Útpakolási Problémák Gyűrűhálózatokban

Diplomamunka

Végh Zoltán
V. éves matematikus hallgató

Frank András
egyetemi tanár, témavezető

ELTE, 1997. Budapest

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Jelen dolgozatban útvezetési (útpakolási, statikus routing) problémákkal foglalkozom. E problémák az elméleti felvetésükön kívül VLSI-áramkörök, informatikai hálózatok tervezésekor illetve ez utóbbiakat kiszolgáló algoritmusok létrehozásakor merülnek fel. A dolgozat megértéséhez gráfelméleti és lineáris programozási alapismeretek szükségesek, ezek a következő művekből szerezhetőek meg: [7, 6] A dolgozat tagolása a következő:

- Az első fejezetben a problémakör általános megfogalmazása található, és a felhasznált legfontosabb két tétel.
- A második fejezet egy minimalizálási problémát vizsgál az élkapacitásos modellben.
- A harmadik fejezetben bizonyítást nyer a szükséges és elégséges feltétele pontkapacitásos gyűrűhálózatokban az igényeket realizáló 1/2-egész útpakolás létezésének.
- Végül néhány szorosan kapcsolódó kérdés fogalmazódik meg.

Köszönettel tartozom elsősorban témavezetőmnek Frank Andrásnak, kinek szakmai irányítása, s kitartásra buzdítása tette lehetővé a dolgozat létrejöttét. Fleiner Balázsnak nagyon, Varga Dánielnek kevésbé, az idei szakdolgozatíróknak, köztük különösen Szegő Lászlónak, Nagy Ivánnak, Hegedűs Pálnak.

2. A probléma leírása

Általánosan megfogalmazva a probléma:

- adottak
  - a hálózat (csomópontok, összeköttetések)
  - kapacitások a hálózatra vonatkozóan
  - igények pontpárokra előírva (azokat a pontokat, melyre az igény nem 0 terminálpontoknak ill. termináloknak is nevezzük)
- cél: egy súlyozott útrendszer megadása, mely kielégíti az igényeket, s nem sérti a kapacitásokat

Formálisan:

$$\begin{array}{lll} G=(V,E) & V=(1,\ldots,n) & E\subseteq V\times V \\ d: V\times V\to\mathbb{Z}^+ & c: V\to\mathbb{Z}^+ & \end{array}$$

Az igényeket megadó d függvény valójában csak szimmetrikus lehet, s a továbbiakban így is kezeljük. A két alapvető (s legfontosabb modell) a pont- ill. élkapacitásos, s ekkor a kapacitást a következő megadással tekintjük:

- élkapacitás: $c : E \to \mathbb{Z}^+$
- pontkapacitás: $c : V \to \mathbb{Z}^+$

A megoldás: $\mathcal{P} \subseteq \cup \mathcal{P}_{\rangle|}$ súlyozott utak egy rendszere, ahol $\mathcal{P}_{\rangle|}$ az i, j pontok közt vezető utak rendszere, $w : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^+$, melyre igaz:

$$\sum_{P \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_{\rangle|}} w(P) = d_{ij} \ \forall ij$$

Egy megoldást realizációnak, megvalósításnak is nevezünk, s egy megvalósítás megengedett, ha teljesíti a kapaciásfeltételeket az élkapacitásos ill. a pontkapacitásos modell esetén:

$$\sum_{P : e \in P \in \mathcal{P}} w(P) \leq c_e \ \forall \ e \in E$$

$$\sum_{P : i \in P \in \mathcal{P}} w(P) \leq c_i \ \forall \ i \in V$$

A fenti egyenlőtlenségekben a bal oldalt az él ill. a pont terheltségének, összterhelésének nevezzük; így a kapacitásfeltétel azt jelenti, az összterhelés nem haladhatja meg az él ill. pont kapacitását.

Ebben a megadásban a feladat nemigen különbözik a többtermékes folyamproblémától, melynek különféle változatai bőséges irodalommal rendelkeznek, s általában NP-teljesek. Igen gyakori, mikor a súlyokra egész értékeket követelünk meg, ez $0 - 1$ igények esetén a diszjunkt útproblémát jelenti. Ami kezelhetőbbé teszi a problémát, az jelen esetben a hálózatok geometriájából eredő azon megszorítás, hogy a hálózat kör elrendezésű, ún. gyűrű:

$$G = (V, E) \ V = (1, \dots, n) \ E = \big((i, i+1) \mod n\big)$$

A gyűrűben rögzítjük a számozás irányát, mégpedig az óramutató járásával egyező irányba növekedőt.

$$[i, j] \ := \begin{cases} \{i, i+1, \dots, j-1, j\} & \text{ha } i \leq j \\ \{i, i+1, \dots, n-1, n, 1, \dots, j\} & \text{ha } i > j \end{cases}$$

$$(i, j) \ := \begin{cases} \{i+1, \dots, j-1\} & \text{ha } i \leq j \\ \{i+1, \dots, n-1, n, 1, \dots, j-1\} & \text{ha } i > j \end{cases}$$

Hasonlóképp értelmezzük a félig (jobbról ill. balról) nyílt intervallumokat is. Mivel a gyűrűhálózatban dolgozunk, ezért egy $P \in \mathcal{P}_{\rangle|}$ út vagy $[i, j]$ vagy $[j, i]$. Ennek megfelelően módosul a követelmények felírása is:

$$\sum_{[k,l]} w([k, l]) = d_{ij} \ \forall ij$$

$$\sum_{[k,l]:i\in[k,l]} w([k,l]) \leq c_i \ \forall i \in V$$

Egy konkrét igény realizációja esetén ezentúl használjuk a negatív (-) ill. pozitív (+) irányú megvalósítás kifejezést: d_{ij} $i < j$ esetén az igény pozitív irányba eső megvalósítása, ami (j, i) ill. $[j, i]$ útra kerül kiosztásra, s a negatív irányba eső megvalósítása a (i, j) ill. $[i, j]$ útra jutó rész.

A számunkra legfontosabb Okamura és Seymour által bizonyított eredmények egyike [2] azonban ennél általánosabb esetre vonatkozik, síkhálózatra:

$$G=(V,E) \ c : E \to \mathbb{Z}^+ \ d : V\times V \to \mathbb{Z}^+$$

G legyen síkbarajzolható oly módon, hogy a terminálpontok mindegyike a külső tartomány határára kerüljön. Ebben az esetben pontosan akkor létezik 1/2-egész útpakolás, ha

$$\forall X \subseteq V: \sum_{e\in E \ e=ij \ i\in X \ j\in V-X} c_e \geq \sum_{ij \ i\in X \ j\in V-X} d_{ij} \tag{1}$$

Tulajdonképpen minden élvágásra megköveteljük, hogy a vágás kapacitása legalább akkora legyen, mint az elválasztott terminálpontok közti igény, ezt a feltételt az irodalom *vágáskritérium*nak nevezi. Gyűrűhálózatok esetén egy élvágás egy élpárt jelent. Így itt a tétel kimondva:

$$\begin{gathered} \forall (i, i+1),\ (j, j+1)\ i \neq j: \\ c(i, i+1) + c(j, j+1) \geq \textstyle\sum_{kl \ k\in(i,j) \ l\in(j+1,i+1)} d_{kl} \end{gathered} \tag{2}$$

Ebben az esetben az egész megoldás szükséges és elégséges feltétele is egyszerűen megfogalmazható:

$$\begin{gathered} \forall (i, i+1),\ (j, j+1)\ i \neq j: \\ c(i, i+1) + c(j, j+1) - \textstyle\sum_{kl \ k\in(i,j) \ l\in(j+1,i+1)} d_{kl} \geq 0 \text{ és páros} \end{gathered} \tag{3}$$

Amennyiben a feltételben csak a párosság megkövetelése szerepel, akkor ennek neve *paritásfeltétel*.

3. Élkapacitásos modell

3.1. Minimalizálási probléma

A most következő probléma a kétirányú SONET gyűrűk tervezésénél merült fel. Ekkor az élkapacitásos modell használata a célszerű, így ennek egy speciális esetét tárgyaljuk. A feladat kapcsán az Okamura–Seymour tételt egy speciális esetben bebizonyítjuk. Adott:

$$G = (V, E) \quad V = (1, \ldots, n) \quad E = ((i, i+1) \mod n)$$
$$d : V \times V \to \mathbb{Z}^+$$

Az útpakolás megadására vezessük be a következő függvényt:

$$\phi(i,j) := \begin{cases} 1 & \text{ha } d_{ij} \text{ −t a } + \text{ irányba} \\ 0 & \text{ha } d_{ij} \text{ −t a } - \text{ irányba} \end{cases}$$

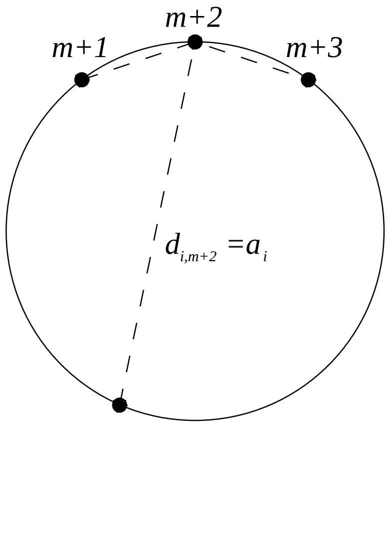
S egy olyan útmegvalósítást keresünk, melyben az egyes igények realizációja egy irányba törénik, s az élek terhelése minimális.

$$L_k := \sum_{ij:\phi(i,j)=1 k\in[i,j)} d_{ij} + \sum_{ij:\phi(i,j)=0 k\notin[i,j)} d_{ij}$$

$$\min L = \max_{1\leq l\leq n} L_k$$

Megjegyzés. Legyen $N \in \mathbb{Z}^+$ s ekkor a problémát $L \leq N$ alakban vizsgálva egy eldöntési problémát kapunk, melyről belátjuk, hogy NP-teljes. Látható, a megoldhatóság egy tanúja $\binom{n}{2}$ méretű. A partícióproblémát vezetjük vissza, melyben adottak $a_1 \ldots a_m \in \mathbb{Z}^+$, és a kérdés, hogy a számok két csoportba partícionálhatók-e úgy, hogy a két csoport tagjainak összegei megegyezzen [1]. Legyen ehhez $n = m + 3$, $d_{i,m+2} = a_i$, $1 \leq i \leq m$, $d_{m+1,m+2} = d_{m+2,m+3} = \sum_i \frac{a_i}{2}$. Minden más követelmény legyen 0, s definiáljuk $T := \sum_i a_i$.

Amennyiben létezik megengedett megvalósítás, annak a $d_{m+1,m+2}$ ill. $d_{m+2,m+3}$ igényeket az $(m+1, m+2)$ ill. $(m+2, m+3)$ éleken kell teljesítenie. S így a többi igényt úgy partícionálja ez a megvalósítás, hogy az $(m+1, m+2)$ ill. $(m+2, m+3)$ élekre $\sum_i \frac{a_i}{2}$ jut.



3.2. Relaxáció

Kedves olvasó most relaxáljuk a problémát: Engedjük meg az egyes követelmények megosztását, tehát egy olyan megvalósítást, melyben egy követelményt részben pozitív, részben negatív irányba realizálunk:

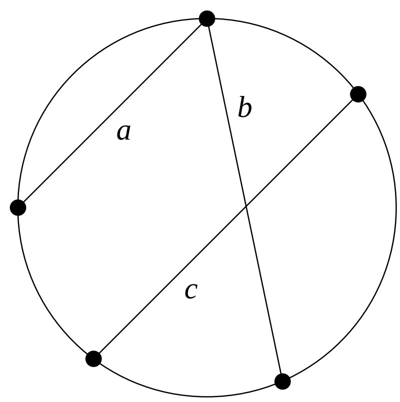
$$\phi^*(i,j) \in [0,1]$$

$$d_{ij} \text{ igényből} = \begin{cases} \phi^*(i,j) & \text{rész} \ + \ \text{irányba} \\ 1-\phi^*(i,j) & \text{rész} \ - \ \text{irányba} \end{cases}$$

$$L_k^* := \sum_{ij:k\in[i,j)} \phi^*(i,j)d_{ij} + \sum_{ij:k\notin[i,j)} (1-\phi^*(i,j))d_{ij}$$

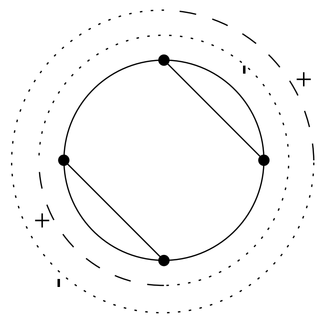
$$\min L^* = \max_{1\leq l\leq n} L_k^*$$

Ez így már egy lineáris programozási probléma, mely akár polinomidőben is megoldható, ehelyett azonban egy mohó megoldással próbálkozunk. Előtte azonban némi geometriai ábrándozás: A hálózatunkat igényekkel, mint egy kört, súlyozott húrokkal ellátva képzelhetjük. S ilyen elgondolás alapján beszélhetünk, igényekről, melyek metszik egymást (b,c); párhuzamosnak pedig a nem metsző $(a,b$ ill. $a,c)$ igényeket tekintjük, így azokat is melyeknek egyik végpontja közös.



3.1. Állítás. *Legyen ϕ^* megoldása a relaxált problémának, amely a L^* optimális értéket eléri, s minimális, olyan értelemben, hogy nem létezik más útkiosztás, amelyre $L_i \leq L_i^*$ $\forall i$ és $L_j < L_j^*$valamely j-re. Ekkor nem létezik él, mely egy párhuzamos igénypár között fekszik s mindkettő terhelné.*

Bizonyítás. Indirekten: Legyenek d_{ij}, d_{kl} párhuzamos igények. A köztük fekvő $(m,m+1)$ élt terhelje az első a a második b-vel s legyen pl. $a \leq b$ ekkor osszuk ki újra az utakat úgy, hogy minden változatlan, csak a fenti két igényből a-t az $(m,m+1)$ élt elkerülő utakra helyezünk. Így a éleken általában nem növekszik a terhelés míg az $(m,m+1)$ élen csökken, ellentmondásban ϕ^* minimalitásával. □



A relaxált problémát most sokkal általánosabb formában alakítjuk eldöntési problémává: bevezetünk c_i kapacitásokat minden $(i, i+1)$ élre s a kérdés az, hogy létezik-e ϕ^* útpakolásmelyre $L_i \leq c_i \; \forall i$.

Egy $(i, i+1)$ $(j, j+1)$ élvágás kapacitásának a $c_i + c_j$ kapacitásösszeget nevezzük. Vágásértéknek vagy a vágás terheltségének a két élen áthaladó húrt metsző igények összegét. Tehát azon igények összege, melyek megvalósításe mindenféleképp áthalad a két él valamelyikén:

$$D_{ij} := \sum_{\substack{k, l \,:\, k \in [i,j) \\ l \in [j,i)}} d_k$$

Látható, amennyiben létezik megoldás, teljesül a $D_{ij} \leq c_i + c_j$. (Ha egyenlőséggel teljesül, azt mondjuk, a vágás szoros.) Ennek fordítottja is igaz:

3.2. Állítás. *(Schrijver, Seymour, Winkler) Amennyiben $D_{ij} \leq c_i + c_j$ teljesül, létezik ϕ^* útpakolás, mely megengedett, azaz kielégíti a kapacitásfeltételeket.*

Bizonyítás. Tegyük fel, az állítás nem igaz, s tekintsünk egy ellenpéldát, mely minimális n-ben (a pontok számában), s emellett a lehető legkevesebb nem 0 igényt tartalmazza. Legyen d_{ij} tetszőleges nem 0 igény. Legyen (k, l) az a vágás, melyre $k, l \in [i, j)$, s minimalizálja az $M = -D_{kl} + c_k + c_l (\geq 0)$ összeget, azaz a legszorosabb vágás az (i, j) pozitív oldalán.

A d_{ij} követelményből $a = \min\{M/2, d_i\}$-t a pozitív irányba osszunk ki, $b = \max\{d_{ij} - M/2, 0\}$ a negatív irányba. Ha ezt az igényt törölve, s a megfelelő íveken ezen értékekkel csökkentve a kapacitásokat a kapott új probléma továbbra is kielégíti a vágásfeltételeket, akkor ellentmodásra jutunk; ugyanis ha nincs megoldása, a nem 0 igények számának csökkenése miatt a minimalitást sértjük, ha pedig van megoldása, akkor a d_{ij} igény fenti realizációjával a együtt az eredeti probléma egy megengedett megoldását kapjuk szemben a feltételezésünkkel. Így ebben az új helyzetben kell lennie egy sértő vágásnak. Legyen ez (k', l'). Ha $k' \in [i, j)$, $l' \in [j, l)$ (vagy fordítva), akkor ezt a vágást megfelelő értékekkel növelve s d_{ij}-t visszahelyezve már az eredetiben is sértő vágást kapunk. $k', l' \in [i, j)$

ugyanígy nem fordulhat elő. Marad a $k', l' \in [j, i)$ eset, melyre az eredeti értékeket felhasználva írhatjuk:

$$D_{\mathrm{k}'l'} + 2b > c_{k'} + c_{l'}$$

Amennyiben $b = 0$, ez már eredetileg is sértő, ezért feltehető, $b = d_{ij} - M/2 \neq 0$. Tekintsük a (k, k') ill. (l, l') keresztező vágásokat. Minden igény, ami áthaladt a (k, l), (k', l') vágásokon, az áthalad e két keresztezőn is, sőt ezeken még a d_{ij} igény is. Ezért felírható:

$$D_{kk'} + D_{ll'} \geq D_{kl} + D_{\mathrm{k}'l'} + 2d_{ij} >$$

$$> c_k + c_l - 2(M/2)c_{k'} + c_{l'} - 2(d_{ij} - M/2) + 2d_{ij} =$$

$$= c_k + c_l + c_{k'} + c_{l'}$$

így a keresztező vágások közül legalább egy sérti a vágásfeltételt. □

3.2.1. ϕ^* megadása

Most térjünk vissza az optimális megoldás keresésére. Ezt azáltal érjük el, hogy minden él számára létrehozunk egy szoros vágást: Először számoljuk ki az összes D_{ij} vágásértéket ($\binom{n}{2}$ darab), s legyen a legnagyobb M. Ekkor $L^* \geq M/2$, s ha minden kapacitást $M/2$-nek választunk, akkor a vágáskritérium teljesül, így $L^* = M/2$.

Ezek után tekintsük az élek körüljárás szerinti sorrendjét $((1,2)\dots(n,1))$, s csökkentsük sorban a kapacitásokat, amíg lehet, mégpedig a következő rekurzív formula szerint:

$$c_k = \min\bigl(\min_{l<g}(D_{kl} - c_l),\ \min_{l>g}(D_{kl} - M/2)\bigr)$$

A konstrukció miatt nem létezik $\{c_i'\}$ kapacitásrendszer, mellyel a feladatnak tetszőleges megvalósításe megengedett lenne, ha $c_i' \leq c_i \ \forall i$, és valamely j-re $c_j' < c_j$, ugyanis j-nél mindenféleképp sérül a vágásfeltétel.

Miután a szoros kapacitások megvannak, először a párhuzamos igényeket valósítjuk meg, mégpedig a következő módon: A konstrukció miatt bármely élt kiválasztva egy párhuzamos igénypár között az benne lesz egy szoros vágásban, s ez legfeljebb egyiküket metszi. Így a másiknak teljes egészében az ezt elkerülő íven kell haladnia. Ezzel a módszerrel kiküszöbölhető az összes párhuzamos él, s végül csak metsző igények maradnak, amelyek száma legfeljebb $n/2$. A 3.2 állítás bizonyításában szereplőekhez hasonlóan a meglévő realizációk mentén a kapacitásokat csökkentsük, a teljesített igényeket hagyjuk el. S a továbbiakban úgy dolgozunk, mintha csak metsző igények léteznének. Látható a szoros vágások továbbra is szorosak maradnak. Mivel minden él benne van egy szoros vágásban, így minden él telített tetszőleges megengedett megvalósítás mellett. Ezért kiválasztva b rmely megmaradt igény egy végpontját, a vele szomszédos két él is telített lesz. S a közrefogott igénytől eltekintve az összes többi tetszőleges megvalósítás mellett ugyanúgy terheli e két élt, ezért a kapacitáskülönbségük megadja, hogy egy megvalósításban mekkora a különbség ezen igény pozitív ill. negatív irányba kiosztott mennyiségei között, így ez megadja magát az útkiosztást is. Formálisan: legyen d_{ij} egy a megmaradt (metsző) igények közül, c_{i-1} ill. c_i az i pont melletti kapacitások, s legyen pl. $c_{i-1} \leq c_i$. Ekkor $\frac{d_{ij}-(c_i-c_{i-1})}{2}$ a pozitív $\frac{d_{ij}-(c_i-c_{i-1})}{2} + (c_i - c_{i-1})$ a negatív irányba kell kiosztani.

3.3. Visszatérés

Egyszerűsítsük tovább a bennünk lévő képet. Az előző bekezdés szerint csak a tört igények számítanak, amelyekből legfeljebb $n/2$ darab van. Így a következő redukciót hajtsuk végre: minden olyan i pont esetén, melyből nem osztott igény indul ki, szüntessük meg az igényt, s az $(i-1, i)$ ill. $(i, i+1)$ élek helyett tekintsünk egy új élt, rendeljük hozzá a $\max(L_{i-1}, L_i)$ terhelést, s tegyük meg ezt, míg létezik ilyen pont. Ekkor összesen $m = 2k \leq n/2$ pont marad, s a megmaradó k igény $d_{i,i+k}$ alakú. Legyen u_i a $d_{i,i+k}$ igény ϕ^* szerint pozitív, v_i pedig a negatív irányba szállított része ($u_i = \phi^*(i,j)d_{ij}$ $v_i = (1 - \phi^*(i,j))d_{ij}$ – ha a redukciót ϕ^*-ra is végrehajtjuk) ekkor, ha ϕ a pozitív irányba küldi a $d_{i,i+k}$ igény egészét, akkor a $\forall(j, j+1) : \ j \in [i, i+k)$ élen nő, $\forall(j, j+1) : \ i \in [i+k, i)$ élen csökken v_i-vel a terhelés. Ha ϕ negatív irányba küldi a $d_{i,i+k}$ igény egészét, akkor $\forall(j, j+ +1) : \ j \in [i+k, i)$ élen nő, $\forall(j, j+1) : \ j \in [i, i+k)$ élen csökken u_i-vel az igény.

$$z_i = \begin{cases} v_i & \text{ha } \phi(i, i+k) = 1 \\ -u_i & \text{különben} \end{cases}$$

Ekkor a terhelés változások így írhatók:

$$L_l = L_l^* + \sum_{i \in [1,k] l \in [i,i+k)} z_i - \sum_{i \in [1,k] l \in [i+k),i} z_i$$

Ebből is látható, $L_l + L_{l+k} = L_l^* + L_{l+k}^* \ \forall l$. Így $L \leq 2L^*$ bármilyen ϕ-re, amit egy ϕ^* -ból kapunk. Így egy tetszőleges választás – ami szinte mindig elég gyors – sem túl rossz. De ennél szebb eredmény is elérhető, amit a következő tétel bizonyít:

3.3. Tétel. *(Schrijver, Seymour, Winkler) Legyen ϕ^* a relaxált probléma egy minimális megoldása, L^* maximális terheléssel, s legyen D a legnagyobb értékű ϕ^* által osztott követelmény értéke. Ekkor létezik ϕ $0-1$ hozzárendelés, mely megegyezik ϕ^*-gal, ahol az egész, s emellett a maximális terhelésre igaz: $L - L^* \leq \leq \frac{3}{2}D$*

Bizonyítás. z_i-t fogjuk megadni, s így ϕ -t is, mégpedig rekurzívan, hogy mindig teljesüljön $\sum_{i=1}^{k} z_i \in \left[-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right]$ $\forall k \in [1, m]$ z_1 választható így, hisz $u_i + v_i \leq D$, s mindkettő pozitív. Ugyanezért k. részösszeg ($\sum_{i=1}^{k} z_i$) lehetséges értékei legfeljebb

D-vel térnek el egymástól, s ha már a $(k-1)$. részösszeg a kívánt intervallumba ($\sum_{i=1}^{k} z_i \in \left[-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right]$) esik a két lehetséges érték egyike is oda kerül. Legyen

$$M_k := \sum_{i=1}^{k} z_i - \sum_{i=k+1}^{m} z_i = 2\sum_{i=1}^{k} z_i - \sum_{i=1}^{m} z_i \ \in \left[-\frac{3}{2}D, \frac{3}{2}D\right]$$

$$M := \max_{1 \leq k \leq m} \mid M_k \mid$$

Ekkor

$$L - L^* \leq \max_j (L_j - L^*) = M \leq \frac{3}{2}D$$

□

E konstanst osztottan realizált igények esetén ($u_i = v_i \ \forall i$) tovább lehet pontosítani. Erről illetve a problémához kapcsolódó további finomságokról [5] írásban olvashatunk.

A minimalizálási problémára közelítő megoldás pedig az elmondottak alapján a következőképp kapható:

- relaxáció
  - vágásértékek kiszámítása
  - kapacitások minimalizálása
  - párhuzamos igények realizációjának megadása
  - a megmaradó metsző igények realizációja
- a z_i választása a (3.3) tétel szerint

4. Pontkapacitásos modell

4.1. Visszavezetések, s tétel

$G = (V, E)$ $V = (1, \dots, n)$ $E = ((i, i+1) \mod n)$	a hálózat (gyűrű)
$d : V \times V \to \mathbb{Z}^+$	az igények
$C : V \to \mathbb{Z}^+$	a pontkapacitások

Egy megengedett megvalósításra teljesül:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_{\rangle|}} w(P) = d_{ij} \ \forall ij$$

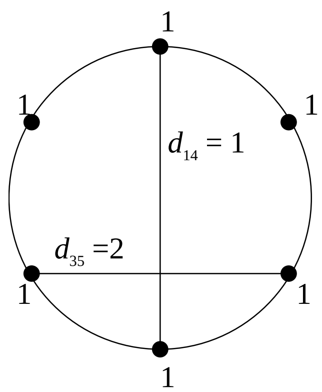
$$\sum_{P : i \in P} w(P) \leq C_i \ \forall i \in V$$

Ebben a felírásban pontot a rajta áthaladóakon kívül a belőle kiinduló igények is terhelnek, ami a feladat származtatása szerint teljesen természetes, hisz egy csomóponti egységet az onnan induló igény is terheli. Most viszont megszabadulunk ettől mégpedig azáltal, hogy minden pont kapacitását csökkentjük a belőle induló igények összegével ($d_i := \sum_j d_{ij}$), s kapacitás-feltételt (megengedettségi-feltételt) ennek megfelelően módosítjuk:

$$c : V \to \mathbb{Z}^+ \; c_i := C_i - d_i$$
$$\sum_{(k,l)\in\mathcal{P}_{ij}} w((k,l)) = d_{ij} \; \forall ij$$
$$\sum_{(k,l):i\in(k,l)} w((k,l)) \leq c_i \; \forall i \in V$$

A csökkentés során előfordulhat, hogy valamely új kapacitásérték negatív lesz, ez sajnos azt jelenti, hogy a probléma az eredeti megfogalmazásban sem volt megoldható, hisz ezen pontot már saját igényei túlterhelnék. Érdekes jelenség, hogy ekkor két szomszédos pont igényei "eltűnnek" a feltételrendszerből. De ez nem jelent változást, hisz amennyiben az eredeti megfogalmazásban volt megoldás, úgy két szomszédos pont közti igényt, amennyiben nem a köztes élen ment átpakoljuk, s a terhelés semelyik ponton sem nő, a másik irány méginkább kézenfekvő.

Az élkapacitásos modellben szereplő szükséges s elégséges feltétel pontvágásokra vonatkozó alakjában nem alkalmazható, szükségességéről és elégtelenségéről is egyaránt könnyű meggyőződni. Ennél bonyolultabb feltétel szerepel Shepherd és Tandon cikkében [3], mégpedig a következő: Legyen $S \subseteq V$ $k, l \in V$ esetén legyen $\sigma_S(kl) := \min\{\mid S \cap [k,l] \mid, \mid S \cap [l,k] \mid\}$. Pontosan akkor létezik megengedett megvalósítás, ha $\forall S \subseteq V$ esetén $\sum_{ij} d_{ij}\sigma_S(ij) \leq \sum_{k\in S} c_k$. Ez természetesen tartalmazza az előző naiv vágáskritériumot is. A szükségesség itt is könnyen látható, sajnos a cikk állításával ellentétben az elégségesség itt sem teljesül, ezt a következő ellenpélda mutatja: $n = 6$ $c_i = 1$ $i \in \{1,2,3,5,6\}$ $c_4 = 1$ $d_{14} = d_{35} = 2$ a többi helyen d 0.



Amennyiben létezik megoldás, az d_{35}-t is realizálja, s $c_4 = 1$ miatt az $(5,3)$ ívet legalább 1-gyel terheli. Ekkor a 2, 3 pontok telítetté válnak, így d_{14} nem realizálható. A fenti feltételek teljesülését pedig a lehetséges esetek végigvizsgálása adja.

Mivel első közelítésre nem látszik semmi kényelmes elindulás, semmi könnyen leolvasható feltétel, ezért egy már ismert problémára való visszavezetés tűnik kézenfekvőnek, s ebben a dolgozatban ez történik. (S távolabbi célkitűzésként fogalmazható meg egy direkt bizonyítás.)

Az elgondolás a következő: Képzeljünk el egy megengedett megvalósítását a problémának! Ekkor egy adott ponton átmenő utakra fennáll, hogy összsúlyuk kisebb mint a pont kapacitása. A ponttal szomszédos éleket ezek az utak terhelik, de rajtuk kívül még a pontból kiinduló igények megvalósításe is terhelést ró reájuk. Mégpedig aszerint terhelik a pozitív ill. negatív irányba eső élt, hogy mennyi megy pozitív ill. negatív irányba. (Tulajdonképpen a korábban "eltüntetett" kapacitásrész kerül kiosztásra.) Ez alapján ha az élekhez a közrefogott pont kapacitását rendeljük, s még hozzáadjuk a pontból induló igények megfelelő irányba való megvalósítását, akkor valamiféle élkapacitásokat kapunk, amelyre létezik megengedett megvalósításe a feladatnak. Ezt a gondolatmenetet precízen végigvíve kapjuk a következő tételt:

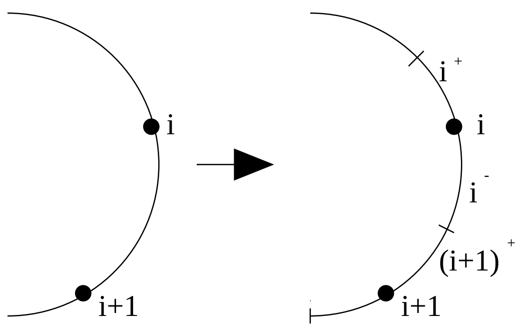
4.1. Tétel. *$\exists$ megengedett tört útvezetés $\Leftrightarrow$*

$$\forall s \in \{0,1,2\}^n \ \sum_i c_i s_i \geq \sum_{ij} d_{ij} \min\{ \sum_{i,k\neq i,j}^{j} s_k, \sum_{j,k\neq i,j}^{i} s_k\}$$

Sőt e feltételek mellett a megoldás 1/2-egész megoldás lesz.

Bizonyítás.

Minden élen helyezzünk el osztópontot, s az így kapott gráf (G') éleihez (i^+ + ill. i^-) rendeljünk változókat: x_{i^+}, x_{i^-}.



Legyen $D_{i^+j^+}$ az (i^+, j^+) élvágást metsző igények összege:

$$D_{i^+j^+} := \sum_{k\in[i,j],\ l\in(j,i)} d_{kl}$$

Hasonlóképp definiálható $D_{i^+j^-}$, $D_{i^-j^-}$, $D_{i^-j^+}$. A továbbiakban ahol a $*$ karakter jelenik meg az indexelésben, az azt jelenti helyette akár $+$, akár $-$ is állhat. S a következő egyenlőtlenségeket követeljük meg a fenti eszmefuttatás s a (2) alapján:

$$x_{i^+} + x_{i^-} = d_i \tag{4}$$

minden egyéb élvágásra:

$$c_i + x_{i^*} + c_j + x_{j^*} \geq D_{i^*j^*} \tag{5}$$

és természetesen feltesszük:

$$x_{i^*} \geq 0 \tag{6}$$

4.2. Állítás. *Amennyiben e rendszer megoldható úgy az eredeti is és viszont.*

Bizonyítás.

$\Leftarrow$ az eredeti probléma megoldása szerint legyen x_{i^+} ill. x_{i^-} i-ből az óramutató járásával ellentétes ill. egyező irányba induló utak összsúlya ekkor a két első feltétel triviálisan teljesül, az egyéb vágásokra vonatkozó pedig indirekten látható.

$\Rightarrow$ $\{x_{i^*}\}$ legyen a megoldás. Amennyiben minden i^* él esetén tekinjük a $c_i + x_{i^*}$ élkapacitást, úgy a megadott feltételek alapján az élkapacitásos modellnek létezik megoldása, s ez az eredetinek is megoldása lesz, ami indirekten látható □

4.3. Állítás. *Az $x_{i^*} \geq 0$ feltétel elhagyható.*

Bizonyítás. Legyen $\{x_{i^*}\}$ a gyengített rendszer egy megoldása, melyben szerepel negatív érték is. Pl.: $x_{i^-} = -a \leq 0$, így (4) miatt $x_{i^+} = d_i + a$. Ekkor $x_{i^-} = 0$, $x_{i^+} = d_i$ megoldás kielégíti az eredeti egyenlőtlenségeket. Eredetileg fennállt

$$c_i - a + c_j + x_{j^*} \geq D_{i^-j^*} \tag{7}$$
$$c_i + d_i + a + c_j + x_{j^*} \geq D_{i^+j^*} \tag{8}$$

ezenkívül tudjuk, a két vágás terheltsége legfeljebb az i. pontból kimenő össziénnyel tér el:

$$|D_{i^-j^*} - D_{i^+j^*}| \leq d_i \tag{9}$$

Ezekből könnyen megkaphatjuk a kívánt

$$c_i + c_j + x_{j^*} \geq D_{i^-j^*}$$

$$c_i + d_i + c_j + x_{j^*} \geq D_{i^+j^*}$$

egyenlőtlenségeket, ha a (9) lehetséges eseteit összevetjük a (7) (8) egyenlőtlenségekkel. □

Rendezzük át az egyenlőtlenségekben szereplő konstans tagokat egy oldalra:

$$x_{i^*} + x_{j^*} \geq D_{i^*j^*} - c_i - c_j \tag{10}$$
$$x_{i^+} + x_{i^-} = d_i \tag{11}$$

Ezentúl a jobboldalakon szereplő értékeket tekintjük a vágásokhoz rendelt értékekenek. Tekintsük azt a G'' gráfot, melynek pontjai G' éleinek felelnek meg, élei pedig a G' beli lényeges élvágásoknak (minden vágás lényeges, kivéve a $(i^+, i+1^-)$ alakúak). Az élekre pedig írjuk az egyes vágásokon szereplő átmenő értékeket. S a megfelelő $\{x_{i^*}\}$ keresése itt egy speciális potenciálkeresést jelent.

Ennek a gráfnak duplázzuk meg pontjait, s készítsünk egy páros gráfot, úgy hogy egy eredeti élnek feleltessük meg azt a két élt, amit eredeti végpontoknak megfeleltetett ellentétes osztályban fekvők összekötésével kapunk. Rendeljük hozzá az új élekhez a neki megfelelő régiek értékét. Így itt is egy potenciált keresünk a pontokon, mely bizonyos éleken egyenlőséggel teljesül:

$$\pi_{i^+} + \pi^{'}_{i^-} = d_i \text{ ill. } \pi^{'}_{i^+} + \pi_{i^-} = d_i \tag{12}$$
$$\pi_{i^*} + \pi^{'}_{j^*} \geq D_{i^*j^*} - c_i - c_j \tag{13}$$

Látható, e feladat megoldása az előző egy megoldását szolgáltatja, s ugyanez igaz a másik irányba is, a következő értékválasztásokkal:

$$x_{i^*} := \frac{\pi_{i^*} + \pi^{'}_{i^*}}{2} \text{ illetve } \pi_{i^*} = \pi^{'}_{i^*} := x_{i^*}$$

Tekintsük a (12, 13) rendszert s alakítsuk át, hogy a (12)-ben szereplő "=" helyett "$\leq$"-t követeljünk meg. Az így gyengített rendszer megoldhatósága ekvivalens a (12, 13) megoldhatóságával, hisz minden változó csak egy "$\leq$" egyenlőtlenségben szerepel, ezért ha értékét egyenlőségig növeljük, akkor a többi egyenlőtlenség továbbra is igaz marad.

Ezután írjuk fel a feladatot végleges formájában:

$$\pi_{i^+} + \pi^{'}_{i^-} \leq d_i \text{ ill. } \pi^{'}_{i^+} + \pi_{i^-} \leq d_i \tag{14}$$
$$-\pi_{i^*} - \pi^{'}_{j^*} \leq -D_{i^*j^*} + c_i + c_j \tag{15}$$

Itt bal oldalon szereplő együtthatók A mátrixa tulajdonképp a páros gráf pont-él incidenciammátrixa, ezért egy megfelelő megoldás ill. duálmegoldás egy súlyozott pont ill. élrendszert jelent. Ha létezik a megoldása az $A\pi \leq b$ rendszernek, úgy skalárszorzással elérhető, hogy egész legyen, így ezt visszavezetve kapunk egy 1/2-egész élkapacitásos feladatot, aminek – az Okamura Seymour tétele alapján – így 1/4-egész megoldása lesz, s ez a fenti állítások alapján az eredeti problémának is megoldása.

4.1.1. A duáloldalon

Egyébként alkalmazzuk a Farkas–lemmát, azaz amennyiben nem létezik megoldása az $A\pi \leq b$ rendszernek, létezik a duális feladatnak: $\exists y \geq 0 : \; yA = 0, \; yb < < 0$. Sőt, e megoldásról feltehető, hogy egész. Az $yA = 0$ feltétel azt fogja jelenteni, hogy a duálváltozonak megfelelő élek halmazában a pontok foka a rövid ("$=$") ill. a normál ("$\leq$") élekben megegyezik. Ez azt jelenti, hogy alternáló körökre bomlik a megoldás. Tekintsünk ezek közül egy olyat, mely által definiált duálváltozóra igaz, hogy $yb < 0$, s ezen duálmegoldással dolgozunk tovább (ilyen létezik, hisz különben az eredeti megoldás, mely ezek összege nem elégítené ki $yb < 0$ egyenlőtlenséget).

A duális megoldás amit kaptunk egy kör, melyben felváltva szerepelnek $'' = ''$ (rövid) ill. $'' \leq ''$ (normál) élek, s minden él csak egyszer szerepel. Ez G''-be visszatérve kissé deformálódik, ugyanis egy-egy élnek két ősképe is lehet így egy él kétszer is szerepelhet a körben. Az alternálás viszont megmarad, hisz $'' = ''$ élek ősképe is $'' = ''$ él s ugyanez áll a $'' \leq ''$ élekre is.

Most egy ideig a G'' gráfban dolgozunk. Rögzítsük a duális megoldásban kapott rövid éleket ((i^+, i^-) alakúakat), s jegyezzük fel azt is, mely él hányszor szerepel ($s(i) \in \{1, 2\}$), ez lesz az él multiplicitás, s az i pont multiplicitásaként is ezt tekintjük. Ezen élek megtartása mellett a többi él változtatásával fogunk egy új duális megoldást adni, melyre $y'A \leq yA(< 0)$. Tekintsünk egy i^*, j^* $i \neq j$ élt. Ennek súlyát a vágáson átmenő összigény s a c_i, c_j kapacitások határozzák meg. Így amennyiben rögzítünk egy ponthalmazt s hozzá pontonként egy multiplicitást, s egy pontot annyiszor szerepeltetünk lehetséges végpontként, amennyi a multiplicitása, akkor az ilyen módon kapható valódi élek halmazai esetén az összsúlyok szélsőértékeit az éleknek megfelelő vágások lehetséges összértékei határozzák meg. Tekintve az előjelezéseket, nekünk maximális összsúlyú vágáshalmazra van szükségünk. Látható, ha egy vágáshalmazra igaz, hogy minden igény maximális sok vágáson halad át – így a lehető legtöbb súlyát növeli – akkor az összsúlya maximális. Egy igény áthalad a vágáson, a megfelelő húrok metszik egymást, azaz a vágás végpontjai az igény ellentétes oldalain vannak. Így egy igény legfeljebb annyi vágáson haladhat át, ahány pontpárt választhatunk, hogy a pár két tagja ellentétes oldalon legyen. Mivel minden pontot az adott multiplicitás szerint használunk, így egy igény legfeljebb annyi vágáson halad át, ahány pont multiplicitással számolva a kevesebb pontot számláló oldalon (a kevesebb pontot számláló oldalt ezentúl "rövidebb" oldalnak is hívjuk). Egy vágásrendszert fogunk megadni a rögzített rövid élek pontjainak felhasználásával, melyre az előbbiek teljesülnek.

Gondolkodjunk "körmentén": először a 2 multiplicitású pontokat duplázzuk meg azaz rakjunk a közelébe még egy példányt. Ezután minden pontot kössünk össze a szemköztivel (csak ezen kiemelt pontokat számításba véve) – ez létezik, hisz eredetileg páros sok pont volt, s a 2 multiplicitásúak is páronként fordulnak elő. Végül a duplázott pontokat egyesítjük eredetijükkel, az éleket megtartva ekkor egyes élek egybeeshetnek, így bevezetünk egy $s(i^*, j^*) \in \{1, 2\}$ szorzót minden (i^*, j^*) élre (vágásra). Erre a vágásrendszerre igaz, hogy minden igény maximális sok vágáson halad át, így a vágás maximális.

Tekintsük most ezen élrendszer s a rövid (megtartott) élek által definiált duálváltozót. Erre teljesül a $y'b \leq yb(< 0)$ s megoldás is lesz, hisz az egyes pontok $'' = ''$ ill. $'' \leq ''$ foka nem változott, így igaz lesz az $y'A = 0$. Ebben az esetben a a $y'b < 0$ pontosan a tételben szereplő feltételt adja, hisz

$$y'b = \sum_i y_i b_i = -1\Big(\sum_{(i^+,i^-)\in S} d_i s(i) + \sum_{(i^*,j^*)\in S,\, i\neq j} s(i^*, j^*) \sum_{lk \text{ metszi } ij\text{-t}} d_{ij} - c_i - c_j\Big) < 0$$

kissé átrendezve:

$$\underbrace{\sum_{(i^+,i^-)\in S} d_i s(i)}_{\text{róka}} + \underbrace{\sum_{(i^*,j^*)\in S,\, i\neq j} s(i^*, j^*) \sum_{lk \text{ metszi } ij\text{-t}} d_{ij}}_{\text{bogár}} > \sum_{(i^+,i^-)\in S} c_i s(i)$$

Az egyenlőtlenség bal oldalának bogár részén a korábbi megfontolások szerint egy-egy igény annyiszor fordul, ahány pont a "rövidebb" oldalán szerepel. Ez a $\sum_{ij} d_{ij} \min\{\sum_{i,k\neq i,j}^{j} s_k, \sum_{j,k\neq i,j}^{i} s_k\}$ -tól csak abban a helyzetben tér el, mikor egy igény egy nem 0 súlyú pontból indul ki. S ekkor az eltérés abból adódik, egy ilyen igény mindkét oldalán így a "rövidebb" oldalon is eggyel ill. multiplicitással több pont található. Viszont a róka rész pontosan kompenzálja ezt a hibát.

A fordított irány ($\exists s \in \{0, 1, 2\}^n$: $\sum_i c_i s_i \geq \sum_{ij} d_{ij} \min\{\sum_{i,k\neq i,j}^{j} s_k, \sum_{j,k\neq i,j}^{i} s_k\}$ $\Rightarrow$ nem létezik megoldás) bizonyítása úgy történik, hogy a $0 - 1 - 2$ pontlefogáshoz megadunk egy $y \geq 0$ duálváltozót az előzőek szerint, azaz az adott pontokoz tartozó rövid éleket rögzítjük (multiplicitással), s tekintjük a maximális súlyú vágásrendszer által definiált duálváltozót. Erre $yA = 0$, $yb < 0$, így nem lesz megoldása a kapacitáskiosztásnak, ezért 4.2, 4.3 állítások s az utánuk következő gondolatok értelmében az eredeti problémának sem. □

A feladatmegoldás lépései így a következők:

- a kapacitások redukálása
- vágásértékek számítása
- a lineáris program felírása
  - nincs megoldás kapunk egy lefogást
  - létezik megoldás, kapunk egy megoldható élkapacitásos problémát
- az élkapacitásos probléma megoldása

Mivel a lineáris program megoldása egész, ezért az élkapacitásos modellben a kapacitások 1/2-egészek, így annak egy törtmegvalósításában szereplő törtek 1/4-egészek.

4.2. 1/4-egész megoldásból 1/2 egész megoldás

A bizonyítás eddigi állása szerint amennyiben a 4.1 tétel feltételei tejesülnek létezik 1/4-egész megoldás. S ez abból származik, hogy az transzformációk után kapott élkapacitások 1/2-egészek. Amennyiben egészek lennének ezen származtatott élkapacitások, a megoldásunk is 1/2-egész lenne. Azt fogjuk belátni, amennyiben a probléma megoldható – így létezik 1/4-egész megoldása, ill. 1/2-egész kapacitáskiosztása – úgy létezik egész élkapacitás is, s így 1/2-egész megoldás is.

Ezt elérendő végrehajtunk néhány redukciót a következő megjegyzések szerint:
Megjegyzés. Az 1/2-egész megoldás keresésénél elég az olyan feladatokra szorítkozni, ahol bármely két pont közötti igény legfeljebb 1 s nincs 0 kapacitású pont.

Tekintsük egy megoldását a problémának $(w, \mathcal{P})$ s hajtsuk végre a következő redukciót: $\forall (i,j)$, $\forall k \in (i,j)$, $c'_{ij} := c_{ij} - \lfloor w(i,j) \rfloor$, $d'_{ij} := d_{ij} - \lfloor w(i,j) \rfloor$ Ennek a problémának van megoldása, nevezetesen az eredeti probléma megoldásának a törtrésze, s ha ennek találunk egy 1/2-egész megoldását, az kiegészítve az eredeti megoldásának egész részével, az eredeti probléma 1/2-egész megoldását adja. Ha e redukció során 0 kapacitású pont keletkezik, akkor az összes kapacitás és igény is 0 lesz, ez pontosan azt jelenti, hogy az eredeti megoldásunk is már egész volt, így 1/2-egész is. □

Megjegyzés. Feltehető hogy az igények páronként keresztezik egymást.

Tekintsünk két nem metsző igényt. Ezekhez tartozó realizációk az adott megoldásban az előző megjegyzés szerint nem egészek. A legkisebb súlyú értékével a rövidebb íveken növelve az utak súlyát, a hosszabb íveken csökkentve egy új megengedett megvalósítást kapunk melyben egy új egész út jelenik meg, így az előző megjegyzés szerint elhagyható. □

Ezenkívül még a következő redukciós lépést hajtsuk végre: két nem 0 igényű pontpár közti 0 igényűeket vonjuk össze, a kapacitása ezen összevont pontnak legyen a minimális; ha nem volt köztük "igénytelen" beszúrunk egy új pontot, melyből nem megy ki igény, s kapacitása igen nagy (∞). Így teljesen szimmetrikus lesz a rendszer azaz ha egy pontból megy ki igény, akkor az az átellenesbe megy, s mivel a pontok száma $n = 4k = 2m$ alakú, ezért az ilyen igényekre $d_{i,i+k}$ alakban hivatkozunk. Így a megjegyzések alapján:

4.4. Definíció. *redukált rendszer: minden pontból legfeljebb 1 igény indul ki, az igények páronként metszők, két igényes pont pontosan egy igénytelen van.*

A fenti megjegyzések alapján egy megoldás mellett tekintsünk egy redukált problémát. Itt – mivel minden pontból egy, egységnyi igény indul ki, vagy semmi – az egész élkapacitás egy $0-1$ kiosztást jelent. Ennek eléréséért megvizsgáljuk, melyek a kritikus helyek, ahol egy akárhogy választott $(0-1)$ x_{i*} gondot okozhat. Jelölje a_{ij} az (i,j) pontvágáson átmenő igények összegét – megjegyzendő ezt a redukált rendszerben könnyen számolhatjuk. (c_{ij} a $c_i + c_j$ összeg jelölésére használjuk az átekinthetőség kedvéért.)

Írjuk fel, egy (i^*, j^*) vágásra milyen egyenlőtlenségnek kell teljesülnie:

$$c_{ij} + x_{i^*} + x_{j^*} \geq a_{ij} + * \tag{16}$$

Ahol a $* = 0, 1, 2$ aszerint, hogy a vágáshoz tartozó pontokból kimenő igények áthaladnak-e a vágáson.

4.5. Definíció. *(i^*, j^*) vágás kritikus, ha (16) fenállásához $x_{i^*} + x_{j^*} \geq 0$ teljesülése szükséges.*

Tudjuk, $a_{ij} \leq c_{ij}$ – hisz létezik megoldás. Ha $a_{ij} \leq c_{ij} - *$ is teljesül, akkor (16) mindig fenáll, azaz tetszőleges kiosztás jó. Ez $* = 0$ esetén mindig igaz, így csak a $* = 1$ ill. a $* = 2$ esetek érdekesek.

Legyen $a_{ij} = c_{ij}$. Ez azt jelenti, tetszőleges megoldás esetén i is j is telített így i-ből ill. j-ből induló igények megvalósításe nem terhelheti sem i-t sem j-t. Így csak $d_{ij} = 1$ vagy semmilyen igény nem megy ki sem i-ből sem j-ből. Ugyanis pl $d_{\text{ik}} = 1$, $k \neq j$ esetén, mivel minden igény realizációja tört, ezért a j-t is terheli azaz nem megengedett. Ugyanígy látható, hogy az (i, j) húrral párhuzamos igény sem létezik, így ebben az esetben kritikus vágás $(i^+, i+m^+)$ ill. $(i^-, i+m^-)$ alakú, $d_{i,i+m} = 1$, s $x_{i^+} + x_{i+m^+} = x_{i^-} + x_{i+m^-} = 1$ esetén a (16) teljesül.

Vegyük észre, ha $(i^-, i + m^-)$ kritikus, akkor $(i^+, i + m^+)$ is (természetesen fordítva is igaz):

Legyen $j := i + m$ Mivel (i^-, j^-) kritikus, ezért $a_{ij} = c_{ij}$. Írjuk fel mindkét vágásra a vágásfeltételt:

$$\left.\begin{array}{ll} c_{ij} + x_{i^-} + x_{j^-} & \geq a_{ij} + 1 \\ c_{ij} + x_{i^+} + x_{j^+} & \geq a_{ij} + 1 \\ \quad x_{i^-} + x_{i^+} & = 1 \\ \quad x_{j^-} + x_{j^+} & = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_{i^-} + x_{j^-} & = 1 \\ x_{i^+} + x_{j^+} & = 1 \end{array}\right.$$

Legyen $a_{ij} = c_{ij} - 1$ ekkor a (16) alapján csak a $* = 2$ eset érdekes, azaz mindkét pontból megy ki igény, s ebben az esetben is ha a megfelelő $c_{i^*} + x_{j^*}$ összeg legalább 1, akkor a (16) már teljesül. Ekkor $* = 2$-ből kifolyólag a vágás nem metszheti az (i, j) húrt azaz (i^+, j^-) vagy (i^-, j^+) alakú. (Sőt az előzőekkel együtt az is látható, hogy kritikus vágások mindkét végpontja nem 0 igényű pontban kell hogy legyen, ezért a 0 igényű pontokat elhagyhatjuk, s a számozást eszerint megújítjuk $n = 2k$ legyen a pontok száma, s mindből induljon ki igény. S ekkor $a_{ij} = \min\{|i - j| - 1,\ n/2 - |i - j| - 1\}$ $i \neq j$.)

4.6. Állítás. *Ebben az esetben $|i - j| \geq n - 2$, azaz minden igény metszi az ilyen vágást (azaz a v.$(i^+, i + m - 1^-)$ vagy $(i^-, i + m + 1^+)$ alakú).*

Bizonyítás. Természetesen $|i - j| \leq n - 1$ hisz $= n$ nem lehet a $* = 2$ s a szimmetria miatt. Legyen ez a vágás i^+, j^-, s legyen egy $d_{kl} = 1$ vele párhuzamos igény. Létezik $\frac{1}{4}$ – egész megoldás csupa törttel, jelölje ekkor a^+, a^-, b^+, b^- az i-ből illetve j-ből induló igények realizálását e^+, e^- pedig d_{kl}-ét.

$$a^+ + a^- = 1,\ b^+ + b^- = 1$$
$$e^+, e^-, e^*, b^*, a^* \in \{\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\}$$

a vágásra vonatkozó feltétel:

$$a_{ij} + 2e^+ + a^+ + a - {}^+b^+ + b^- \leq c_{ij} + x_{i^+} + x_{j^-} \tag{17}$$

mivel $a_{ij} = c_{ij} - 1$ ebből kapjuk: $x_{i^+} + x_{j^-} \leq \frac{3}{2}$. Tudjuk: $x_{i^*}, x_{j^*} \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, ezért feltehető – az általánosság csorbítása nélkül, hogy pl.: $x_{i^+} = 1 \Rightarrow x_{i^-} = = 0$, ill. $x_{i^-} \geq \frac{1}{2}$.

Tegyük fel, hogy: $x_{i^-} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{i^+} = \frac{1}{2}$. Ezután tekintsük a i^-, j^+ vágást. Írjuk fel erre is a megengedettség miatt fenálló egyenlőtlenséget:

$$a_{ij} + 2e^+ + 2a^+ + 2b^- \leq c_{ij} + x_{i^-} x_{j^+} \tag{18}$$

Ebből kapjuk a felhasználva az $a_{ij} = c_{ij} - 1$-t, s hogy semmi sem 0:

$$2(a^+ + b^-) \leq 1 \Rightarrow a^+ = b^- = \frac{1}{4} \Rightarrow a^- = b^+ = \frac{1}{4}$$

Végül tekintsük a i^-, j^- vágást:

$$a_{ij} + 2e^+ + 2a^+ + a^- + b^+ + 2b^- \leq cij + x_{i^-} x_{j^-} \tag{19}$$

s ebből kapjuk: $-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ ellentmondást.

Másrészt tegyük fel: $x_{i^-} = 1 \Rightarrow x_{i^+} = 0$, s ismét tekintsük a i^-, j^+ vágást. Írjuk fel itt is a megengedettség miatt fenálló egyenlőtlenséget:

$$a_{ij} + 2e^+ + 2a^+ + 2b^- \leq c_{ij} + x_{i^-} x_{j^+} \tag{20}$$

felhasználva, hogy $a^+, b^- \geq \frac{1}{4}$ kapjuk $e^+ + \frac{1}{2} \leq 0$, ami szintén ellentmondás $\square$

Így megkaptuk a kritikus vágások lehetséges elhelyezkedéseit, s a vágásokra e szerint mint szembe kritikus ill. ferdén kritikus fogunk hivatkozni, s azt is, hogy e vágások szerények, azaz ha a kísérőváltozók összege 1, akkor már a (16) teljesül.

4.7. Állítás. *$(i^-, i+m^-)$ kritikus (így $(i^+, i+m^+)$ is) s $(i^-, i+m+1^+)$, $(i+m^- -, i-1^+)$(ebben a szituációban azt mondjuk, szembe kritikus vágásunkat érinti két ferdén kritikus), akkor $(i-1^+, i+m+1^+)$ s $(i-1^-, i+m+1^-)$ is kritikus, azaz $a_{i-1,i+1} = c_{i-1,i+1}$ $d_{i-1,i+1} = 1$.*

Bizonyítás. Mivel $(i^-, i+m^-)$, $(i^-, i+m+1^+)$, $(i+m^-, i-1^+)$ kritikusak, ezért egyrészt igaz, hogy $i-1$ ill. $i+m+1$-ből megy ki igény, így $d_{i-1,i+1} = 1$ másrészt felírhatjuk:

$$c_i + c_{i+m} = c_{i,i+m} = a_{i,i+m} = n/2 - 1 = m - 1 \tag{21}$$
$$c_i + c_{i+m+1} = c_{i,i+m+1} = a_{i,i+m+1} + 1 = n/2 - 2 + 1 = m - 1 \tag{22}$$
$$c_{i+m} + c_{i-1} = c_{i+m,i-1} = a_{i+m,i-1} + 1 = n/2 - 2 + 1 = m - 1 \tag{23}$$

Ha az (21) levonjuk a (22) és a (23) összegéből kapjuk, hogy:

$$c_{i+m+1} + c_{i-1} = m - 1 = a_{i+m+1,i-1}$$

□

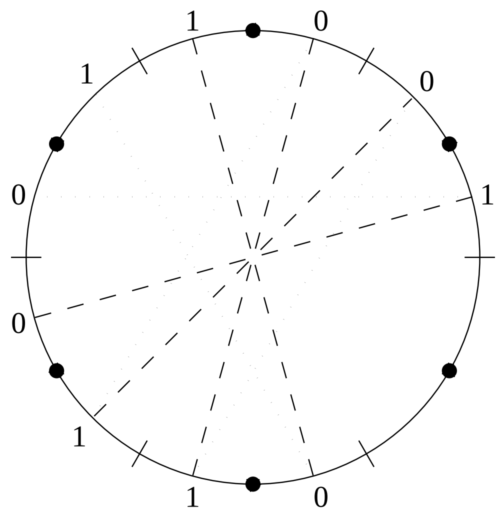
4.2.1. Kapacitáskiosztás megadása

Most ezen jellemzések után minden készen áll egy megfelelő kapacitáskiosztás megadására. A 0 igényűeknél ez – hisz más nem is lehet – $x_{i^+} = x_{i^-} = 0$; a nem 0 igényű pontokhoz tartozó élek kapacitáskiosztását pedig esetekre bontva adjuk meg.

Először a legegyszerűbb helyzetet tekintsük, mikor csak ferdén kritikus vágások szerepelnek. Ekkor minden nem 0 igényű i ponthoz tartozó vágások esetén legyen pl. $x_{i^+} = 1$, $x_{i^-} = 0$ – ezt paritásváltó kiosztásnak nevezzük. Ez a kiosztás megfelelő lesz, hisz egy tetszőleges kritikus vágás jelen estben ferdén kritikus így két nem 0 igényű pont melletti élek közül ellentétes irányba esőket köt össze.

Ha csak szembe kritikusak szerepelnek, akkor is könnyen megadható egy kapacitáskiosztás a nem 0 igényű pontokra: $x_{i^+} = 1$, $x_{i^-} = 0$, $x_{i+m^+} = 1$, $x_{i+m^-} = 0$

A helyzet akkor válik bonyolultabbá, mikor mindkét típusú kritikus vágás szerepel. Ekkor a 4.7 állítás szerint tekinthetjük minden szembe szoros vágáspár esetén az őt tartalmazó maximális érintkező rendszert; s ezek patícionálják a gráfunk összes szembe kritikus vágását ill. a velül érintkező ferdén kritikusakat. Ugyancsak a 4.7 állítás szerint egy ilyen maximális rendszerben legfeljebb 2 ferdén kritikus vágás lehet, mely nem mind a két végén érintkezik rendszerben lévő nem szembe kritikussal, ezeket hívjuk kilógóaknak. Tekintsünk egy ilyen maximális rendszert H, hogy nem záródik, azaz létezik olyan szembe kritikus vágás benne, mely nem érintkezik, legfeljebb egy ferdén kritikus vágással. Egy nem záródó rendszerben pontosan két ilyen vágás található. Egy létezik a definíció szerint. Tekintsük a párját; ha ebből is két ferdén kritikus él megy ki, akkor 4.7 szerint csatlakozik egy újabb – "mellette" fekvő – szembe kritikus pár, s annak egyik vágását az előző két ferdén kritikus lefedi. Amennyiben a pár másik tagját is érinti két ferdén kritikus, akkor ismét egy, az előzőektől különböző szembe kritikus párhoz jutunk. Ezt legfeljebb $m-1$-szer ismételhetjük meg, hisz utána kiindulási párt érnénk el, mégpedig azon vágását, melyből a feltételezéseink szerint csak egy ferdén kritikus vágás indul ki. Ezért a körbehaladásunk elakad, azaz elérünk egy újabb szembe kritikus vágást, mely legfeljebb egy ferdén kritikus vágással érintkezik. E két vágás a gyűrűt négy ívre bontja, s egy szemközti ívpár tartalmazza a H-hoz tartozó pontokat. Tekintsük e szerint az H-beli szembe pontos vágásokhoz tartozó pontok közül az egyik íven fekvőeket. Ezen az íven egy adott irányt tekintve vegyük a 1, 0, 0, 1 szekvencia ismétlésével kapott kapacitáskiosztást, s a másik íven a megfelelő segédváltozókon ennek ellentetjét – így H szembe kritikus vágásaira a (16) teljesül. A H-beli, két szembe kritikus vágással érintkező ferdén kritikus vágásokra is teljesül a (16), ugyanis a fenti kapacitáskiosztás esetén két szomszédos, H azonos ívén fekvő szomszédos nem 0 igényű pontokhoz tartozó csatlakozó élekhez rendelt változók értéke megegyezik.



Most maximális rendszerekre való partíció esetén az egyes rendszerekhez tartozó élekre meg tudjuk adni a megfelelő kapacitáskiosztást. Ha ezentúl még marad szabad pont, azokra a paritásváltó kiosztást alkalmazzuk. Az így kapott kiosztás egyedül a kilógó vágásokon lehet rossz. Ennek kijavítására bevezetjük az invertálást: Rögzítsünk nem 0 igényű pontok egy halmazát. E ponthalmazra nézve inverz kiosztás az a kiosztás, mely úgy jön létre, e pontokhoz tartozó ahol 0 szerepelt oda írjunk 1-et és viszont; s a többi kiosztást változatlanul hagyjuk. E művelet azon vágásokra, melyek mindkét vége vagy csak a fix vagy csak az invertált részbe esik a segédváltozók összegét változatlanul hagyja, így amennyiben ezekre a (16) fennállt invertálás előtt, úgy az invertálás után is.

Most tekintsünk egy maximális rendszert H, amelyből olyan vágások lógnak ki, melyre a (16) nem áll fenn. Legfeljebb két vágás lóg ki. Amennyiben e vágások H-beli részén a kiosztás mindkettejüknél 0 esetben, úgy a H-beli nem 0 igényű pontokra nézve invertáljunk. Ekkor e vágások H-beli végére 1 kerül, így a (16) teljesül reájuk, a többi vágásra a korábbi megjegyzés szerint minden változtlanul marad. Amennyiben pedig csak az egyik vágás H-beli végén szerepel 0 – így csak ennek nem felel meg az aktuális kiosztás – akkor a H-n kívüli pontokra nézve invertálunk, itt is hasonlóképp jó kiosztást kapunk. Tehát mindkét esetben csökken azon vágások száma, melyeknek az aktuális kiosztás nem felel meg, azaz véges sok ($\leq m$) lépés után egy jó kiosztáshoz jutunk.

Maradt az az eset, mikor egyetlen, zárt maximális rendszer van. Ez abban az esetben nem okoz gondot, mikor páratlan sok igényünk van, ekkor ugyanis a maximális rendszereknél alkalmazott kiosztásra (1, 0, 0, 1) teljesül, egyrészt hogy a szemközti segédváltozók ellentétesek – így a szembe kritikus vágásokra igaz lesz a (16), másrészt hogy két szomszédos nem 0 igényű pontokhoz tartozó csatlakozó élekhez rendelt változók értéke megegyezik – így a ferdén kritikus vágásokra is fenáll a (16). Gondot csak az okoz, mikor páros sok igény szerepel, ekkor ugyanis nem adható meg a fentihez hasonló mindkét vágástípust kielégítő kiosztás. Viszont belátjuk, ekkor nem lehet zárt a rendszer.

4.8. Állítás. *Ha $m = 2k$, akkor maximális rendszer nem lehet zárt.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik zárt maximális rendszer. Tekintsünk egy tetszőleges nem 0 igényű pontot, akár az elsőt. A feltételezésünk alapján tartozik hozzá egy szembe kritikus élpár így $c_{1,1+m} = a_{1,1+m} = m - 1$, ami páratlan, s mivel c_1, c_{1+m} egészek, ezért feltehető pl.: $c_1 < c_{1+m}$, így $c_{1+m} \geq m/2$, $c_1 < m/2$. Mivel az 1. pont melletti mindkét él benne van egy ferdén kritikus vágásban így a pozitív irányba eső is, ezért $c_1 + c_{m+2} = a_{1,m+2} + 1 = m - 1$, ebből kapjuk, $c_{m+2} = c_{1+m}$. Az $(m + 2)$. pont is benne van egy szembe kritikus vágásban, így teljesül, hogy $c_{m+2,2} = a_{m+2,2} = m - 1$, ezért $c_2 = c_{1+m}$. Ezután tekintsük az $m + 2$. pont pozitív oldalára első élt tartalmazó ferde vágást, majd e ferde vágás által meghatározott ponthoz tartozó szembe kritikus vágást stb. Végül $m - 1$ ilyen lépés után kapjuk, hogy $c_{m-1} = c_1$ ill. $c_{2m} = c_{m+1}$. Így $c_{m-1} + c_1 < m - 1$ ill. $c_{2m} + c_{m+1} \geq m$, azaz e két pont melletti éleket nem kötheti össze ferdén kritikus vágás szemben feltételezésünkkel. □

Így minden lehetséges esetben meg tudunk adni egy megfelelő $0-1$ kiosztást.

5. Nyitott kérdések

Eddigiek során az élkapacitásos esetben ismert tétel segítségével megadtuk megengedett 1/2-egész megoldás létezésének az eddig nem ismert szükséges és elégséges feltételét pontkapacitásos gyűrűhálózatokban. Az eredeti élkapacitásos tétel egy kiegészítéssel egész megoldást is ad, kérdés, ez a rész átvihető-e a pontkapacitásos modellre a bizonyításunkhoz hasonló módon. Továbbá pontkapacitásos esetben a síkhálózatokra vonatkozó tétel megfelelője sem ismert.

Természetesen egy közvetlen bizonyítás érdeklődésre tarthat számot, vagy akár a legutolsó alfejezet nem túl esztétikus számításainak egyszerűsítése.

Irodalom

[1] M.R. Garey and D.S. Johnson.*Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completness* W.H. Freeman & Co San Francisco 1979.

[2] H. Okamura, P.D. Seymour. *Multicommodity flows in planar graphs.* J. Combinatorical Theory Ser B 31 75-81 1981.

[3] F.B. Sheperd, E.Tandon. *Routing Around a Ring of PONS* May 7. 1995.

[4] A. Frank, T. Nishizeki, N. Saito, H. Suzuki, É. Tardos. *Algorithms for Routing Around a Rectangle* Discrete Applied Mathemathics 40 363-378 1992.

[5] A. Schrijver, P. Seymour, P. Winkler. *The Ring Loading Problem* SIAM J. Discrete Math., to appear

[6] A. Schrijver.*Theory of Linear and Integer Programming* New York 1986.

[7] A. Recski, ifj. Gy. Katona *Bevezetés a véges matematikába* ELTE TTK jegyzet 1991.