Diplomamunka

Síkgráfok és konvex poliéderek

Ujváry-Menyhárt Zoltán
Témavezető: Szabó László

ELTE TTK 1997.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A szakdolgozat célja, hogy összefoglalja a 3 dimenziós, konvex poliéderek kombinatorikus struktúrája és geometriai tulajdonságai közötti összefüggésekkel kapcsolatos ismereteket. Ebben a témában egy igen alapvető tétel Steinitz tétele, melyhez szükség van a következő definíciókra:

1.1. Definíció. *Egy P poliéder $G(P)$ gráfja olyan gráf, melynek csúcsai a P poliéder csúcsainak feleltethetők meg, két csúcs között pedig akkor fut él, ha a poliéderben a megfelelő két csúcs között van él (azaz mindkét csúcs rajta van egy 1-dimenziós lapon).*

Ismert, hogy a konvex poliéderek gráfja síkgráf. Ez egyszerűen belátható, például úgy, hogy az éleit a poliéder egy belső pontjából felvetítjük a pontot tartalmazó gömbre. A gráf lapjai megfeleltethetők a poliéder lapjainak.

1.2. Definíció. *Két konvex poliéder kombinatorikusan ekvivalens, ha a gráfjaik izomorfak, valamint ez az izomorfizmus kiterjeszthető a lapokra is. (Vagyis egy lapot határoló körnek a másik gráfban is egy lapot határoló kör felel meg.)*

Steinitz tétele szerint egy (legalább 4 pontú) gráf akkor és csak akkor lehet egy konvex poliéder gráfja, ha síkbarajzolható és 3-összefüggő. Whitney tétele azt mondja ki, hogy egy 3-összefüggő síkgráf beágyazása a gömbfelszínbe homeomorfizmus erejéig egyértelmű. Ebből a két tételből az is következik, hogy a 1.2. Definícióban nem kellene foglalkozni a lapokkal, vagyis két poliéder pontosan akkor kombinatorikusan ekvivalens, ha a gráfjaik izomorfak. A Steinitz-tétel bizonyításához fel fogom használni Koebe síkgráfokra vonatkozó reprezentációs tételét. Koebe 1935. évből származó tétele szerint, egy síkbarajzolható gráf reprezentálható páronként közös belső pont nélküli körlemezek olyan rendszerével, hogy a gráf csúcsainak felelnek meg a körök, két kör (kívülről) érinti egymást, ha a megfelelő csúcsok között a gráfban vezet él, egyébként pedig a körök diszjunktak. Ennek egy következménye az az ismert gráfelméleti tétel, mely szerint ha egy gráf síkbarajzolható, akkor egyenes vonalakkal is síkbarajzolható. Koebe tételének a témával kapcsolatos erősítése szerint (mely 1990-ben készült), ha a síkgráf 3-összefüggő, akkor a gráf és a duálisa egyszerre reprezentálható egy-egy körrendszerrel, melyeknek a gráfok az érintkezési gráfjai és a lapokhoz tartozó körök a megfelelő lap csúcsaihoz tartozó köröket merőlegesen metszik. Ebből sztereografikus projekció segítségével adódik, hogy minden (legalább 4 pontú) 3-összefüggő G síkgráfhoz van olyan poliéder, amelynek G a gráfja és az élei érintenek egy adott gömböt. Ennek a tételnek következményeként a Steinitz tétel is adódik. A tétel gömb helyett tetszőleges konvex halmazra igaz, vagyis bármely konvex halmazhoz bármely poliédernek van élérintő kombinatorikus ekvivalense. A tétel nem általánosítható magasabb dimenziójú poliéderekre, mivel ott a körülírás mindenféle típusára[1] van ellenpélda.

[1] akárhány dimenziós lapokra követelhetjük, hogy érintsék a gömböt

A téma egy másik érdekes kérdése Jakob Steiner 1832-ben írt könyvéből származik. Ebben Steiner számos érdekes kérdést vetett fel, melyek közül már csak kettő maradt megoldatlan 150 évvel később. Az egyik kérdés az volt, hogy mely esetben van egy konvex poliédernek olyan kombinatorikus ekvivalense, amely gömbbe írható. 1928-ig nem ismertek olyan konvex poliédert, amelynek nincs kombinatorikus ekvivalense, amely gömbbe írható. Emellett a konvex poliéderek kombinatorikus karakterizációja is megoldatlan volt. Mindkét problémát Ernst Steinitz oldotta meg, a már fent említett tétellel karakterizálta a konvex poliéderek gráfjait és ugyanabban a cikkben mutatott poliédereknek végtelen sok kombinatorikus típusát, amelyek nem írhatók gömbbe. Steiner kérdésére a választ végül Igor Rivin 1991. és 1993. közötti cikkeiben adta meg. Ez a hiperbolikus tér ideális csúcspontú[2] poliédereinek karakterizációjából adódik a Cayley-Klein modell segítségével. Csak a feltételek szükségességével foglalkozunk. A feltételek elégségességét az Alekszandrov által kifejlesztett differenciálgeometriai módszerek továbbfejlesztésével oldotta meg Rivin. Ez lényegesen különbözik a dolgozatban szereplő módszerektől, ezért ezeket itt nem tárgyaljuk.

[2] "végtelen sugarú gömbbe" írt

2. Poliéderek gráfjai

2.1. Koebe reprezentációs tétele

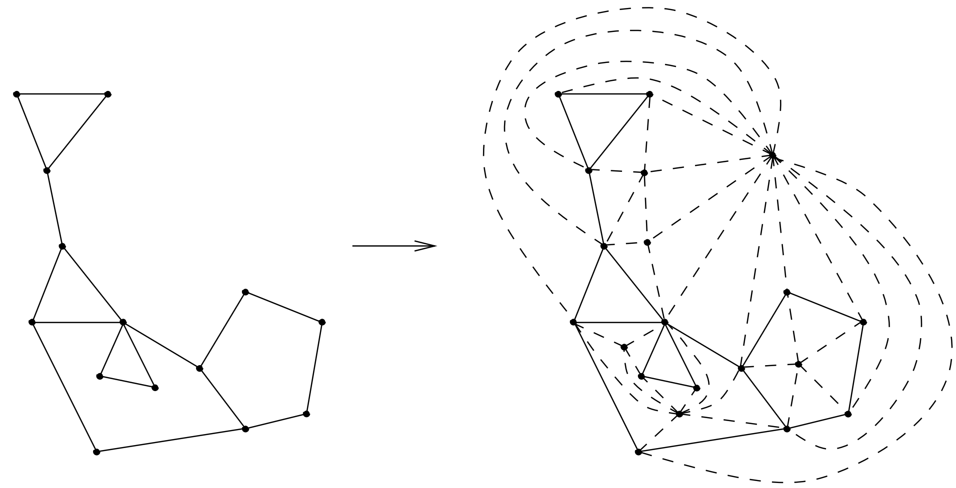
2.1. Tétel. (Koebe,1936) *Legyen G tetszőleges síkbarajzolható gráf, csúcsainak a halmaza $V(G)=\{v_1, \dots, v_n\}$, éleinek a halmaza $E(G)$. Ekkor van olyan körelhelyezés*[3] *a síkon, mely n körlemezből áll: $\mathcal{C}=\{c_1, \dots, c_n\}$ és két kör (c_i és c_j) akkor érinti egymást, ha a megfelelő csúcsok szomszédosak ($v_iv_j \in E(G)$), egyébként pedig diszjunktak a körök.*

Megjegyzés. Ha egy ilyen körelhelyezés adott, inverzió illetve bármilyen hasonlósági transzformáció segítségével nyilván újabb megfelelő körelhelyezésekhez jutunk (természetesen körökön kívüli pontból kell invertálni). Thurston bebizonyította, hogy ha a síkgráf maximális (vagyis háromszöglapokból áll), akkor ettől a transzformációtól eltekintve egyértelmű a reprezentáció.

Bizonyítás. (Colin de Verdiere 1989, Marden, Rodin 1990)
A tételt elég maximális síkgráfokra bizonyítani. Ha G-ben lenne elsőfokú csúcs, azt elhagyhatjuk, és ha az így kapott G' szintén síkgráf lesz, továbbá ha ez reprezentálható körrendszerrel, akkor ott a megfelelő körhöz tudunk elég kicsi érintő kört húzni, amely a többi lemeztől diszjunkt. A különböző összefüggő komponenseket elég külön reprezentálni, a reprezentációk elhelyezhetők a síkon úgy, hogy ne metszék egymást (elegendően távol egymástól). Az egy pontból álló gráf esete nyilvánvaló, így feltehetjük, hogy a G gráf összefüggő, és minden pont foka legalább 2. Ha G-ben van egy lap, amely nem háromszög, akkor ennek a lapnak a belsejében vegyünk fel egy új csúcsot, és ezt kössük össze a lap csúcsaival. Ez az eljárás 2-összefüggő gráfokra minden lapot háromszögekre bont. Ha a gráf nem 2-összefüggő, akkor az elvágó pontok bizonyos tartományokat többszörösen határolnak, de a háromszögelésnél csak egyszer lehet őket összekötni az új csúccsal, hogy a gráf egyszerű maradjon. Emiatt, még a háromszögelés előtt, egy új csúcsot veszünk hozzá az elvágó ponthoz a megfelelő lap belsejében, ezt összekötjük az elvágó ponttal, valamint az elvágó pontból kiinduló, a lapot szomszédosan határoló két él másik végpontjával. Ennek eredményeképpen kapunk egy egyszerű síkbarajzolható gráfot, ahol az adott elvágó pont a megfelelő lap határán már eggyel kevesebbszer fordul elő, és nem keletkezett új elvágó pont. Ezt az eljárást véges sokszor alkalmazva 2-összefüggő gráfot kapunk, amelynek a lapjait már háromszögekre bonthatjuk a korábban leírt módon. (Lásd az 1. ábrát!)

Így minden tatományt háromszöglapokra bontottunk. Ha az így kapott G' síkgráf reprezentálható körrendszerrel, akkor a reprezentációból elhagyva az új csúcsoknak megfelelő kört, G-nek egy jó reprezentációját kapjuk.

[3] nem feltétlenül kongruens körökből álló



1. ábra
Egy gráf lapjainak felbontása háromszöglapokra.

Legyen G egy fix, háromszöglapokból álló, síkbarajzolható gráf, csúcsai $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, éleinek halmaza E; lapjainak halmaza (beleértve a külső végtelen tartománynak megfelelő lapot is) pedig F. Az Euler-tételből:

$$|V| - |E| + |F| = 2\,.$$

Mivel minden lap háromszög: $3|F| = 2|E|$, amelyekből:

$$|F| = 2|V| - 4 = 2n - 4\,,$$

$$|E| = 3n - 6\,.$$

Legyen r=(r_1, ... ,r_n) tetszőleges vektor $\mathbb{R}^n$-ben, melyre $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$. A G gráf minden lapjához rendeljünk egy háromszöget a következő módon: a $v_i v_j v_k$ laphoz rendeljünk egy r_i,r_j,r_k sugarú, egymást páronként kívülről érintő körök középpontjai által alkotott háromszöget (vagyis $(r_i + r_j), (r_i + r_k), (r_j + r_k)$ oldalú háromszöget). A háromszög csúcsainak megfelelnek a gráf v_i, v_j, v_k csúcsai. Minden v_i csúcshoz legyen $\sigma_r(v_i)$ a v_i-vel szomszédos lapokhoz rendelt háromszögekben a v_i-nek megfelelő csúcsoknál lévő szögek összege. Ha $\sigma_r(v_i) = 2\pi$ teljesül a G minden csúcsára a külső tartomány csúcsain kívül, akkor ezek a háromszögek egymáshoz ragaszthatók a megfelelő élek mentén a síkbarajzolásnak megfelelően, és így a csúcsokba r_i sugarú köröket írva, G-nek egy megfelelő reprezentációját kapjuk (a külső tartomány a hozzá rendelt háromszög komplementere lesz). A külső tartománnyal nem kell külön foglalkozni, mert a többi háromszög összeragasztása után kapott háromszöglap egybevágó az ehhez a tartományhoz rendelt háromszöglappal.

2.2. Állítás: *Ha $\sigma_r(v_i) = 2\pi$ teljesül G minden csúcsára a külső tartomány csúcsain kívül, akkor ezek a háromszögek egymáshoz ragaszthatók az éleik mentén a síkbarajzolásnak megfelelően.*

Bizonyítás. Hogy ez a ragasztás megtehető, azt a csúcsok számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítom.

- n=3 esetén nyilvánvaló. (Ez a legkisebb, nem üres, háromszögekből álló gráf, egyetlen háromszög van, nincs semmi feltétel, és ragasztani sem kell.)
- Ha $n \geq 4$, akkor válasszunk ki a G-ben egy csúcsot, amely nem tartozik a külső laphoz. Az ehhez tartozó háromszögek a feltétel miatt összeragaszthatók, ha a csúcs k-adfokú volt, akkor így egy k-szöget kapunk ($k \geq 3$). Ez a k-szög átlóival $k-2$ darab háromszögre bontható (csak olyan átlókkal, amelyek a sokszögön belül haladnak). G-ből hagyjuk el a kiválasztott csúcsot, az ezzel szomszédos csúcsokat kössük össze a háromszögelésnek megfelelő módon, és az új háromszöglapokhoz rendeljük a k-szög megfelelő háromszögeit (az új élekhez a megfelelő átlók hosszát rendeljük). Az indukció során csak a gráf éleihez rendelt hosszúságok, és a lapokhoz ennek megfelelően rendelt sugarak vannak, nem foglalkozunk a csúcsokhoz kezdetben rendelt sugarakkal, azokról rögtön áttérünk az élekhez rendelt hosszúságra. Az így kapott G'-ben nyilván teljesül az indukciós feltétel és 1-gyel kevesebb csúcsa van, tehát a lapjainak megfelelő háromszögek jól ragaszthatól az élek mentén. Ekkor az új háromszögek a fenti k-szöget adják ki és így lecserélve őket a régi k darab háromszögre a G-hez tartozó megfelelő ragasztást kapunk.

□

Tehát azt kell elérni, hogy a $\sigma_r(v_i)$-kre a feltétel teljesüljön. Mivel a háromszög szögeinek összege π:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_r(v_i) = |F|\pi = (2n-4)\pi \,.$$

Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ az az $(n-1)$ dimenziós szimplex, amelyre:

$$S = \left\{ r = (r_1, \ldots, r_n) \,\middle|\, (r_i > 0)\ \forall i\text{−re, valamint } \sum_{i=1}^{n} r_i = 1 \right\}$$

és legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ az a halmaz, melyre:

$$H = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = (2n-4)\pi \right\} .$$

Legyen $f : S \mapsto \mathbb{R}^n$ a következő függvény:

$$f(r) = (\sigma_r(v_1), \dots, \sigma_r(v_n)) \ .$$

Ez nyilván folytonos leképezés. Feltehetjük, hogy v_1, v_2, v_3 a külső háromszöglap csúcsai. Elég belátni, hogy az f függvény képhalmaza tartalmazza a $\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; 2\pi; 2\pi; \dots ; 2\pi\right)$ pontot.

2.3. Állítás: *$f : S \mapsto H$ injektív.*

Bizonyítás. Legyen $r, r' \in S$ két különböző pont, legyen I azon i indexek halmaza, amelyekre $r_i < r'_i$. Nyilván $I \neq \emptyset$ és $I \neq \{1; 2; \dots ; n\}$. Legyenek v_i,v_j és v_k három olyan, egymást páronként kívülről érintő körök középpontjai, melyek sugarai rendre r_i,r_j és r_k. Ha r_i nő r_j és r_k pedig nem nő (csökken vagy ugyanaz marad), akkor a v_i-nél levő szög csökken. Ha r_i és r_j nő, r_k pedig nem nő, akkor v_k-nál levő szög nő, így a v_i-nél és v_j-nél levő szögek összege csökken. Emiatt:

$$\sum_{i \in I} \sigma_r(v_i) > \sum_{i \in I} \sigma_{r'}(v_i) \, ,$$

amelyből $f(r) \neq f(r')$ adódik.

$\square$

Legyen $s = (s_1, \dots , s_n) \in bd(S)$ (azaz s az S szimplex határpontja), és legyen I azon i indexek halmaza, amelyekre $s_i = 0$. Ha $r \in S$ ponttal tartunk s-hez, akkor minden háromszögben, amelynek van I-beli indexhez tartozó csúcsa, az I-beli indexekhez tartozó csúcsoknál levő szögek összege π-hez tart. Így:

$$\lim_{r \to s} \sum_{i \in I} \sigma_r(v_i) = |F(I)| \, \pi \, ,$$

ahol $F(I)$ azon háromszögek halmaza a G-beli lapokból, amelyeknek van olyan csúcsa, amely I-beli indexhez tartozik. Legyen $r \in S$ tetszőleges, és I valódi részhalmaza az $\{1; 2; \dots ; n\}$ halmaznak. Nyilván van olyan $s \in bd(S)$, hogy minden I-beli i indexre $s_i = 0$ és ha $i \notin I$, akkor $s_i > r_i$. Ha r-et mozgatjuk s felé az őket összekötő egyenes mentén, akkor $\sum_{i \in I} \sigma_r(v_i)$ nőni fog, és $|F(I)| \, \pi$-hez tart, így

$$\sum_{i\in I}\sigma_r(v_i) < |F(I)|\,\pi\,.$$

Vagyis $f(S)$ része annak az $(n-1)$ dimenziós P poliédernek, melynek minden $x=(x_1,\dots,x_n)$ pontjára teljesülnek az alábbiak:

(i) $$\sum_{i=1}^{n} x_i = (2n-4)\pi\,.$$

(ii) Az $\{1;2;\dots;n\}$ halmaznak minden valódi I részhalmazára:

$$\sum_{i\in I} x_i < |F(I)|\,\pi\,.$$

Tehát $f : S \mapsto P$ injektív, folytonos függvény. Ha $r\in S$ ponttal tartunk $bd(S)$-hez, akkor $f(r)$ minden torlódási pontja $bd(P)$-ben kell legyen (az előbbiek alapján). Ebből következik, hogy $f : S \mapsto P$ szürjektív.

Ezek után elég azt belátni, hogy a $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3};2\pi;2\pi;\dots;2\pi\right)$ pont P-ben van, mert ekkor az őse képe megfelelő vektort ad. Legyen:

$$(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*) = \left(\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3};2\pi;2\pi;\dots;2\pi\right)\,.$$

Nyilván

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = (2n-4)\pi\,.$$

Legyen I nemüres, valódi része az $\{1;2;\dots;n\}$ halmaznak. Ha $|I|=(n-1)$ vagy $|I|=(n-2)$, akkor G minden lapjának legalább egy csúcsa I-ben van, így ez esetben: $|F(I)|=2n-4$.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* \le 2\pi(n-3)+\frac{2\pi}{3}\cdot 2 < (2n-4)\pi\,.$$

Ha $|I| \leq (n-3)$, akkor felhasználjuk az alábbi állítást:

2.4. Állítás: *Ha $I \subset \{1; 2; \ldots; n\}$, $1 \leq |I| \leq n-2$, akkor G-nek legalább $2|I|$ lapja tartalmaz I-beli indexű csúcsot.*

Bizonyítás. Ezt n-re vonatkozó indukcióval bizonyítom.

- Ha |I|=1, akkor mivel a csúcs legalább harmadfokú, készen vagyunk. Ezzel $n = 3$-ra beláttuk az állítást.
- Ha $n \geq 4$, akkor tegyük fel, hogy $(n-1)$-re igaz az állítás. Az indukciós lépés során 3 esetet különböztetünk meg:

  (a) Ha $|I| = n-2$, akkor minden lapnak van I-beli indexű csúcsa, amelyből $|F(I)| = 2n-4$, tehát az állítás triviális.

  (b) Ha van két különböző index: i és j úgy, hogy $v_i v_j \in E(G)$, de $i \notin I$ és $j \notin I$, akkor a $v_i v_j$ él pontra húzásával keletkezett gráf legyen G'. Feltehetjük, hogy $|I| \leq n-3$, így a G'-ben az indukciós feltevés alapján[4] van legalább $2|I|$ megfelelő lap és ezek ősképei G-ben megfelelők lesznek, mivel $i \notin I$ és $j \notin I$.

  (c) Ha nincs két különböző index a fenti feltételeknek megfelelően, akkor $|F(I)| = 2n-4 \geq 2|I|$, mivel minden háromszögben van legalább két I-beli indexű csúcs.

Egyenlőség csak $|I| = n-2$ esetén van. Ha $n \geq 4$ és $|I| \leq n-3$, akkor az indukció szerint egyenlőség csak úgy lehet, ha pontra húztuk az egyik megfelelő élet, és ott is egyenlőség volt[5]. De ott az $|I| = (n-1)-2 = n-3$ eset kellet előforduljon az indukció miatt, és ekkor a pontra húzott él valamelyik oldalán van egy háromszög, amelyet eddig nem számoltunk, mivel szakasszá húzodott össze. Így szigorú egyenlőtlenség lesz ez esetben. Tehát ha $1 \leq |I| \leq n-3$, akkor $|F(I)| > 2|I|$.

□

A 2.4. Állítás alapján:

$$\sum_{i \in I} x_i^* \leq 2\pi|I| < |F(I)|\,\pi\,.$$

[4] $V(G') = n-1$

[5] ekkor a (c) esetben nincs egyenlőség, az (a) eset pedig elő sem fordul

Tehát $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in P$, amivel a 2.1. Tételt beláttuk.

$\square$

Most térjünk rá a 2.1. Tételben szereplő reprezentáció egyértelműségére maximális síkgráfok esetén. Whitney tétele szerint egy 3-összefüggő síkgráf beágyazása a gömbfelszínbe "egyértelmű", vagyis nem függ a gráf síkbarajzolásától, hogy mely élek határolnak együtt egy lapot, és melyek nem. Ezt a tételt később bizonyítjuk. A maximális síkgráfok 3-összefüggő gráfok, mivel összefüggők, és ha lenne 1 vagy 2 elvágó pontunk egy ilyen gráfban, akkor azok a külső tartománynak is csúcsai lennének, így viszont a külső tartomány nem lehetne háromszög. Legyen G egy maximális síkbarajzolható gráf, egy háromszöge pedig $v_1v_2v_3$. Megfelelő inverzióval elérhető, hogy G-hez tartozó reprezentációban v_1,v_2 és v_3 csúcsokhoz tartozó körök egyenlő sugarúak legyenek és az általuk közbezárt tartományban legyen a többi körlemez. Ekkor a bizonyításból következik, mivel $f : S \mapsto P$ injektív, hogy az így kapott reprezentáció hasonlóság erejéig egyértelmű kell legyen.

2.2. Whitney tétele

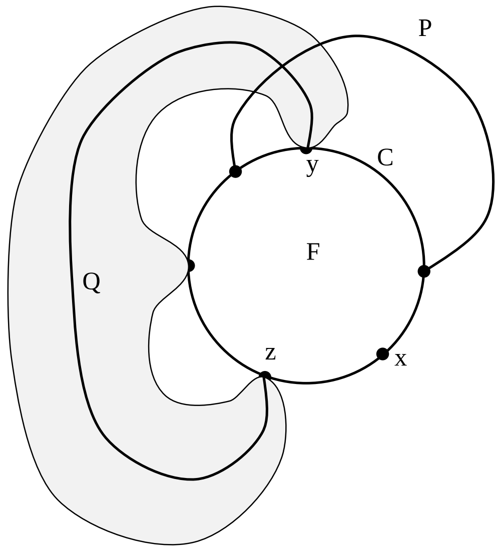
2.5. Definíció. *Legyen adott egy G gráf és ennek egy G_1 részgráfja. A G egy H részgráfját a G_1 hídjának nevezzük, ha a H élei diszjunktak a G_1 éleitől és vagy egyetlen olyan élből áll H, amely élnek mindkét végpontja G_1-ben van, vagy pedig H tartalmazza a $G - G_1$ egy összefüggő komponensét és a komponenst G_1-gyel összekötő összes élet.*

Megjegyzés. A hidak az $E(G) - E(G_1)$ éleket partícionálják, így definiálhattuk volna őket egy ekvivalencia reláció által meghatározott ekvivalencia osztályokként is, ahol a relációnk: $e_1 \sim e_2$ pontosan akkor, ha $e_1 = e_2$ vagy ha van egy G_1-től diszjunkt út, amely összeköti e_1-t és e_2-t. Nyilvánvaló, hogy egy híd mindig összefüggő. Az is látszik, hogy ha G_1 feszített részgráf, akkor a hídjainak a száma $G - G_1$ összefüggő komponenseinek a számával egyezik meg.

2.6. Lemma. *Legyen G egyszerű 3-összefüggő síkgráf, C pedig a G egy köre. Pontosan akkor van egyetlen hídja C-nek, ha C a G egy lapját határolja.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy G legalább 4 csúcsú gráf, ellenkező esetben az állítás triviális. Rögzítsük G egy síkbarajzolását.

Legyen C a G egy F lapjának határán és legyen H a C egy hídja. Ekkor azt akarjuk megmutatni, hogy H tartalmazza a C összes pontját. Ezt indirekt úton mutatjuk meg, tegyük fel, hogy van olyan x csúcsa a G gráfnak, melyre $x \in V(C)$ és $x \notin V(H)$. Nyilvánvaló, hogy $H \cap C$ csak csúcsokból áll, ezek a C kört ívekre osztják, legyenek y és z azok a csúcsok, amelyek közötti íven nyugszik az x csúcs. (Vagyis az y és z közötti egyik ívén a C körnek fekszik az x csúcs és ennek az ívnek a belső pontjai diszjunktak H-tól.) Az y és z csúcsok nem lehetnek szomszédosak a körben; ha H egyetlen él, akkor ez triviális, ha pedig H nem egyetlen élből áll, akkor következik abból, hogy a 3-összefüggőség miatt a körön legalább 3 pontja kell legyen H-nak. Mivel G 3-összefüggő, $G - \{x, y\}$ összefüggő, így kell legyen egy út a $G - \{x, y\}$ gráfban, amely összeköti C-nek a két (x, y) ívét; legyen P egy ilyen út. Legyen Q az x és y csúcsokat H-ban összekötő út. P és Q nem futhatnak az F lap belsejében, így metszik egymást, ami ellentmond a síkbarajzolásnak. (Lásd a 2. ábrát.) Tehát beláttuk, hogy egy hídnak tartalmaznia kell C összes pontját, ebből az is következik, hogy H nem állhat egyetlen élből. Mivel a hidak síkbarajzolása diszjunkt az F laptól, és minden híd tartalmazza C összes pontját, csak egy híd lehet, különben a gráf nem lenne síkbarajzolható.



2. ábra

Ha C nem egy lapja G-nek, akkor vagy vannak csúcsok, amelyeket elválaszt egymástól a síkbarajzolásnál, vagy pedig van olyan hídja C-nek, amely egyetlen élből áll. Az első esetben a $G - C$ gráfnak van legalább 2 összefüggő komponense és így legalább 2 hídja is. A második esetben legyen egy hidat alkotó él két végpontja x és y. A $G - \{x, y\}$ gráf összefüggő kell legyen, x és y pedig a C kört két ívre bontja, (nem lehetnek szomszédosak a körben is, mivel a gráf egyszerű) vagyis kell legyen a két ívet összekötő út a gráfban. Vegyünk egy minimális ilyen utat, ennek nyilván csak az első és utolsó csúcsa van a hídon, vagyis nem tartalmaz élt C-ből, és így van egy híd, amely tartalmazza ezt az utat. Tehát ez esetben is legalább 2 hídja van C-nek.

□

A 2.6. Lemma következménye a korábban már említett Whitney-tétel:

2.7. Tétel. (Whitney) *Egy egyszerű 3-összefüggő síkgráf beágyazása a gömbfelszínbe homeomorfizmus erejéig egyértelmű.*

Bizonyítás. A 2.6. Lemma szerint ha veszünk két beágyazást, akkor abban ugyanazok a körök határolják a lapokat, mivel a hidak száma a híd definíciója szerint független a síkbarajzolástól. A két gömbbeágyazást két cellakomplexusnak tekintjük, az egy dimenziós vázuk a két gráf. A két egy dimenziós váz homeomorf (mivel a gráfok izomorfak), és a 2 dimenziós váz ragasztó leképezései is ugyanazok, mivel ugyanazok az élek határolják a lapokat, így a két komplexus homeomorf.

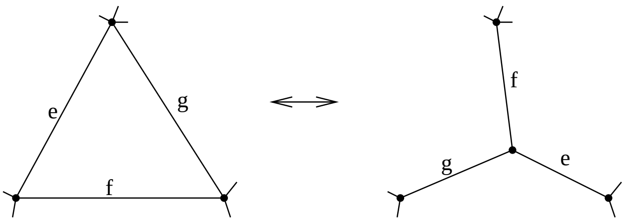
□

2.3. Steinitz-tétel

A Steinitz-tétel bizonyításához szükségünk lesz a ΔY és az $Y\Delta$-transzformációk fogalmára.

2.8. Definíció. *Legyen G egy síkbarajzolható gráf. Egy ΔY-transzformáció a G egy háromszöglapját cseréli le egy 3-ágú csillagra úgy, hogy a lap határoló éleit eltörli, és hozzávesz egy új csúcsot a gráfhoz, amelyet a lap 3 csúcsával köt össze.*

Egy $Y\Delta$-transzformáció ennek a transzformációnak az "inverze", egy harmadfokú csúcsot elhagy a gráfból és a szomszédait összeköti egymással.



3. ábra
Az ábrán jelölt módon létezik egy "természetes" megfeleltetés a háromszög és a 3-ágú csillag élei között.

Megjegyzés. Whitney tétele miatt a 3-összefüggő gráfban nem függ a síkbarajzolástól, hogy a gráf mely háromszögeire lehet alkalmazni a transzformációt. Ha a gráf nem 3-összefüggő, akkor egy rögzített síkbarajzolás után fogjuk alkalmazni a transzformációkat.

Nyilvánvaló, hogy a két transzformáció a síkbarajzolhatóságot nem befolyásolja. Az is látszik, hogy a két transzformáció egymás "duálisa", vagyis ha egy gráfban végrehajtjuk az egyiket, akkor a duális gráfban éppen a másik transzformációt hajtottuk végre.

Ezeket a transzformációkat síkbarajzolható, 2-összefüggő, egyszerű gráfokra fogjuk alkalmazni. Egy $Y\Delta$-transzformáció során keletkezhetnek többszörös élek, ezek közül az egyiket a transzformáció után törölni kell, hogy a gráf egyszerű maradjon. Egy ΔY-transzformáció során pedig keletkezhetnek másodfokú csúcsok, ami a duális gráfban jelentene többszörös éleket. Amikor 3-összefüggő gráfokkal dolgozunk, az ilyen csúcsokat is törölni kell és a szomszédait összekötni. A másodfokú csúcsból induló két élet párhuzamos éleknek nevezzük, az előbbi művelet pedig a párhuzamos élek egyszerűsítése.

2.9. Definíció. *Az előző két fajta transzformációk elvégzését, vagyis a többszörös élek egyszeresre cserélését a gráfban, illetve a duálisában, SP-redukciónak[6] nevezzük.*

[6]serial-parallel reduction

Egyszerű ΔY-transzformáció alatt egy ΔY-transzformációt és az utána elvégzett SP-redukciót értjük. Ugyanígy definiálhatjuk az egyszerű $Y\Delta$-transzformációt is.

A következő lemma a ΔY és $Y\Delta$-transzformációk alkalmazhatóságát biztosítja; azt mondja meg, hogy az összefüggőség milyen feltételekkel marad meg a gráfban:

2.10. Lemma.

(i) *Legyen G egy 2-összefüggő gráf, és legyenek egy harmadfokú v csúcsból induló élei a gráfnak $\{e, f, g\}$. Ha ezek az élek nem párhuzamosak*[7]*, akkor a gráf egy v csúcsot lecserélő $Y\Delta$-transzformáció után ismét 2-összefüggő lesz.*

(ii) *Legyen G egy 3-összefüggő egyszerű gráf,*[8] *és legyenek egy harmadfokú v csúcsból induló élei a gráfnak $\{e, f, g\}$. Ha végrahajtunk egy $Y\Delta$-transzformációt erre a 3-ágú csillagra, és ezután egy SP-redukciót a kapott gráfra, akkor a kapott gráf egyszerű 3-összefüggő lesz.*

Bizonyítás. A definíciókból adódóan igen egyszerű. Vegyünk egy $Y\Delta$-transzformációt $G \mapsto G'$. Ha van egy elválasztó, 1 vagy 2 pontú halmaz G'-ben, akkor ugyanez a halmaz elválasztó G-ben is. Az egyetlen probléma, hogy egy $Y\Delta$-transzformáció létrehozhat többszörös éleket, de az SP-redukció ezeket is megszünteti.

□

A dualitás segítségével ebből rögtön adódik a ΔY-transzformációk hatása az összefüggőségre. Az alábbi párok feleltethetők meg egymásnak a dualitás segítségével:

síkbarajzolható gráf G	$\longleftrightarrow$	duális gráf G^*
párhuzamos élek egyszerűsítése	$\longleftrightarrow$	többszörös élek egyszerűsítése
k-összefüggő gráf	$\longleftrightarrow$	k-összefüggő gráf
háromszöglap	$\longleftrightarrow$	3-ágú csillag
ΔY-transzformáció	$\longleftrightarrow$	$Y\Delta$-transzformáció

A poliéderek szempontjából is fontos szerepe van a dualitásnak, mivel egy poliéder gráfjának duálisa megegyezik a poláris poliéder gráfjával:

$$G(P)^* = G(P^\Delta)\,.$$

[7] v-nek 3 különböző szomszédja van

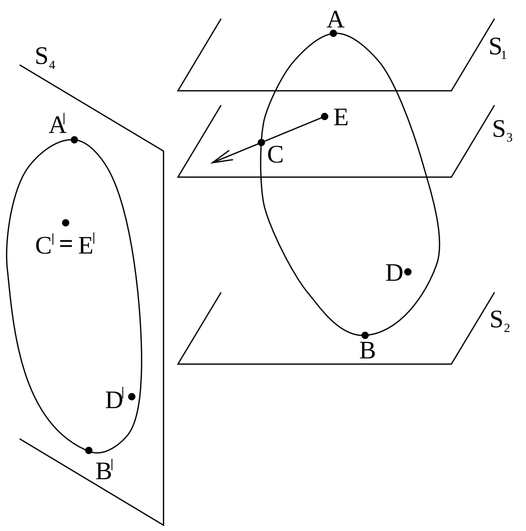
[8] vagyis nincsenek párhuzamos élek, és minden pont foka legalább 3

Megjegyzés. A legfeljebb 4 csúcsú 3-összefüggő gráfok a K_1,K_2,K_3 és K_4 teljes gráfok.

2.11. Tétel. (Steinitz) *G egy 3-dimenziós konvex poliéder gráfja akkor és csak akkor, ha G egyszerű, síkbarajzolható, 3-összefüggő gráf (és legalább 4 csúcsa van).*

Bizonyítás. Ha G egy konvex P poliéder gráfja, akkor G legalább 4 csúcsú és a síkbarajzolhatóság is könnyen látható a bevezetésben említettek szerint. Emiatt csak a G gráf 3-összefüggőségét bizonyítjuk. Az nyilvánvaló, hogy G összefüggő.

Indirekt úton bizonyítunk, tegyük fel, hogy G nem 3-összefüggő gráf. Így van G-ben 1 vagy 2 pontú elvágó H halmaz.[9] Legyenek a poliédernek a H halmaz elemeihez tartozó csúcsai C és D, ha H két pontból áll, és C, ha H 1 pontú halmaz. Van a poliédernek olyan A és B csúcsa, hogy a hozzájuk tartozó csúcsai G-nek a $G - H$ gráf különböző összefüggő komponensébe esnek. Projektív transzformációval elérhetjük, hogy ezekben a csúcsokban húzott olyan támaszhipersíkok közé essen a poliéder, amelyek egymással párhuzamosak, és a poliédert csak az A illetve B pontokban metszik. Legyenek az előbbi A- és B-beli támaszsíkok S_1 és S_2; az ezekkel párhuzamos, C ponton átmenő sík pedig legyen S_3. Az $S_3 \cap P$-nek van olyan relatív belső E pontja, amelyre a CE egyenes nem párhuzamos a poliéder egyetlen lapjával sem. (Nincs S_3 síkkal párhuzamos lap mivel S_1 és S_2 ezzel párhuzamos érintő.) Vetítsük le merőlegesen a P poliédert egy CE egyenesre merőleges S_4 síkra. Ekkor a vetület egy konvex sokszög lesz, amelynek relatív belső pontja a C pont képe. Az A és B pontok nyilván a sokszög relatív határán vannak.



4. ábra

[9]Ha van elvágó csúcs G-ben, akkor mindenképpen 1 elemű H halmazt válasszunk.

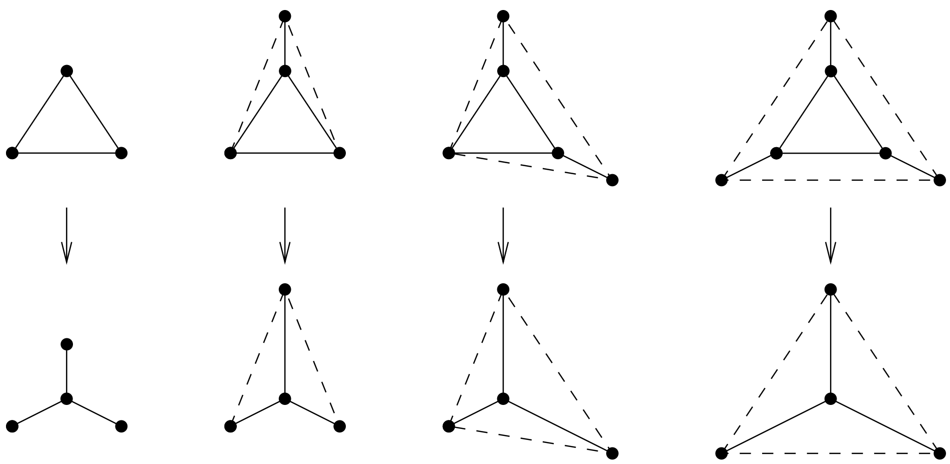
Az A' és B' pontok[10] között van két diszjunkt út a sokszög határán, amelyek közül legfeljebb egyet vághat el a H halmaz képe, mivel C' belső pont. Az el nem vágott út őspépe pedig a P poliéder éleinek egy lánca az A és B között, amely nem tartalmazza C és D pontokat. Ez ellentmondás, mivel H elválasztotta az A és B pontokhoz tartozó csúcsait G-nek. Az A' és B' pontok közötti útnak azért létezik megfelelő őspépe, mert a vetítés képének határán minden pont őspépe egyértelmű kell legyen, különben EC egyenes párhozamos lenne a poliéder valamely lapjával. Ezzel a 2.11. Tétel feltételeinek szükségességét beláttuk.

Megjegyzés. A bizonyítás könnyen módosítható úgy, hogy n-dimenziós politópok gráfjának n-összefüggősége adódjon.

A 2.11. Tétel másik felének bizonyításánál a lépések a következők lesznek:

- A ΔY és $Y\Delta$-transzformációk megőrzik a "realizálhatóságot".
- Minden egyszerű, síkbarajzolható és 3-összefüggő gráf redukálható K_4-re egyszerű ΔY és $Y\Delta$-transzformációkkal.

Egy egyszerű ΔY-transzformáció a 2.10. Lemma alapján megőrzi a 3-összefüggőséget. 4 féle különböző egyszerű ΔY-transzformáció van aszerint, hogy a lecserélendő háromszögben hány harmadfokú csúcs van:

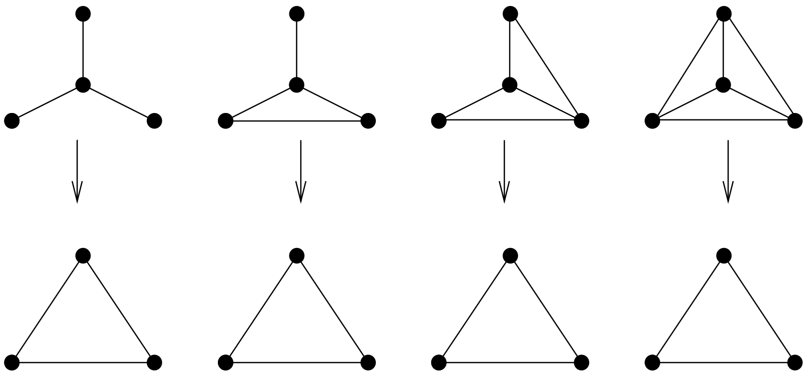


5. ábra

A transzformáció szempontjából nem számít, hogy az ábrán a szaggatott vonallal rajzoltak a gráfban élek vagy sem.

Hasonlóan, 4 fajta egyszerű $Y\Delta$-transzformáció van, vesszük a harmadfokú csúcsot, és megnézzük, hogy a gráfban a szomszédai között hány él megy. Így ugyanazt az osztályozást kapjuk, mint ha a 4 féle egyszerű ΔY-transzformáció hatását vizsgálnánk a duális gráfban.

[10]Egy M pont képét a vetítés során M'-vel jelölöm.



6. ábra

2.12. Lemma. *Legyen G egy 3-összefüggő síkgráf és legyen G' a G-ből egyszerű ΔY vagy $Y\Delta$-transzformációval keletkező gráf. Ha G' egy konvex poliéder gráfja, akkor G is az.*

Bizonyítás. A dualitás/polaritás segítségével elég csak a ΔY-transzformációkat vizsgálni. Ezekre pedig egyszerű az állítás. Legyen P' a G' gráfhoz tartozó poliéder. Ha SP-redukcióval töröltünk egy másodfokú csúcsot, akkor P'-ben a neki megfelelő él felezőpontja legyen ez a csúcs. Ezután vegyük a P' politóp összes csúcsát a 3-ágú csillag közepéhez tartozó csúcs kivételével és vegyük még hozzá az előbb definiált új csúcsokat (ha vannak ilyenek). Az így kapott ponthalmaz konvex burka megfelelő P poliédert alkot, vagyis P poliéder gráfja G lesz. Lényegében a fenti eljárás a P' poliédernek a csillag középpontjához tartozó csúcsát levágta egy megfelelő síkkal. A 3-összefüggőségből következik, hogy a transzformáció után csak a "csillag" végpontjaiban lehettek másodfokú csúcsok, így ezekhez a P' poliédernek különböző élei fognak tartozni.

□

Ezentúl legalább 2-összefüggő gráfokkal fogunk foglalkozni, és csak akkor engedünk meg egy ΔY vagy $Y\Delta$-transzformációt alkalmazni, ha a kapott gráf is legalább 2-összefüggő lesz.

2.13. Definíció. *Egy G síkgráf ΔY-redukálható G'-re, ha a G' a G-ből elérhető ΔY és $Y\Delta$-transzformációk, valamint SP-redukció segítségével.*

2.14. Definíció. *G gráf minorja a G' gráf, ha megkapható G' a G-ből a következő műveletek (akárhány egymás utáni) alkalmazásával:*

(i) *Törölhetünk egy élet.*

(ii) *Szomszédos csúcsokat pontra húzhatunk.*

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy az előbbi két fajta művelet egymással felcserélhető. (Mivel most a többszörös éleket nem egyszerűsítjük.)

Ezután azt fogjuk megmutatni, hogy minden 3-összefüggő legalább 4 csúcsú síkgráf ΔY-redukálható K_4-re, ebből az előző 2.12. Lemma alapján következik a tétel.

2.15. Lemma. *Ha a G síkgráf ΔY-redukálható K_2-re, akkor bármely 2-összefüggő, legalább 2 csúcsú H minorja is az.*

Megjegyzés. Ha legalább 3 csúcsú gráfokon hajtjuk végre a redukciós lépéseket, akkor (mivel a 3 csúcsú 2-összefüggő gráfok csak a K_3 és a belőle többszörös élek készítésével kapható gráfok) a gráfunk ΔY-redukálható lesz K_3-ra is. Ha legalább 4 csúcsú, 3-összefüggő gráfokra hajtjuk végre, akkor pedig ugyanígy a gráfunk ΔY-redukálható lesz K_4-re is.

Bizonyítás. Ezt a G-beli redukciós lépések számára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. A kezdőlépés triviális, ha nincs redukciós lépés, akkor $G \equiv K_2$, így $H \equiv K_2$. Föltehetjük, hogy H-ban nincsenek többszörös, vagy párhuzamos élek különben ezeket egyszerűsíthetjük, nyílván így is G-nek egy 2-összefüggő, legalább 2 csúcsú minorját kapjuk. Ha a G-beli redukció első lépése SP-redukció, akkor H az első lépés után kapott gráfnak is a minorja lesz az előbbi feltevés szerint, így az indukciós lépés működik. Egyébként a dualitás segítségével feltehetjük, hogy az első lépés egy ΔY-transzformáció: $G \to G'$. Legyenek e, f és g az a három éle G-nek, amelyek a lecserélendő háromszöget alkotják.

Ha mindhárom él H-ban is benne van, akkor hajtsuk végre ugyanezt a transzformációt H-ban is: $H \to H'$. Ezután H' ΔY-redukálható K_2-re az indukció szerint és így H is az.

Ha van olyan él, amely nincs benne H-ban, akkor nézzük meg, mi történhetett vele. Mivel H egyszerű, nem lehetséges, hogy csak egy vagy két él pontra húzása történt, vagy mindhármat pontra kellett húzni, vagy valamelyiket törölni kellett. Ha mindhármat pontra húztuk, akkor is feltehetjük, hogy az egyiket töröltük és utána a másik kettőt pontra húztuk. Mivel ezek a műveletek felcserélhetők, mindkét esetben feltehetjük, hogy egy élet töröltünk először ezek közül, legyen ez az él e. De ekkor ugyanazt a H minort kapjuk G'-ben, ha abban az e-hez tartozó élt[11] pontra húzzuk és a többi G-ben szükséges lépést elvégezzük, mivel:

$$G - \{e\} = G' / e \ .$$

Így ismét alkalmazható az indukciós lépés.

□

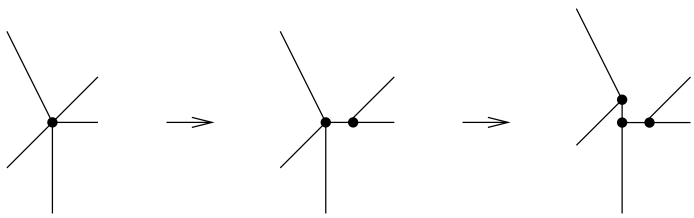
[11] a definíciónál az ábrán jelölt "természetes" megfeleltetéssel

2.16. Definíció. *Legyen G(m,n) az nxm-es négyzetrácsnak megfelelő gráf, vagyis az a gráf, melyre:* $|V(G(n,m))| = nm$, *és a csúcsait (i,j) számpárokkal indexelve (ahol* $1 \leq i \leq n$ *és* $1 \leq j \leq m$ *egészek) két csúcs pontosan akkor van összekötve, ha a nekik megfelelő* (i_1, j_1) *és* (i_2, j_2) *számpárokra teljesül, hogy* $|i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 1$.

2.17. Lemma. *Ha G síkgráf, akkor a minorja valamely* $G(m,n)$ *gráfnak.*

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy ha $m' > m$ és $n' > n$, akkor a $G(m,n)$ gráf minorja a $G(m',n')$ gráfnak.

Bizonyítás. Vegyük G egy síkbarajzolását. Ha van egy v csúcs, amelynek a foka 3-nál több, akkor ezt osszuk ketté, egy kis környezetében vegyünk fel még egy új u csúcsot valamelyik tartomány belsejében, majd töröljük azt a két élet, ami az előbbi tartományt határolja és v az egyik végpontja, végül ennek a két élnek a másik végpontjával és v-vel kössük össze az új u csúcsot. Triviális, hogy a kapott gráf síkbarajzolható, és G a minorja. Ennek a műveletnek az ismétlésével elérhető, hogy a gráf legfeljebb harmadfokú csúcsokból álljon.



7. ábra

Elég mutatni egy beágyazását a G' gráfnak egy véges négyzetrácsba oly módon, hogy a gráf csúcsai a négyzetrács csúcsaiba menjenek, mert ekkor a beágyazás képeként előálló G'' gráfnak nyilvánvalóan minorja lesz a G' gráf (csak élek pontra húzásával előállítható), és a G'' gráf minorja lesz a megfelelő $G(m,n)$ gráfnak. Ha van egy ilyen G'' gráf, akkor a következő algoritmus előállítja a G''-t a $G(m,n)$ gráf minorjaként:

Kezdetben legyen $G_0 = G(m,n)$. A már megkonstruált G_i gráfunk olyan, amelynek része a G'' gráf, és amelynek nincs olyan izolált pontja, amely nem csúcsa a G'' gráfnak. Ha $G_i \not\equiv G''$, akkor van olyan él G_i-ben, amely nem éle G''-nek, vegyünk egy ilyen élet. Ha ennek valamelyik végpontja elsőfokú, akkor húzzuk pontra, ha pedig egyik sem, akkor töröljük ezt az élet; a kapott gráf legyen G_{i+1}. Ennek az algoritmusnak véges sok lépésben vége lesz, mivel az élek száma minden lépésben csökken 1-gyel, a végén kapott gráf G'' kell legyen.

Egy ilyen beágyazást könnyű csinálni, először egy feszítőerdőt kell beágyazni, majd pedig az éleket egymás után, a síkbarajzolásnak megfelelően. Ha valamely élre ezt már nem tudjuk megcsinálni, akkor pedig a rács sűrítésével (a rács éleinek felére csökkentésével) már ismét folytatható az eljárás. A feszítőerdő beágyazása pedig triviális.

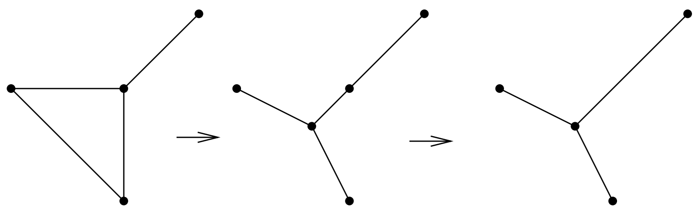
Koebe reprezentációs tételével is egyszerűen mutatható a G' gráfnak (a korábbi feltételeknek megfelelő) beágyazása egy négyzetrácsba. A gráfot reprezentáljuk körrendszerrel, a csúcsok a körök középpontjai legyenek. Elég az éleket lecserélni a megfelelő csúcsok között futó, "vízszintes" és "függőleges" szakaszokból álló töröttvonalakra, ekkor az összes töröttvonal, és az összes csúcson áthaladó "vízszintes" és "függőleges" egyenesek együtt egy véges téglalaphálót határoznak meg, amelybe a fentieknek megfelelően van beágyazva a gráfunk. Elég a körökön belül összekötni az érintési pontokat a körök középpontjával az előbbieknek megfelelő módon. Egy körön belül pedig triviálisan összeköthető a legfeljebb 3 érintési pont a középponttal az előbbieknek megfelelő töröttvonalakkal.

□

2.18. Lemma. *Ha m és n legalább 3, akkor a $G(m,n)$ gráf ΔY-redukálható K_4-re.*

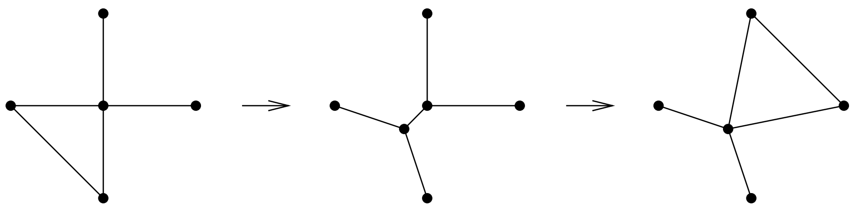
Bizonyítás. A következő két alapműveletet fogjuk alkalmazni:

(1) Ha van egy él, amely egy harmadfokú csúcs két végpontját köti össze, akkor azt az élet törölhetjük egy ΔY-transzformáció és egy SP-redukció egymás után alkalmazásával.



8. ábra

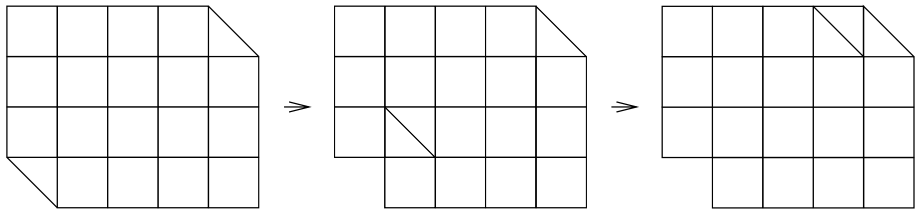
(2) Ha van egy él amely összeköti egy negyedfokú csúcs két szomszédját, akkor ez kicserélhető a negyedfokú csúcs két másik szomszédját összekötő élre egy ΔY majd egy $Y\Delta$-transzformáció segítségével.



9. ábra

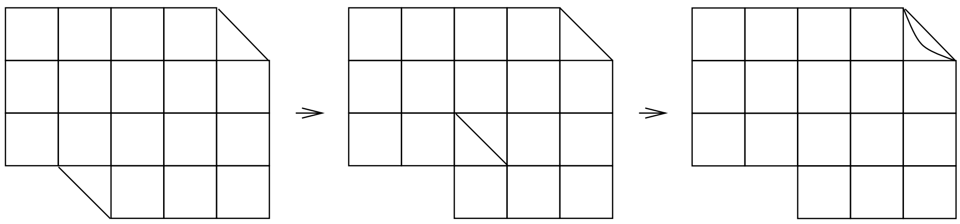
Ezen transzformációk alapján a következő módon redukáljuk a $G(m,n)$-gráfot:

- Először a "jobb-felső" sarokban alkalmazunk egy SP-redukciót.
- Ezután, ha $m \geq 4$, akkor törlünk egy sort a következők szerint. A bal alsó sarokban végrehajtunk egy SP-redukciót, majd a kapott átlós élet a (2) művelet segítségével mozgatjuk, amíg "eléri a fölső, vagy a jobb szélét" a hálónak.



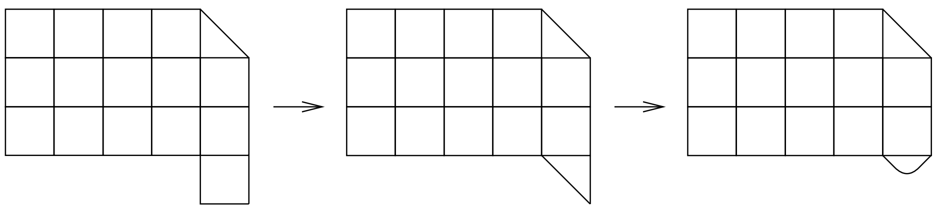
10. ábra

Ekkor az él vagy párhuzamos a "jobb-felső átlós" éllel és egy SP-redukcióval törölhető, vagy egy harmadfokú csúcs két végpontját köti össze és így az (1) művelettel törölhetjük.



11. ábra

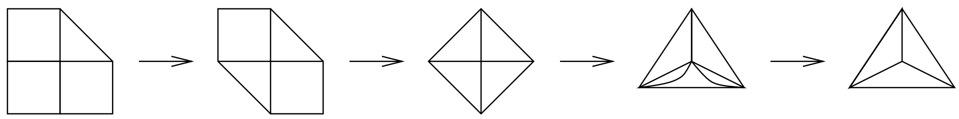
Ezzel a módszerrel az "alsó sorban levő négyzeteket" egymás után törölhetjük. A legutolsó négyzetnél csak két SP-redukciót kell végrehajtani.



12. ábra

- Hasonlóan törölhetjük az oszlopokat, amíg $n \geq 4$.

- Végül a kapott gráfból a következő ábra szerint kaphatjuk meg K_4-et:



13. ábra

Ezzel az eljárással tehát minden $G(m, n)$ gráf K_4-re redukálható.

$\square$

Az előző három lemmából a 2.15. Lemmához írt megjegyzéssel következik, hogy minden 3-összefüggő síkgráf ΔY-redukálható K_4-re, mivel a transzformációink "megőrzik" a 3-összefüggőséget.

Ezzel a Steinitz-tétel bizonyítását befejeztük.

$\square$

A műveleteket úgy is elvégezhetjük, hogy a poliéderek csúcsai mind racionális koordinátájúak legyenek, a bizonyítás módosításával az alábbi tétel is belátható:

2.19. Tétel. *Minden $P \subset \mathbb{R}^3$ konvex poliéder tetszőlegesen közelíthető racionális csúcsú konvex poliéderekkel, amelyek kombinatorikusan ekvivalensek P-vel.*

$\square$

A közelítést itt úgy értjük, hogy a megfelelő csúcsok távolsága tetszőleges pozitív konstansnál kisebb.

Végezetül megemlítenénk két tételt, amelyek a 2.11. Tételhez hasonlóan bizonyíthatók és azt mutatják meg, hogy milyen kombinatorikus feltételek szükségesek ahhoz, hogy a poliéder szimmetrikus legyen.

2.20. Tétel. *Egy G gráfhoz pontosan akkor létezik középpontosan szimmetrikus konvex poliéder, amelynek G a gráfja, ha G legalább 4 pontú 3-összefüggő síkgráf és van olyan ϕ másodrendű automorfizmusa, amely minden $v \in V(G)$ csúcsra teljesíti, hogy v és $\phi(v)$ elválaszthatók egy körrel G-ben.*[12]

$\square$

2.21. Tétel. *Egy G gráfhoz pontosan akkor létezik egy síkra szimmetrikus konvex poliéder, amelynek G a gráfja, ha G legalább 4 pontú 3-összefüggő síkgráf és van olyan ϕ másodrendű automorfizmusa, amely a lapok irányítását megfordítja.*

$\square$

[12]Az elválasztás 3-összefüggő síkgráfokra egyértelmű, nem függ a síkbarajzolástól.

3. Élérintő poliéderek

3.1. 3-összefüggő síkgráfok reprezentációja

3.1. Tétel. *Legyen G egy (legalább 4 pontú) 3-összefüggő síkgráf, egy előre meghatározott lapja legyen a külső (végtelen) tartomány. Ekkor van olyan körrendszer a síkon, hogy a gráf csúcsainak és lapjainak a körrendszer egy-egy eleme felel meg, és teljesülnek az alábbiak:*

(1) *Különböző csúcsokhoz tartozó körök nem metszik egymást, és különböző lapokhoz tartozó körök sem metszik egymást.*

(2) *G-nek minden e éléhez tartozik a sík egy pontja, amelyen a körrendszer 4 eleme halad át, az él két végpontjához tartozó, és az él két oldalán levő lapokhoz tartozó körök. Ezt a pontot "él-pont"-nak fogjuk hívni.*

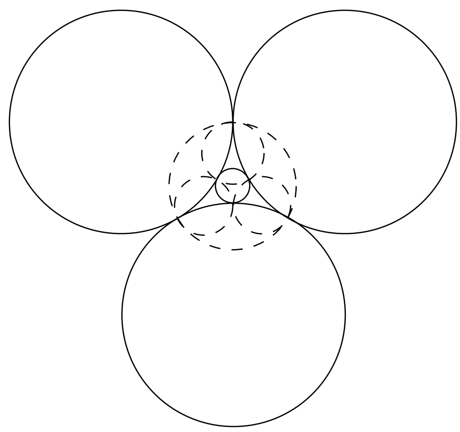
(3) *Egy laphoz és egy csúcshoz tartozó kör csak akkor metszi egymást, ha a csúcs a lap határán van.*

(4) *A külső laphoz tartozó kör által határolt körlemez tartalmazza az összes többi laphoz tartozó kört, és ezen a körön kívül semelyik kör nem tartalmaz a belsejében egy másik kört.*

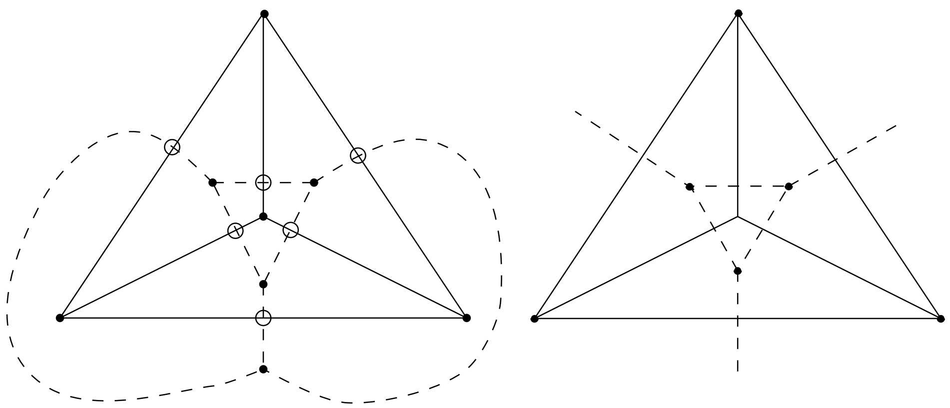
(5) *Minden él-pontban a két csúcshoz tartozó kör derékszögben metszi a két laphoz tartozó kört.*

Ez a reprezentáció inverziótól és a sík hasonlósági transzformációitól eltekintve egyértelmű.

Megjegyzés. Vegyük a gráfnak és a duálisának olyan síkbarajzolását, ahol a gráf éleit metszik a duális gráf megfelelő élei. A metszéspontoknak az él-pontok feleltethetők meg. Készítsünk egy új gráfot, amelynek csúcsai a gráf és a duális gráf csúcsai valamint az él-pontok, az élei pedig az él-pontokat kötik össze a nekik megfelelő négy csúccsal. Az így kapott gráfnak egy síkbarajzolását mutattuk meg az előbb. A síkbarajzolásnál a gráf lapjai négyszöglapok lesznek, egy ilyen lapnak 2 él-pont, valamint egy eredeti és egy duális gráfbeli csúcs lesz a csúcsa. Ha a tétel szerinti reprezentációt készítettük el, akkor ezek a lapok a külső tartományhoz tartozó lapokon kívül nyilván deltoidok lesznek, két-két oldaluk a megfelelő csúcshoz és laphoz tartozó körök sugaraival egyezik meg. A bizonyítás során ilyen deltoidokat konstruálunk és ragasztunk össze úgy, hogy a végén a kapott hálózat az előbbi gráfot adja ki (a végtelen tartománynál levő lapok kivételével). A megfelelő csúcsokba a hálózat által már definiált sugarú köröket írva megkapjuk a szükséges reprezentációt. A tétel bizonyítása némi előkészületet igényel.



14. ábra
Az ábrán K_4 reprezentációja látható a tételnek megfelelő körrendszerrel. A lapokhoz tartozó körök a szaggatott vonallal rajzoltak.



15. ábra
A bal oldali ábrán egy síkbarajzolható gráf (K_4), és a duálisának egy együttes síkbarajzolását láthatjuk; az él pontokat üres körökkel jelöltem. A jobb oldali ábrán a reprezentációból adódó együttes síkbarajzolás látható, ahol a gráf élei a duális gráf megfelelő éleire merőlegesek. Látható, hogy minden véges tartomány deltoid.

3.2. Definíció. *Legyen G egy 3-összefüggő legalább 4 pontú síkgráf. Ennek a csúcs-lap illeszkedési gráfja az a $\hat{G}$ gráf, amelynek csúcsai G csúcsai és lapjai (beleértve a külső lapot is), és kössünk össze két csúcsot, ha az egyik G egy csúcsának, a másik G egy lapjának felel meg, és a megfelelő csúcs a megfelelő lap határán van.*

Nyilvánvaló, hogy $\hat{G}$ egy síkbarajzolható páros gráf és minden négyszöglapja G egy élének feleltethető meg. Az is látszik, hogy G csúcsainak megfelelő csúcsok foka $\hat{G}$-ben ugyanakkora, mint az eredeti csúcs foka G-ben.

3.3. Lemma. *Legyen G egy 3-összefüggő síkbarajzolható gráf és legyen $\hat{G}$ a csúcs-lap illeszkedési gráf.*

(1) *Ha $\hat{G}$-nak v darab csúcsa van, akkor az éleinek száma $2v - 4$. Így van harmadfokú csúcsa, legyen egy ilyen csúcs x.*

(2) *Legyen $S \subset V(\hat{G})$ nem üres halmaz, amely nem tartalmazza x-et és annak egyetlen szomszédját sem. Ekkor S legfeljebb $2|S| - 2$ élét feszíti ki $\hat{G}$-nak, és legalább $2|S| + 1$ élére illeszkedik.*

Bizonyítás.

Az (1) bizonyítása egyszerűen következik az Euler-formulából.

A (2) első felének bizonyításához legyen $\hat{G}(S)$ az S által G-ben kifeszített részgráf. $\hat{G}(S)$ is síkgráf, vegyük ennek egy beágyazását a síkba. Nyilvánvaló, hogy $\hat{G}(S)$ páros gráf is, így ha legalább 2 éle van, akkor minden lapja legalább 4 éllel érintkezik,[13] amelyből ismét az Euler-formula segítségével adódik, hogy $\hat{G}(S)$-nek legfeljebb $2|S| - 2$ éle van. Ha $\hat{G}(S)$-nek legfeljebb 1 éle van, akkor az állításnak ez a fele triviális.

A (2) második felének bizonyításához legyen $\bar{S} = V(\hat{G}) - S$. Ha S-beli csúcsokkal legfeljebb $2|S|$ él érintkezik, akkor az (1) miatt $\hat{G}(\bar{S})$-nak legalább $2|\bar{S}| - 4$ éle van. Az előbbiekhez még nem használtuk ki a (2) különleges feltételeit, így mindkét esetben egyenlőség kell legyen. Vagyis S-beli csúcsokkal pontosan $2|S|$ él érintkezik és $\hat{G}(\bar{S})$-nak $2|\bar{S}| - 4$ éle van. A feltételek szerint $\bar{S}$ legalább 4 elemű, így $\hat{G}(\bar{S})$-nak legalább 2 éle van, ami azt jelenti, hogy $\hat{G}(\bar{S})$ minden lapja négyszög. Valamelyik ilyen lap tartalmazza S-nek egy elemét, így ennek a lapnak a csúcsai elválasztó halmazt alkotnak $\hat{G}$-ban, mivel nem lehet $\bar{S}$ összes eleme ezen a lapon. Ezek az élek G két szomszédos csúcsához és két szomszédos lapjához tartoznak, de így nem szeparálhatják $\hat{G}$-ot, mivel G háromszorosan összefüggő.

□

Megjegyzés. Ha $|S| > 2$, akkor a felső korlát (2)-ben csökkethető $2|S| - 4$-re.

Most már elkezdhetjük a 3.1. Tétel bizonyítását.

Bizonyítás. Feltehetjük a 3.3. Lemma (1) állítása alapján, hogy G külső lapja háromszög, mivel vagy G-ben vagy G^*-ban van harmadfokú csúcs, ennek megfelelően a másikuk tartalmaz egy háromszöglapot. Ha kell áttérhetünk a gráf duálisára és feltehetjük, hogy a háromszöglap a külső tartományt határolja, mivel ha ez esetben tudunk a tételnek megfelelő reprezentáns rendszert mutatni, akkor az a körrendszer inverzióval az eredeti síkbarajzolásnak megfelelő reprezentáns rendszerré tehető.

Térjünk rá a bizonyítás előtt leírt deltoidokra és vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételekkel ragaszthatók megfelelően egymáshoz.

[13]kétszer számoljuk, ha egy lap egy élnek "mindkét oldalával" érintkezik

Legyen $v = |V(\hat{G})|$, és $\hat{G}$ minden α csúcsához a külső F_0 tartományhoz tartozó csúcs kivételével rendeljünk egy r_α változót, amelynek értéke majd az α-hoz tartozó kör sugara lesz. A külső tartomány három, a, b és c csúcsához hozzárendelt r_a, r_b és r_c változók értéke majd a végén 1 lesz, minden más r_α értéke ezek által egyértelműen meg lesz határozva. Legyen r az $(r_\alpha)_{\alpha\in\hat{G}-F_0}$ vektor.

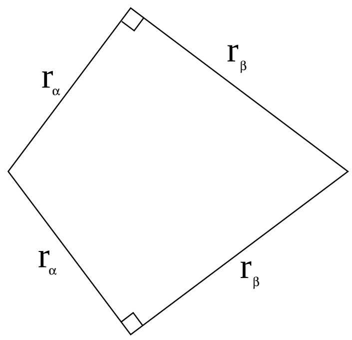
Definiáljuk a $\theta : \left(\mathbb{R}^+\right)^{v-1} \mapsto \left(\mathbb{R}^+\right)^{v-4}$ függvényt a következőképpen:

$$\theta(r) = \left(\theta_\alpha(r)\right)_{\alpha\in\hat{G}-\{F_0,a,b,c\}} ,$$

ahol

$$\theta_\alpha(r) = \sum_{\beta\perp\alpha} \operatorname{Arctg}\left(\frac{r_\beta}{r_\alpha}\right) ,$$

az összegzés α összes $\hat{G}$-beli szomszédjára fut végig.



16. ábra
A $K_{\alpha\beta}$ deltoid.

Legyen $K_{\alpha\beta}$ az r_α és r_β oldalú deltoid. Ha húzunk két r_α és r_β sugarú, egymást merőlegesen metsző kört, akkor a két kör középpontja és a két metszéspont által alkotott négyszög éppen a $K_{\alpha\beta}$ lesz. Ebben a két r_α hosszúságú oldalak által bezárt szög:

$$2 \operatorname{Arctg}\left(\frac{r_\beta}{r_\alpha}\right) .$$

Így $\theta_\alpha(r)$ az összes olyan deltoidok α-hoz tartozó csúcsánál levő szögei összegének a fele, amelyeknek van ilyen csúcsuk. Ebben a pontban a deltoidok jól ragaszthatók, ha az ehhez a csúcshoz tartozó szögösszeg 2π, így szükséges, hogy $\theta(r) = \underline{\pi}$ teljesüljön, ahol $\underline{\pi}$ az a vektor, amelynek minden koordinátája π. Ez a feltétel elégséges is, vagyis ha teljesül, akkor a deltoidok jól ragaszthatók a 2.2. Állítás felhasználásával[14]. Így a gráfnak és a duálisának egy együttes síkbarajzolását fogjuk megkapni, ezek után el kell készíteni az (1)–(5) feltételeknek megfelelő körrendszert. Előbb azonban azt mutatjuk meg, hogy van olyan $r \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{v-1}$, melyre $\theta(r) = \underline{\pi}$.

Egy iterációs eljárás segítségével elő fogunk állítani egy megfelelő r vektort. Az eljárás 2 lépcsőből fog állni, az (i) lépésben egy $r^i = \left(r^i_\alpha, r^i_\beta, \dots\right)$ vektorsorozatot képezünk úgy, hogy ha bármely $\theta_\alpha(r^i)$ koordináta kisebb mint π, akkor r^i_α értékét megfelelően csökkentve kapjuk r^{i+1}_α értékét. Ennek a sorozatnak a határértékeként előálló r értéke olyan lesz, hogy minden koordinátája pozitív, és minden lehetséges α esetén $\theta_\alpha(r) \geq \pi$. Az (ii) lépésben, ha valamely $\theta_\alpha(r) > \pi$, akkor r_α növelésével elérjük, hogy egyenlőség teljesüljön. Ekkor be kell látni, hogy r értéke korlátos marad az eljárás után, és a feltételeknek megfelelő lesz. A bizonyítás végén az is adódik, hogy az (ii) lépésben a konvergencia ellenőrzése fölösleges.

Először nézzük meg hogyan változik a θ függvény, amikor r-nek egyetlen koordinátáját változtatjuk. Ha növeljük r_α értékét míg minden más változó értéke fixen marad, akkor $\theta_\alpha(r)$ értéke csökken, ugyanakkor $\theta_\beta(r)$ értéke nő minden olyan β-ra, amely α szomszédja $\hat{G}$-ban.

(i) lépés:

Kezdetben legyen $r^0 = (1, 1, \dots, 1)$. Ha valamikor minden $\theta_\alpha(r)$ koordináta legalább π, akkor vége az első lépésnek. Tegyük fel, hogy van egy r^i vektorunk, amelynek néhány $\theta_\alpha(r^i)$ koordinátája kisebb mint π. Ekkor a következők szerint definiáljuk r^{i+1} vektort. Ha $\theta_\alpha(r^i) \geq \pi$, akkor legyen $r^{i+1} = r^i$. Ha $\theta_\alpha(r^i) < \pi$, akkor r^{i+1} legyen a következő egyenlet egyértelmű megoldása:

$$\sum_{\beta \perp \alpha} \mathrm{Arctg}\left(\frac{r^i_\beta}{r^{i+1}_\alpha}\right) = \pi\,.$$

Nyilvánvaló, hogy ilyen módon nem lehet egyetlen r^{i+1}_α koordináta sem 0. Az eljárásunk vagy véget ér egyszer, vagy végtelen sokáig folytatjuk, ez utóbbi esetben minden $\left(r^j_\alpha\right)_{j=0}^\infty$ sorozat pozitív számoknak egy monoton csökkenő[15] sorozata, így létezik egy nem negatív r^∞ határértéke. Meg kell mutatni, hogy $r^\infty_\alpha \neq 0$, a θ függvény folytonosságából következik, hogy $\theta(r^\infty) \geq \underline{\pi}$ és így folytathatjuk az eljárást az (ii) lépésnél.

Tegyük fel, hogy néhány (r^j_α) sorozat tart a 0-hoz, ahogy $j \to \infty$, és legyen S az a nem üres halmaz, melyre

[14]Később szerepel, hogy hogyan kell ezt a ragasztást elvégezni.

[15]nem feltétlenül szigorúan monoton csökkenő

$$S = \left\{ \alpha \,\middle|\, \lim_{j\to\infty} r_\alpha^j = 0 \right\}.$$

Minden $\alpha \in S$ esetén valamilyen j-re $\theta_\alpha(r^j) < \pi$, különben r_α nem csökkent volna az eljárás során, így a határértéke 1 lenne. Ha pedig valamikor $\theta_\alpha(r^j) \le \pi$, akkor ez megmarad az eljárás során, mivel r_α értékét csak annyira csökkentjük, hogy $\theta_\alpha(r^{i+1})$ értéke π lehessen és más r_β csökkentése nem növelheti $\theta_\alpha(r)$ értékét. Tehát minden elég nagy j-re

$$\sum_{\alpha\in S} \theta_\alpha(r^j) \le \pi|S|,$$

azonban

$$\sum_{\alpha\in S} \theta_\alpha(r^j) = \sum_{\alpha\in S}\sum_{\beta\perp\alpha} \operatorname{Arctg}\left(\frac{r_\beta^j}{r_\alpha^j}\right).$$

$\hat{G}$ minden $\alpha\beta$ élére, amelynek mindkét végpontja S-ben van, a fenti összeg végpontokhoz tartozó tagjainak összege minden j-re $\frac{\pi}{2}$, mivel

$$\operatorname{Arctg}\left(\frac{r_\beta}{r_\alpha}\right) + \operatorname{Arctg}\left(\frac{r_\alpha}{r_\beta}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Ha az él α végpontja S-beli, β végpontja pedig nem, akkor $\frac{r_\beta^j}{r_\alpha^j}$ tart a végtelenhez, ahogy j tart a végtelenhez és így

$$\lim_{j\to\infty} \operatorname{Arctg}\frac{r_\beta^j}{r_\alpha^j} = \frac{\pi}{2}.$$

A 3.3. Lemma (2) állítása szerint legalább $2|S| + 1$ olyan él van, amelynek valamelyik végpontja S-beli, így a fenti összeg legalább $\pi|S| + \frac{\pi}{2}$, ez pedig ellentmondás lenne. Tehát feltevésünk nem igaz, $S = \emptyset$.

Az eljárás végén tehát kaptunk egy pozitív koordinátájú s^0 vektort, melyre $\theta(s^0) \ge \underline{\pi}$.

(ii) lépés:

Most egy $s^i = (s_\alpha^i, s_\beta^i, \dots)$ vektorsorozatot definiálunk. A kezdőértéket az (i) lépés szolgáltatja. Ha $\theta_\alpha(s^i) = \pi$, akkor legyen $s_\alpha^{i+1} = s_\alpha^i$, ha pedig $\theta_\alpha(s^i) > \pi$, akkor s_α^{i+1} értéke az alábbi egyenlet egyértelmű megoldása legyen:

$$\sum_{\beta\perp\alpha} \mathrm{Arctg}\left(\frac{s_\beta^i}{s_\alpha^{i+1}}\right) = \pi\,.$$

Nyilvánvaló, hogy $\theta_\alpha(s^j)$ értéke nem csökken π alá. Ezt a műveletet iterálva kapjuk az $\left(s_\alpha^j\right)_{j=0}^\infty$ monoton növekvő sorozatot. Ha minden sorozat korlátos marad, akkor a vektorok egy s_α^∞ értékhez tartanak, a határértékekből összeállított vektorra, ismét θ folytonosságából adódik, hogy $\theta(s^\infty) = \underline{\pi}$, amelyre szükségünk volt.

Tegyük fel, hogy néhány $\left(s_\alpha^j\right)_{j=0}^\infty$ sorozat nem korlátos. Legyen S azon $\alpha \in \hat{G}$ indexek halmaza amelyre ez a sorozat végtelenhez tart. Most a $\sum_{\alpha\in S} \theta_\alpha(s^j)$ összeget fogjuk vizsgálni, az előzőekhez hasonlóan. Ha $\hat{G}$ egy élének mindkét végpontja S-ben van, akkor az összegben a hozzájuk tartozó két tag összege $\frac{\pi}{2}$, ha pedig csak az α végpont S-beli a β pedig nem, akkor ahogy j tart a végtelenhez az s_α^j is tart a végtelenhez, míg s_β^j korlátos marad, vagyis

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{Arctg}\frac{s_\beta^j}{s_\alpha^j} = 0\,.$$

Legyen az S elemei által $\hat{G}$-ban kifeszített részgráf $\hat{G}(S)$, éleinek halmaza E. Az előbbiek szerint:

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{\alpha\in S} \theta_\alpha(s^j) = |E|\frac{\pi}{2}\,.$$

Mivel az összeg minden tagja legalább π, az összeg értéke legalább $|S|\pi$, amelyekből $|E| \geq 2|S|$ adódik, amely ellentmond a 3.3. Lemma (2) állításának. Tehát $S = \emptyset$, vagyis s^∞ megfelelő vektor.

Most vizsgáljuk meg az egyértelműség kérdését. Legyen két megoldása a $\theta(r) = \underline{\pi}$ egyenletnek r és r', ahol a külső lap minden a csúcsára $r_a = r'_a$. Legyen $S = \{\alpha \mid r_\alpha > r'_\alpha\}$. Ha r és r' nem egyenlők, akkor feltehetjük, hogy S nem üres, így:

$$|S|\pi = \sum_{\alpha\in S} \theta_\alpha(r) = \sum_{\alpha\in S}\sum_{\beta\perp\alpha} \mathrm{Arctg}\left(\frac{r_\beta}{r_\alpha}\right) =$$

$$= \left(\sum_{\substack{\alpha,\beta \in S \\ \beta \perp \alpha}} \frac{\pi}{2} \right) + \left(\sum_{\substack{\alpha \in S, \beta \notin S \\ \beta \perp \alpha}} \operatorname{Arctg}\left(\frac{r_\beta}{r_\alpha}\right) \right) <$$

$$< \left(\sum_{\substack{\alpha,\beta \in S \\ \beta \perp \alpha}} \frac{\pi}{2} \right) + \left(\sum_{\substack{\alpha \in S, \beta \notin S \\ \beta \perp \alpha}} \operatorname{Arctg}\left(\frac{r'_\beta}{r'_\alpha}\right) \right) =$$

$$\sum_{\alpha \in S} \sum_{\beta \perp \alpha} \operatorname{Arctg}\left(\frac{r'_\beta}{r'_\alpha}\right) = \sum_{\alpha \in S} \theta_\alpha(r') = |S|\pi \,.$$

Ez pedig ellentmondás. Tehát pontosan egy olyan r vektor van, amelyre teljesül, hogy a külső lap minden a csúcsára $r_a = 1$, továbbá $\theta(r) = \underline{\pi}$.

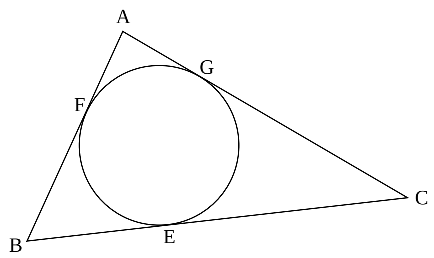
Ekkor elkészíthetők a $K_{\alpha\beta}$ deltoidok. Készítsük el azt a $\tilde{G}$ gráfot, amelynek csúcsai a G csúcsainak, éleinek valamint lapjainak feleltethetők meg, és két csúcsa között akkor fut él, ha az egyik csúcsnak a G egyik éle, a másik csúcsnak pedig vagy az él egyik végpontja vagy pedig az él által határolt egyik lap felel meg. Ez a $\tilde{G}$ gráf nem más mint a gráfnak és a duálisának együttes síkbarajzolása, ahol a gráf és a duális gráf megfelelő élei (egy pontban) metszik egymást. Ezek a metszéspontok minden élet 2 részre osztanak, ezekhez rendeltünk új csúcsokat, az éleket pedig a kapott síkbarajzolás alapján határoztuk meg. $\tilde{G}$ lapjai négyszöglapok, minden lapot 2 él-pont, egy G-beli és egy G^*-beli csúcs határol, éppen az ilyen lapokhoz készítettük el a $K_{\alpha\beta}$ deltoidokat[16]. A $\tilde{G}$ gráfot úgy is megkaphatnánk, hogy $\hat{G}$ gráfban minden laphoz hozzáveszünk egy új csúcsot, amelyet a lap csúcsaival kötünk össze, majd a kapott gráfból töröljük $\hat{G}$ éleit[17].

Tehát a $\tilde{G} - \{F_0\}$ gráf síkbarajzolásának megfelelően szeretnénk a deltoidokat ragasztani. A 2.2. Állítás segítségével bizonyítjuk, hogy ez megtehető. Minden deltoidot vágjunk fel a főátlójával két részre, a $\tilde{G} - \{F_0\}$ gráfban pedig húzzuk be a $\hat{G}$ éleinek megfelelő éleket. Így a gráf minden lapját két háromszöglapra osztottuk úgy, hogy összekötöttük a rajta lévő G illetve G^* gráf csúcsának megfelelő két csúcsot. A laphoz rendelt deltoidot is két részre vágtuk az ennek az élnek megfelelő átló segítségével. A kapott gráf lapjaihoz rendelt háromszöglapokra ellenőrizni kell a 2.2. Állítás használatához szükséges feltételeket. A gráfnak a külső tartománnyal nem szomszédos csúcsainál, a csúccsal szomszédos lapokhoz rendelt háromszögek megfelelő szögeinek összege 2π kell legyen. Ha ez a csúcs G egy éléhez tartozik, akkor 4 háromszöglappal szomszédos, amelyek mindegyikében derékszög a neki megfelelő szög. Ha G egy éléhez vagy lapjához tartozó

[16] a végtelen tartományhoz tartozó lapok kivételével

[17] Csak az éleket töröljük, a végpontjaikat nem!

α csúcsról van szó, akkor az itt találkozó lapok szögeinek összege $2\theta_\alpha(r) = 2\pi$. Így alkalmazhatjuk a 2.2. Állítást, a háromszöglapok a síkbarajzolásnak megfelelően egymáshoz ragaszthatók. A kapott hálózat határán 6 csúcs van, 3 a G gráf külső tartományával szomszédos csúcsainak felel meg, 3 pedig az ezeket összekötő élekhez tartozó él-pontoknak. Az él-pontoknak megfelelő csúcsokban két háromszög derékszögét ragasztottuk össze, így a hálózat egy háromszöget alkot. Az él-pontoknak megfelelő pontok és a háromszög csúcsai közötti megfelelő szakaszok egyenlőségéből következik, hogy az él-pontoknak megfelelő pontok a háromszög beírt körének érintési pontjai.



17. ábra

Ismert, hogy ha egy $ABC\triangle$ három oldalán adott egy-egy pont, $E \in \overline{BC}$, $F \in \overline{AB}$, $G \in \overline{AC}$, ezek akkor és csak akkor lesznek a beírt kör érintési pontjai, ha $\overline{|FA|} = \overline{|GA|}$, $\overline{|FB|} = \overline{|EB|}$ és $\overline{|EC|} = \overline{|GC|}$.

Ezzel a módszerrel lényegében a deltoidokat ragasztottuk össze. Az összes $\alpha \in (\hat{G} - \{F_0\})$ elemnek megfelelő csúcsokba írjunk r_α sugarú köröket, és a kapott elhelyezést egészítsük ki a külső tartománynak megfelelő körrel, ami az egész hálózat által alkotott háromszöglap beírt köre legyen. Már csak azt kell belátni, hogy az így kapott körelhelyezés az (1)–(5) feltételeket kielégíti.

A G egy α lapjához (a külső tartomány kivételével) tartozó deltoidok együttesen egy konvex sokszöget határoznak meg, amelynek annyi oldala van, ahány éle az adott lapnak. Ennek a sokszögnek a beírt köre lesz az α-hoz tartozó kör, az érintési pontok pedig a megfelelő él-pontok lesznek, ahol a szomszédos deltoidok derékszögeit ragasztottuk össze. Ezek a sokszögek különböző lapok esetén diszjunktak, így nincs két laphoz tartozó kör, amelyek metszenék egymást. A külső tartománnyal majd később foglalkozunk. Ehhez hasonlóan belátható, hogy nincs két különböző csúcshoz tartozó kör, amelyek metszenék egymást, ez a külső tartomány csúcsaira is működik. Ezzel az (1) feltételt a külső tartományhoz tartozó kör kivételével beláttuk.

A hálózat konstrukciójából adódóan minden laphoz illetve csúcshoz tartozó kör átmegy a vele szomszédos élekhez tartozó él-pontokon, vagyis a (2) feltétel is teljesül.

Ha egy csúcs és egy lap nem szomszédosak ($\hat{G}$-ban), akkor a hozzájuk tartozó deltoidok diszjunktak, így nem metszhetik egymást a megfelelő körök. A külső tartományhoz tartozó körvonal a vele szomszédos csúcsokhoz tartozó deltoidok egyesítésén belül halad, így erre is teljesülnek az előbbiek. Ha a csúcs a lap határán van, akkor pedig van egy hozzájuk tartozó deltoid, amely főátlójának a két végpontjában van a megfelelő körök középpontja, és a deltoid konstrukciója miatt a körök derékszögben metszik egymást. A külső lap is nyilvánvalóan derékszögben metszi a 3 megfelelő csúcshoz tartozó vektort. Ezekből (3) és az (5) feltétel is adódik.

Az is nyilvánvaló, hogy a külső tartományhoz tartozó kör kivételével semelyik kör nem tartalmazhat a belsejében egy másikat. Most már csak azt kell megmutatni, hogy a külső tartomány a belsejében tartalmazza az összes vele nem szomszédos laphoz tartozó kört, ezzel az (1) feltétel hiányzó részét is belátjuk a (4) feltétel mellett. A külső tartományhoz tartozó körvonal a vele szomszédos csúcsokhoz tartozó deltoidok egyesítésén belül halad, így nyilván a belsejében tartalmaz minden olyan körlapot, amelyhez tartozó lap nem szomszédos ezekkel a csúcsokkal, a külső tartománnyal szomszédos lapokhoz tartozó körök pedig belülről érintik a külső tartományhoz tartozó kört. A többi laphoz tartozó kör merőlegesen metszi valamelyik külső csúcshoz tartozó kört, a két metszéspontjuk pedig a külső laphoz tartozó kör belsejében van[18], és a külső laphoz tartozó kör is merőlegesen metszi a szomszédos csúcsokhoz tartozó köröket, így a maradék lapokhoz tartozó körök is a belsejében kell legyenek.

Az elhelyezésből adódik, hogy nincs kör, amelynek a sugara nagyobb lenne, mint 1, így az (ii) lépésben a konvergencia ellenőrzése fölösleges volt, minden növekvő sorozatunk 1 alatt maradt.

Ha a külső lap nem háromszög, akkor inverzió és a duális gráfra való áttérés segítségével visszavezetjük a problémát erre az esetre.

Az egyértelműség következik abból, hogy a leírt transzformációkkal elérhetjük, hogy a külső tartomány háromszög legyen és a csúcsaihoz tartozó körök 1 sugarúak. Ekkor pedig a reprezentáció egyértelmű kell legyen a megfelelő r vektor egyértelműsége miatt, ugyanis különböző megfelelő körrendszerhez különböző megfelelő r vektor tartozik.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

□

Végezetül vizsgáljuk meg a tételben szereplő feltételek szükségességét! Az, hogy a gráf legalább 4 pontú, a lapok reprezentálhatósága miatt kellett. G síkbarajzolhatósága is nyilvánvalóan szükséges, mivel egy ilyen reprezentáció segítségével megadható G egy síkbarajzolása (egyenes vonalakkal). Már csak a 3-összefüggőséget kell megvizsgálni.

Legyen G egy síkgráf, amely nem 3-összefüggő, és tegyük fel, hogy létezik a tételnek megfelelő reprezentációja. Könnyen látható, hogy ilyen nem létezhet, ha G nem összefüggő, vagy pedig ha van benne elvágó csúcs. Ha pedig G legalább 2-összefüggő, akkor van egy $S \subset V(\hat{G})$ halmaz, amely nem tartalmazza a külső tartományhoz tartozó csúcsot és $\hat{G}$-nak legfeljebb $2|S|$ élével szomszédos. Min-

[18]mivel ezek az előbb leírt deltoidok valamelyikének a derékszögű csúcsai

den $\alpha \in \hat{G}$ esetén legyen r_α a reprezentációban hozzá tartozó kör sugara és a bizonyításban szerepeltek szerint definiáljuk a θ_α értékét. Ebből

$$\pi|S| = \sum_{\alpha\in S} \theta_\alpha(r) = \left(\sum_{\substack{\alpha,\beta \in S \\ \beta \perp \alpha}} \frac{\pi}{2} \right) + \left(\sum_{\substack{\alpha \in S, \beta \notin S \\ \beta \perp \alpha}} \operatorname{Arctg}\left(\frac{r_\beta}{r_\alpha}\right) \right) .$$

Itt a jobb oldalon álló összeg legalább $(\frac{\pi}{2})(2|S|) = \pi|S|$, és egyenlőség csak akkor lehetne, ha $r_\alpha = 0$ teljesülne minden $\alpha \in S$ esetén. Ez pedig lehetetlen, tehát a 3-összefüggőség is szükséges feltétel a reprezentációhoz.

3.2. Gömböt élben érintő poliéderek

A 3.1. Tétel segítségével könnyen belátható az alábbi, poliéderekre vonatkozó meglepő eredmény.

3.4. Tétel. *Minden G legalább 4 csúcsú 3-összefüggő síkgráfhoz található olyan P poliéder, amelynek a gráfja G, és P összes éle érint egy adott gömböt.*

Bizonyítás. Meg fogjuk konstruálni a P poliédert. Mivel G gráfjára teljesülnek a 3.1. Tétel feltételei, G reprezentálható egy megfelelő körrendszerrel. Készítsük el a tételben szereplő reprezentációját a gráfnak. A körrendszert egy speciális sztereografikus projekcióval vetítsük fel egy gömbre. A G lapjainak megfelelő körök síkjai által meghatározott poliéder lesz P.

A körrendszert úgy vetítsük fel sztereografikus projekcióval a gömbre, hogy a lapokhoz tartozó körvonalak konvex burka a belsejében tartalmazza a gömb középpontját. Emellett még arra is szükség lesz, hogy a csúcsokhoz rendelt körlapok mindegyikének a képe része egy félgömbnek. Ezeket könnyen elérhetjük. Válasszunk a síkon egy olyan kört, amely benne van a külső laphoz tartozó körben, és a középpontja egy másik laphoz tartozó olyan körben van, amelyet tartalmaz a körünk. Ilyet a külső tartománytól különböző laphoz tartozó körnek egy megfelelő pontjából való igen kis arányú felfújásával kaphatunk. A sztereografikus projekciót ezek után úgy hajtsuk végre, hogy az előbb kiválasztott kör menjen az egyenlítőbe. Ekkor nyilván a feltételeknek megfelelő lesz a vetítés, mivel az északi és a déli pólus is benne lesz az északi illetve déli félgömbben levő gömbi körlapban, amelyből következik az egyik szükséges feltételünk. A másik feltétel triviálisan teljesül, mivel egyetlen csúcshoz tartozó körlap sem tartalmazza az északi és a déli pólust. A déli pólust azért nem tartalmazzák, mert a kiválasztott körünk középpontját nem tartalmazhatták, mivel vagy diszjunktak a megfelelő laphoz tartozó körtől, vagy merőlegesen metszik azt.

A kapott gömbi körreprezentációban vegyük a lapokhoz tartozó körök síkjai által határolt, a gömb középpontját tartalmazó féltereket; ezek egy konvex poliédert határoznak meg, legyen ez P.

A vetítés speciális tulajdonságai miatt a félterek metszete korlátos kell legyen. A kapott P poliéder két szomszédos lapja a G szomszédos lapjaihoz tartozó, egymást érintő körök síkjai lesznek. Ez könnyen látható. Vegyük a G-nek egy f lapjához tartozó kör síkját, legyen ez S_f. Metsszük el az S_f síkot az f lappal szomszédos lapokhoz tartozó félterekkel, így kapunk egy K_f sokszöget. Azt állítom, hogy K_f sokszöget az összes laphoz tartozó féltér tartalmazza. Az f-fel szomszédos lapokra ez triviális.

G lapjaihoz (a külső tartomány kivételével) rendeljük hozzá a nekik megfelelő körlemez sztereografikus projekció után kapott képét. A külső tartományhoz nem a körlap képét, hanem az északi pólust tartalmazó lemezt rendeljük, hogy a gömbi körrendszer megfelelő legyen. Így a lapokhoz tartozó körlemezek belseje is diszjunktak lesznek.

Ha egy féltér nem tartalmazná a K_f sokszöget, akkor vagy a határoló síkja metszi a sokszög belsejét, vagy a féltér komplementerének a lezártjában van a K_f. Ez utóbbi eset nem fordulhat elő, mivel a G lapjaihoz tartozó gömbi körlemezek belsejei diszjunktak. Megmutatjuk, hogy az első eset sem fordulhat elő, ehhez szükségünk lesz a csúcsokhoz tartozó körlemezekre.

Egy csúcshoz tartozó kört a vele szomszédos lapokhoz tartozó körök merőlegesen metszenek a gömbön is, mivel a sztereografikus projekció szögtartó. Legyen v a G gráf egy csúcsa, a vele szomszédos lapok pedig a síkbarajzolásnál egy adott körüljárás szerint $f_1, f_2, \dots, f_n$ $(f_{n+1} = f_1)$. Az f_i és f_{i+1} lapokhoz rendelt körök érintik egymást, az érintési pontjuk a v-hez rendelt körön van. Emiatt a két laphoz tartozó sík metszésvonala a gömböt érinti, az érintési pont a v-hez tartozó körön kell legyen. Mivel a két laphoz tartozó kör merőlegesen metszi a v-hez tartozó kört, a két laphoz tartozó kör metszésvonala egy alkotója lesz annak a gömbhöz húzott érintő kúpnak, amely a v-hez tartozó körben érinti a gömböt. Ennek a kúpnak a csúcsa legyen M_v. Így minden v csúccsal szomszédos laphoz tartozó sík átmegy M_v ponton, és az ezek által határolt félterek metszete egy M_v végtelen csúcsú gúla.

Térjünk vissza a K_f sokszögre. Legyenek G gráfnak az f lap a határán levő csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_k$. Az előbb láttuk, hogy a v_i csúcsokkal szomszédos lapok nem metszhetik a K_f sokszög belsejét. Ha egy sokszöglaphoz tartozó sík metszi a K_f sokszöget, akkor annak metszenie kell valamely v_i-hez tartozó kört is. Ekkor pedig ezzel a v_i csúccsal szomszédos lapnak a síkjáról van szó, ami nem metszi a K_f sokszög belsejét.

Így P poliéder két lapjának pontosan akkor van közös éle, ha a nekik megfelelő G-beli lapok szomszédosak, és pontosan akkor van közös csúcsuk, ha a nekik megfelelő G-beli lapoknak van közös csúcsa. Tehát G gráf a P poliéder gráfja.

P két szomszédos lapjának metszésvonala érinti a gömböt, mert a síkok metszete a gömbbel 2 egymást érintő kör. Az érintési pont az él belsejében kell legyen, mivel különben az él egyik végpontjához tartozó körlemez tartalmazna egy félgömböt. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

□

Megjegyzés. A 3.4. Tételből következik a 2.11. Tétel egyik fele, hogy minden legalább 4 csúcsú 3-összefüggő G síkgráfokhoz létezik olyan konvex poliéder, amelynek G a gráfja.[19] A 2.11. Tétel másik felének felhasználásával a 3.4. Tétel átfogalmazható az alábbiak szerint:

3.5. Tétel. *Minden konvex poliédernek van olyan kombinatorikus ekvivalense, amely élben érint egy adott gömböt.*

□

[19] A 3.4. Tételnek tehát következménye a Steinitz-tétel.

4. Gömbbe írható poliéderek

4.1. Gömbbe és gömb köré írhatóság $\mathbb{E}^3$-ben

4.1. Definíció. *Tekintsük a Cayley-Klein modellt, ami a $\mathbb{H}^3$ hiperbolikus tér egy modellje az Euklideszi térben. $\mathbb{H}^3$ pontjait egy gömb B^3 belső pontjai reprezentálják. Ennek a gömbnek a határát nevezzük "végtelen sugarú gömbnek", és S^2_∞-nel jelöljük. ($S^2_\infty = \partial B^3$)*

Megjegyzés. Lényegében a hiperbolikus teret kibővítettük egy ideális sík pontjaival.

4.2. Definíció. *Egy $\mathbb{H}^3$-ben ideális csúcsú poliédernek nevezünk véges sok zárt féltér metszetét, ha a Cayley-Klein modellben S^2_∞ néhány pontjának hozzávételével a modellt alkotó B^3 gömbbe beírt poliédert kapunk.*[20]

Mint már a bevezetőben említettem Steiner vettete fel a múlt században azt a problémát, hogy karakterizáljuk a gömbbe és gömb köré írható[21] poliédereket. Ebben a témában is Steinitztől származnak az első fontos eredmények, ő mutatott először olyan poliédertípusokat amelyek nem írhatók gömbbe. Tőle származik az alábbi tétel is, mely a gömbbe és gömb köré írhatóság közötti összefüggést mutatja meg:

4.3. Tétel. *Egy G gráfhoz akkor és csak akkor létezik olyan gömbbe írható poliéder, amelynek G a gráfja, ha G síkgráf, és a G^* duálisához létezik olyan gömb köré írható poliéder, amelynek a gráfja G^*.*

Bizonyítás. Mivel már láttuk, hogy a poliéderek gráfjai síkgráfok, így ezzel a feltétellel nem foglalkozunk, ez csak ahhoz kellett a tételben, hogy beszélhessünk duális gráfról. Igen egyszerű a bizonyítás. Ha a P poliéder gömb köré írható, akkor az érintési pontok konvex burka P polárisa lesz, amely így gömbbe írható és a gráfja G^*. Ha P gömbbe írható és belsejében tartalmazza a gömb középpontját, akkor a polárisa gömb köré írható. Ha P nem tartalmazza a gömb középpontját, akkor előbb végrehajtunk egy transzformációt. Vegyünk fel egy olyan derékszögű koordinátarendszert, amelynek origója a gömb középpontja, az 1. tengelye áthalad a poliéder belsején és a gömb sugara egység. Tekintsük az alábbi projektív transzformációt.

Legyen $|\alpha| < 1$ később megválasztandó konstans és $\beta = \sqrt{1-\alpha^2}$. A T transzformációt az alábbi képlettel definiáljuk:

$$T(x, y, z) = \left(\frac{x-\alpha}{1-\alpha x}\,,\ \frac{\beta y}{1-\alpha x}\,,\ \frac{\beta z}{1-\alpha x}\right).$$

[20] A poliéder minden csúcsa S^2_∞-en helyezkedik el, az egy csúcsba futó élek emiatt párhuzamos egyenesek.

[21] Gömb köré írható a poliéder, ha a létezik olyan gömb, amelyet minden lapja érint.

Ez a transzformáció az egységgömböt önmagára képezi és $T(\alpha, 0, 0) = (0, 0, 0)$, vagyis α értékét úgy kell megválasztani, hogy az $(\alpha, 0, 0)$ pont a poliéder belsejében legyen. Ily módon P poliéder képe a korábbi feltételeknek megfelelő lesz (és nyilván kombinatorikusan ekvivalens P-vel), vagyis az előző esetben leírtak alkalmazhatók.

$\square$

Látható, hogy elég karakterizálni a $\mathbb{H}^3$-beli ideális csúcsú poliédereket, mivel a Cayley-Klein modellben ezek éppen a gömbbe írható poliéderek. A 4.3. Tétel alapján pedig a gömb köré írható poliédereket is tudjuk így karakterizálni.

A következő részben szereplő 4.11. Tételből az előbbiek alapján a következő tételt mondhatjuk ki:

4.4. Tétel. *Egy P poliéderhez akkor és csak akkor létezik vele kombinatorikusan ekvivalens gömb köré írható poliéder, ha a P poliéder G gráfjában létezik olyan $\mathcal{W}$ súlyozása az éleknek, amelyre az alábbi három feltétel teljesül:*

(1) *Minden $e \in E(G)$ élre $0 < \mathcal{W}(e) < \frac{1}{2}$.*

(2) *G minden lapjára teljesül, hogy a rajta levő élekre összegezve a súlyokat 1 lesz az eredmény.*

(3) *Ha egy olyan körben szereplő élekre adjuk össze a súlyokat, amely kör nem határol lapot, akkor az eredmény nagyobb lesz 1-nél.*

Hasonlóan egy P poliéderhez akkor és csak akkor létezik vele kombinatorikusan ekvivalens gömbbe írható poliéder, ha a P poliéder G gráfjának G^* duálisához létezik olyan $\mathcal{W}$ súlyozása az éleknek, amelyekre a fenti három feltétel teljesül.

$\square$

Warren D. Smith bebizonyította, hogy létezik a csúcsok számában polinomiális algoritmus, amely eldönti, hogy egy gráfban létezik-e a feltételeknek megfelelő súlyozás. Azóta már Rivin talált egy lineáris algoritmust a kérdés eldöntésére.

Megemlítenénk még (bizonyítás nélkül) az alábbi, M. Dillencourt-tól és W. D. Smith-től származó tételt:

4.5. Tétel. *Minden 4-összefüggő, legalább 4 csúcsú G síkgráfhoz van olyan gömbbe írható poliéder, amelynek a gráfja G.*

$\square$

A 4.4. Tétel bizonyítása előtt megmutatjuk, hogy az ottani feltételek nem minden poliéderre (pontosabban azok gráfjaira) teljesülnek, azaz mutatunk végtelen sok poliédertípust, amelyek nem írhatók gömbbe. Ehhez először definiáljuk a következő műveletet:

4.6. Definíció. *Adott egy síkgráf. Minden lapjához vegyünk hozzá egy új csúcsot, és minden ilyen csúcsot kössünk össze annak a lapnak a csúcsaival, amelyhez hozzávettük. Ezt a műveletet nevezzük csillagosításnak. Egy P' poliéder a P poliéder csillagja, ha P' gráfja izomorf a P gráfjából csillagosítással kapható gráffal.*

Megjegyzés. A csillagosítás után nyilván ismét síkgráfot kapunk. Ha egy konvex P poliéder gráfját csillagosítjuk, akkor a kapott gráf is előáll egy poliéder gráfjaként, például úgy, hogy a P poliéder lapjaihoz elég közel felveszünk új csúcsokat, és vesszük ezeknek a pontoknak és P-nek a konvex burkát. Így minden poliéder csillagosítható. Nyilvánvaló, hogy egy P poliéder csillagjai kombinatorikusan ekvivalensek, és a velük kombinatorikusan ekvivalens poliéderek is a csillagjai P-nek.

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban egy P poliéder csúcsainak halmazát $V(P)$-vel, éleinek halmazát $E(P)$-vel és a lapjainak halmazát $F(P)$-vel fogom jelölni.

4.7. Tétel. *Ha a P poliéderre teljesül, hogy $|V(P)| \leq |F(P)|$, ahol $V(P)$ a poliéder csúcsainak, $F(P)$ pedig a lapjainak a halmaza, akkor P csillagjai nem írhatók gömbbe.*

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy nem létezik a 4.4. Tételnek megfelelő súlyozása a duális gráf éleinek. Azt mutatjuk meg, hogy a megfelelő poliéderekben nem létezik már a tétel (1) és (2) feltételének megfelelő súlyozás sem. Ez nyilván azzal ekvivalens, hogy a poliéder gráfjának éleit nem tudjuk úgy súlyozni 0 és $\frac{1}{2}$ közötti súlyokkal, hogy minden csúcsnál az oda befutó élek súlyainak összege 1 legyen. Legyen P' a P poliéder egy csillagja. Indirekt úton bizonyítunk; tegyük fel, hogy mégis létezik az előbbieknek megfelelő súlyozása a P' poliéder gráfjának. P' gráfjának csúcsai két osztályba sorolhatók, legyen V_P azoknak a csúcsoknak a halmaza, amelyek P gráfjának is csúcsai, és legyen V_S azon csúcsok halmaza, amelyet P gráfjának a csillagosítása során vettünk hozzá a gráfhoz. Mostantól P' gráfjával fogunk foglalkozni, legyen ez G. Nyilvánvaló, hogy ha egy él egyik végpontja V_S-beli, akkor a másik végpontja V_P-beli és ez nem megfordítható, vagyis vannak V_P-beli csúcsok, amelyek között megy él. Adjuk össze a V_S-beli csúcsokba futó élek súlyait. Mivel egy csúcsba futó éleken a súlyok összege 1, és két V_S-beli csúcs között nem megy él, az eredmény $|V_S| = |F(P)|$ lesz. Ez nyilván kisebb, mint az összes élre összegezve a súlyokat, ami felülről becsülhető a $|V_P| = |V(P)|$ értékkel, mivel minden élnek legalább az egyik végpontja V_P-beli. Tehát $|F(P)| < |V(P)|$ kéne legyen, ami ellentmond a tétel feltételének. Tehát P' nem lehet gömbbe írható.

□

Ennek a tételnek egy következménye az alábbi állítás.

4.8. Állítás: *Ha egy poliéder minden lapja háromszög, akkor a csillagjai nem írhatók gömbbe.*

Bizonyítás. Legyen P egy csupa háromszöglapból álló poliéder. Legyenek a csúcsainak, éleinek és lapjainak halmazai rendre V, E és F. Ekkor $3|F| = 2|E|$, amelyből az Euler-féle poliédertétel segítségével:

$$|F| + |V| - \frac{3}{2}|F| = 2$$

adódik, vagyis

$$|V| = \frac{1}{2}|F| + 2\,.$$

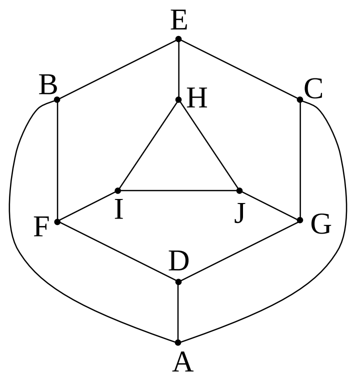
Tudjuk, hogy $|F| \geq 4$, így a fenti képletből $|V| \leq |F|$. Tehát a P poliéder teljesíti a 4.7. Tétel feltételét, így P csillagjai nem lehetnek gömbbe írhatók.

$\square$

Mutatunk olyan nem gömbbe írható példát is, amelynek a bizonyításához a 4.4. Tétel minden feltételére szükség van.

4.9. Állítás: *Ha egy kockának levágjuk az egyik csúcsát, mondjuk a belőle kiinduló 3 él felezőpontján átmenő síkkal, akkor a kapott poliéder típusa nem gömbbe írható.*

Bizonyítás. Indirekt úton bizonyítunk, tegyük fel, hogy létezik a 4.4. Tétel feltételeinek megfelelő súlyozás a kapott poliéder gráfjában. A poliéder gráfja a következő:



18. ábra

Ha összeadjuk az A, E, F és G csúcsokba futó élek súlyait és kivonjuk belőle a B, C és D csúcsokba futó élek súlyainak az összegét, akkor az eredmény a (2) feltétel alapján 1 lesz. Ugyanaz az eredmény adódik, ha az EH, IF és JG éleken levő súlyokat összegezzük, ám ez a (3) feltétel miatt nagyobb, mint 1, ami ellentmondás.

$\square$

4.2. $\mathbb{H}^3$-beli konvex ideális csúcsú poliéderek

4.10. Definíció. *Egy P ideális poliéder gráfja a Cayley-Klein modellben P-nek megfelelő poliéder gráfja legyen. Minden konvex poliéder G gráfjának a G^* duálisát ellátjuk egy súlyozással. A G^* gráf minden e^* éléhez egy $\mathcal{W}(e^*)$ súlyt rendelünk, ahol $\mathcal{W}(e^*)$ értéke a P poliéderben e^*-hoz tartozó e élnél levő lapok külső szöge.*

Ebben a részben az alábbi tétel bizonyításával fogunk foglalkozni:

4.11. Tétel. *Egy P poliéder ideális csúcsú akkor és csak akkor, ha a gráfjának a G^* duálisára teljesülnek az alábbi feltételek:*

(1) *Minden $e^* \in E(G^*)$ élre $0 < \mathcal{W}(e^*) < \pi$.*

(2) *G^* minden lapjára teljesül, hogy a rajta levő élekre összegezve a súlyokat 2π-t kapunk eredményül.*

(3) *Ha a G^* gráfnak olyan $e_1^*, e_2^*, \dots, e_k^*$ éleire adjuk össze a súlyokat, amely élek egy olyan kört alkotnak, amely kör nem határol lapot, akkor az eredmény nagyobb lesz, mint 2π.*

Bizonyítás. Csak a feltételek szükségességét fogjuk belátni. Az (1) feltétel triviális, mivel P konvex.

A (2) feltétel nyilván ekvivalens azzal, hogy P poliéder bármely v csúcsára a belőle kiinduló élekre összegezve a külső szögeket, 2π szöget kapunk eredményül. Húzzunk egy elég kicsi v csúcshoz tartozó H_v paraszférát[22]. Ismert, hogy H_v paraszférán belül az Euklideszi geometria axiómái teljesülnek. H_v-t a v-n átmenő síkok paraciklusban metszik, két ilyen sík szöge megegyezik a hozzájuk tartozó paraciklusok szögével. Ennek alapján H_v a P poliédert egy p_v sokszögben metszi, amelynek a külső szögei megegyeznek a P poliéder megfelelő éleinél lévő külső szögeivel. Így készen vagyunk, hiszen az Euklideszi geometriában egy sokszög külső szögeinek összege 2π.

A (3) feltétel szükségességének belátásához néhány lemmára van szükségünk.

4.12. Definíció. *Legyen γ egy zárt töröttvonal $\mathbb{H}^3$-ben, csúcsai sorrendben legyenek $p_1, p_2, \dots, p_k$, ahol $p_1 = p_k$. Legyen γ elfordulása p_i csúcsban a $p_{i-1}p_ip_{i+1}$ háromszög p_i csúcsánál levő külső szöge, ezt jelöljük $\tau_i(\gamma)$-val. A γ töröttvonal teljes elfordulása a $\tau(\gamma) = \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i(\gamma)$ összeg.*

4.13. Lemma. *$\mathbb{H}^3$-ben egy γ zárt töröttvonalnak a teljes elfordulása nagyobb, mint 2π, kivéve azt az esetet, amikor minden csúcs egy egyenesen van.*

[22] H_v egy olyan paraszféra legyen, amely P minden v-ből induló élét metszi

Bizonyítás. Készítsük el a $T_i = p_1p_ip_{i+1}$ háromszögeket, ahol $2 < i < k-2$. Legyen α_i^j a T_i háromszög p_j csúcsánál levő belső szöge, ha pedig nincs ilyen, akkor legyen 0. Vegyünk egy kis gömböt p_j körül és ennek a metszetét a T_i háromszögekkel és a $p_{i-1}p_ip_{i+1}$ háromszöggel. A gömbi háromszögegyenlőtlenségből[23]

$$\sum_i \alpha_i^j \geq \pi - \tau_j(\gamma)$$

adódik. Ezt összegezve minden megfelelő j-re a

$$\sum_{i=2}^{k-2} (T_i \text{ szögeinek összege}) \geq (k-1)\pi - \tau(\gamma)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Minden háromszögben a szögösszeg legfeljebb 2π és mivel nem minden háromszög elfajuló, van olyan, ahol ez kisebb 2π-nél, így a következő szigorú egyenlőtlenség adódik

$$(k-3)\pi > (k-1)\pi - \tau(\gamma)\,.$$

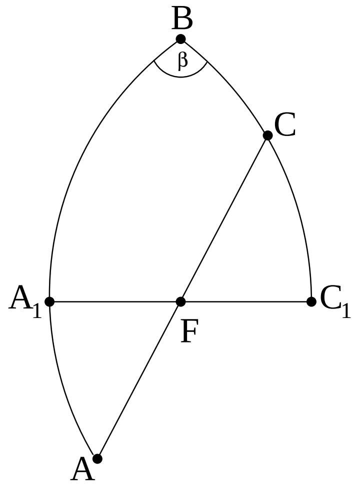
Ebből pedig következik a $\tau(\gamma) > 2\pi$ egyenlőtlenség.

□

4.14. Lemma. *Legyen $ABC\triangle$ egy gömbháromszög, amelyben $|AB| + |BC| = \pi$ és amelynek B csúcsnál levő szöge $\beta < \pi$. Ekkor $|AC| \geq \beta$ és egyenlőség pontosan akkor van, ha $|AB| = |BC| = \frac{\pi}{2}$.*

Bizonyítás. Ha $|AB| = |BC| = \frac{\pi}{2}$, akkor nyilvánvaló, hogy $|AC| = \beta$. Egyébként a szimmetria miatt feltehetjük, hogy $|AB| > |BC|$. Azt is feltehetjük, hogy $|AC| < \pi$, különben az állítás triviális. Legyen az AB ívnek A_1 az a pontja, melyre $A_1B = \frac{\pi}{2}$, és legyen C_1 az a pont, melyre $BC_1 = \frac{\pi}{2}$ és $C \in BC_1$. (Lásd a 19. ábrát!) Legyen F pont az AC oldal és a kisebbik A_1C_1 ív metszete. Ekkor $AA_1F\triangle \cong CC_1F\triangle$, mivel F-nél levő szögeik egyenlők, A_1–nél és C_1-nél derékszög van, $|AA_1| = |CC_1|$ és $|AF|+|FC| = |AC|$ kisebb, mint π. Ebből következik, hogy F felezőpontja az AC oldalnak és az A_1C_1 ívnek is. Így az $AA_1F\triangle$-nek az AA_1 és az A_1F oldalai kisebbek, mint $\frac{\pi}{2}$, továbbá A_1-nél van a derékszög.

[23]alkalmazhatjuk a háromszögegyenlőtlenséget, mivel minden ív nyilvánvalóan kisebb π-nél



19. ábra

Emiatt $|AF| > |A_1F|$ és az előbbi egybevágóság miatt ebből az is adódik, hogy $|CF| > |C_1F|$. Ezekből

$$|AC| = |AF| + |CF| > |A_1F| + |C_1F| = |A_1C_1| = \beta$$

következik, amit bizonyítani akartunk.

□

4.15. Lemma. *Legyen H_1 és H_2 két félsík, amelyeknek közös a határoló egyenese (jelölje e ezt az egyenest) és a két sík által bezárt szög $\alpha \le \pi$. Legyen $P_1 \in H_1$ és $P_2 \in H_2$, továbbá a két pontot összekötő, a $H_1 \cup H_2$ felület belső metrikája szerinti geodetikus legyen γ, ennek az e egyenesre eső pontja pedig $P = \gamma \cap H_1 \cap H_2$. Ekkor a $\tau_P(\gamma)$ elfordulás legfeljebb $\pi - \alpha$.*

Bizonyítás. Világos, hogy γ a $\overline{PP_1}$ és a $\overline{PP_2}$ szakaszok uniója, és ha ρ az e egyenes egyik P-ből induló félegyenese, valamint ha az α_1 és α_2 szögek rendre a $\overline{PP_1}$ és a $\overline{PP_2}$ szakaszok ρ-val bezárt szögei, akkor $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$. Vegyünk egy P középpontú elég kis sugarú gömböt, ennek metszéspontjai a $\overline{PP_1}$, a $\overline{PP_2}$ szakaszokkal és ρ-val rendre legyenek az A, C, és B pontok. Ekkor a gömbön $|AB| = \alpha_1$, $|BC| = \alpha_2$, az $ABC\triangle$-nek a B csúcsánál levő szöge $\beta = \alpha$ és $|AC| = \pi - \tau_P(\gamma)$. Alkalmazva az előbbi 4.14. Lemmát azt kapjuk, hogy:

$$\alpha \le \pi - \tau_P(\gamma)\,,$$

amelyből $\pi - \alpha \ge \tau_P(\gamma)$ adódik, amit bizonyítani akartunk. □

Most visszatérhetünk a 4.11. Tétel bizonyításához. A (3) feltétel szükségességét akarjuk belátni. Legyenek a G^* gráfnak $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_k^*$ élei olyanok, amelyek egy kört alkotnak, de nem egy lapot határolnak. Vegyük P poliéderben azoknak az $f_1, f_2, \ldots, f_k$ lapoknak a láncát, amelyekre $f_i \cap f_{i+1} = e_i$ (vagyis a G^* gráfban levő kör csúcsainak megfelelő lapokat). Az összes e_i élnek nem lehet közös az egyik ideális csúcsa, mivel $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_k^*$ élek nincsenek egy lapon. Legyen $\tilde{f}_i$ az e_i és e_{i+1} egyenesek síkjában a két egyenes közötti sáv. Nyilvánvaló, hogy $f_i \subset \tilde{f}_i$. Legyen $\tilde{F} = \bigcup_{i=1}^{k} \tilde{f}_i$. $\tilde{F}$ topologikusan ekvivalens egy végtelen henger palástjával, mivel megkapható az $\tilde{f}_i$ sávok megfelelő egyenesek mentén való összeragasztásával.

Azt akarjuk belátni, hogy létezik egy geodetikus az $\tilde{F}$ felületen, amely homotóp a meridiánnal[24]. (Ez a geodetikus egyértelmű lesz, de ezt most nem bizonyítjuk be, mivel nincs szükségünk rá.) A sávok egyenesek diszjunkt uniójára bonthatók, ezáltal az $\tilde{F}$ felület is, és ezen egyenesek között kell legyen kettő, amelyek egymással egyik irányban sem párhuzamosak, ellenkező esetben minden egyenes ugyanabban az irányban lenne párhuzamos egymással, vagyis az összes e_i élnek közös lenne az egyik ideális csúcsa, ami persze nem lehet. Vegyünk két ilyen nem párhuzamos egyenest. Az egyik egyenesen végtelenhez tartva (akármelyik irányban), az egyenes pontjainak a távolsága a másik egyenestől végtelenhez tart. Vegyünk az $\tilde{F}$ felületen egy meridiánnal homotóp görbét, ennek a hossza legyen h. Vegyük a két egyenesen azt a két szakaszt, amelyek pontjaira igaz, hogy a másik egyenestől vett távolságuk legfeljebb h. Vegyük azokat a meridiánnal homotóp görbéket, amelyek hossza h-nál kisebb, ezek biztosan metszik az előbbi két szakaszt. Így a görbéknek egy kompakt terét kapjuk, ahol nyilvánvaló, hogy alulról is korlátos a görbék hossza, és itt a hossz egy folytonos függvény, így létezik minimális hosszúságú görbe ezek között. Ez a görbe geodetikus kell legyen, mivel ha nem lenne az, akkor valamelyik két pontja közötti részét lecserélhetnénk a két pontot összekötő geodetikusra úgy, hogy rövidebb hosszúságú, a meridiánnal homotóp görbét kapnánk, vagyis nem lenne minimális hosszúságú.

Ez a γ geodetikus be van ágyazva $\mathbb{H}^3$-be, mint egy zárt töröttvonal, amelynek a csúcsai az e_i egyeneseken vannak. a 4.15. Lemma szerint γ elfordulása ezekben a csúcsokban legfeljebb akkora, mint a megfelelő két lap külső szöge. A 4.13. Lemma szerint γ teljes elfordulása nagyobb, mint 2π, így az e_i éleknél levő külső lapszögek összege nagyobb, mint 2π. Ezzel a (3) feltétel szükségességét is bebizonyítottuk.

A feltételek elégségességéhez az Alekszandrov által kifejlesztett differenciálgeometriai módszerekre van szükség. Ez lényegesen különbözik a dolgozatban szereplő módszerektől, ezért a feltételek elégségességét itt nem bizonyítjuk.

□

[24]egyszer kerüli meg a felületet

Irodalom

[1] P. Koebe: Kontaktprobleme der konformen Abbildung, *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akad. d. Wiss. Math. - Physische Klasse* 88 (1936), 141-164. old.

[2] J. Steiner: Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander, Fincke, Berlin (1832)

[3] E. Steinitz: Über isoperimetrische Probleme bei konvexen Polyedern, *J. reine angew. Math.* 159 (1928), 133-143. old.

[4] E. Steinitz: Polyeder und Raumeinteilungen, *Enzykl. math. Wiss.* 3 (1922), 1-139. old.

[5] Hassler Whitney: Non-separable and planar graphs, *Trans. American Math. Society* 34 (1932), 339-362. old.

[6] Branko Grünbaum: Convex polytopes, (1967)

[7] Graham R. Brightwell - Edward R. Scheinerman: Reprezentations of planar graphs, *SIAM J. Disc. Math.* 6(2) (1993), 214-229. old.

[8] Craig D. Hodgson - Igor Rivin - Warren D. Smith: A characterization of convex hyperbolic polyhedra and of convex polyhedra inscribed in the sphere, *Bulletin of the American Math. Society* 27(2) (1992), 246-251. old.

[9] Igor Rivin: On geometry of convex ideal polyhedra in hyperbolic 3-space, *Topology* 32(1) (1993), 87-92. old.

[10] Craig D. Hodgson - Igor Rivin: A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space, *Invent. Math.* 111 (1993), 77-111. old.

[11] Igor Rivin : A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space, *Annals of Math.* 143 (1996), 51-70. old.