (V, E)$ gráf Gallai–Edmonds-felbontása (D, A, C) és legyen x elemi törtpárosítás. Ekkor x pontosan akkor U-párosítás, ha az alábbiak teljesülnek. (a) $F(x) \subseteq \gamma(O)$*

(b) x C-n teljes párosítás

(c) Minden $v \in A$-ra létezik egy $w \in D$, hogy $x_{(v,w)} = 1$

(d) Legyen $K(V_K, E_K)$ D egy tetszőleges komponense. K $F(x)$-nek legfeljebb egy körét tartalmazza, ha egy körét tartalmazza, akkor x teljes törtpárosítás K-n; ha egyet sem, akkor x majdnem teljes párosítás K-n, és ha a K komponens nem triviális (több mint egy pontja van), akkor van olyan u pontja, melyre létezik $v \in I$, hogy $x_{(u.v)}$ teljesül.

(e) D triviális (egypontú) komponenseit O^1-gyel, ennek szomszédait $N(O^1)$-gyel jelölve x maximális párosítás $G[O^1 \cup N(O^1)]$-en.

Bizonyítás. Legyen x olyan törtpárosítás, amely teljesíti a fenti (a)–(e) tulajdonságokat teljesíti. Először belátjuk, hogy x maximális törtpárosítás.

A (d) és (e) állítások alapján G x által nem telített pontjainak $\tilde{O}$ halmaza O^1-ben van. (e)-ből a Kőnig tétel miatt az következik, hogy van olyan $S \subseteq N(O^1)$ ponthalmaz, hogy ezt kitörölve $G[O^1 \cup N(O^1)]$-ben $|S| + |\tilde{O}|$ darab telítetlen csúcs keletkezik. De ekkor S-et elhagyva G-ből úgyszintén $|S| + |\tilde{O}|$ darab telítetlen csúcs lesz. Így 4.2. tételünk alapján x maximális törtpárosítás.

Most belátjuk, hogy $F(x)$ tartalmazásra nézve minimális, tehát azt, hogy x U-párosítás. Legyen $\bar{x}$ az x törtpárosítás újrapárosításával kapott párosítás. ??? tételünket használjuk, ?? (b)-ből, (a)-ből és (d)-ből illetve (c)-ból következik, tehát $\bar{x}$ maximális párosítás. Tegyük fel, hogy $F(x)$ nem minimális, ekkor létezik egy olyan x' maximális törtpárosítás, melyre $F(x') \subseteq F(x)$. Párosítsuk újra x'-t, ekkor egy olyan $\bar{x}'$ (egész) párosítást kapunk, mely ellentmond $\bar{x}$ maximalitásának.

Megfordítva, most tegyük fel, hogy x U-párosítás. Belátjuk, hogy ekkor a fenti (a)–(e) tulajdonságok teljesülnek rá.

Minden olyan v csúcsra, mely $F(x)$ egyik páratlan körén van, létezik x-nek egy olyan $\bar{x}$ újrapárosítása, mely nem telíti v-t. Uhry tétele (4.3.) alapján $\bar{x}$ maximális párosítás, tehát $v \in O$, így $F(x) \subseteq \gamma(O)$; ezzel beláttuk (a)-et. Az $\bar{x}$ párosításra alkalmazva a refged tételt (b) és (c) állítások közvetlenül következnek refgeda és refgedc-ből. Legyen K D egy komponense. A refged tétel alapján $\bar{x}$ K-nak legfeljebb egy pontját nem telíti. Így $F(x)$-nek legfeljebb egy köre tartozik K-hoz. Ha van egy ilyen kör, akkor (d) azonnal következik. Ha nincs, és K nem triviális komponens, akkor x a K komponens minden csúcsát telíti. Ugyanis tegyük fel, hogy nem így van, ekkor a 4.2. tételt alkalmazva kaphatnánk egy olyan párosítást, amely ellentmondana x maximalitásának. Tehát (d) ebben az esetben is teljesül.

Már csak az utolsó (e) tulajdonságot kell belátnunk. Az eddig elmondottakból következik, hogy minden olyan csúcs, amit nem telít x, O^1-ben van. Konstruálni fogunk egy olyan $\hat{x}$ törtpárosítást, mely csak O^1-beli csúcsokat telít, és fennáll rá (e). Ekkor, mivel x maximális, ezért legalább annyi pontot telít, mint $\hat{x}$, ezért rá is teljesül (e). Vegyünk $G[O^1 \cup N(O^1)]$ egy tetszőleges maximális párosítását, legyen ez $\tilde{x}$. Edmonds és Fulkerson egy tétele szerint $\mathbf{F} = \{S \subseteq V : G$e valamely párosítása telíti S minden csúcsát$\}$ definícióval (V, F) matroidot alkot. Ebből következik, hogy van G-nek egy olyan x' párosítása, mely $G[O^1 \cup N(O^1)]$ minden $\tilde{x}$. Vegyük észre, hogy ha O^1 egy csúcsa telítve van, akkor $G[O^1 \cup N(O^1)]$ egy éle telíti. Legyen $K = (V_K, E_K)$ egy komponense. Ha $|V(K)| > 1$ és K-nak van egy olyan csúcsa, amelyet nem telít x', akkor 4.2. szerint K-nak van egy teljes törtpárosítása, K élein definiáljuk eszerint $\hat{x}$-ot. Minden más j élre legyen $\hat{x}_j = x'_j$. Az így definiált $\hat{x}$ megfelel a kívánalmainknak és ezzel a tétel állítását beláttuk.■

4.3. A struktúratétel következményei. A törtpárosításokra vonatkozó minimax tételek

Vizsgáljuk ismét a G gráf Gallai–Edmonds-féle felbontását, Vegyük $D(G)$ egy komponensét, G_i-t, és egy tetszőleges M maximális párosítást. Azt mondjuk, hogy G_i M-teli, ha G_i valamely pontját összeköti M egy éle $A(G)$ egy pontjával, különben G_i majdnem M-teli.refged szerint M lefedi az M-teli komponensek minden csúcsát, és minden majdnem M-teli komponens csúcsai közül egy-egy kivételével az összeset. Tehát $D(G)$-nek $def(G)$ darab majdnem M-teli komponense van. Jelöljük $nc(M)$-mel $D(G)$ nemtriviális majdnem M-teli komponenseinek számát, nc-vel pedig ezek maximumát minden maximális párosításra.

Pulleyblank struktúratételéből azonnal következik Yan Liu és Guizhen Liu eredménye [6].

4.5. tétel. $\nu_f(G) = \nu(G) + \frac{nc}{2}$

Bizonyítás. Vegyünk egy olyan maximális törtpárosítást, amelynek törthalmaza tartalmazásra nézve minimális, tehát egy U-párosítást. Ennek értéke megegyezik a maximális párosítás értékének és a törtkörök száma felének összegével, vagyis

$$\sum_{e \in E} x_e = \nu + \frac{n}{2}$$

(a) szerint a törtkörök $D(G)$-ben vannak, (d) szerint pedig egy komponensben csak egy kör lehet. Legyen M az x újrapárosításával keletkező párosítás. Ekkor (d) szerint $n = nc(M)$, ezzel megkaptuk, hogy $\sum_{e \in E} x_e \leq \nu(G) + \frac{nc}{2}$.■

Ez alapján választ kaphatunk, az alábbi, természetesen felvetődő kérdésekre is. Mikor teljesül $\nu_f = \nu$ (vagyis mikor nem nagyobb a maximális törtpárosítási értéke, mint a maximális törtpárosításé)? Mikor lesz $\nu_f = |V|/2$ (vagyis mikor van teljes törtpárosítás)?

4.6. tétel. *Egy G gráfra $\nu_f(G) = \nu(G)$ pontosan akkor teljesül, ha $D(G)$ stabil??? halmaz.*

Bizonyítás. Ha $D(g)$ stabil, akkor $nc = 0$ nyilvánvalóan. Ha nem stabil, akkor mivel van egy olyan M párosítás, hogy $D(G)$ minden komponense majdnem M-teli ?????■

4.2 következmény. *Páros gráfokra a maximális törtpárosítás értéke megegyezik a maximális párosítás értékével.*

4.7. tétel. *$G = (V, E)$-nek pontosan akkor van teljes törtpárosítása, ha van olyan maximális párosítása, mely lefedi $D(G)$ minden triviális komponensét.*

Bizonyítás. 4.5. alapján elég azt belátni, hogy $nc = \mathrm{def}(G)$ pontosan akkor teljesül, ha G-nek van $D(G)$ minden triviális komponensét lefedő maximális párosítása. Ez pedig nyilvánvaló, hisz $def(G)$ tetszőleges M-re a majdnem M-teli komponensek száma, $nc(M)$ pedig ezek közül a nemtriviálisoké.■

5. f-párosítások és f-faktorok

A párosítások egy másik általánosítása a f-párosítás: Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $f \in \mathbb{Z}_+^V$. f-párosításnak nevezünk egy olyan $x \in \mathbb{Z}_+^V$ függvényt, amelyre teljesül, hogy

$$x(\delta(v)) \leq f(v).$$

Ha x minden egyenlőtlenséget egyenlőséggel teljesít, akkor teljes f-párosításról beszélünk. Ha a teljes f-párosításról még azt is megköveteljük, hogy $x(e) \leq 1$ teljesüljön, akkor f-faktorról beszélünk. Ebben az esetben tehát G olyan G' részgráfjait keressük, melyek eleget tesznek a $\deg'_G(v) = f(v)$ fokszámfeltételeknek.

Ahogy a törtpárosítások esetében, itt is két lehetőségünk van. Egyrészt visszavezethetjük a problémát egy segédgráf segítségével a maximális párosítás problémájára, másrészt vizsgálhatjuk közvetlenül az eredeti gráfot. Az első megközelítés gyorsan választ ad arra a kérdésre, hogy mekkora a maximális f-párosítás, de a másik, jóval nehezebb megközelítésre van szükségünk ahhoz, hogy a megállapításokat tehessünk a maximális f-párosítások szerkezetéről.

5.1. A maximális f-párosítások és f-faktorok keresésének visszavezetése a maximális párosítási problémára

Legyen adva egy $G = (V, E)$, és a csúcsain egy $f \geq 0$ egészértékű függvény. Vegyük az alábbi G' gráfot. Minden $v \in V$-re vegyünk $f(v)$ darab pontot, legyen ezek halmaza U_v. A G gráf minden egyes (v, w) élére húzzuk be U_v minden pontjából U_w minden pontjába az éleket.

5.1. tétel. *G maximális f-párosításának értéke megegyezik G' maximális párosításának értékével. Speciálisan: G-nek pontosan akkor van teljes f-párosítása, ha G'-nek van teljes párosítása.*

Bizonyítás. Legyen G' egy maximális párosítása M. Minden $(v, w) \in E$-re legyen az U_v és U_w között menő élek száma $x(vw)$. Egy v csúcsra felírhatjuk:

$$x(\delta(v)) = \sum_w x(v, w) \leq f(v).$$

Az egyenlőség x definíciójából következik, az egyenlőtlenség pedig abból, hogy M párosítás, így U_v-ből legfeljebb annyi él mehet ki, ahány pontból áll. Tehát ez az x vektor f-párosítás. Hasonlóan láthatjuk be, hogy G egy maximális f-párosításának megfeleltethetünk egy ugyanolyan értékű párosítást G'-ben. ■

Vizsgáljuk most az f-faktorok problémáját. Legyen adva egy G gráf és egy f egészértékű függvény a csúcsokon, és el kell döntenünk, hogy van-e benne f-faktor. Összuk fel G minde élét ket ponttal, legyen az így kapott gráf G''. Terjesszük ki f-et úgy, hogy az új pontokon az értéke 1 legyen.

5.2. tétel. *G-nek pontosan akkor van f-faktora, ha a fenti módon megkonstruált G''-nek van teljes f-párosítása.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy G'' minden teljes f-párosítása egyben f-faktor is. Elég tehát megmutatnunk, hogy G-nek pontosan akkor van f-faktora, ha G''-nek van f-faktora.

Legyen F a G gráf egy f-faktora. Legyen F'' a következőképpen definiálva: G minden F-ben lévő e élére vegyük bele F''-be a G'' gráf e-hez tartozó három éle közül a két szélsőt. G azon e éleire pedig, amelyek nincsenek F-ben, vegyük bele F''-be a G'' e-hez tartozó 3 éle közül a középsőt. Az így kapott F'' élhalmaz nyilván G'' egy f-faktora lesz.

Ugyanezt az eljárást fordítva végrehajtva G'' tetszőleges f-faktorából kaphatunk G-nek egy f-faktorát. ■

5.2. Az f-faktorok struktúratétele

Az alábbiakban ismertetjük Lovász f-faktorokról szóló struktúratételét [1]. Először is általánosítjuk az f-faktorok fogalmát: eddig olyan részgráfot kerestünk, eleget tettek bizonyos felső fokszámkorlátoknak, most a fokszámokat alulról is korlátozni fogjuk.

Legyen adva két egészértékű függvény, f_1 és f_2 a G gráf csúcshalmazán ($f_1 \geq f_2$), és keresünk G éleinek egy olyan H részhalmazát (a továbbiakban H élhalmaz)??hogy is nevezzelek??, amelyre

$$f_1(v) \geq \deg_H(v) \geq f_2(v).$$

Egy kicsit más alakban fogjuk felírni a problémát. Legyen $f = f_1$, $g = \hat{f}_2 = \deg_G - f_2$ és a $H \subseteq E(G)$ részhalmazra jelölje $\bar{H} = E(G) - E(H)$. Ekkor a fenti feltétel így írható:

$$\deg_H \leq f \text{ és } deg_{\bar{H}} \leq G.$$

A triviális esetek kizárása érdekében a továbbiakban mindig feltételezni fogjuk, hogy

$$f, g \geq 0 \text{ és } f + g \geq deg_G.$$

Legyen $H \subseteq E(G)$ tetszőleges élhalmaz. Definiáljuk a következő mennyiségeket:

$$\delta(v; H; f, g) = \max\{0, \deg_H(v) - f(v), \deg_{\bar{H}} - g(v)\} \tag{5}$$

$$\delta(H; f, g) = \sum_{v \in V(G)} \delta(v; H; f, g) \tag{6}$$

$$\delta(f, g) = min_H \delta(H; f, g). \tag{7}$$

Nyilvánvalóan pontosan akkor létezik a 5.2 feltételeket kielégítő élhalmaz, ha $\delta(f,g) = 0$. Az ilyen élhalmazokat (f,g)-faktoroknak fogjuk nevezni. Speciálisan pontosan akkor létezik f-faktor, ha $\delta(f,\hat{f}) = 0$. Megfigyelhetjük továbbá, hogy $\delta(H;f,g) = \delta(\bar{H};g,f)$, és így $\delta(f,g) = \delta(g,f)$. A H élhalmazt (f,g)-optimálisnak hívjuk, ha $\delta(H;f,g) = \delta(f,g)$. A továbbiakban az a célunk, hogy minimax formulát kapjunk a $\delta(f,g)$-re és leírjuk az (f,g)-optimális élhalmazokat.

ITT kihagytam egy adag megjegyzest

Most definiáljuk a G gráf pontjainak egy felbontását, mely hasonlít a Gallai–Edmonds-felbontásra. A párosítások esetében a felosztás azon alapult, hogy egy pontot lefed-e minden maximális párosítás. Most aszerint megy a felbontás, hogy a 5.2 egyenlőtlenségeket egy-egy pontban teljesíti-e az összes (f,g)-optimális élhalmaz.

$$\begin{aligned}
C =& C(G;f,g) = \{v \in V(G) |\, \deg_H(v) \leq f(v) \text{ és} \\
& \quad \deg_{\bar{H}}(v) \leq g(v) \text{minden } (f,g)\text{-optimális} H \text{ élhalmazra}\} \\
A =& A(G;f,g) = \{v \in V(G) |\, \deg_{\bar{H}}(v) \leq g(v) \\
& \quad \text{minden } (f,g)\text{-optimális} H \text{élhalmazra}\} \\
C =& C(G;f,g) = \{v \in V(G) |\, \deg_H(v) \leq f(v) \\
& \quad \text{minden } (f,g)\text{-optimális} H \text{élhalmazra}\} \\
D =& D(G;f,g) = V(G) - A - B - C.
\end{aligned}$$

Amikor világos, hogy mely G gráfról van szó, akkor azt fogjuk írni, hogy $C(f,g)$, $A(f,g)$, $B(f,g)$ illetve $D(F,g)$. Vegyük észre, hogy $C = V(G)$ pontosan akkor teljesül, ha G-nek van (f,g)-faktora.

A fenti halmazoknak a következőképpen felelnek meg a Gallai–Edmonds-felbontás részei: $C(G;f,g) = C(G)$, $A(G;f,g) = A(G)$, $B(G;f,g)$ a $D(G)$ rész triviális komonenseinek uniója $D(G;f,g)$ a $D(G)$ rész nemtriviális komponenseinek uniója.

Mielőtt megállapításokat tennénk a most definiált felosztásról, vizsgáljuk meg, hogyan változik meg a $\delta(H;f,g)$ mennyiség a H élhalmaz bizonyos éleinek elhagyásánál, illetve bizonyos élek hozzávételénél. Legyen tehát $H \subseteq E(G)$ élhalmazés $v \in V(G)$ egy olyan csúcs, melyre $\deg_H(v) > f(v)$. Töröljünk el H-ból egy tetszőleges $vw \in H$ élet. Jelöljük a kapott élhalmazt H'-vel, erre

$$\delta(v;H';f,g) = \delta(v;H;f,g) - 1, \tag{8}$$

$$\delta(w;H';f,g) \leq \delta(w;H,f,g) + 1 \text{és} \tag{9}$$

$$\delta(u;H';f,g) = \delta(u;H;f,g) \text{minden } u \neq v, w\text{-re} \tag{10}$$

Így $\delta(H';f,g) \leq \delta(H;f,g)$. Tehát ha speciálisan H (f,g)-optimális, akkor H' is, és a fenti egyenlőtlenség (miért van többes szám?????) egyenlőséggel teljesül, vagyis $\deg_{\bar{H}}(w) \geq g(w)$.

Hasonlóan, ha $\deg_{\bar{H}}(v) > g(v)$, akkor H-hoz $\bar{H}$ egy tetszőleges, v-re illeszkedő élét hozzávehetjük, a kapott H' gráfra $\delta(H';f,g) \leq \delta(H;f,g)$. Ennek alapján megfogalmazzuk a következő definíciót.

5.1. definíció. *Ha a H élhalmazból úgy hagyunk el élet vagy úgy veszünk hozzá egyet, hogy $\delta(v;H;f,g)$ legalább egy v pontnál szigorúan nő, akkor az élhalmaznak ezt a megváltoztatását v-nél való* lokális növelésnek *nevezzük ((f,g)-re nézve).*

Vegyük észre, hogy ha H (f,g)-optimálisés H'-t H-ból egy lokális növeléssel kaptuk, akkor H-t is megkaphatjuk H'-ből egy lokális növeléssel. Továbbá, ha H (f,g)-optimális, akkor egyetlen lokális növelés sem változtatja a C résszel szomszédos??? éleket. Az előző megjegyzésekből pedig az következik, hogy lokális növelésekkel tetszőleges élhalmazból olyanhoz juthatunk, amelyre $\deg_H \leq f$. Tehát a következőt kaptuk.

5.3. tétel. *Tetszőleges G gráfra és f és g 5.2 feltételeket kielégítő függvényekre van olyan (f,g)-optimális H élhalmaz, melyre $\deg_H \leq f$*

A lokális növelések a párosításelméletben szereplő növelő utaknak felelnek meg. A következő lemma nagyon hasznos lesz a későbbiekben.

5.1. lemma. *Legyen J (f,g)-optimális élhalmaz és H tetszőleges élhalmaz. Ekkor H lokális növelésekkel olyan (f,g)-optimális H élhalmazzá alakítható, melyre $J\triangle???H_0$ csak C által feszített éleket tartalmaz.*

Bizonyítás. Vegyünk két olyan élhalmazt, H'-t és J'-t, melyekre:

(a) H' megkapható H-ból lokális növelésekkel.

(b) J' megkapható J-ből lokális növelésekkel.

(c) $H'\triangle J'$ minimális.

Az alábbiakban belátjuk ezen élhalmazpár néhány tulajdonságát.

(1) Minden $v \in V(G)$ csúcsra $\delta(v;H';f,g) \leq \delta(v;J';f,g)$. Tegyük fel ugyanis, hogy $\delta(v;H';f,g) > \delta(v;J';f,g)$ valamely v csúcsra. Tegyük fel, hogy $\deg_{H'} > f(v)$??, ekkor nyilván $\deg'_J(v) < \deg'_H(v)$. Így $H' - J'$-nek van egy v-re illeszkedő e éle. Az e él törlése H'-ből lokális növelés és csökkenti $H'\triangle J'$-t, ami ellentmond (c)-nek.

(2) Minden $v \in V(G)$ csúcsra $\delta(v;H';f,g) = \delta(v;J';f,g)$ és H' (f,g)-optimális.

Ez az előző pontból és abból következik, hogy J' (f,g)-optimális(hisz (f,g)-optimális élhalmazból kaptuk lokális növelésekkel).

(3) Minden olyan v pontra, melyre $\delta(v; J'; f, g) > 0$, $\deg_{H'}(v) = \deg_{J'}(v)$

Tegyük fel ugyanis, hogy az egyenlőség nem teljesül, mondjuk $\deg_{H'}$: $\deg_{J'}(v)$. A (2) tulajdonság miatt $\deg_{J'}(v) \leq g\hat{(v)}, f(v) \leq \deg_{H'}(v)$. Töröljük ki $H' - J'$ egy élét, ez egy lokális növelés, ami ellentmond a minimalitásnak (c).

(4) Ha $\delta(v; H'; f, g) > 0$, akkor $H' \triangle J'$ egyetlen éle sem illeszkedik v-re.

Tegyük fel ugyanis, hogy mondjuk $e \in H' - J'$, és e a v csúcsra illeszkedik. A (3) tulajdonság miatt $\deg_{H'}(v) = \deg_{J'}(v)$, továbbá az állítás feltétele miatt $\deg_{H'}(v) > f(v)$ vagy $\deg_{\bar{H}'} > g(v)$. Az első esetben töröljük el e-t a H' élhalmazból, a második esetben vegyük hozzá e-t a J élhalmazhoz. Mind a két esetben lokális növelést hajtottunk végre és $|H' \triangle J'|$ csökkent. Ez ellentmond a (c) minimalitási tulajdonságnak.

(5) Ha $v \notin C$, akkor $H' \triangle J'$ egyetlen éle sem illeszkedik v-re.

Vegyünk olyan H' és J' élhalmazokat, melyek teljesítik az (a), (b) és (c) tulajdonságokat, az (5) tulajdonságot nem és egy olyan K (f, g)-optimális élhalmazt, amelyre $\delta(v; K; f, g) > 0$ (ilyen van, hisz $v \notin C$), mindezt úgy, hogy a $|H' \triangle K|$ minimális (d).

Ekkor H'-n nem lehet olyan lokális növelést végrehajtani, amely csökkentené $|H' \triangle J'|$-t. Ha lenne ugyanis ilyen lokális növelés, akkor ugyanannál a pontnál, ahol végrehajtottuk, a (4) tulajdonság miatt végre lehetne hajtani J'-n is, ennek eredményeképp kapnánk egy (H'', J'') élhalmazpárt, amely (a)-t, (b)-t és (c)-t teljesítené, de (5)-öt nem (hisz $H'' \triangle J'' = H' \triangle J'$.

Az (1) és (2) tulajdonságok bizonyításához hasonlóan látható, hogy $\delta(v; H; f, g) =$ $\delta(v; K; f, g) > 0$. Ez azonban ellentmond (4)-nek. Ezzel az (5) állítás bizonyítását befejeztük.

Tehát a H' és J' élhalmazok (f, g)-optimálisak és $H' \triangle J'$ a gráf C részében van. A lemma előtti megjegyzés szerint J'-ből megkaphatjuk J-t lokális növelésekkel. Ugyanezeket a lokális növeléseket azonban (5) miatt H'-n is végrehajthatjuk, és kapunk egy H_0 (f, g)-optimális élhalmaz.t, melyre $H_0 \triangle J = H' \triangle J$ a C részben van. Ezzel a lemma állítását beláttuk. ■

A lemmából azonnal adódik az alábbi két következmény.

5.1 következmény. *Minden élhalmaz (f, g)-optimális élhalmazzá alakítható lokális növelésekkel.* ■

5.2 következmény. *Két (f, g)-optimális élhalmaz pontosan akkor alakítható egymásba lokális növelésekkel, ha minden C által feszített él vagy mind a kettő élhalmazhoz hozzátartozik vagy egyikhez sem tartozik hozzá.* ■

5.4. tétel. *Legyen G tetszőleges gráf és $f_1 \leq f_2 \ldots \leq f_k$ illetve $g_1 \leq g_2 \leq \ldots \leq g_k$ olyan egészértékű függvények a gráf csúcshalmazán, melyekre teljesül*

$f_1 + g_1 \leq \deg_G$, $f_1 \leq 0$ *és* $g_1 \leq 0$. *Ekkor* G*-nak van egy olyan élhalmaza, amely minden* $i1 \dots k$*-ra* (f_i, g_i)*-optimális*

Bizonyítás. A bizonyítás k szerinti indukcióval megy, $k = 1$-re az állítás triviális. Legyen H' a G gráf olyan élhalmaza, mely (f_i, g_i)-optimális minden $i = 1..k-1$-re. A 5.1 következmény miatt H'-t (f_k, g_k)-optimálissá tudjuk tenni (f_k, g_k) szerinti??? lokális növelésekkel. A f_k, g_k szerinti lokális növelések azonban nyilvánvalóan f_i, g_i $(i = 1, \dots, k-1)$ szerinti lokális növelések is. Így H $i = 1, \dots, k-1$-re is (f_i, g_i)-optimális.■

5.5. tétel. *Tetszőleges* $v \notin C$ *csúcs foka az* (f, g)*-optimális élhalmazokban egy intervallum egész számai közül veheti fel értékét???ez így érthető???.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $a = \deg_H(v)$, $b = \deg_J(v)$ valamely H és J (f, g)-optimális élhalmazokra. A 5.1. lemma miatt H átalakítható lokális növelésekkel egy H' élhalmazzá, mely szintén (f, g)-optimális és $\deg_{H'}(v) = \deg_J(v)$. Mivel a lokális növelések v fokát legfeljebb eggyel változtatják, így az egyes lépéseknél kapott élhalmazokkal minden a és b közti egész számot megkapunk. ???ez így kicsit zavarosan van leírva az utolsó mondat ■

Megjegyezzük, hogy a fenti tétel állítása nem feltétlenül igaz C pontjaira.

valami szoveg

Legyen f a G ponthalmazán definiált egészértékű függvény, továbbá $v \in V(G)$. Bevezetjük az alábbi függvényt, mely f értékét egy pontban eggyel megnöveli:

$$f^v(w) = \begin{cases} f(w) + 1, & \text{ha } v = w \\ f(w), & \text{ha } v \neq w \end{cases}$$

Ezeket a függvényeket persze komponálni is lehet $(f^u)^v$-t f^{uv}-vel jelöljük. Gyakran fogjuk használni f^{vv}-t.

5.6. tétel. *Legyen* G *tetszőleges gráf,* f *és* g *pedig a* $V(G)$*ün értelmezett a 5.2 egyenlőtlenségeket kiegyenlítő függvények. Ekkor a következők igazak:*

(a) Ha $v \in A$*, akkor* $\deg_H(v) \geq f(v)$ *minden* H (f, g)*-optimális élhalmaz-ra.*

(b) Ha $v \in B$*, akkor* $\deg_H(v) \geq g(v)$ *minden* H (f, g)*-optimális élhalmaz-ra.*

(c) Ha $v \in D$*, akkor* $f(v) = \hat{g}(v)$ *és a* v *foka* (f, g)*-optimális élhalmazokban* $f(v) - 1$*,* $f(v)$ *vagy* $f(v) + 1$ *lehet.*

Bizonyítás. (a) Tegyük fel indirekt módon, hogy létezik egy olyan H (f,g)-optimális élhalmaz, melyre $\deg_H(v) < f(v)$. Mivel A definíciója szerint $\deg_H(v) \geq \hat{g}(v)$, azt kapjuk, hogy $f(v) > \hat{g}(v)$. A 5.3. tétel szerint H át tudjuk alakítan lokális növelésekkel olyan J (f,g)-optimális élhalmazzá, melyre $\delta(v;J;f,g) > 0$, és így A definíciója szerint $\deg_J(v) > f(v)$. A lokális növelések végrehajtása során v foka $f(v)-1$-ről $f(v)$-re nő, ez azonban nem lehetséges, hisz (f,g)-optimális élhalmazból indultunk ki.

A (b) résznek és (c) rész első állításának a bizonyítása hasonlóan megy. D definíciójából és a 5.5. tételből az is világos, hogy $f(v)-1$, $f(v)$ és $f(v)+1$ előfordul v fokaként valamely (f,g)-optimális élhalmazokra. Azt kell tehát csak belátnunk (ismét csak a 5.5. tételre hivatkozva), hogy v foka sem $f(v)-2$, sem $f(v)+2$ nem lehet (f,g)-optimális élhalmazban.

Tegyük fel indirekt módon, hogy valamely (f,g)-optimális élhalmazra mondjuk $\deg_H(v) = f(v)+2$. Ekkor $\delta(H;f^{vv},g^v) = \delta(H;f,g) - 2$, és így

$$\delta(f^{vv},g^v) \leq \delta(f,g) - 2.$$

Hasonlóan

$$\delta(f,g^v) \leq \delta(f,g) - 1.$$

A 5.4. tétel miatt van egy olyan J élhalmaz, amely egyszerre (f,g)-, (f,g^v)- és (f^{vv},g^v)-optimális. Ekkor miatt

$$\delta(J;f^{vv},g^v) \leq \delta(J;f,g) - 2,$$

miatt pedig

$$\delta(J;f,g^v) \leq \delta(J;f,g) - 1.$$

Ez utóbbi szerint azonban $\deg_J(v) < f(v)$, és az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, így ekkor $\delta(J;f^{vv},g^v) = \delta(J;f,g^v) = \delta(J;f,g) - 1$, ami ellentmond -nek. ■

5.7. tétel.

5.8. tétel. *Legyen adva a G gráf, és a 5.2 egyenlőtlenségeket teljesítő f és g függvény. Legyen (A,B,C,D) a gráf pontjainak felosztása. Ekkor a következők teljesülnek:*

(a) Egyetlen A és C között menő vagy A által feszített él sincs benne (f,g)-optimális élhalmazban.

(b) Minden B és C k0z0tt menő és B által feszített él benne van minden (f,g)-optimális élhalmazban.

(c) C és D között nem megy él.

Bizonyítás. (a) Legyen uv olyan él, melyre $u \in C$ és $v \in A \cup C$ és tegyük fel az állítással ellentétben, hogy van olyan H (f,g)-optimális élhalmaz, amely tartalmazza az uv élet. A definíciójából és a 5.1. lemmából következik, hogy H lokális növelésekkel olyan J (f,g)-optimális élhalmazzá alakítható, amelyre $\deg_J(u) > f(u)$??????. Legyen K tetszőleges (f,g)-optimális élhalmaz. Vegyük észre, hogy A és C definíciójából következően uv eltörlése K-ból nem növelheti sem $\delta(K;u;f,g)$-t, sem $\delta(K;v;f,g)$-t????, tehát nem lokális növelés. Tehát $uv \in J$. De ekkor $\deg_J(u) > f(u)$ miatt uv eltörlése J-ből lokális növelés, ami ellentmond az észrevételünknek.

A (b) és (c) állításokat hasonló gondolatmenettel bizonyíthatjuk be.

A következő lemma a stabilitási lemmához hasonlít.

5.2. lemma. *Legyen G gráf és f_1, f_2, g_1, g_2 a ponthalmazán értelmezett egészértékű függvények. Tegyük fel továbbá, hogy $f_1 \leq f_2$, $g_1 \leq g_2$ és $f_1+g_1 \geq \deg_G$. Ekkor az alábbi tartalmazások teljesülnek:*

$$\begin{aligned} A(f_1,g_1) &\supseteq A(f_2,g_2) \\ B(f_1,g_1) &\supseteq B(f_2,g_2) \\ D(f_1,g_1) &\supseteq D(f_2,g_2) \end{aligned}$$

Bizonyítás. Azt fogjuk megmutatni, hogy $v \notin C$ esetén akkor és csak akkor létezik olyan (f_1,g_1)-optimális élhalmaz, melyre $\deg_{H_1}(v) > f_1(v)$, ha létezik olyan (f_2,g_2)-optimális élhalmaz, melyre $\deg_{H_2}(v) > f_2(v)$. Ebből a lemma állítása nyilván következik.

$\Longleftarrow$ Tegyük fel, hogy létezik olyan H_2 (f_2,g_2)-optimális élhalmaz, melyre $\deg_{H_2}(v) > f_2(v)$. Ekkor nyilván $\delta(f_2^v,g_2) \leq \delta(f_2,g_2)-1$. Mivel $f_1 \leq f_2^v$ és $g_1 \leq g_2$, ezért a 5.4. lemma miatt van olyan H élhalmaz, amely egyszerre (f_1,g_1)-optimális és $f_2^v,g_2)$-optimális. Ekkor azonban:

$$\delta(H;f_2^v,g_2) = \delta(f_2^v,g_2) \leq \delta(f_2,g_2)-1 \leq \delta(H;f_2,g_2)-1.$$

Ebből pedig következik, hogy $\deg_H(v) > f_2(v) \leq f_1(v)$.

$\Longrightarrow$ Tegyük fel most, hogy létezik olyan H_1 (f_1,g_1)-optimális élhalmaz, melyre $\deg_{H_1}(v) > f_1(v)$. Ekkor

$$\delta(f_1^v) \leq \delta(f_1,g_1)-1.$$

Feltételünk szerint $v \notin C(f_2,g_2)$, tehát

$$\delta(f_2^v,g_2^v) \leq \delta(f_2,g_2)-1.$$

Használjuk ismét a 5.4. lemmát és vegyünk egy olyan H élhalmazt, amely egyszerre (f_1^v, g_1)-optimális és $f_2^v, g_2^v)$-optimális. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\delta(H; f_1^v, g_1) = \delta(f_1^v, g_1) \leq \delta(f_1, g_1) - 1 \leq \delta(H; f_1, g_1) - 1,$$

és így $\deg_H(v) > f_1(v)$. Hasonlóan

$$\delta(H; f_2^v, g_2^v) = \delta(f_2^v, g_2^v) \leq \delta(f_2, g_2) - 1 \leq \delta(H; f_2, g_2) - 1),$$

Tehát $\deg_H(v) \notin [g_2(v), f_2(v)]$. De mivel $\deg_H(v) > f_1(v)$ ez azt jelenti, hogy $\deg_H(v) > f_2(v)$.

Most már csak azt kell megmutatnunk, hogy a H élhalmaz (f_2, g_2)-optimális. Ez azonban nyilvánvaló, hisz

$$\delta(J; f_2^v, g_2^v) \geq \delta(J; f_2, g_2) - 1,$$

bármely J élhalmazra, tehát -ben egyenlőség áll. ■

A szokásos (f, g) függvénypárunkhoz most bevezetünk további, a G gráf ponthalmazán értelmezett egészértékű függvényeket.

$$\bar{f}(v) = \begin{cases} \deg_G(v), & \text{ha } v \in B \cup C \\ f(v), & \text{ha } v \in A \cup D \end{cases}$$

$$\bar{g}(v) = \begin{cases} \deg_G(v), & \text{ha } v \in A \cup C \\ g(v), & \text{ha } v \in B \cup D \end{cases}$$

$$f'(v) = \begin{cases} \deg_G(v), & \text{ha } v \in B \cup C \\ 0, & \text{ha } v \in A \\ f(v), & \text{ha } v \in D \end{cases}$$

$$g'(v) = \begin{cases} \deg_G(v), & \text{ha } v \in A \cup C \\ 0, & \text{ha } v \in B \\ g(v), & \text{ha } v \in D \end{cases}$$

5.3. lemma. *Legyen G tetszőleges gráf. Ekkor a fenti jelölésekkel $A(f', g') = A(\bar{f}, \bar{g}) = A(f, g)$, $B(f', g') = B(\bar{f}, \bar{g}) = B(f, g)$,$C(f', g') = C(\bar{f}, \bar{g}) = C(f, g)$, $D(f', g') = D(\bar{f}, \bar{g}) = D(f, g)$. Továbbá teljesül a következő:*

$$\delta(f, g) = \delta(\bar{f}, \bar{g}) = \delta(f', g') - f(A) - g(A).$$

Bizonyítás. Vegyünk egy olyan H élhalmazt, amely egyszerre (f,g)-optimális és $(\bar{f}, Barg)$-optimális. (Ilyen ismét csak a 5.3. lemmát használva létezik.) Ekkor:

$$\delta(f,g) = \delta(\bar{f}, Barg)$$

Előző (5.2.) lemmánk szerint $A(\bar{f},\bar{g}) \subseteq A(f,g)$, $B(\bar{f},\bar{g}) \subseteq B(f,g)$, $D(\bar{f},\bar{g}) \subseteq D(f,g)$. Most belátjuk, hogy $C(\bar{f},\bar{g}) \subseteq C(f,g)$ is teljesül. Tegyük fel, hogy $v \notin C(f,g)$. Ekkor van olyan J (f,g)-optimális élhalmaz, hogy mondjuk $\deg_J(v) > f(v)$. Ekkor azonban $\bar{f}$ definíciója szerint $\bar{f}(v) = f(v)$. Nyilván a J élhalmaz $(\bar{f},\bar{g})$-optimális is, tehát $v \notin C(\bar{f},\bar{g})$.

Most vegyünk egy olyan I élhalmazt, amely egyszerre (f',g')-optimális és $(\bar{f},\bar{g})$-optimális. Ekkor

$$\delta(\bar{f},\bar{g}) = \delta(f',g') - g(A) - f(B).$$

Ismét az előző lemmát használva kapjuk:

$$A(\bar{f},\bar{g}) \subseteq A(f',g'), \quad B(\bar{f},\bar{g}) \subseteq B(f',g'), \quad D(\bar{f},\bar{g}) \subseteq D(f',g').$$

Továbbá, ha $v \in C(\bar{f},\bar{g})$, akkor $f'(v) = g'(v) = \deg_G(v)$, és így C definíciója miatt $C(\bar{f},\bar{g}) \subseteq C(f',g')$. Tehát $C(\bar{f},\bar{g}) = C(f',g')$.

Már csak D szerkezetét kell leírnunk. Ehhez bevezetjük a párosításelméletből ismert faktorkritikus gráf fogalmának analogonját.

5.2. definíció. *A G gráf (f,g)-kritikus, ha összefüggő és $A = B = C = \emptyset$*

Megfigyelhetjük, hogy ilyen gráfra a 5.6. tétel (c) állítása miatt $f = \hat{g}$. Könnyű megmutatni, hogy G pontosan akkor (f,g)-kritikus, ha összefüggő és $\delta(f^v,g), \delta(f,g^v) < \delta(f,g)$ minden $v \in V(G)$-re.

Most belátunk egy olyan tételt, amely a Gallai-lemmának felel meg.

5.9. tétel. *Legyen g (f,g)-kritikus. Ekkor $\delta(f,g) = 1$.*

Bizonyítás. Legyen $v \in V(G)$ tetszőleges, és vizsgáljuk meg az (f^v,g) párt. A 5.2. lemma miatt

$$V(G) = D(f,g) = D(f^v,g) \cup (f^v,g).$$

A 5.8. tétel miatt viszont $D(f^v,g)$ és $C(f^v,g)$ között nem megy él, tehát $D(f^v,g) = V(G)$ vagy $C(f^v,g) = V(G)$. Az első eset nem fordulhat elő, hisz $f^v(v) = f(v) + 1 > \hat{g}(v)$. Tehát $C(f^v,g) = V(G)$ vagyis $\delta(f^v,g) = 0$. Ekkor azonban

$$\delta(f,g) \leq \delta(f^v,g) + 1 = 1.$$

Mivel $\delta(f,g) \neq 0$, a tétel bizonyítását befejeztük. ■

5.3 következmény. *Ha G (f,g)-kritikus, akkor $f(V(G))$ páratlan.* ■

Most már beláthatjuk fő struktúratételünket. Definiáljuk az f_A és g_B függvényeket a következő módon: $f_B(v) = f(v) - |\nabla(v,B)|$, $g_A(v) = g(v) - |\nabla(v,A)|$, ahol $\nabla(v,B)$ a v és B közt menő élek számát jelöli ???. Vegyük észre, hogy $f_B + g_A = \deg_{G[C\cup D]}$.

5.10. tétel. *Legyen G tetszőleges gráf, legyenek f és g a ponthalmazán értelmezett olyan egészértékű függvények, melyekre $f + g \le deg_G$. Legyen A, B, C, D a gráf fent definiált felosztása és legyenek $D_1, \dots, D_t$ a $G(D)$ rész összefüggő komponensei. Ekkor minden D_i (f_B, g_A)-kritikus és $G(C)$-nek van (f_B, g_A)-faktora. Továbbá*

$$\delta(f,g) = t + |\nabla(A,B)| - f(A) - g(B).$$

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $f(v) = 0$ minden $v \in A$-ra és $g(v) = 0$ minden $v \in B$-re, ugyanis máskülönben a 5.3. lemma alapján tekinthetnénk az f' és g' függvényeket.

Legyen a H élhalmaz (f,g)-optimális. Tudjuk a 5.8. tételből, hogy H nem tartalmaz A-t és C-t összekötő illetve A által feszített élet, viszont benne van minden B és C között menő él és minden B által feszített él. Mivel minden $v \in A$-ra $f(v) = 0$, az A-ra illeszkedő élek elhagyása lokális növelés, feltehetjük, hogy H nem tartalmaz A-ra illeszkedő élet. Hasonlóan feltehetjük, hogy H minden B és D között menő élt tartalmaz. Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\delta(H; f, g) = \delta(H[D]; f_B, g_A) + |\nabla(A,B)|. \tag{11}$$

Megfordítva, legyen J_0 a $G(D)$ rész tetszőleges (f_B, g_A)-optimális élhalmaza. és legyen

$$J = J_0 \cup g(B) \cup \nabla(B,D) \cup \nabla(B,C) \cup H[C], \tag{12}$$

ahol H tetszőleges (f,g)-optimális élhalmaz. Ekkor a fenti számolás mutatja, hogy

$$\delta(J; f, g) = \delta(J_0; f, g) + |||\nabla(A,B)|.$$

A 11 és 12 egyenlőtlenségek miatt

$$\delta(f,g) = \delta(f_B, g_A)||\nabla(B,C)|. \tag{13}$$

A 11 és 13 egyenlőtlenségekből következik, hogy ha a H élhalmaz (f,g)-optimális, akkor $H[D]$ (f_B, g_A)-optimális élhalmaz.

Most belátjuk, hogy minden $v \in D$ benne van $D(G[D]; f_B, g_a)$. Ehhez legyen H olyan (f,g)-optimális élhalmaz, melyre $\deg_H(v) > f(v)$. Vegyük hozzá H-hoz $\nabla(B,D)$ összes élét. A hozzávételek mind lokális növelések, tehát kapunk egy másik (f,g)-optimális élhalmazt, H'-t, és erre még mindig áll $\deg_{H'} > f(v)$. Töröljük ki H' összes A-ra illeszkedő élét, ezzel megint lokális növeléseket hajtottunk végre.és mivel a „hiány" ??? az A rész pontjainál csökken, tehát ezen élek másik végpontjánál nőnie kell, tehát $\deg_{H''}(v) > f(v)$. Ekkor azonban:

$$\deg_{H''[D]}(v) = \deg_{H''}(v) - |\nabla(v,B)| > f(v) - |\nabla(v,B)| = f_B(v).$$

Továbbá $H''[D]$ (f_B, g_A)-optimális a fenti megfigyelés alapján. Hasonlóan tudunk konstruálni olyan (f_B, g_A)-optimális élhalmazt, amelyre v foka kisebb, mint $f(v)$???. Ezzel tehát beláttuk, hogy $D(G[D]; f_B, g_A) + D$. Ebből következően $G(D)$ minden komponense (f_B, g_A)-kritikus. Tehát $\delta(f_B, g_A) = t$, és így a 13 egyenlőség felhasználásával készen vagyunk. ■

Következő célunk az, egy $\delta(f,g)$-re vonatkozó minimax erdmény bebizonyítása, amelyből az f-faktorok létezésének szükséges és elégséges feltétele azonnal következik.

5.3. definíció. *Legyen G gráf, f és g a ponthalmazán értelmezett nemnegatív, egészértékű függvények, és legyen $X, Y \subseteq V(G)$ diszjunkt. Azt mondjuk, hogy $G - X - Y$ egy K komponense (X,Y)-páratlan ((f,g)-re nézve), ha (a) $f(v) = \hat{g}(v)$ minden $v \in V(K)$ és (b) $f(V(K)) + |\nabla(V(K), Y)|$ páratlan.*

Könnyen ellenőrizhető, hogy K pontosan akkor (X,Y)-páratlan (f,g)-re nézve, ha (Y,X)-páratlan (g,f)-re nézve. $G - X - Y$ (X,Y)-páratlan komponenseinek számát $\tau(X,Y)$-nal jelöljük. Vegyük észre, hogy $D[G]$ minden komponense (A,B)-páratlan, így $\tau(A,B)$ a $D(G)$ rész komponenseinak a száma.

5.11. tétel. *Legyen G gráf, f és g két nemnegatív egészértékű függvény a ponthalmazán, melyekre $f + g \geq \deg_G$. Ekkor*

$$\delta(f,g) = \max_{X,Y \subseteq V(G), X \cap Y = \emptyset} \{\tau(X < Y) + |\nabla(X,Y)| - f(X) - g(Y)\}.$$

Bizonyítás. Legyen egy tetszőleges$H$ élhalmazt és $X, Y \subseteq V(G)$ diszjunkt. Megmutatjuk, hogy

$$\delta(H; f, g) \geq \tau(X,Y) + |\nabla(X,Y)| - f(X) - g(Y). \tag{14}$$

Legyen $Z = v(G) - X - Y$, ekkor tudjuk, hogy

$$\delta(H; f, g) \geq \sum_{v \in X} (\deg_H(v) - f(v)) + \sum_{v \in Y} (\deg_{\bar{H}}(v)) + \sum_{v \in Y} (\deg_{\bar{H}}(v) - g(v)) \tag{15}$$

$$+ \sum_{v \in Z} \delta(v; H; f, g). \tag{16}$$

Legyen K $G - X - Y$ tetszőleges (X, Y)-páratlan komponense. Ekkor egyszerűen meggondolható, hogy vagy K tartalmaz olyan v pontot, melyre $\delta(v; h; f, g) \neq 0$ vagy H-nak van K és X között menő vagy $\bar{H}$-nek van K és Y között menő éle. Így

$$\sum_{v \in Z} \delta(v; H; f, g) \geq \tau(X, Y) |\nabla_H(Z, X)| - |\nabla_{\bar{H}}(Z, Y)|,$$

és ebből

$$\delta(H; f, g) \geq \deg_{\bar{H}}(X) + \deg_H(Y) - f(X) - g(Y) \tag{17}$$

$$+\tau(X, Y) - |\nabla_H(Z, X)| + |\nabla \bar{H}(Z, Y)|. \tag{18}$$

Tudjuk, hogy

$$\deg_H(X) + \deg_{\bar{H}}(Y) \geq |\nabla_G(X, Y)| + \nabla_H(Z, X)| + |\nabla \bar{H}(Z, Y)|,$$

így 14 valóban fennáll. Előző (5.10.) tételünk szerint tetszőleges H (f, g)-optimális élhalmazra $X = A$ és $Y = B$ esetén 14-ben egyenlőség áll, tételünk bizonyítását befejeztük. ■

Ha $f = \hat{g}$, akkor megkapjuk az alábbi tételt.

5.12. tétel. *(Tutte tétele az f-faktorokról) A G gráfnak pontosan akkor van f-faktora, ha bármely $X, Y \subseteq V(G)$ diszjunkt csúcshalmazra igaz, hogy $G - X - Y$-ban azon K komponensek száma, melyekre $f(V(K)) + |\nabla(V(K), Y)|$ páratlan, legfeljebb $f(C) + \hat{f}(Y) - |\nabla(X, Y)|$.* ■

6. f-törtpárosítások és $2f$-párosítások

A f-párosítás definíciójának mintájára definiálhatjuk a f-törtpárosításokat. A fenti jelölésekkel $y \in \mathbb{R}_+^{E(G)}$ f-törtpárosítás, ha $y(\delta(v)) \leq f(v)$. A maximális f-törtpárosítás problémája visszavezethető a maximális törtpárosítás problémájára. Vegyünk ugyanis egy $G'(V', E')$ segédgráfot: minden $v \in V$-re re vegyünk $f(v)$ darab pontot, és minden $(u,v)=e\in E$ élre kössünk össze minden, u-hoz rendelt V'-beli pontot minden v-hez rendelt V'-beli ponttal. A segédgráf törtpárosításaiból az eredeti gráfban f-törtpárosítás kapható és viszont.

A maximális f-törtpárosítást a folyamproblémára is vissza lehet vezetni. Legyen $G''=(V'',E'')$ segédgráf a következő rendeljünk minden egyes $v\in V$ ponthoz egy v' és egy v'' pontot, továbbá legyen s forrás és t nyelő. Az eredeti gráf minden (u,v) eléhez húzzuk be a segédgráfban a (u,v') és a (u',v) éleket, ezeken legyen a kapacitás 1, húzzunk be továbba minden s és v', továbbá v'' és t közti élet, ezeken legyen a kapacitás $f(v)$. A maximális folyam pont a maximális törtpárosítás kétszerese lesz. Ezzel beláttuk azt is, hogy maximális f-törtpárosítás (és így a maximális törtpárosítás) értéke félegész vektoron is felvétetik, tehát elég csak ilyen alakú f-törtpárosításokkal foglalkozni.

Az x f-törtpárosítás *tartója*, $S(x)$, azon élek halmaza, ahol $x>0$. Az f-törtpárosítások P poliéderének csúcsait a következőképpen jellemezhetjük [3, 4]:

6.1. tétel. *Az x törtpárosítás pontosan akkor csúcs, ha $S(x)$ egyik komponense sem tartalmaz páratlan kört és legfeljebb egy kört vagy telítetlen csúcsot tartalmaz.*

Felvetődik a kérdés, hogy ilyen f-törtpárosításokra adható-e a Pulleyblankéhoz hasonló struktúratétel.

Hivatkozások

[1] L. Lovász, M. D. Plummer: *Matching Theory*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986

[2] A. Schrijver: *Combinatorial Optimization*, Springer, Berlin, 2003

[3] A. Schrijver személyes közlése

[4] E. L. Johnson: Network Flows, Graphs and Integer Programming (PhD. dolgozat), Operations Research Center, University of Berkeley, California, 1965

[5] W. R. Pulleyblank: *Fractional Matchings and the Edmonds–Gallai theorem*, Discrete Applied Mathematics 16, 1987 51–58.

[6] Yan Liu and Guizhen Liu: *The Fractional Matching Numbers of Graphs*, NETWORKS, Vol. 40(4), 2002, 228–231.

[7] J. P. Uhry: Sur le problème du couplage maximal, Revue Française d'Automatique, Informatique et Recherche Opérationelle, 9 (V–3), 1975, 13–20.

[8] A. Frank: Kombinatorikus algoritmusok, sokszorosított jegyzet