A PCF DEF-je

(rövid bevezető a pcf-be és egy topológiai alkalmazás)

Vizer Máté

2005 május

Témavezető : Komjáth Péter egyetemi tanár

1. Bevezetés

Dolgozatom első részében Menachem Kojman: The A,B,C of PCF : a companion to PCF theory, part1. című cikkét[3] követve mutatok egy lehetséges bevezetést a pcf-generátorok definiálásához és létezésük bizonyításához.

Majd ennek egy topológiai alkalmazásaként bizonyítom Shelah és Kojman egy tételét kis számosságú Dowker-tér létezéséről. Dowker-térnek olyan T_4 teret hívunk, amelynek az egységintervallummal vett szorzata nem normális. 1971-ben M.E. Rudin bizonyította ZFC-ben ilyen tér létezését, az ő példája $\aleph_\omega^{\aleph_0}$ nagyságú volt. Ez volt az egyedüli példa több, mint 20 éven keresztül, míg 1996-ban Balogh Zoltánnak sikerült $2^{\aleph_0}$ számosságú Dowker-teret konstruálni.

Kojman és Shelah cikkükben[4] $\aleph_{\omega+1}$ nagyságú pédát mutatnak,mely azért fontos, mert az előbbi két számosság hatványalakjuk miatt akármekkora lehet ZFC-ben(sőt, akár egyenlőek is).

Bár több, a pcf bevezetését szolgáló cikk jelent meg, melyek nagyobb anyagot fognak át, Kojman cikke mégis stílusa és precizitása miatt tökéletetes kedvcsinálónak is. A pcfről más stílusú, terjedelmében kb. ekkora nagyon jó anyagot találhatunk [1]-ben és [2]-ben.

Viszont az igazi "alapkönyv" a témában, bár nem bevezető jelleggel, Shelah monográfiája [6], melyért 2000-ben Bolyai-díjat kapott.

És ennyi ismerkedés után térjünk rá az A,B,C-re.

2. Club Guessing

2.1. Definíció. *A rendszámok egy X halmazára jelöljük accX(vagy acc(X))-szel X akkumulációs pontjainak halmazát, azaz* $accX=\{\alpha \in On : \alpha=supX\cap\alpha\}$. *Legyen továbbá* $naccX=X\setminus accX$ *és* $clX=X\cup accX$.

2.2. Definíció. *Jelölje c rendszámok egy halmazát és* α *egy rendszámot.Ezután bevezetjük a drop függvényt, melyre* $drop(\alpha,c)=sup\ c\cap\alpha$, *ha* $c\cap\alpha \neq \emptyset$ *és* $c\cap\alpha=\emptyset$ *esetben nem definiáljuk.*

Ha X és c rendszámok halmazai, jelöljük Drop(X,c)-vel a $\{drop(\alpha\ ,c) :\alpha \in X\}$ *halmazt.*

2.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy c és X a rendszámok halmazai, valamint* $\alpha \in On$. *Ekkor igazak a kövekező állítások:*

1. $drop(\alpha,c) \leq \alpha$ *vagy* $drop(\alpha,c)$ *nincs definiálva.Egyenlőség pontosan* $\alpha \in acc(c)$ *esetben áll fenn.*

2. ha $drop(\alpha,c)$ *definiálva van, akkor* $drop(\alpha,c)\in clc$.

3. $Drop(X,c)\subseteq clc$.

4. ha $\alpha_1 \leq \alpha_2$ *rendszámok és* $drop(\alpha_1,c)$ *definiált, akkor* $drop(\alpha_2,c)$ *is, és* $drop(\alpha_1,c) \leq drop(\alpha_2,c)$.

5. $\alpha \mapsto drop(\alpha,c)$ *rendezéstartó leképezés X egy végszeletén, így típ* $Drop(X,c)\leq$ *típX.*

6. ha $c_1 \subseteq c_2$ rendszámok részhalmazai, $\alpha \in On$ valamint drop(α,c_1) definiált, akkor drop(α,c_2) is és drop(α,c_1) $\leq$ drop(α,c_2).

7. ha $\langle c_i : i < i(*)\rangle$ olyan, hogy $c_i \subseteq On$ és $c_i \subseteq c_j$ $\forall i \leq j < i(*)$, akkor $\forall\alpha \in On$ $\exists$ $i(\alpha)<i(*)$, melyre drop(α,c_i) stabilizálódik $i(\alpha)$-nál, azaz drop(α,c_i) vagy nincs definiálva vagy pedig konstans $i(\alpha) \leq i < i(*)$-ra.

8. ha $\langle c_i : i <\kappa\rangle$ rendszámok részhalmazainak tartalmazásra nézve monoton csökkenő sorozata, κ egy reguláris számosság és $X \subseteq On$, melyre $|X|<\kappa$, akkor $\exists$ $i(X)<\kappa$ úgy, hogy Drop(X,c_i) stabilizálódik i(X)-nél, azaz Drop(X,$c_{i(X)}$)= Drop(X,C_i) $\forall$ $i(X) \leq i < \kappa$-ra.

9. accDrop(X,c)=accX$\cap$acc(c).

Bizonyítás: Az első állítás drop(α,c) definíciójából következik, a többiek - az utolsó kivételével - pedig az előzőekből illetve abból, hogy a rendszámok jól vannak rendezve.

Nézzük az utolsót: először a $\subseteq$ irányt bizonyítjuk.Legyen $\beta \in$ accDrop(X,c) és legyen $\langle$drop(α_i,c) : i $<$ i(*)$\rangle$ egy β-ban kofinális, szigorúan monoton növő rendszámsorozat, melyre $\alpha_i \in$X $\forall$ i $<$ i(*)-re.Ugyanitt igaz az is, hogy $\alpha_i \leq$ drop(α_{i+1},c), hiszen egyébként drop(α_i,c)$\geq$drop(α_{i+1},c), ami lehetetlen. Mivel $\forall$ i-re drop(α_i,c)$\in$clc (2. pont), kapjuk, hogy $\beta \in$ acc(acc(c)) = acc(c). Végül drop(α_i,c)$\leq$ α_i (1.pont) és $\alpha_i \leq$ drop(α_{i+1},c) $< \beta$ miatt, hogy $\beta \in$accX.

A $\supseteq$ irányhoz tegyük fel, hogy $\beta \in$ accX$\cap$acc(c).Legyen $\langle\beta_i$:i $<$ i(*) $\rangle \subseteq$ $\beta\cap$c, β-ban nem korlátos sorozat.Mivel $\beta \in$ accX, $\forall$i $<$ i(*)-re definiálva van a következő rendszám α_i = min($\beta\cap$X$\setminus$(β_i+1)).Így $\beta_i \leq$ drop(α_i,c) $< \beta$ és $\beta \in$ acc Drop(X,c).

$\square$

2.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy κ, λ reguláris, $\kappa^+ < \lambda$ valamint $S \subseteq \langle\delta < \lambda$:cf δ=$\kappa\rangle$ λ egy stacionárius részhalmaza. Ekkor létezik egy $\bar{C}$=(c_δ :$\delta \in$S) sorozat, amely teljesíti a következő két feltételt:*

1. $c_\delta \subseteq \delta$ δ-nak zárt részhalmaza.

2. bármely $E \subseteq \lambda$, λ-ban kofinális zárt halmazra N(E)=$\langle\delta \in S$:$c_\delta \subseteq E\wedge$ sup c_δ= $\delta\wedge$típ c_δ=$\kappa\rangle$ λ-nak egy stacionárius részhalmaza.

Bizonyítás: Két egyszerűsítési észrevétellel kezdjük.Először is, ha $\langle c_\delta$:$\delta \in S\rangle$ kielégíti a 2.feltételt, valamint hogy $c_\delta \subseteq \delta$, akkor $\langle clc_\delta \cap \delta$: $\delta \in S\rangle$ eleget tesz mindkét tételbeli követelménynek.Másodszor pedig, a tételnek megfelelő sorozatban minden egyes c_δ-t helyettesítve egy kofinális részhalmazával, szintén megfelelő sorozatot kapunk.

Ezután rátérünk a bizonyításra.Először transzfinit indukcióval "gyártunk" minden i $< \kappa^+$-ra egy C_i =$\langle c^i_\delta$: $\delta \in S\rangle$ sorozatot és egy $E_i \subseteq \lambda$ (λ-ban) kofinális zárt részhalmazt a következőképpen. Legyen E_0=λ és C_0=$\langle c^0_\delta$: $\delta \in$ $S\rangle$ olyan sorozat, melyre $c^0_\delta \subseteq \delta$ κ típusú, δ-ban kofinális zárt halmaz. Két indukciós feltevésünk lesz: az első, hogy c^i_δ=Drop(c^0_δ,E_i) δ-nak zárt részhalmaza , a második pedig, hogy ha j $<$ i akkor $E_i \subseteq E_j$. i=0-ra mindkét feltétel fennáll.

Ha i $< \kappa^+$ limeszrendszám és E_j,C_j definiálva vannak minden j $<$ i-re, legyen E_i=$\cap_{j<i}E_j$. Mivel i $< \lambda$, a metszet λ-ban kofinális zárt. Legyen c^i_δ=Drop(c^0_δ,E_i)

minden $\delta \in$S-re. c^0_δ és E_i zárt halmazok, ezért az előző lemma 9. pontja szerint c^i_δ is az (és $\subseteq \delta$). Az 5. pont szerint pedig típ $c^0_\delta \leq \kappa$.

Tehát feltehetjük, hogy i=j+1 $< \kappa^+$ és E_j, C_j definiálva vannak.Ha létezik E $\subseteq \lambda$ kofinális zárt, hogy $\forall \delta \in E \cap S$-re vagy c^i_δ nem kofinális zárt δ-ban vagy pedig $c_\delta \not\subseteq E$, válasszuk E_i-t $E_j \cap E$-nek.

Ha nem létezik E $\subseteq \lambda$ a fenti tulajdonságokkal, akkor minden E$\subseteq \lambda$ kofinális zártra $N^j(E)$=$\langle \delta \in$S : δ = sup $c^j_\delta \wedge c^i_\delta \subseteq E\rangle$ stacionárius λ-ban.Ugyanis, ha léteznének $E, E^{'} \subseteq \lambda$ kofinális zártak, melyekre $N^j(E) \cap E^{'}$=$\emptyset$, azaz $\delta \in S \cap E^{'}$-ből következne, hogy $c^j_\delta \not\subseteq E$, akkor $E \cap E^{'}$ λ olyan kofinális zárt részhalmaza lenne , amilyet E_i definíciójában akartunk.

Ebben az esetben c^i_δ= Drop(c^0_δ, E_j) az előző lemma 9. pontja szerint zárt, az 5.pontja szerint rendtípusa $\leq \kappa$, tehát ha nem korlátos δ-ban, akkor rendtípusa pontosan κ.A fentivel együtt ekkor megvagyunk.

Végül legyen E_{i+1} definiálva minden i $< \kappa^+$-ra , ebből akarunk ellentmondásra jutni.Válasszuk E-t $\cap_{i<\kappa^+} E_i$-nak. Mivel $\kappa^+ < \lambda$, E kofinális zárt λ-ban, és legyen $\delta \in$ accE$\cap$S. Az előző lemma 8. pontja szerint a $\langle c^i_\delta$: i $< \kappa^+\rangle$ sorozat stabilizálódik valamely i(δ) $< \kappa^+$-nál, hiszen $\langle E_i$: i $< \kappa^+\rangle$ monoton csökkenő és c^i_δ = Drop(c^0_δ,E_i). Mivel $\delta \in acc(c^0_\delta) \cap acc(E_i)$ $\forall$i $< \kappa^+$ esetén, a lemma 9.pontja szerint c^i_δ δ-ban kofinális zárt. Válasszunk egy j$\geq$i(δ)-t.$\delta \in E_{j+1}$ vagy c^j_δ nem kofinális zártδ-ban vagy $c_\delta \not\subseteq E_{j+1}$. Azonban c^j_δ δ-ban kofinális zárt, $c^j_\delta \not\subseteq E_{j+1}$.De $c^{i+1}_\delta \subseteq clE_{j+1} \cap \lambda$=$E_{j+1}$, így $c^i_\delta \neq c^{j+1}_\delta$, ellentmondásban a stabilizációval.

□

3. Az I[λ] ideál

Legyen $\lambda = cf\lambda$, $\lambda > \aleph_0$.Az I[λ] ideált a következőképpen definiáljuk.

3.1. Definíció. *Legyen $S \subseteq \lambda$. $S \in I[\lambda] \iff \exists \bar{P} = (P_\alpha : \alpha < \lambda)$ és egy λ-ban kofinális zárt E halmaz a következő tulajdonságokkal:*

1. $P_\alpha \subseteq P(\alpha)$ és $\mid P_\alpha \mid < \lambda$.

2. $\delta \in E \cap S \Rightarrow \delta$ szinguláris és $\exists c \subseteq \delta$, melyre δ=supc, típc $< \delta$ és $\forall \gamma < \delta$ $c \cap \gamma \in \cup_{\beta<\delta} P_\beta$.

3.2. Lemma. *I[λ] normális ideál.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $S_\alpha \in$I[λ] $\forall \alpha < \lambda$ és legyenek E_α , $\bar{P}_\alpha$ =(P^α_β : β< λ) a definícióban megadott tulajdonságú halmazok, amik bizonyítják, hogy $S_\alpha \in$ I[λ]. Az általánosság megszorítása nélkülfeltehetjük, hogy (P^α_β : β< λ) monoton növő.

Legyen E=$\triangledown_{\alpha<\lambda} E_\alpha$, S=$\triangle_{\alpha<\lambda} S_\alpha$ és $P_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} P^\beta_\alpha$.

Válasszuk δ-t E$\cap$S-belinek.S definíciója miatt van β< δ, melyre $\delta \in S_\beta$. E definíciója miatt (hiszen E=$\langle \alpha$: $\beta < \alpha \Rightarrow \alpha \in E_\beta\rangle$) pedig $\delta \in E_\beta$. Így $\delta \in S_\beta \cap E_\beta$, tehát δ szinguláris és létezik egy δ-ban kofinális zárt c halmaz, melyre c$\cap\gamma \in \cup_{\epsilon<\delta} P^\beta_\epsilon$ minden $\gamma < \delta$-ra.De ekkor készen vagyunk, hiszen P_ϵ

definíciójából az $\cup_{\epsilon<\delta}P^\beta_\epsilon \subseteq \cup_{\epsilon<\delta}P_\epsilon$ tartalmazás következik, azaz $c\cap\gamma \in \cup_{\epsilon<\delta}P_\epsilon$. Tehát $S \in I[\lambda]$, ami ekvivalens a normalitással. $\Box$

3.3. Lemma. *Ha $\lambda = cf\lambda$ és $\lambda > \aleph_0$ számosság, akkor $S^\lambda_0 = \langle \alpha < \lambda : cf\lambda = \aleph_0\rangle \in I[\lambda]$.*

Bizonyítás: Legyen P_α=$[\alpha]^{<\aleph_0}$. Ha $\delta \in S^\lambda_0$, $c \subseteq \delta$ bármely α-ban kofinális részhalmaz, melyre típc $=\omega_0$.Ha $\gamma < \delta$, $c \cap \gamma$ véges, így P_γ-hoz tartozik.
$\Box$

3.4. Tétel. *Ha $\lambda = cf\lambda$ és $\lambda > \aleph_0$ számosság, akkor az $S^{\lambda^+}_{<\lambda}$=$\langle\alpha < \lambda^+$: cfα< $\lambda\rangle \in I[\lambda^+]$.*

Bizonyítás: Az előző lemma bizonyítja az állítást $\lambda = \omega_1$-re, így feltehetjük, hogy $\lambda > \omega_1$.

Minden $\alpha < \lambda^+$-hoz válasszunk α-nak zárt részhalmazaiból álló $\langle a^\alpha_\zeta : \zeta < \lambda\rangle$ sorozatot a következők szerint:

1. $\forall\zeta < \lambda$-ra $a^\alpha_\zeta \subseteq \alpha$ zárt és $\mid a^\alpha_\zeta \mid< \lambda$.
2. $\zeta_1 < \zeta_2 \Rightarrow a^\alpha_{\zeta_1} \subseteq a^\alpha_{\zeta_2}$ és ha ζ limesz, akkor $a^\alpha_\zeta = \cup_{\xi<\zeta}a^\alpha_\xi$.
3. $\cup_{\zeta<\lambda}a^\alpha_\zeta = \alpha$.

Legyen P_α=$\langle a^\beta_\zeta \cap \gamma :\ \beta \le \alpha, \zeta < \lambda, \gamma \le \alpha\rangle$.A definícióból következik, hogy $P_\alpha \subseteq P(\alpha)$ és $\mid P_\alpha \mid\le \lambda < \lambda^+$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető $\delta \in S^{\lambda^+}_{<\lambda}$, $\delta > \lambda$. Azt kell megmutatnunk, hogy $\exists$ c$\subseteq$ δ kofinális zárt, melyre $c \cap \gamma \in \cup_{\beta<\delta}P_\beta$ $\forall\gamma < \delta$-ra. Válasszuk $c \subseteq \delta$ δ-ban kofinális zártnak, melynek rendtípusa = cfδ és min c $> \lambda$. $\forall\Theta \in c$-re az E_Θ=$\langle\zeta < \lambda :\ a^\delta_\zeta \cap \Theta$=$a^\Theta_\zeta\rangle$ λ-ban kofinális zárt. Ezért E=$\cap_{\Theta\in c}E_\Theta$ is λ egy kofinális zárt részhalmaza.

A definíciók miatt léteznie kell egy ζ_0 rendszámnak, amelyre $c \subseteq a^\delta_{\zeta_0}$ .Vegyünk egy $\zeta(*) \in E$ pontot, amire $\zeta(*) > \zeta_0$. Tehát $a^\delta_{\zeta(*)}$ δ zárt részhalmaza, számossága $< \lambda$ és mivel részhalmazként tartalmazza c-t, nem korlátos δ-ban. $\delta > \lambda \Rightarrow$típ $a^\delta_{\zeta(*)} < \delta$. Legyen $\gamma < \delta$ tetszőleges. Annak a belátásához, hogy $a^\delta_{\zeta(*)} \cap \gamma \in \cup_{\beta<\delta}P_\beta$ elég $A^\delta_{\zeta(*)} \cap \Theta \in P_\Theta$ valamilyen $\Theta \in c$-re, ami nagyobb, mint γ, hiszen P_Θ zárt a kezdőszeletképzésre.

Fixálva egy ilyen Θ-t, kapjuk $a^\delta_{\zeta(*)} \cap \Theta = a^\Theta_{\zeta(*)}$-t, mivel $\zeta(*) \in E \subseteq E_\Theta$ és így P_Θ-hoz tartozik.
$\Box$

3.5. Tétel. *Ha κ, λ reguláris számosságok és $\kappa^+ < \lambda$, akkor létezik $S \subseteq S^\lambda_\kappa$ stacionárius I[λ]-ban.*

Bizonyítás: Ha λ reguláris számosság rákövetkezője, akkor a tétel az előző következménye. Így az első $\lambda > \kappa^+$ eset, amikor az előző tétel nem alkalmazható, $\kappa^{+\omega+1}$.Tehát feltehetjük, hogy $\kappa^{++} < \lambda$.Ezután már az előző tétel miatt csak egy esettel kell foglalkoznunk: ha λ reguláris limesz.

Legyen $\bar{C}$=$\langle c_\alpha : \alpha \in S^{\kappa^{++}}_\kappa\rangle$, mint a 2.4. tételben.

Rögzítsünk egy $\langle H(\chi), \in\rangle$ elemi részmodelljeiből álló folytonos $\bar{M}$=$\langle M_i : i \le \lambda\rangle$ láncot, amely kielégíti a következőket:

∘ $| M_i |< \lambda$
∘ $\langle M_j : j \leq i\rangle \in M_{i+1}, i \in M_i$ és $i \subseteq M_i$
∘ $\bar{C}, \lambda \in M_0$ és $\kappa^{++} + 1 \subseteq M_0$

Definiáljuk Q_i-t $M_i \cap P(i)$-nek.Az első tulajdonság miatt $| Q_i |< \lambda$.

Legyen $S \subseteq \lambda$ a következő halmaz:

$S = \langle \alpha < \lambda : cf\alpha = \kappa \wedge \exists c$ α-ban kof. zárt, melyre $[(\forall\gamma < \alpha)(c \cap \gamma \in \cup_{i<\alpha} Q_i)]\rangle$.

A $\langle Q_i : i < \lambda\rangle$ sorozat bizonyíték $S \in I[\lambda]$-ra.Ezután már csak az van hátra, hogy megmutassuk, S stacionárius.

Rögzítsünk $E \subseteq \lambda$ kofinális zártat és azt fogjuk belátni, hogy S-sel vett metszete nem üres.E-t csökkentve feltehetjük, hogy $M_i \cap \lambda = i$ minden $i \in E$-re. Ez abból következik, hogy $\langle i < \lambda : M_i \cap \lambda = i\rangle$ λ egy kofinális zárt részhalmaza.

Ezután definiálunk egy másik elemi részmodell láncot $H(\chi)$-ban. $\bar{N}$=$\langle N_\zeta : \zeta \leq \kappa^{++}\rangle$, mely kielégíti a következőket:
∘ $\bar{M}, E, \lambda, \bar{C} \in N_0$ és $\kappa^{++} + 1 \subseteq N_0$
∘ $| N_\zeta |= \kappa^{++}$
∘ $\langle N_\xi : \xi \leq \zeta\rangle \in N_{\zeta+1}$ $\forall\zeta < \kappa^{++}$-ra

Definiáljuk f(ζ)-t sup($N_\zeta \cap \lambda$)-nak. f : $(\kappa^{++} + 1) \rightarrow \theta$ monoton növő és folytonos. Jelöljük Θ-val f(κ^{++})-t.A fenti harmadik tulajdonság miatt láthatjuk, hogy $f \restriction \zeta \in N_{\zeta+1}$ minden $\zeta < \kappa^{++}$.

Vegyük észre, hogy minden $\zeta \leq \kappa^{++}$-ra az $f(\zeta)$ rendszám E-hez tartozik. Ez az elemiségből és abból következik, hogy E$\in$N$_\zeta$ minden ζ-ra: ha $\beta \in N_\zeta \cap \lambda$ tetszőleges, akkor $N_\zeta \models (\exists\gamma \in \lambda)[\gamma \in E \wedge \gamma > \beta]$. Ekkor létezik $\beta < \gamma \in E \cap N$ és ebből következően E nem korlátos f(ζ) alatt, amiből következik, hogy f(ζ) $\in$E. Azaz ran f $\subseteq$ E.

Ezután $M_{\Theta+1}$-ben fogunk dolgozni.Abból, hogy $\Theta \in M_{\Theta+1}$ és $M_{\Theta+1}$ elemisége miatt tudunk egy g: $\kappa^{++} \rightarrow \Theta$, $g \in M_{\Theta+1}$ függvényt választani, amely növekvő, folytonos és Θ=sup(ran(g)).

Mivel f és g is növekvő és folytonosak κ^{++}-on, képük kofinális Θ-ban, ebből következik, hogy létezik egy E$\subseteq \kappa^{++}$ kofinális zárt, amelyre $f \restriction E$=$g \restriction E$.

$\bar{C}$ "club guessing" tulajdonsága miatt tudunk fixálni egy $\delta \in S^{\kappa^{++}}_\kappa$-t, melyre $c_\delta \subseteq E$, δ= sup c_δ és típ c_δ=κ. Legyen c=f[c_δ]=g[c_δ].

Tehát $c \subseteq f(\delta)$ egy κ rendtípusú kofinális zárt halmaz $f(\delta)$-ban. Tudjuk, hogy $f(\delta) \in$ E és azt fogjuk megmutatni, hogy $f(\delta) \in$ S, mégpedig úgy, hogy belátjuk, $c \cap \gamma \in \cup_{i<\Theta_\delta} P_i$ minden $\gamma < f(\delta)$-ra.

Legyen tehát $X = c_\delta \cap \zeta$ valamely $\zeta \in c_\delta$-ra c_δ egy kezdőszelete és $Y = f[X]$ c egy megfelelő kezdőszelete. Mivel c_δ és ζ N_0-hoz tartozik, $X \in N_0 \subseteq N_{\zeta+1}$ és mivel $f \restriction \zeta \in N_{\zeta+1}$ a harmadik feltétel miatt, amit $\bar{N}$ választásánál feltettünk.Ebből következik, hogy $Y = f[X] \in N_{\zeta+1}$.

Ha tudnánk, hogy $Y \in M_i$ valamilyen i $< \lambda$-ra, akkor készen vagyunk: tegyük fel, hogy H(χ)$\models \exists i < \lambda$ $[Y \in M_i]$. Mivel Y, $\bar{M}$, $\lambda \in M_{\zeta+1}$ és $N_{\zeta+1} \prec H(\chi)$, kapjuk, hogy $N_{\zeta+1} \models \exists i < \lambda[Y \in M_i]$ az elemiség miatt. Így létezik $i < f(\zeta + 1) < f(\delta)$, melyre $Y \in P_i$, ahogy akartuk.

De miért létezik $i < \lambda$?

$X \in M_0$, ám f nem biztos, hogy valamelyik M_i-hez tartozik.De $f \restriction c_\delta = g \restriction c_\delta$, ezért Y-t ($Y = f[X]$) definiálhatjuk g-vel f helyett. g$\in M_{\Theta+1}$, így Y definiálható $M_{\Theta+1}$-ben és így $Y \in M_{\Theta+1}$.

□

3.6. Tétel. *$S \in I[\lambda] \iff \exists E \subseteq \lambda$ kofinális zárt és egy $\langle c_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ sorozat, melyek kielégítik a következőket:*

1. $c_\alpha \subseteq \alpha$ és típ $c_\alpha < \alpha$.

2. $\beta \in c_\alpha \Rightarrow \beta$ rákövetkező rendszám és $c_\alpha \cap \beta = c_\beta$.

3. $\delta \in S \cap E \Rightarrow \delta$ szinguláris, típ c_δ=cf δ és δ= sup c_δ.

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy létezik E és egy fenti típusú sorozat.Legyen $P_\alpha = \langle c_\alpha \rangle$. Ha $\delta \in S \cap E$, akkor $c_\delta \subseteq \delta$ nem korlátos δ-ban és típc_δ=cfδ. $\gamma < \delta \Rightarrow c \cap \gamma = c \cap \epsilon$, ahol $\epsilon = \min[c_\delta \setminus (\gamma + 1)]$ és $c_\delta \cap \epsilon = c_\epsilon \in P_\epsilon$. Azaz $S \in I[\lambda]$.

Az állítás megfordításának bizonyításához vegyünk $S \in I[\lambda]$-t és legyen $E \subseteq \lambda$ olyan kofinális zárt halmaz valamint $\langle P^\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ olyan sorozat, melyek $I[\lambda]$ definíciójában szerepelnek. Ezekből kell egy 1-3-at kielégítő E-t és $\langle c_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$-t készítenünk. Először P_α-ra teszünk néhány kitételt, melyek nem fogják növelni $| P_\alpha |$-t (amely $< \lambda$). Tegyük fel, hogy χ elegendően nagy reguláris számosság és $\alpha \in M \prec H(\chi)$, $P_\alpha = M \cap P^\alpha$. Így tehát ha x $\in P_\alpha$, akkor típ x is $\in P_\alpha$, minden limesz rendszámra, melyre $\beta \in P_\alpha$ egy kofinális zárt $e_\beta \subseteq \beta$, melyre típ e_β=cf β is P_α-ban van, és P_α zárt a következő halmazműveletekere: kivonás, unió, metszet....

Ezután fixáljunk egy növő, folytotnos $\langle \gamma_i : \mathrm{i} < \lambda \rangle$ sorozatot, melyre γ_i limeszrendszám minden i $< \lambda$-ra és $\gamma_{i+1} \setminus \gamma_i \geq | \cup_{\alpha \leq \gamma_i} P_\alpha | + | \gamma_i | + \aleph_0$.
$\langle \gamma_i : \mathrm{i} < \lambda \rangle$-t megritkítva feltehetjük, hogy $\gamma_i \in E$ és ha $\gamma_i \in S$, akkor γ_i szinguláris.

Legyen $F_i : \cup_{\alpha \leq \gamma_i} P_\alpha \times \gamma_i \to (\zeta + 1 : \gamma_i < \zeta < \gamma_{i+1})$ bijektív függvény, úgy, hogy elkódoljon minden (x, β) párt $x \in \cup_{\alpha \leq \gamma_i} P_\alpha$, $\beta \leq \gamma_i$-re egy (γ_i, γ_{i+1})-beli rákövetkező rendszámmal.

Ezután próbáljuk meg definiálni c_α-t $\alpha < \lambda$-ra.

1.eset : α rákövetkező rendszám.

Mivel minden γ_i limeszrendszám, létezik i, melyre $\gamma_i < \alpha < \gamma_{i+1}$.

Ha $\alpha \notin ranF_i$, legyen $c_\alpha = \emptyset$.

Ha pedig $\alpha = F_i(x, \beta)$ valamely x $\in \cup_{\alpha \leq \gamma_j} P_\alpha$ és $j < i$-re, legyen $c_\alpha = \emptyset$.

A megmaradó esetben $\beta < \min x$ .Ha $x \in \cup_{\alpha \leq \gamma_j} P_\alpha$ valamely j $<$ i-re, legyen szintén $c_\alpha = \emptyset$.

Egyébként pedig:

$c_\alpha = \langle F_j(x \cap \zeta, \beta)$:

1. $\zeta \in x$ és típ $x \cap \zeta$ e_β -hoz tartozik
2. j $<$ i a legkisebb, melyre $x \cap \zeta \in \cup_{\alpha \leq \gamma_j} P_\alpha$
3. minden $\xi \in x \cap \zeta$ -ra, melyre típ$(x \cap \zeta) \in e_\beta$, létezik k $<$ j, hogy $x \cap \xi \in \cup_{\alpha \leq \gamma_k} P_\alpha \rangle$

2.eset : α limeszrendszám: Ha lehetséges, válasszunk egy $c_\alpha \subseteq \alpha$ nem korlátos halmazt, melyre típ cf $\alpha < \alpha$, minden $\beta \in c_\alpha$ rákövetkező rendszám és $c_\alpha \cap \beta = c_\beta$. Egyébként legyen $c_\alpha = \emptyset$.

Most pedig leellenőrizzük, hogy $\langle c_\alpha$: $\alpha < \lambda \rangle$-ra fennállnak-e az előírt követelmények.

Az 1.: $c_\alpha \subseteq \alpha$ és típ $c_\alpha < \alpha$. Limesz α-ra ez c_α választása miatt van így, ha α rákövetkező, akkor minden zárt részhalmazának rendtípusa $< \alpha$.

A 2.: Tegyük fel, hogy $\gamma \in c_\alpha$. Ekkor γ rákövetkező rendszám. Legyen $\Theta \in c_\alpha \cap \gamma$. c_α definíciója miatt létezik $\xi \in x$, melyre típ $x \cap \xi \in e_\beta$ és az a k(< i) a legkisebb, hogy $x \cap \xi \in \cup_{\alpha \leq \gamma_k} P_\alpha$, melyre $\Theta = F_k(x \cap \xi, \beta)$. (ezek a c_α definíciójabeli 1. és 2. kritériumok). c_α harmadik kritériuma alapján és mivel $\xi \in x \cap \zeta$, kapjuk, hogy létezik l < k, melyre $x \cap \xi \in \cup_{\alpha \leq \gamma_k} P_\alpha$.

Legyen y=$x \cap \zeta$, és $\gamma = F_j(y, \beta)$, $\beta <$min$y$ és $\xi \in y$, úgy , hogy típ $y \cap \xi$= típ $x \cap \xi \in e_\beta$. Ugyanígy, legyen k<j a legkisebb, melyre $y \cap \xi = x \cap \xi \in \cup_{\alpha \leq \gamma_k} P_\alpha$ és $F_k(y \cap \xi, \beta)$=Θ.

Így c$_\gamma$-ra, ha y-t kicseréljük x-re, mindhárom definícióbeli követelmény fenn fog állni. Tehát $\Theta \in c_\gamma$. A megfordítás szintén igaz, így kapjuk, hogy $c_\alpha \cap \gamma = c_\gamma$.

És végül a 3.: Azt kell megmondanunk, hogy mi legyen E'. Legyen $E' = \langle \gamma(i) : i\ limesz \rangle$. Tegyük fel, hogy $\sigma \in$ S $\cap E'$. Tudjuk, hogy σ szinguláris (mert $\langle \gamma_i$: i$< \gamma \rangle \subseteq$E) és hogy van x $\subseteq \delta$, típ $x < \sigma$ és $\forall \gamma < \sigma\ x \cap \gamma \in \cup_{\alpha < \sigma} P_\alpha$. Feltehetjük, hogy $x \in P_\sigma$. Legyen β= típ x. Ekkor $\beta \in P_\sigma$ és válasszuk β-t $<$ min x-nek.

Legyen $\delta = sup\langle \gamma_i : i < i(*) \rangle$, azaz $\delta = \gamma_{i(*)}$. $e_\beta \subseteq \beta$ és típ e_β=cf x=cf σ.Ebből tudjuk, hogy $e_\beta \in P_\beta$.

Definiáljuk y-t $\langle \zeta \in x$: típ$(x \cap \zeta) \in e_\beta \rangle$-nak. Ekkor típ y =típ e_β=cf δ és $y \subseteq \delta$ kofinális zárt halmaz δ-ban.

Legyen h(ζ)=min$\langle$j : x$\cap\zeta \in \cup_{\alpha \leq \gamma_j} P_\alpha \rangle$ valamilyen $\zeta \in y$-ra. Szóval h: y $\rightarrow \langle \gamma_i : i < \lambda \rangle$ és h nem csökkenő, mivel P_{γ_i} kezdőszeletre zárt minden i-re. Sőt, $\forall \zeta \in y$-ra h(ζ)$<\gamma_{i(*)} = \delta$.

Legyen z=$\langle \zeta \in y : \forall \xi \in y \cap \zeta$ h(ξ)<h(ζ)$\rangle$.

Valamint c=$\langle F_{h(\zeta)}(x \cap \zeta, \beta) : \zeta \in z \rangle$.

c-ről akarjuk bizonyítani, hogy jó c_δ-nak.Nem korlátos δ-ban és a rendtípusa cf σ.Az egyedüli, amit ellenőriznünk kell, hogy $\gamma \in c \Rightarrow \beta$ rákövetkező rendszám és $c \cap \gamma = c_\gamma$.Azaz elég látnunk, ami igaz, hogy $\alpha = F_{h(\zeta)}(x \cap \zeta, \beta)$ $\zeta \in z$ esetén j=h(ζ), és $c_\alpha = c \cap \alpha$. Így készen vagyunk.

$\square$

4. Egy kis bevezető a legkisebb felső korlátról

Ebben a fejezetben a rendszámfüggvényeken (melyek egy A végtelen halmazról a rendszámokba képeznek) adott$<_I, \leq_I, \not\leq_I$ relációkat tárgyaljuk, ahol I egy A-n adott ideál.A legfontosabb eset most számunkra az lesz, amikor van egy rendszámfüggvénysorozatunk, amely valamelyik reláció szerint szigorúan monoton nő és kíváncsiak vagyunk a sorozat(vagy hogy egyáltalán létezik-e) legkisebb és egzakt felső korlátjára.(Ezeket a fogalmakat később fogom definiálni)

Tehát legyen A egy végtelen halmaz és $I \subseteq P(A)$ egy ideál A-n.Jelöljük I^*-gal a duális filtert,azaz az $\langle X \subseteq$A : A$\setminus X \in I \rangle$ részhalmazrendszert és I^+-szal a P$(A)\setminus$I-t.Talán a legkönnyebb úgy elképzelni őket, hogy I-ben az A-n lévő "nullmértékű halmazok", I^*-ban az "egymértékű halmazok", I^+-ban pedig a "pozitív mértékű halmazok" vannak.

Ezután definiálom a fent említett relációkat.Ha adott az A végtelen halmazról a rendszámokba képező 2 függvény f és g, akkor:

○ $f =_I g$ pontosan akkor, ha $\langle a \in A : f(a) \neq g(a) \rangle \in I$
○ $f \leq_I g$ pontosan akkor, ha $\langle a \in A : f(a) > g(a) \rangle \in I$
○ $f <_I g$ pontosan akkor, ha $\langle a \in A : f(a) \geq g(a) \rangle \in I$
○ $f \lneq_I g$ pontosan akkor, ha $f \leq_I g$ és $\langle a \in A : f(A) < g(a) \rangle \in I^+$.

A következő jelöléseket is fogom használni:

○ $f \leq g$ pontosan akkor, ha $\forall a \in$A-ra [f(a)≤g(a)]
○ $f < g$ pontosan akkor, ha $\forall a \in$A-ra [f(a)<g(a)]
○ $f \lneq g$ pontosan akkor, ha $f \leq g$ és f≠g.

Hívjuk f_α:A→On függvények egy $\langle f_\alpha$:$\alpha < \lambda \rangle$ sorozatát növekvőnek $<_I (\leq_I ...)$ szerint akkor és csak akkor, ha $\alpha < \beta < \lambda$ esetén $f_\alpha <_I f_\beta (f_\alpha \leq_I f_\beta ....)$.

A fejezet hátralevő részére rögzítsünk le A-t és a rajta levő I ideált.

4.1. Definíció. *Tegyük fel, hogy F=$\langle f_\alpha : \alpha < \alpha(*) \rangle$ rendszámfüggvények egy halmaza.Ekkor*

- *egy g:A→On függvény pontosan akkor felső korlátja F-nek, ha $f_\alpha \leq_I g$ minden $\alpha < \alpha(*)$-ra.*
- *egy g:A→On függvény pontosan akkor legkisebb felső korlátja F-nek, ha g felső korlátja és $g \leq_I g'$ minden g' felső korlátra.*
- *egy g:A→On függvény pontosan akkor egzakt felső korlátja F-nek, ha legkisebb felső korlátja és minden $g' <_I g$-re létezik $\alpha < \alpha(*)$, hogy $g' < f_I \alpha$.*

Ezután megpróbálunk megfelelő feltételeket keresni, melyek fennállása esetén tudjuk igazolni legkisebb ill egzakt felső korlát létezését egy $\bar{f}$ monoton növő sorozathoz. De ehhez előbb definiálunk egy új fogalmat.

4.2. Definíció. *Legyen $\bar{C}$=$\langle c_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ olyan sorozat, melyre $c_\alpha \subseteq \alpha$. Egy, az A halmazból a rendszámokba képező függvényekből álló sorozat, $\bar{f} = \langle f_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ pontosan akkor engedelmes $\bar{C}$-nek, ha $\forall \alpha < \lambda$-ra és $\forall \beta \in c_\alpha$-ra [$f_\beta < f_\alpha$].*

A következő lemma azt állítja, hogy ha egy $\bar{C}$ sorozat, melynek $\bar{f}$ engedelmes "koherens", akkor $\bar{f}$ tartalmaz monoton növő részsorozatot.

4.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy $\bar{f}$=$\langle f_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ engedelmes $\bar{C} = \langle c_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$-nak. Ha $\bar{C}$-re teljesül, hogy $\beta \in c_\alpha \Rightarrow c_\beta = c_\alpha \cap \beta$, akkor minden $\alpha < \lambda$-ra az $\langle f_\beta : \beta \in c_\alpha \rangle$ sorozat $<$ szerint monoton nő.*

Bizonyítás: Legyenek $\beta, \gamma \in c_\alpha$ valamilyen $\alpha < \lambda$-ra és tegyük fel, hogy $\beta < \gamma$. Mivel $c_\alpha \cap \gamma = c_\gamma$, a sorozat "koherenciájából" kapjuk, hogy $\beta \in c_\gamma$.
$\bar{f}$, engedelmességéből pedig $f_\beta < f_\gamma$.

□

A következőkben egy elégséges feltételt írunk le egzakt felső korlát létezésére $<_I$ szerint monoton növekedő sorozatra.

4.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy $| A | \leq \kappa$ és $\kappa^+ < \lambda = cf\lambda$. Valamint, hogy $S \subseteq S^\lambda_{\kappa^+} = \langle \delta < \lambda : cf\delta = \kappa^+ \rangle$ stacionárius, $S \in I[\lambda]$ és $\bar{C}$-re teljesülnek a következők:*

1. $\bar{C} = \langle c_\alpha : \alpha < \lambda$ *és* $cf\alpha \leq \kappa^+\rangle$

2. $c_\alpha \subseteq \alpha$ *, típ* $c_\alpha < \alpha$

3. $\beta \in c_\alpha \Rightarrow \beta$ *rákövetkező és* $c_\alpha \cap \beta = c_\beta$

4. típ $c_\delta = \kappa^+$ *és* $supc_\delta = \delta$ *minden* $\delta \in S$*-re*

Ha $\bar{f} = \langle f_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ *(A-ból a rendszámokba képező) függvények* $<_I$ *szerint monoton növő sorozata engedelmes* $\bar{C}$*-nek, akkor létezik egzakt felső korlátja.*

Bizonyítás:

Először legkisebb felső korlát létezését bizonyítjuk, majd ezután belátjuk, hogy minden legkisebb felső korlát egzakt is.

Legkisebb felső korlátot "approximációval" fogunk keresni.Tehát veszünk egy felső korlátot és ahol lehet csökkentjük, persze hogy felső korlát maradjon. Limesz lépésekben fogjuk kihasználni, hogy $\bar{f}$ engedelmeskedik $\bar{C}$-nek, így produkálva kisebb felső korlátot.

Transzfinit indukcióval $\zeta(< \kappa^+)$-ra definiáljuk g_ζ, $\bar{f}$-hez tartozó felső korlátok sorozatát, hogy a következő teljesüljön rá:

∘ $\xi < \zeta < \kappa^+ \Rightarrow g_\zeta \lneq_I g_\xi$

Legyen $g_0(a)$=sup$\langle f_\alpha(a) + 1 : \alpha < \lambda\rangle$. Minden $\alpha < \lambda$-ra $g_0 > f_\alpha$, így g_0 felső korlátja az $\bar{f}$ sorozatnak.

Rákövetkező rendszámra, ha lehetséges, $g_{\zeta+1}$ elégítse ki a fentit.Ha nem, akkor g_ζ legkisebb felső korlát és az "approximációnk" véget ért.

Tegyük fel, hogy $\zeta < \kappa^+$ limesz.Azt kell persze belátnunk, hogy ha g_ξ definiálva van minden $\xi < \zeta$-ra, akkor tudjuk definiálni g_ζ-t is.(tehát a transzfinit indukciónk nem állhat le $< \kappa^+$ limeszrendszámnál.)

Szükségünk lesz az $S_\zeta(a)$ halmaz, h^ζ_α segédfüggvények és egy $\alpha_\zeta < \lambda$ rendszám definícióira, hogy definiálhassuk g_ζ-t.

Tehát:

∘ $a \in A$-ra legyen $S_\zeta(a) = (g_\xi(a) : \xi < \zeta)$

∘ $\alpha < \lambda$-ra $h^\zeta_\alpha(a) = min(S_\zeta(a) \setminus f_\alpha(a))$.

A következő lemma h^ζ_α néhány tulajdonságát bizonyítja.

4.5. Lemma. *1.* $h^\zeta_\alpha \in \Pi_{a\in A} S_\zeta(a)$ *és* $h^\zeta_\alpha \geq f_\alpha$*.*

2. $f_\alpha(a) \leq f_\beta(a) \Rightarrow h^\zeta_\alpha(a) \leq h^\zeta_\beta(a)$ *minden* $\alpha, \beta < \lambda$*-ra.*

3. fix $\zeta < \kappa^+$*-ra a* $\langle h^\zeta_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ *sorozat monoton nő* $\leq_I$ *szerint és* $\bar{f}$ *bármely* $\langle f_\alpha : \alpha \in c, c \subseteq \lambda\rangle$ *részhalmazára, amely monoton nő* $<$ *szerint,* $\langle h^\zeta_\alpha : \alpha \in c\rangle$ *monoton nő* $\leq$ *szerint.*

4. ha $\alpha, \beta < \lambda$ *és* $h^\zeta_\alpha(a) < h^\zeta_\beta(a)$*, akkor* $h^\zeta_\alpha(a) < f^\zeta_\beta(a)$*.*

5. ha $\xi < \zeta < \kappa^+$ *és* $\alpha < \lambda$*, akkor* $h^\xi_\alpha \geq h^\zeta_\alpha$*.*

Bizonyítás: Az első állítás közvetlenül h^ζ_α definíciójából következik.

A másodikhoz legyen $\alpha, \beta < \lambda$.Ha $f_\alpha(a) < f_\beta(a)$, akkor $h^\zeta_\alpha(a) = min(S_\zeta(a)\setminus f_\alpha(a)) \leq min(S_\zeta(a) \setminus f_\beta(a)) = h^\zeta_\beta$.

A harmadik a másodikból, a negyedik a definíciókból következik.

Az ötödikhez legyen $\xi < \zeta < \kappa^+$, amely esetben $S_\xi(a) \subseteq S_\zeta(a)$ minden $a \in A$-ra és ebből persze h$^\zeta_\alpha$(a)= min($S_\zeta(a) \setminus f_\alpha(a)$)≤min($S_\xi(a) \setminus f_\alpha(a)$)=$h^\xi_\alpha$.

□

Az $\alpha_\zeta < \lambda$ "stabilizálódási korlát" létezése pedig a következő lemmából jön:

4.6. Lemma. *Létezik $\alpha_\zeta < \lambda$, melyre*
$\alpha_\zeta \leq \alpha < \lambda \Rightarrow h^\zeta_\alpha =_I h^\zeta_{\alpha_\zeta}$.

Bizonyítás:

Az előző lemma harmadik pontja szerint $\langle h^\zeta_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ monoton nő$\leq_I$ szerint.Ha tehát $\bar{h} = \langle h^\zeta_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ nem stabilizálódna (modulo I), akkor $\forall\alpha < \lambda$ $\exists\gamma < \lambda[h^\zeta_\alpha \lneq h^\zeta_\gamma]$ és mivel $\bar{h}$ monoton nő $\leq_I$ szerint, létezik egy E, λ-beli kofinális zárt halmaz, melyre igaz, hogy ha $\beta \in E \Rightarrow \forall\alpha < \beta[h^\zeta_\alpha \lneq_I h^\zeta_\beta]$

Mivel S stacionárius, létezik $\delta \in S \cap acc(E)$.

Ezután rögzítsünk egy $c \subseteq c_\delta$ halmazt, hogy bármely két c-beli pont között legyen E-beli.

A 4.3 lemma miatt az $\langle f_\alpha : \alpha \in c\rangle$ sorozat $<$ szerint monoton növő és így a 4.5 lemma értelmében $\langle h^\zeta_\alpha : \alpha \in c\rangle \leq$ szerint nő monoton.Mivel c-t úgy választottuk, hogy bármely két eleme között legyen E-beli, a $\langle h^\zeta_\alpha : \alpha \in c\rangle$ szigorúan monoton nő.f $\leq$ g és $f \lneq_I g \Rightarrow f < (\neq) g$ bármely két f,g:A$\rightarrow$On -re. Tehát ebből következik, hogy $\langle h^\zeta_\alpha : \alpha \in c\rangle$ szigorúan monoton nő.Ez azonban ellentmond annak, hogy $\mid S_\zeta(a) \mid \leq \kappa$ minden $a \in A$-ra, merthogy $\langle h^\zeta_\alpha(a) : a \in c\rangle$ monoton nő $\leq$ szerint és mivel $\mid S_\zeta(a) \mid \leq \kappa$, stabilizálódik $\alpha_a < \kappa^+$-nál. α-t $\sup(\alpha_a : \alpha \in A)(< \kappa^+)$-nak választva $h^\zeta_\alpha = h^\zeta_{\alpha+1}$-et kapunk, ellentmondásban a feltevéssel, mely szerint a sorozat szigorúan monoton nő.

□

Ezt a lemmát használva limeszrendszámokra(mondjuk $\zeta < \kappa^+ - ra$) létezik $\alpha_\zeta < \lambda$ stabilizálódási rendszám és definiáljuk g_ζ-t $h^\zeta_{\alpha_\zeta}$-nak.Bármely $\alpha_\zeta < \alpha < \lambda$-ra persze $g_\zeta = h^\zeta_\alpha$, ezért α_ζ-t esetleg növelhetjük is.

4.7. Lemma. *g_ζ egy felső korlát $\bar{f}$-re és $g_\zeta \lneq_I g_\xi(\xi < \zeta)$.*

Bizonyítás:

Legyen adott $\alpha < \lambda$.(α-t esetleg megnövelve feltehetjük, hogy $\alpha \geq \alpha_\zeta$.) Ekkor $f_\alpha \leq h^\zeta_\alpha =_I h^\zeta_{\alpha_\zeta}$, azaz g_ζ egy felső korlátja $\bar{f}$-nek.

Ha $\xi < \zeta \Rightarrow f_{\alpha_\zeta} <_I g_\xi$, mivel g_ξ felső korlát és $\bar{f}$ monoton nő $<_I$ szerint. Ez azt jelenti, hogy valamely 1 mértékű részhalmazára az A halmaznak $g_\xi(a) > f_{\alpha_\zeta}(a)$. Mivel $g_\xi(a) \in S_\zeta(a)$, minden egyes a-ra tudjuk, hogy $h^\zeta_{\alpha_\zeta}(a) \leq g_\xi(a)$. Ebből persze következik, hogy $g_\zeta \leq_I g_\xi$ bármely $\xi < \zeta$-re.Mivel ζ limeszrendszám és $g_\xi \gneq g_{\xi+1}$ $(\xi < \zeta)$ kapjuk, hogy $g_\zeta \lneq g_\xi$ $(\xi < \zeta)$.

□

A legkisebb felső korlát létezését persze úgy bizonyítjuk, hogy belátjuk, az indukció befejeződik κ^+ előtt. Mivel limeszrendszámnál nem fejeződhet be, rákövetkező rendszámra fog, ami pont egy legkisebb felső korlátot jelent. És készen leszünk a legkisebb felső korlát létezésével.

4.8. Lemma. *Valamely $\zeta < \kappa^+$-ra $g_{\zeta+1}$ nincs definiálva.*

Bizonyítás: Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy indukciónk működik minden $\zeta < \kappa^+$-ra.

Minden $\zeta < \kappa^+$ limeszrendszámra tudjuk, hogy $g_\zeta = h^\zeta_{\alpha_\zeta} =_I h^\zeta_\alpha$ $(\alpha \geq \alpha_\zeta)$. $\lambda > \kappa^+$ regularitása miatt létezik $\alpha(*) < \lambda$ úgy, hogy $g_\zeta =_I h^\zeta_{\alpha(*)}$ minden limesz $\zeta < \kappa^+$-ra.

A $\langle h^\zeta_{\alpha(*)} : \zeta \in acc(\kappa^+)\rangle$ stabilizálódik valamely $\zeta(*) \in acc(\kappa^+)$ rendszámnál a 4.5 lemma miatt. Legyen $\zeta > \zeta(*)$ limeszrendszám.Ekkor $g_{\zeta(*)} \gneq g_\zeta = g_{\zeta(*)}$ ellentétben a stabilizálódással.

$\square$

Készen vagyunk.

Miután meglett egy legkisebb felső korlát, belátjuk róla, hogy egzakt felső korlát is.

4.9. Lemma. *Tegyük fel, hogy g egy legkisebb felső korlátja az $\bar{f}$ sorozatnak.Ekkor ha $g^{'} <_I g$, akkor $g^{'} <_I f_\alpha$ valamely $\alpha < \lambda$-ra.*

Bizonyítás: Legyen $B_\alpha = \langle a \in A : f_\alpha(a) > g^{'}(a)\rangle$. Ha $\alpha < \beta < \lambda$, akkor $B_\alpha \subseteq_I B_\beta$, mert $f_\alpha <_I f_\beta$. Ha B_α/I nem stabilizálódik, akkor létezik egy $E \subseteq \lambda$ kofinális zárt, hogy $\alpha < \beta \in E \Rightarrow B_\alpha \subsetneq_I B_\beta$. Rögzítsünk $\delta \in S \cap acc(E)$-t,majd ezután egy kofinális c halmazt, hogy c bármely két eleme között legyen E-beli.

Mivel a választásunk folytán c bármely két eleme között van E-beli,a $\langle B_\alpha : \alpha \in c\rangle$ sorozat szigorúan monoton nő $\subseteq_I$ szerint. De ekkor a 4.3 lemma miatt az $\langle f_\alpha : \alpha \in c\rangle$ is szigorúan monoton nő $<$ szerint, amiből az következik, hogy $\langle B_\alpha : \alpha \in c\rangle \subseteq$ szerint monoton nő. $\subsetneq_I$ és $\subseteq$ szerinti monoton növekedésből pedig következik a $\subsetneq$ szerinti monoton növekedés, amiből kapjuk, hogy $\langle B_\alpha : \alpha \in c\rangle$ A egy szigorúan monoton növő részhalmazsorozata, ami ellentmond annak, hogy $\mid A \mid < \kappa$.

Tehát tegyük fel, hogy B_α/I stabilizálódik valamely $\alpha(*) < \lambda$-nál. Ha $B_{\alpha(*)} \in I^*$, akkor $f_{\alpha(*)} >_I g^{'}$ és kész vagyunk. Ellenkező esetben minden $\alpha \geq \alpha(*)$-ra $f_\alpha \restriction (A \setminus B_{\alpha(*)}) \leq_I g^{'} \restriction (A \setminus B_{\alpha(*)})$.

Ebből definiáljuk $g^{''} = g^{'} \restriction (A \setminus B_\alpha(*)) \cup g \restriction B_{\alpha(*)}$-ot. $g^{''}$ felső korlátja $\bar{f}$-nek és $g^{''} \lneq g$, hiszen $g^{'} <_I g$ és $A \setminus B_{\alpha(*)} \in I^*$. Ez pedig ellentmond annak, hogy g legkisebb felső korlát.

$\square$

befejeztük a tétel bizonyítását.

$\square$

Ejtsünk pár szót $I[\lambda]$ bizonyításbeli szerepéről. Abból, hogy $\bar{f}$ engedelmeskedik $\bar{C}$-nek és $\bar{C}$ koherenciájából a 4.3 lemma alapján következik, hogy $\bar{f}$ monoton nő "lokálisan", vagyis részsorozatokban, melyeket $c_\delta \in \bar{C}$-vel indexeltünk. Tudjuk, hogy ha $\bar{h}^\zeta$ nem stabilizálódik modulo I , monoton nő $\lneq_I$ szerint λ egy kofinális zárt részhalmazán. És azt is tudjuk, hogy lehetetlen $\bar{h}^\zeta$ bármely κ^+ hosszú részsorozatának $\lneq$ szerint monoton nőnie, hiszen $h^\zeta_\zeta \in \bar{h}^\zeta$ képtere benne van $\Pi S_\zeta(a)$-ban.

Mivel azonban $S \in I[\lambda]$ stacionárius, beletehetjük E egy akkumulációs pontját (δ-t) S-be és közrefogva c_δ E-beli pontokkal, találhatunk egy κ^+ hosszú sorozatot, amely mindkét reláció szerint szigorúan monoton nő.

Ugyanez van megismételve a 4.9. lemmában: ha a B_α sorozat nem stabilizálódik modulo I, akkor egy kofinális zárt halmazon nő. Van S-ben minden kofinális zártnak akkumulációs pontja, ezért találhatunk κ^+ hosszú részsorozatot, amelyen B_α nő mind $\subseteq$, mind $\subsetneq_I$ szerint.

A 4.4. tételbeli engedelmességo feltételt elhagyhatjuk, ha feltesszük hogy $2^{|A|} < \lambda$.

Végül azt is megjegyezhetjük, hogy a későbbiekben arra lesz jó egy I[λ]-beli stacionárius halmaz, hogy elhagyhatunk $2^{|A|}$-ről bármilyen feltételt.

5. A PCF elmélet alapfogalmai

Tehát ebben a fejezetben elkezdjük tárgyalni a PCF("possible cofinality"-ból jön a rövidítés)-et, lényegében reguláris számosságok egy kis halmazának egy, a halmazon lévő ideállal lefaktorizált szorzatával fogunk foglalkozni.

5.1. Definíció. *Legyen$\langle P, \leq\rangle$ egy részbenrendezett halmaz, azaz $\leq$ egy tranzitív és reflexív reláció P-n.(p<q-t írunk, ha $p \leq q$, de $q \not\leq p$)*

• *Egy $D \subseteq P$ részhalmaz kofinális pontosan akkor, ha $\forall p \in P \exists d \in D[p \leq d]$*

• *P kofinalitása (cfP) a legkisebb számosság, amekkora egy P-beli kofinális részhalmaz számossága lehet.*

• *Egy $\bar{d} = \langle d_i : i < \lambda\rangle$, P elemeiből álló sorozat monoton növő és kofinális, ha $<$ szerint monoton növő és kofinális.*

• *P-nek pontosan akkor létezik valódi kofinalitása, ha létezik egy monoton növő, kofinális $\bar{d}$ részhalmaza.Ekkor P valódi kofinalitása (tcfP=true cofinality of P) a lekisebb számosság, amekkora egy monoton növő, kofinális részhalmaz lehet.*

Minden részbenrendezett halmaznak van kofinalitása.De pl ha az $(\omega_n : n < \omega)$ részbenrendezett halmazoknak vesszük a diszjunkt unióját, akkor ennek a kofinalitása $\aleph_\omega$ és nincs valódi kofinalitása.Így P kofinalitásának nem kell feltétlenül reguláris számosságnak lennie és nem is biztos, hogy van valódi kofinalitása.(de ha létezik tcfP, akkor reguláris és tcfP=cfP)

5.2. Definíció. *Reguláris számosságok egy A halmazára legyen pcf A=*
(tcf $\Pi A/I$: I egy A-n lévő ideál és $\Pi A/I$-nek létezik valódi kofinalitása)

A $\leq_I$ reláció értelmezve volt bármely két, az A halmazból a rendszámokba menő függvényre, és persze alkalmazható bármely, a szorzatban lévő függvényre (hiszen képzelhetjük a szorzatot függvények halmazaként, azaz ΠA=⟨f : f egy függvény A-n,$\forall a \in A$-ra [f(a)∈A]⟩. Tegyük fel, hogy $\Pi A/I$-nek létezik valódi kofinalitása és rögzítsünk egy függvényekből álló monoton, kofinális sorozatot $\bar{f}$=$\langle f_\alpha : \alpha < tcf \Pi A/I\rangle$-t. Minden $I' \supseteq I$ ideálra persze $\bar{f}$ monoton növő kofinális lesz, ezért tcf $\Pi A/I'$=tcf $\Pi A/I$. És végül mivel minden A fölötti ideált ki lehet terjeszteni egy duális ultaszűrővé, kapjuk a következő ekvivalens átfogalmazást:

5.3. Lemma. *pcfA=* $\langle$ *cf*$\Pi A/D$ *: D ultrafilter A-n*$\rangle$

Bizonyítás:

$\square$

A Los tétele miatt $\Pi A/D$ (ahol D ultrafilter) teljesen rendezett halmaz és így mindig létezik valódi kofinalitása.

Jegyezzük meg, hogy $A \subseteq pcfA$, az egy elem által generált ultrafilterek miatt.

Tehát most elkezdjük a szorzatok valódi kofinalitásainak vizsgálatát.

5.4. Definíció. *Legyen* $A \subseteq REG$ *és tegyük fel, hogy* $\mid A \mid < minA$*.Reguláris* λ*-ra definiáljuk* $J_{<\lambda}[A] = \langle B \subseteq A : B \in D \Rightarrow cf\Pi A/D < \lambda$ *minden A-n lévő D ultrafilterre*$\rangle$*-t.*

Mivel cf$\Pi A/D$ mindig reguláris, az hogy μ szinguláris estén $J_{<\mu^+} = J_{<\mu}$, triviális.

A következő tétel a későbbiekben elég használhatónak bizonyuló információt ad azokkal az ideálokkal faktorizált szorzatról, ahol az ideál kiterjeszti $J_{<\lambda}$-t. Tehát:

5.5. Tétel. *Ha minA* $>\mid A \mid$ *, akkor* $\Pi A/J_{<\lambda}$ λ*-irányított.*

Bizonyítás: Transzfinit indukcióval $\mu < \lambda$-ra bizonyítjuk, hogy bármely F$\subseteq \Pi A$-nek , melyre $\mid F \mid = \mu$, van felső korlátja $\Pi A/J_{<\lambda}$-ban.

Tehát legyen adva $F \subseteq \Pi A$ és tegyük fel, hogy $\mid F \mid = \mu$.

1. eset: ha μ szinguláris.

Az indukciós hipotézist használva az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy F=$\langle f_\alpha : \alpha < \mu \rangle$ monoton nő $<_{J_{<\lambda}}$ szerint.Válasszunk ki ebből egy kofinális sorozatot $\langle f_{\alpha_\zeta} : \zeta < cf\mu \rangle$-t.

Mivel cf$\mu < \mu$, az indukciós hipotézis ad egy g $\in \Pi A/J < \lambda$ felső korlátot az $\langle f_{\alpha_\zeta} : \zeta < cf\mu \rangle$ sorozathoz, ami persze felső korlátja F-nek is.

2. eset: μ reguláris és $\mid \mu \cap A \mid < \aleph_0$. Legyen g(a)=sup(f(a) : f$\in$F) minden a$\geq$ μ-re A-ban és g(a)=0, ha a $\in A \cap \mu$. Mivel A$\cap\mu$ véges, $A \cap \mu \in J_{<\lambda}$ és g $\in \Pi A$ F egy felső korlátja.

3. eset: μ reguláris és $A \cap \mu$ végtelen.Legyen κ=$\mid A \mid^+$. Mivel $\mid A \mid <$ minA, tudjuk, hogy $\kappa^+ < \mu$. A 3.5 tétel miatt találhatunk egy $S \subseteq S^\mu_{\kappa^+}$ stacionárius halmazt, ahol $S \in I[\mu]$. Soroljuk fel F-et :$\langle f_\alpha : \alpha < \mu \rangle$. Az indukciós hipotézis használatával definiáljuk transzfinit indukcióval $\alpha < \mu$-re a következő $\langle h_\alpha : \alpha < \mu \rangle$ sorozatot, amely eleget tesz az alábbi kívánalmaknak:

1. $h_\alpha >_I f_\beta$ és $h_\alpha >_I h_\beta$ minden $\beta < \alpha$-ra.
2. $\bar{h} = \langle h_\alpha : \alpha < \mu \rangle$ engedelmeskedik $\bar{C}$-nek.

A feltételekből adódóan az α-adik lépésnél tudunk definiálni egy $g_\alpha \in \Pi A$ felső korlátot a $\langle h_\beta : \beta < \alpha \rangle \cup \langle f_\beta : \beta < \alpha \rangle$ halmaznak. és ezután legyen $h_\alpha(a) = max(\langle g_\alpha(a) \rangle \cup \langle h_\beta(a) : \beta \in c_\alpha \rangle)$ minden $a \in A \setminus \kappa^+$-ra és válasszuk $h_\alpha(a)$-t α-nak , ha a $\in A \cap \kappa^{++}$.

Az előző fejezet 4.4 tételéből következően találhatunk egy g egzakt felső korlátot $\leq_{J_{<\lambda}}$ szerint $\bar{h}$-hoz. Mivel $h_\alpha(a) < a$ minden a $\in A \setminus \kappa^{++} \in J_{<\lambda}$-ra, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy g(a)$\leq$a minden a $\in$A-ra.Legyen B=$\langle a \in A : g(a) = a \rangle$.

5.6. Lemma. *$B \in J_{<\lambda}$.*

Bizonyítás: Ha B $\notin J_{<\lambda}$, akkor tudunk találni egy olyan B-t tartalmazó D ultrafiltert A-n, amelyre $D \cap J_{<\lambda}$=$\emptyset$. D duálisa kiterjeszti $J_{<\lambda}$-t, tehát $\bar{h}$=$\langle h_\alpha : \alpha < \mu \rangle$ egy monoton növő sorozat$<_D$ szerint is. Minden $f \in F$-re legyen $f^{'}$ az a függvény, melyet f-ből úgy kapunk, hogy $(A \setminus B)$-n kicseréljük a konstans 0-ra. Mivel $B \in D$, f$=_D$ $f^{'}$, és mivel $f^{'} <_{J_{<\lambda}} g$ és g egzakt felső korlát, létezik olyan $\alpha < \mu$, hogy $f^{'} <_{J_{<\lambda}} h_\alpha$. Mivel D kiterjeszti $J^*_{<\lambda}$-t, $f \ =_D \ f^{'} \ <_D \ h_\alpha$.Így $\bar{h}$ monoton növő, kofinális$\Pi A/D$-ben, bizonyítva hogy cf$\Pi A/D$ =$\mu < \lambda$.Ezután $J_{<\lambda}$ definíciójából levonhatjuk, hogy$B \in J_{<\lambda}$. □

Tudjuk, hogy $B \in J_{<\lambda}$ és definiáljuk át g-t B-n nullának, amitől még egzakt felső korlátja marad $\bar{h}$-nak $\leq_{J<\lambda}$ szerint. (de így már ΠA-hoz fog tartozni). $\bar{h}$ definíciója miatt g F egy felső korlátja.

□

Ezután bizonyítom a λ-irányítottság néhány következményét.

5.7. Tétel. *Ha D egy A-n lévő ultrafilter , akkor cf$\Pi A/D = min\langle \lambda : D \cap J_{<\lambda^+} \neq \emptyset \rangle$.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy D egy ultrafilter A-n és legyen λ a legkisebb számosság, melyre $D \cap J_{<\lambda^+} \neq \emptyset$ $J_{<\lambda^+}$ definíciója miatt ekkor cf$\Pi A/D \leq \lambda$.

Visszafelé, D kiterjeszti $J^*_{<\lambda}$-t, hiszen $D \cap J_{<\lambda^+} = \emptyset$ és ekkor természetesen $\leq_D$ kiterjeszti $\leq_{J_{<\lambda}}$-t. A 5.5 tétel miatt a $\Pi A/J_{<\lambda}\lambda^+$ irányított, tehát a $\Pi A/D$ is az, és ebből következően a kofinalitása legalább λ.

□

5.8. Tétel. *Ha μ limesz számosság, akkor $J_{<\mu} = \cup_{\lambda<\mu} J_{<\lambda}$.*

Bizonyítás: Legyen J=$\cup_{\lambda<\mu} J_{<\mu}$ valamelyμ limesz számosságra. J$\subseteq J_{<\mu}$, ami $J_{<\mu}$ definíciójából nyílvánvaló.

Visszafelé, ha $B \notin J$, akkor létezik egy $B \in D$ ultrafilter A-n, melyre $D \cap J = \emptyset$. Mivel D kiterjeszti $J_{<\lambda}$-t minden $\lambda < \mu$-re, az 5.7. tételből kapjuk, hogy cf$\Pi A/D \geq \lambda$. Ebből pedig, hogy cf$\Pi A/D \geq \mu$ és $B \notin J_{<\mu}$.

□

5.9. Tétel. *Minden $B \subseteq A$ halmazra létezik egyértelműen egy reguláris λ számosság, melyre $B \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$.*

Bizonyítás: Mivel cf $\Pi A/D <\mid \Pi A \mid^+$ bármely A-n lévő D ultrafilterre, minden $B \subseteq A$ halmazra létezik legkisebb μ, melyre $B \in J_{<\lambda}$.Az előző tételből tudjuk, hogy μ nem lehet limesz, ebből következően $\mu = \lambda^+$ és $B \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$. Mivel $J_{<\mu}$ monoton növő μ-ben, λ egyértelmű. És nyilvánvaló, hogy λ reguláris.

□

5.10. Tétel. *pcfA-nak létezik legnagyobb eleme.*

Bizonyítás: Az előző tétel biztosít egy egyértelmű reguláris λ számosságot, melyre $A \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$. Ebből következően cf$\Pi A/D \leq \lambda$ minden A fölötti D ultrafilterre tehát$\lambda \geq$ sup pcfA.

A másik irányú becsléshez legyen D egy A fölötti ultrafilter , melyre $D \cap J_{<\lambda} = \emptyset$. Ilyen D biztosan létezik, hiszen $A \notin J_{<\lambda}$. A cf$\Pi A/D$ kofinalitás legalább λ, hiszen D kiterjeszti $J^*_{<\lambda}$-t és így az előző bekezdéssel együtt megkaptuk, hogy $\lambda \in$pcfA.

Tehát λ=maxpcfA.

□

5.11. Tétel. *Ha* $\mid A \mid < minA$, *akkor* $\mid pcfA \mid \leq 2^{|A|}$.

Bizonyítás: Az 5.3 lemma miatt 1-1 értelmű kapcsolat van pcfA elemei és a $\langle J_{<\lambda} : \lambda \in pcfA \rangle$ növő ideálsorozat tagjai közt. Ám egy ilyen növő ideállánc hossza legfeljebb $2^{|A|}$ lehet.

□

Vizsgáljuk most pcf-et, mint egy operációt a reguláris rendszámok részhalmazain. Tudjuk, hogy A⊆pcfA, illetve nyilvánvaló, hogy pcf A∪B= pcfA∪pcfB. Ha még azt is tudnánk, hogy pcfpcfA=pcfA, akkor ez az operáció kielégítené a topológiai lezárás axiómáit. És persze most ez érdekel minket, hogy mikor.A válasz a kérdésre pedig, hogy egy olyan modelljében a halmazelméletnek, ahol nincsenek elérhetetlen számosságok, igaz.De a valódi állítás az, hogy ha nincsen elérhetetlen számosság acc(pcfA)-ban, akkor is igaz. Ezt fogjuk most bizonyítani...

5.12. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $B \subseteq pcfA$ *és* $\mid B \mid < minB$. *Ekkor pcfB* $\subseteq pcfA$.

Ennek a tételnek a következménye a fent említett állítás, azaz

5.13. Tétel. *Tegyük fel, hogy nincs elérhetetlen számosság acc(pcfA)-ban. Ekkor pcfpcfA=pcfA.*

Bizonyítás: Legyen λ_0=sup pcfA.Ekkor λ_0 vagy nem elérhetetlen vagy nem akkumulációs pontja pcfA-nak. Mindkét esetben λ_1=$\mid pcfA \mid < \lambda_0$.Legyen $B_0 = pcfA \cap (\lambda_1, \lambda_0]$. Mivel min $B_0 > \mid B_0 \mid$, használhatjuk az 5.12. tételt, amiből következik, hogy pcf$B_0 \subseteq$ pcfA.

Indukciót használva definiálhatjuk $\lambda_{n+1} = cf \mid pcfA \cap (\lambda_n + 1) \mid$-t és legyen $B_n = pcfA \cap (\lambda_{n+1}, \lambda_n]$. Mivel a $\langle \lambda_n : n < \omega \rangle$ sorozat szigorúan monoton csökken, véges sok lépés után befejeződik az indukció(azaz $B_{n+1} = \emptyset$ és $\lambda_{n+1} = 0$ valamely n-re) és ez pcfA véges sok részre bontását adja $(B_l : l \leq n)$ részekre, melyekre igaz, hogy pcfB_l ⊆pcfA minden $l \leq n$-re. Mivel minden A-n lévő ultrafilter valamelyik B_l-re "koncentrálódik" (azaz B_l-lel metszve az ultrafilter elemeit B_l-en ultrafiltert kapunk), kapjuk, hogy pcfpcfA⊆pcfA. □

Most pedig rátérünk az 5.12. tétel bizonyítására:

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy $B \subseteq pcfA$, minB>| B | és legyen az I_λ ideál A-n olyan, hogy tcf$\Pi A/I_\lambda$=λ minden $\lambda \in B$-re.(Legyen $\lambda(*) \in pcfB$ és hozzá tartozó $I(*)$ ideál olyan, hogy tcf$\Pi B/I(*) = \lambda(*)$)

Legyen I=$\langle X \subseteq A : (\lambda \in B : X \notin I_\lambda) \in I(*)\rangle$ megmutatjuk, hogy I ideál A fölött és tcf $\Pi A/I = \lambda(*)$.

Annak az ellenőrzése, hogy valóban ideált kaptunk, egyszerű.

Minden egyes $\lambda \in B$-re rögzítsünk egy kofinális növő sorozatot, $\bar{f}^\lambda = \langle f^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$-t $\Pi A/I_\lambda$-ban.

Minden egyes $g \in \Pi B$ függvényhez definiáljunk egy $G(g) \in \Pi A$ függvényt a következők szerint: mivel $\Pi A/J_{<|B|^+}$ | B |-irányított, a 4.4. tétel szerint létezik $f \in \Pi A/J_{<|B|^+}$ felső korlátja az $\langle f^\lambda_{g(\lambda)} : \lambda \in B\rangle$ halmaznak. Legyen G(g) egy ilyen felső korlát.

Megint rögzítsünk egy $\langle g_\alpha : \alpha < \lambda(*)\rangle$ monoton növő kofinális sorozatot $\Pi B/I(*)$-ban. Belátjuk, hogy minden egyes $f \in \Pi A$-hoz létezik $\beta < \lambda(*)$, melyre $f <_I G(g_\alpha)$ minden $\alpha \in (\beta, \lambda(*))$. Legyen adva $f \in \Pi A$.Definiáljuk F(f)-et a következőképp F(f)(λ)= min($\alpha < \lambda : f <_{I_\lambda} f^\lambda_\alpha$) $\lambda \in B$-re. Ez jól definiált, mert $\langle f^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ monoton növő kofinális $\Pi A/I_\lambda$-ban ($\lambda \in B$). Legyen $\beta \in \lambda(*)$ a legkisebb, melyre F(f)$<_{I(*)}$ g_β. Ha $\alpha \in (\beta, \lambda(*))$, akkor F(f)$<_{I(*)}$ g_α és ebből következően $f <_{I_\lambda} f^\lambda_{g_\alpha(\lambda)}$. Egy I(*)-beli halmaz kivételével az összes $\lambda \in B$-re. Ez pedig azt jelenti, hogy f$<_I$ $G(g_\alpha)$ I definíciója szerint.

A fentiekből kövekezik, hogy $\langle G(g_\alpha) : \alpha < \lambda(*)\rangle$ kofinális $\Pi A/I$-ben és valamely $E \subseteq \lambda(*)$ kofinális zárt részhalmazra a $\langle G(g_\alpha)$:$\alpha \in E\rangle$ sorozat monoton növő $<_I$ szerint.Ezzel befejeztük annak a bizonyítását, hogy tcf$\Pi A/I$=$\lambda(*)$.

Azaz pcfB $\subseteq$ pcfA és készen vagyunk.

□

6. PCF-generátorok létezése

Ebben a fejezetben azt fogjuk belátni, hogy minden $\lambda \in pcfA$, $A \subseteq Reg$-re, ahol minA>| A |, létezik $B_\lambda \subseteq A$ halmaz, amely generálja $J_{<\lambda^+}$ ideált $J_{<\lambda}$-ból.Ezen B_λ-kat fogjuk pcfA generátorainak hívni. B_λ-k J_λ erejéig egyértelműen definiáltak. A tételt, amely kimondja a generátorok létezését hívjuk pcf tételnek. Kezdjük el a bizonyítást.

6.1. Lemma. *Ha $\lambda \in pcfA$ és $B \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$, akkor tcf$\Pi B/J_{<\lambda} = \lambda$.*

Bizonyítás: Először jegyezzük meg, hogy ha $A \cap \lambda$ véges, akkor készen vagyunk, hiszen $J_{<\lambda^+} = A \cap \lambda^+$ és $J_{<\lambda} = A \cap \lambda$, azaz $J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda} = \langle\lambda\rangle$. Tehát feltehetjük, hogy $\lambda >| A |^{++}$ és válasszunk egy S$\subseteq$ $S^\lambda_{|A|^+}$ halmazt $I[\lambda]$-ban egy $\bar{C}$ sorozattal együtt, amely bizonyítja ezt.

Legyen $J = J_{<\lambda} \cup \langle B \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda} : tcfB_{J_{<\lambda}} = \lambda\rangle$.

6.2. Lemma. *J ideál.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy B_1 és $B_2 \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$ J-ben vannak és rögzítsünk monoton növekvő kofinális $\bar{f}^1, \bar{f}^2$ sorozatokat $\Pi B_1/J_{<\lambda}$ és $\Pi B_2/J_{<\lambda}$-ban, amelyek ezt bizonyítják. Legyen $f_\alpha = max(f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2})$. A $\bar{f}$ sorozat monoton növő $\leq_{J_{<\lambda}}$ szerint és kofinális $B_1 \cup B_2$-n és ez elegendő arra, hogy $B_1 \cup B_2 \in J$ legyen. Ha csak az egyik B_i tartozik $J_{<\lambda}$-hoz, rögtön készen vagyunk.

□

Ha $J = J_{<\lambda^+}$, készen vagyunk.Tegyük tehát fel, hogy létezik $B \in J_{<\lambda^+} \setminus J$ és ebből kell ellentmondásra jutnunk.

Vegyünk egy $B \in D$ ultrafiltert A-n ,melyre $J \cap D = \emptyset$. A 5.7. tétel miatt tudjuk, hogy cf$\Pi A/D = \lambda$. Ezután rögzítsünk egy monoton növő kofinális sorozatot, $\langle f_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$-t $\Pi A/D$-ben. $\alpha < \lambda$-ra való indukcióval válasszunk $h_\alpha \in \Pi B$-t, hogy $\langle h_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ monoton növő $<_{J_{<\lambda}}$ szerint és $h_\alpha >_{J_{<\lambda}} f_\beta$ minden $\beta < \alpha$-ra. Ez, mint a korábbiakban már láttuk, $J_{<\lambda}$ λ-irányítottságának következménye.

Sőt, válasszuk úgy $\bar{h}$-t, hogy engedelmeskedjen $\bar{C}$-nek.

Legyen g egzakt felső korlátja $\bar{h}$-nak , melyre g(a)≤a teljesül minden $a \in A$-ra és legyen $B_g = \langle a \in A : g(a) = a \rangle$. Mivel $\bar{h}$ monoton növő és kofinális g alatt, az egzakt felső korlát definíciójából következik, hogy tcf$\Pi B_g/J_{<\lambda} = \lambda$ és ebből adódik, hogy $B_g \in J$. Másrészről, ha B_g nem volna D-ben, akkor A$\setminus B_g \in D$.Mivel $g \restriction (A \setminus B_g) \cup 0 \restriction B_g \in \Pi A$, kapjuk hogy $\bar{h}$, és ebből következően $\bar{f}$ korlátos $\Pi A/D$-ben, ami ellentmondás.Tehát $B_g \in D$. Ez pedig a $D \cap J = \emptyset$-nak mond ellen.

□

Egy generátor maximális halmaz $\subseteq_{J_{<\lambda}}$ szerint. Hogy a létezését bizonyítsuk, az alábbiakban fogunk konstruálni egy monoton növő sorozatot $\subsetneq_{J_{<\lambda}}$ szerint. Hogy fel tudjuk használni I[λ]-t akkor is, amikor egyszerre használjuk $\subseteq$-t és $\subsetneq_{J_{<\lambda}}$-t egy speciális engedelmes sorozatot, amelyet "szerényen" engedelmesnek nevezünk.

6.3. Definíció. *Legyen $\lambda \in pcf(A \setminus \mid A \mid^{+++})$ és legyen $\bar{C}$, amely bizonyítja, hogy a stacionárius $S \subsetneq S^\lambda_{\kappa^+}$ I[λ]-ban van. Egy $\bar{f} = \langle f_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ "szerényen" engedelmeskedik $\bar{C}$-nek pontosan akkor, ha $\bar{f}$ monoton nő $<_{J_{<\lambda}}$ szerint, $\bar{f}$ engedelmeskedik $\bar{C}$-nek és $f_\delta = sup(f_\beta : \beta \in c_\delta)$ minden $\delta \in S$-re.*

A $\bar{C}$-nek való engedelmesség azt jelenti, hogy $f_\alpha \geq \sup(f_\beta : \beta \in c_\alpha)$. Ezzel szemben az szerény engedelmesség azt, hogy $\delta \in S \Rightarrow f_\delta = sup(f_\beta : \beta \in c_\delta)$ azaz f_δ a legkisebb függvény, amely meg van engedve $\bar{f}$ engedelmessége miatt, ha $\delta \in S$. Jegyezzük meg, hogy míg az engedelmesség definiálva volt minden sorozatra, a "szerény" engedelmességet csak a monoton növő, λ hosszú, $\Pi A/J_{<\lambda}$ sorozatokra definiáltuk.

A "szerény" engedelmes sorozatok egy valódi részosztályt alkotnak az engedelmes sorozatok körében. Hogy nem üres ez a részosztály, azt az mutatja, hogy minden monoton növő $\bar{f}$ sorozathoz tudunk találni egy szerényen engedelmes $\bar{h}$-t, amely azokat majorálja, amiket $\bar{f}$.

Rögzítsük a fejezet hátralevő részére $\lambda \in pcf(A \setminus \mid A \mid^{+++})$, S és $\bar{C}$ legyen, ahogyan azt a definícióban megadtuk.

6.4. Lemma. *Minden $\bar{f}$=$\langle f_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ sorozatra, amelyik $<_{J_{<\lambda}}$ szerint monoton növő, létezik "szerényen" engedelmes $\bar{h} = \langle h_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ sorozat, mely szintén monoton növő $<_{J_{<\lambda}}$ szerint és $f_\alpha \leq h_\alpha$ minden $\alpha \in \lambda \setminus S$-re.*

Bizonyítás: $\alpha < \lambda$ -ra való transzfinit indukcióval definiáljuk h_α-t.Ha $\alpha \in S$, akkor legyen $h_\alpha = sup(h_\beta : \beta \in c_\delta)$. Ha $\alpha \in \lambda \setminus S$, kihasználva a λ-irányítottságot, találhatunk egy $g_\alpha \in \Pi A$ korlátot $\langle f_\beta : \beta < \alpha\rangle \cup$ $\langle h_\beta : \beta < \alpha\rangle$-nak és legyen $h_\alpha(a)$=sup$\langle (g_\alpha(a)) \cup (f_\alpha(a)) \cup (h_\beta(a) + 1 : \beta \in c_\alpha)\rangle$.
□

Ezután egy részbenrendezést fogunk bevezetni a "szerényen" engedelmes sorozatokon.

6.5. Definíció. *Ha $\bar{f}^1, \bar{f}^2$ "szerényen" engedelmes sorozatokra $\bar{f}^1 \leq \bar{f}^2$, pontosan akkor, ha $f^1_\alpha \leq f^2_\alpha$ fennáll minden $\alpha < \lambda$-ra.*

6.6. Lemma. *Ha $\bar{f}^1, \bar{f}^2$ "szerényen" engedelmes sorozatok, akkor $\bar{f}^1 \leq \bar{f}^2$ pontosan akkor, ha $f^1_\alpha \leq f^2_\alpha$ fennáll minden $\alpha \in \lambda \setminus S$-re.*

Bizonyítás: Az egyik irány abból következik, hogy $\lambda \setminus S \subseteq \lambda$.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy $f^1_\alpha \leq f^2_\alpha$ minden $\alpha \in \lambda \setminus S$-re, és rögzítsünk egy legkisebb $\delta \in S$-et, amelyre $f^1_\delta \not\leq f^2_\delta$. Mivel minden $\beta \in c_\delta$-ra tudjuk, hogy $f^1_\beta \leq f^2_\beta$ és $f^2_\beta = sup(f_\beta : \beta \in c_\delta)$, illetve $f^1_\delta = sup(f^1_\beta : \beta \in c_\delta)$, ellentmondásra jutottunk.
□

Mivel mindegyik "szerényen" engedelmes sorozat egy $<_{I_{<\lambda}}$ szerint monoton növő engedékeny sorozata rendszámfüggvényeknek, a 4.4. tétel miatt létezik egzakt felső korlátja. Válasszunk $g_{\bar{f}}$ felső korlátot minden $\bar{f}$ "szerényen" engedékeny sorozathoz, amelyről feltehetjük, hogy $g_{\bar{f}}(a) \leq a$ minden $a \in A$-ra. Ezután jelöljük $B_{\bar{f}}$-fel a következő halmazt: $\langle a \in A : g_{\bar{f}}(a) = a\rangle$. Mivel $\bar{f}$ kofinális g alatt, kapjuk, hogy tcf$B_{\bar{f}}/J_{<\lambda}$=λ és ezért $B_{\bar{f}} \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$ minden "szerényen engedelmes" $\bar{f}$ sorozatra.

Megmutatjuk, hogy minden $B \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$ ekvivalens (modulo $J_{<\lambda}$) egy $B_{\bar{f}}$ halmazzal, ahol $\bar{f}$ "szerényen" engedelmes sorozat, és $\bar{f}^1 \leq \bar{f}^2$ esetén $B_{\bar{f}^1} \leq_{J<\lambda} B_{\bar{f}^2}$. Azaz

6.7. Lemma. *1.Tegyük fel, hogy $B \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$. Ekkor létezik egy "szerényen" engedelmes $\bar{f}$ sorozat, melyre $B =_{J_{<\lambda}} B_{\bar{f}}$.*

2.Ha $\bar{f}^1 \leq \bar{f}^2$, akkor $B_{\bar{f}^1} \subseteq_{J_{<\lambda}} B_{\bar{f}^2}$.

Bizonyítás: Egészítsük ki a $J_{<\lambda}$ ideált az $A \setminus B$ halmazzal.Így elértük, hogy $\Pi A/J_{<\lambda}$ helyett dolgozhatunk $\Pi B/J_{<\lambda}$-ban is.

Használva az 5.5. tételt, rögzítsünk egy λ hosszú kofinális sorozatot $\Pi B/J_{<\lambda}$-ban ,amit cseréljünk ki egy "szerényen" engedelmes $\bar{f}$ sorozatra, amely létezik a 5.7. tétel miatt. Legyen g egzakt felső korlátja $\bar{f}$-nek és $B_{\bar{f}} = B_g$= $\langle a \in A : g(a) = a\rangle$. Mivel feltettük, hogy $\bar{f}$ konstans nulla B-n kívül, feltehetjük ugyanezt g-ről is, amiből következik, hogy $B_g \subseteq B$. Legyen ezután $C = B \setminus B_g =$

$\langle a \in B : g(a) \in a\rangle$. A $\langle f_\alpha \restriction C{:}\alpha < \lambda\rangle$ sorozat monoton növő és kofinális $\Pi C/J_{<\lambda}$-ban, tehát $g \restriction C <_{J_{<\lambda}} f_\alpha$ valamely $\alpha < \lambda$-ra. Mivel $f_\alpha <_{J_{<\lambda}} g$, levonhatjuk a következtetést, hogy $C \in J_{<\lambda}$.

Tehát $B =_{J_{<\lambda}} B_g$

A második állítás bizonyításához vegyük észre, hogy mivel $f^1_\alpha \leq f^2_\alpha$ minden $\alpha < \lambda$-ra és $\bar{f}^1$ kofinális $\Pi B_{\bar{f}^1}/J_{<\lambda}$-ban, $\bar{f}^2 \restriction B_{\bar{f}^1}$ szintén kofinális $\Pi B_{\bar{f}^1}/J_{<\lambda}$-ban és ezért $B_{\bar{f}^1} \subseteq_{J_{<\lambda}} B_{\bar{f}^2}$.

$\square$

Ha létezik $J_{<\lambda^+}$-nak $J_{<\lambda}$ fölött generátora B_λ, akkor $J_{<\lambda^+}/J_{<\lambda}$ Boole algebra, melynek maximális eleme B_λ és minden κ-ra κ-irányított. A következő lemma, mely a pcf tétel bizonyításához kell majd, egy bizonyos κ-ra ($\kappa = \mid A\mid^+$-ra) állítja $J_{<\lambda^+}/J_{<\lambda}$ κ-irányítottságát. (Igazából egy kicsit többet állít: mégpedig, hogy $\leq$ a "szerényen" engedelmes sorozatokon $\mid A\mid^+$-irányított.)

6.8. Tétel. *Tegyük fel,hogy $\zeta(*) < \mid A\mid^+$. Ekkor*

1. Ha $\langle \bar{f}^\zeta : \zeta < \zeta(*)\rangle$ "szerényen" engedelmes sorozatok egy halmaza, akkor létezik egy $\bar{f}$ "szerényen" engedékeny sorozat úgy, hogy $\bar{f}^\zeta \leq f$ minden $\zeta \leq \zeta(*)$-ra.

2. Ha $\langle B_\zeta : \zeta < \zeta(*)\rangle \subseteq J_{<\lambda^+}$, akkor létezik egy $B \in J_{<\lambda^+}$, melyre $B_\zeta \subseteq_{J_{<\lambda}} B$.

Bizonyítás: Mivel minden $B \in J_{<\lambda^+}$ ekvivalens egy $B_{\bar{f}}$-fel valamilyen "szerényen" engedelmes $\bar{f}$ sorozatra és $\bar{f}_\zeta \leq \bar{f}$-ből következik, hogy $B_{\bar{f}^\zeta} \subseteq_{J_{<\lambda}} B_{\bar{f}}$ és $B_{\bar{f}} \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$,azaz elegendő az 1. pontot bizonyítani.

Tegyük fel tehát, hogy $\langle \bar{f}^\zeta : \zeta < \zeta(*)\rangle$ sorozatok "szerényen" engedelmesek és $\zeta(*) < \mid A\mid^+$. Definiáljunk $\alpha < \lambda$-ra való indukcióval egy $<_{J_{<\lambda}}$ szerint monoton növő "szerényen" engedelmes sorozatot $\langle f_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$-t, melyre $f^\zeta_\alpha \leq_{J_{<\lambda}} f_\alpha$ minden $\zeta < \zeta(*)$, $\alpha < \lambda$. Indukciós lépésben ugyanazt kell csinálnunk, mint a 6.4. tétel bizonyításában annyi különbséggel, hogy most a g_α felső korlátot $\zeta(*) \times \alpha$ darab függvényre kell venni.

$\square$

6.9. Lemma. *Ha $\bar{f}^1 \leq \bar{f}^2$ "szerényen" engedelmes sorozatok, és $B = B_{\bar{f}^1} \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$, akkor létezik egy $E \subseteq \lambda$ kofinális zárt, melyre $\delta \in S \cap E \Rightarrow f^1_\delta \restriction B =_{J_{<\lambda}} f^2_\delta \restriction B$*

Bizonyítás: A $\bar{f}^1$ monoton növő kofinális $J_{<\lambda}$ szerint B-n B definíciója szerint. Ezért minden $\alpha < \lambda$-ra létezik $\beta(\alpha) < \lambda$, melyre $f^2_\alpha <_{J_{<\lambda}} f^1_{\beta(\alpha)}$. Legyen E egy kofinális zárt halmaz, ami zárt az $\alpha \longrightarrow \beta(\alpha)$leképezésre(azaz, $\delta \in E$ és $\alpha < \delta \Rightarrow \beta(\alpha) < \delta$). Tegyük fel, hogy $\delta \in E \cap S$. Meg fogjuk mutatni, hogy $f^1_\delta \restriction B =_{J_{<\lambda}} f^2_\delta \restriction B$. Már tudjuk, hogy $f^2_\delta \geq f^1_\delta$.

Az állítással ellentétben legyen $C = \langle a \in B : f^1_\delta(a) < f^2_\delta(a)\rangle$.

Minden $a \in A$-ra tudjuk, hogy $f^2_\delta(a) = sup(f^2_\alpha(a) : \alpha \in c_\delta)$ és ezért minden $a \in C$-hez rögzíteni tudunk egy $\alpha_a \in c_\delta$ rendszámot, melyre $f^2_{\alpha_a}(a) > f^1_\delta(a)$. Egy ilyen indexnek léteznie kell, hiszen $f^2_\delta(a) = sup(f_\alpha(a) : a \in c_\delta) > f^1_\delta(a)$. Mivel típ$c_\delta = \mid A\mid^+$, és $\mid C\mid \leq \mid A\mid$, találhatunk egy $\gamma \in nacc(c_\delta)$-t, amelyik nagyobb, mint α_a minden $a \in C$-re. A sorozat γ-beli koherenciája miatt $f^2_\gamma(a)$ $> f^2_\alpha(a) > f^1_\delta(a)$ minend $a \in C$-re. De mivel $\delta \in E$, létezik $\beta < \delta$, melyre $f^2_\gamma <_{J_{<\lambda}} f^1_\beta$. $C^{'} = \langle a \in A : f^2_\gamma(a) < f^1_\beta(a) < f^1_\delta(a) \rangle$ diszjunkt C-től, hiszen $a \in C \cap C^{'} \Rightarrow f^2_\gamma(a) < f^1_\beta(a) < f^1_\delta < f^2_\gamma(a)$, ami lehetetlen. Mivel $C^{'} \cup A \setminus B$ "1 mértékű", ebből következik, hogy $C \in J_{<\lambda}$ és $f^2_\delta \restriction B =_{J_{<\lambda}} f^1_\delta \restriction B$.

$\square$

Jön az utolsó tétel, a pcf generátorok létezéséről.

6.10. Tétel. *Tegyük fel, hogy $A \subseteq REG$ egy végtelen halmaz és $\mid A \mid < minA$. Ekkor minden $\lambda \in pcfA$-ra létezik egy $B_\lambda \subseteq A$ halmaz, melyre $J_{<\lambda^+} = J_{<\lambda} + B_\lambda$.*

Bizonyítás:

Mivel minden $\lambda \in pcfA$-ra, melyre $\lambda \cap A$ véges, a tétel állítása egyszerűen annyi, hogy $\lambda^+ \cap A = \lambda \cap (A \cup \langle \lambda \rangle)$, a tétel igaz ezen λ-kra.

Tegyük fel, hogy $\lambda \in pcf(A \setminus \mid A \mid^{++})$ és rögzítsünk egy stacionárius $S \subseteq S^\lambda_{\kappa^+}$ halmazt $I[\lambda]$-ban és egy $\bar{C}$ halmazt, amely ezt bizonyítja.Ezután egy generátort kell találnunk, amely $J_{<\lambda^+}$-t generálja $J_{<\lambda}$-ból.

Transzfinit indukcióval $\zeta <\mid A \mid^+$-ra definiáljunk "szerényen" engedelmes $\bar{f}^\zeta$ sorozatokat, melyekre és a hozzájuk tartozó $B_\zeta = B_{\bar{f}^\zeta}$ halmazokra igaz, hogy

∘ $\xi < \zeta <\mid A \mid^+ \Rightarrow \bar{f}^\xi \leq \bar{f}^\zeta$

∘ $\xi < \zeta <\mid A \mid^+ \Rightarrow B_\xi \subsetneq_{J_{<\lambda}} B_\zeta$

Tegyük fel, hogy $\zeta <\mid A \mid^+$ és hogy $\bar{f}^\xi$ és $B_\xi = B_{\bar{f}^\xi}$ definiálva vannak minden $\xi < \zeta$-ra és kielégítik a fenti feltételeket.Az $\mid A \mid^+$-irányítottság miatt létezik olyan $B \in J_{<\lambda^+}$ halmaz, melyre $B_\xi \subseteq_{J_{<\lambda}} B$ minden $\xi < \zeta$-ra. Ha B generálja $J_{<\lambda^+}$-t, készen vagyunk.

Egyébként létezik $B^{'}$, melyre $B \subsetneq_{J_{<\lambda}} B^{'} \in J_{<\lambda^+}$. A 6.7. lemma szerint ekkor van olyan "szerényen" engedelmes $\bar{f}$ sorozat, melyre $B^{'} = B_{\bar{f}}$. Legyen $\bar{f}^\zeta$ a 6.8.tételből kapott sorozat, melyre $\bar{f} \leq \bar{f}^\zeta$ és $\bar{f}^\xi \leq \bar{f}^\zeta$ minden $\xi < \zeta$-re. Ekkor persze $B_\xi \subsetneq_{J_{<\lambda}} B_\zeta$ minden $\xi < \zeta$-ra.

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy $\bar{f}^\zeta$ és B_ζ definiálva vannak minden $\zeta <\mid A \mid^+$-ra és teljesítik azt, hogy $\bar{f}^\zeta$ monoton nő $\leq$ szerint , B_ζ pedig $\subsetneq_{J_{<\lambda}}$ szerint.

Minden egyes $\xi < \zeta <\mid A \mid^+$ rendszámpárra a 6.9.lemma miatt létezik $E_{\xi,\zeta} \subseteq \lambda$ kofinális zárt halmaz, melyre $\delta \in S \cap E_{\xi,\zeta} \Rightarrow f^\xi_\delta \restriction B_\xi =_{J_{<\lambda}} f^\zeta_\delta \restriction B_\xi$. Mivel $\bar{f}^\zeta$ kofinális, monoton növő $B_\zeta \setminus B_\xi$-ben és $g_\xi \restriction (B_\zeta \setminus B_\xi) \in \Pi(B_\zeta \setminus B_\xi)$, B_ξ definíciója miatt létezik $\alpha < \lambda$, melyre $g_\xi \restriction (B_\zeta \setminus B_\xi) <_{J_{<\lambda}} f^\zeta_\alpha$. Ezután kivonva α-t $E_{\xi,\zeta}$-ból, kapjuk, hogy $f^\xi_\delta \restriction (B_\zeta \setminus B_\xi) <_{J_{<\lambda}} f^\zeta_\delta$ minden $\delta < \lambda$-ra és $\zeta \in E$-re.

Legyen $E = \cap_{\xi < \zeta < |A|^+} E_{\zeta,\xi}$. Mivel $\mid A \mid^+ < \lambda$, E kofinális zárt lesz λ-ban. Legyen $\delta \in S \cap E$. Tehát minden $\xi < \zeta <\mid A \mid^+$-ra tudjuk, hogy

$f^\zeta_\delta \restriction B_\xi =_{J_{<\lambda}} f^\xi_\delta \restriction B_\xi$ és $f^\xi_\delta \restriction (B_\zeta \setminus B_\xi) <_{J_{<\lambda}} f^\zeta_\delta \restriction (B_\zeta \setminus B_\xi)$

Minden $a \in A$-ra a $\langle f^\zeta_\delta(a) : \zeta <\mid A \mid^+ \rangle$ monoton növő $\leq$ szerint, mert a $\langle \bar{f}_\zeta : \zeta <\mid A \mid^+ \rangle$ monoton növő $\leq$ szerint. Ebből következik, hogy minden $a \in A$-ra létezik $C_a \subseteq \mid A \mid^+$ kofinális zárt halmaz, amelyen a $\langle f^\zeta_\delta(a) : \zeta <\mid A \mid^+ \rangle$ halmaz vagy konstans vagy monoton növő.

Legyen $C = \cap_{a \in A} C_a$. Mivel $\mid A \mid <\mid A \mid^+$, C kofinális zárt $\mid A \mid^+$-ban.

Válasszunk $\xi < \rho$-t C-ben és $\zeta = \zeta(\xi) < \rho$-t. Mivel $\delta \in E \subseteq E_{\zeta,\xi}$, tudjuk, hogy $f_\delta^\zeta(a) = f_\delta^\rho(a)$ minden $a \in B_\zeta$-re egy nullmértékű halmaz kivételével. Egyébként pedig a $\langle \alpha \in B_\zeta \setminus B_\xi : f^\xi(a) < f^\zeta(a)\rangle$ halmaz pozitív mértékű. Emiatt találhatunk $a \in B_\zeta \setminus B_\xi$-t, melyre mindkét reláció teljesül, azaz $f_\delta^\xi(a) < f_\delta^\zeta(a) = f_\delta^\rho(a)$. Ez azonban lehetetlen, hiszen, mert $\xi, \zeta, \rho \in C \subseteq C_a$ és ezért $\xi < \zeta < \rho$ miatt $f_\delta^\xi(a) = f_\delta^\zeta(a) = f_\delta^\rho(a)$ vagy $f_\delta^\xi(a) < f_\delta^\zeta(a) < f_\delta^\rho(a)$.

□

7. A Dowker-tér konstukció

Legyen $X^R = \{h \in \Pi_{n>1}(\aleph_n + 1) : \exists m \forall n[\aleph_0 < cf h(n) < \aleph_m]\}$.

X^R az úgynevezett Rudin-tér, melyen a következő T_2 topológia van: legyenek a bázisnyíltak $f < g \in \Pi_{n>1}(\aleph_n + 1)$ esetben (f,g]$= \{h \in X^R : f < h \leq g\}$. Ismert, hogy egy normális T_2 tér pontosan akkor megszámlálhatóan parakompakt, ha zárt halmazok bármely csökkenő $\langle D_n : n < \omega\rangle$ sorozatához, melyre $\cap_{n<\omega} D_n = \emptyset$ léteznek $U_n \supseteq D_n$ nyílt halmazok, melyekre szintén$\cap_{n<\omega} U_n = \emptyset$.

Legyen ezután $D_n = \{h \in X^R : \exists m \geq n[h(m) = \aleph_m]\}$.

7.1. Definíció. *Egy X topologikus tér kollektíven normális, ha bármely páronként diszjunkt zárt halmazokból álló $\langle U_i : U_i \subseteq X i < i(*)\rangle$ halmazhoz található szintén diszjunkt $\langle V_i : V_i \subseteq X\rangle$ nyíltak rendszere, hogy $V_i \supseteq U_i$.*

Rudin vezette be a fenti zárt halmazokat [6]-ban és bizonyította róluk a következő tételt:

7.2. Tétel. *1. X^R kollektíven normális.*

2. Ha $U_n \subseteq X^R$ nyíltak és ha $D_n \subseteq U_n$ minden n>1 esetén $\cap_{n>1} U_n$ nem üres.

□

Ebből látta be Rudin (felhasználva Dowker cikkében lévő állításokat), hogy X^R Dowker-tér.

7.3. Lemma. *Létezik olyan $\aleph_{\omega+1}$ rendtípusú, $\Pi_{n>1}\aleph_n$-ban kofinális $\bar{f} = \langle f_\alpha{:}\alpha < \aleph_{\omega+1}\rangle$ függvénysorozat, melyre igaz, hogy minden $\delta < \aleph_{\omega+1}$-re ha $cf\delta{>}\aleph_0$ és $\bar{f} \restriction \delta$-nak létezik legkisebb felső korlátja, akkor f_δ egy ilyen legkisebb felső korlát.*

Bizonyítás: Először vegyünk egy tetszőleges $\aleph_{\omega+1}$ rendtípusú kofinális sorozatot $\Pi_{n>1}\aleph_n$-ben, $\bar{g} = \langle g_\alpha{:}\alpha < \aleph_{\omega+1}\rangle$-t, amely a 6.10. tétel szerint létezik. (Valójában a 6.10. tétel szerint csak egy $\Pi_{n\in B}\aleph_n$-beli kofinális sorozatunk van, de mivel B végtelen, feltehetjük , hogy B=ω.)Ezután definiáljuk f_α-t $\alpha < \aleph_{\omega+1}$-re való transzfinit indukcióval:

∘ α rákövetkező vagy megszámlálható kofinalitású limesz, legyen $f_\alpha{=}g_\beta$, ahol $\beta \in (\alpha, \aleph_{\omega+1})$ az első olyan rendszám, melyre $g_\beta >^* f_\gamma$ minden $\gamma < \alpha$-ra.

∘ α kofinalitása nem megszámlálható, g_α legyen a legkisebb felső korlátja az $\bar{f} \restriction \alpha{=}\langle f_\beta : \beta < \alpha\rangle$-nak, ha létezik. Egyébként definiáljuk, mint az előző esetben.

Az így kapott sorozat jó.

□

Legyen $\bar{f} = \langle f_\alpha{:}\alpha < \aleph_{\omega+1}\rangle$ a fenti sorozat és válasszuk X-et a következő halmaznak $\{h \in X^R : \exists\alpha < \aleph_{\omega+1}[h =^* f_\alpha]\}$.(ahol a továbbiakban $f =^* g$, $f \leq^* g$, $f <^* g$.... jelentése a továbbiakban: $\{n : f(n) \neq g(n)\}$,.... véges)

Mivel $| \{h \in X^R : h =^* f_\alpha\} |= \aleph_\omega$ minden $\alpha < \aleph_{\omega+1}$-re, nyílvánvaló, hogy $| X |= \aleph_{\omega+1}$.

Mivel $\bar{f}$ $<^*$ szerint teljesen rendezett, minden h$\in X$-ra létezik egyértelműen $\alpha < \aleph_{\omega+1}$, melyre $h =^* f_\alpha$. Ebből következően X teljesen részbenrendezett $<^*$ szerint, azaz $h, k \in X \Rightarrow [h <^* k \vee k <^* h \vee h =^* k]$.

A következő állításhoz felhasználunk egy, a legkisebb felső korlátra vonatkozó lemmát: Legyen $\bar{f} = \langle f_\alpha{:}\alpha < \aleph_{\omega+1}\rangle$, mint 7.3. lemmában.

7.4. Lemma. *Tegyük fel, hogy* $0 < m \leq k < \omega$ *és legyen* $\langle\alpha(\zeta){:}\zeta < \aleph_m\rangle$ *szigrúan monoton növő, melyre* $sup\{\alpha(\zeta){:}\zeta < \aleph_m\}{=}\delta < \aleph_{\omega+1}$. *Ha* $\langle g_\zeta{:}\zeta < \aleph_m\rangle$ $\Pi_{n>k}\aleph_n$*-beli* $<$ *szerint monoton növő függvények sorozata és* $g_\zeta =^* f_{\alpha(\zeta)}$ *minden* $\zeta < \aleph_m$*-re, akkor:*

- $g = sup\{g_\zeta{:}\zeta < \aleph_m\} \in \Pi_{n>k}\aleph_n$ $\bar{f} \restriction \delta$ *egy legkisebb felső korlátja*
- *cfg(n)=*$\aleph_m$ *minden* $n > k$*-ra*
- $g =^* f_\delta$

Bizonyítás: Következik a 6.10. tétel bizonyításából. □

7.5. Lemma. *Tegyük fel, hogy 0* $< m \leq k < \omega$ *és hogy* $\langle h_\zeta : \zeta < \aleph_m\rangle$ *X pontjaiból álló olyan sorozat, melyre* $\langle h_\zeta \restriction (k, \omega) : \zeta < \aleph_m\rangle$ *növekvő* $<$ *szerint. Legyen g=sup*$\{h_\zeta : \zeta < \aleph_m\}$. *Ekkor létezik* $h \in X$, *melyre h=*$^*g$.

Bizonyítás: Minden $\zeta < \aleph_m$-hez létezik egyértelműen $\alpha(\zeta) < \aleph_{\omega+1}$, melyre $h_\zeta =^* f_{\alpha(\zeta)}$. Mivel $\langle h_\zeta : \zeta < \aleph_m\rangle$ monoton növő $<^*$ szerint, a $\langle\alpha(\zeta) : \zeta < \aleph_m\rangle$ szigorúan monoton nő. Legyen $\delta = sup\{\alpha(\zeta) : \zeta < \aleph_m\}$. A 7.4 lemmából tudjuk, hogy cfg(n)=$\aleph_m$ minden n$\in (k, \omega)$-ra és g=* f_δ.

Legyen h$\in \Pi_{n>1}(\aleph_n + 1)$ h(n)=$\aleph_n$-nek definiálva n$\leq$k-ra és h(n)=g(n) n $>$ k-ra. Ekkor h$\in X^R$ és h=* f_δ. Azaz h$\in X$ és h=* g, ahogy az nekünk kellett.

□

7.6. Tétel. *X zárt altere* X^R*-nek.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy t $\in$clX és $t \in X^R$. Minden h $\in$X-re legyen $E(h, t) = \{n > 1 : h(n) = t(n)\}$.

7.7. Lemma. *Ha* $h \leq t$ *és* $h \in X$, *akkor E(h,t) véges vagy ko-véges.*

Bizonyítás: Tegyük fel a lemma állításával ellntétben, hogy $h \leq t$, $h \in X$ és $| E(h, t) |=| \omega \setminus E(h, t) |= \aleph_0$. Legyen, n $>$ 1-re

f(n)={0,ha $n \in E(h, t)$ és h(n),ha $n \in (\omega_E(h, t))$}

Nyílvánvalóan f $<$ t. Ezután belátjuk, hogy $X \cap (f, t]$ üres, ellentétben a $t \in clX$ feltevéssel. Ha k$\in$X és k(n)$>$h(n) minden $n \in (\omega_E(h, t))$, akkor k$\not<^*$ $h \wedge k \neq^* h$, hiszen $\omega \setminus E(h,t)$ végtelen és így h$<^*$k a trichotómia miatt. Mivel E(h,t) végtelen és $\{n > 1 : k(n) \leq h(n)\}$ véges, létezik $n \in E(h,t)$, melyre k(n) $>$ h(n)=t(n) és ezért $k \notin (f,t]$.

□

Legyen W=$\{w \subseteq \omega : \forall f < t \exists h \in (f,t][E(h,t) = w]\}$

Az előző állítás szerint ha $w \in W$, akkor w véges vagy kovéges.

7.8. Lemma. *W$\neq \emptyset$*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy W üres. Az előző lemma szerint ez ekvivalens azzal, hogy egy véges vagy kovéges $w \subseteq \omega$ sincs W-ben. Minden véges vagy ko-véges w-re rögzítsünk egy $f_w < t$-t úgy, hogy $h \in (f_w,t] \cap X$ $\Rightarrow E(h,t) \neq w$. Legyen f az f_w-k szuprémuma, ahol w végigfut ω összes véges és ko-véges részhalmazán. Mivel megszámlálhatóan sok f_w van, cft(n) $> \aleph_0$ minden n $>$ 1-re, amiből f $<$ t következik.Ha $h \leq t$ X-ben és w=E(h,t), akkor $h \notin (f_w,t]$ és így $h \notin (f,t]$. Tehát (f,t]$\cap X = \emptyset$, ellentmondásban $t \in clX$-szel.

□

Jelöljük M_m-mel a $\{n > 1 : cft(n) = \aleph_m\}$ halmazt. ($M_{<m} = \cup_{1<i<m} M_i$)

7.9. Lemma. *Ha létezik $h \in X$, melyre E(h,t) kovéges, akkor $t \in X$.*

Bizonyítás: □

7.10. Lemma. *Létezik $h \in X$, melyre E(h,t) kovéges*

Bizonyítás: Szintén a 7.4. lemma miatt elég egy $h \in X$-et találni, amelyre E(h,t) végtelen. Legyen m a legkisebb egész, amelyre M_m végtelen.Mivel $t \in X^R$, ilyen m létezik.

Legyen w $\in$ W fix. Ha w végtelen, készen vagyunk.Tehát tegyük fel, hogy véges és legyen k=max$\{M_{<m}$,maxw$\}$.

Minden n $\in$ M_m-re rögzítsünk egy $\langle \gamma^n_\zeta : \zeta < \aleph_m \rangle$ sorozatot, melynek a szuprémuma legyen t(n). Transzfinit indukcióval $\zeta < \aleph_m$-re találhatunk $\langle h_\zeta : \zeta < \aleph_m \rangle$ sorozatot, melyre teljesülnek a következők:

1. $h_\zeta \leq t$ X-ben van és E(h_ζ,t)=w
2. $\xi < \zeta < \aleph_m \Rightarrow h_\xi \restriction (k,\omega) < g$ és $h_\zeta \restriction (k,\omega) < t \restriction (k,\omega)$
3. $h_\zeta(n) \geq \gamma^n_\zeta$ $\forall n \in (k,\omega) \cap M_m$-ra

ζ-nál az indukciós lépésben legyen f=sup$\{h_\xi \restriction (k,\omega) : \xi < \zeta\}$.Mivel minden $\xi < \zeta$-re E(h_ξ,t)=w-ből következik, hogy $h_\xi \restriction (k,\omega) < t \uparrow (k,\omega)$ és mivel cft(n)$\geq \aleph_m$ minden $n \in (k,\omega)$-ra, kapjuk, hogy f $<$ t. w$\in$W definíciója miatt találhatunk $h_\zeta \leq t$-t X-ben, melyre E(h_ζ,t)=w és $h_\zeta \restriction (k,\omega) > f \restriction (k,\omega)$. Az általánosság megszorítása nélkül választhatjuk h_ζ-t úgy, hogy $h_\zeta(n) > \gamma^n_\zeta$ minden n$\geq$k-ra M_m-ben.

A 7.4. lemmából tudjuk, hogy létezik h$\in$X, melyre $h(n) =^* sup\{h_\zeta(n) : \zeta < \aleph_m\}$. Azaz h(n)=t(n) véges sok n$\geq$k kivételével M_m-ben. Mivel M_m végtelen, E(h,t) is és készen vagyunk.

□

□

7.11. Tétel. *X kollektíven normális.*

Bizonyítás: Világos a 7.1. és a 7.2. tételből. □

Ezután megmutatjuk, hogy X nem megszámlálhatóan parakompakt. Legyen $D_n^X = \{f \in X : \exists m \geq n[f(m) = \aleph_m]\}$ n > 1-re.Nyílvánvaló, hogy D_n^Xzárt és $\cap_n D_n^X = \emptyset$.

Amit bizonyítani szeretnénk, nyílvánvalóan következik az X^R-re vonatkozó hasonló állításból és X zártságából. Ugyanis tegyük fel, hogy $D_n^X \subseteq U_n \subseteq X^R$, hogy U_n nyílt minden n-re D_n definíciója miatt $V_n = U_n \cup (X^R \setminus X)$ nyílt és tartalmazza D_n-t. Rudin bizonyítása mutatja, hogy ha $D_n \subseteq V_n$ és V_n nyílt minden n-re, akkor létezik $f \in \Pi_{n>1}\aleph_n$ úgy, hogy $h \in \cap_n V_n$ minden $h > f$-re X^R-ben. Mivel minden ilyen f-hez létezik $h \in X$, melyre h>f, $\cap_{n>1} U_n \cap X$ nem üres.

Ezt most elemi részmodelleket használva fogjuk bebizonyítani.

7.12. Lemma. *Ha $U_n \subseteq X$ nyílt és $D_n^X \subseteq U_n$ minden n>1-re, akkor $\cap U_n$ nem üres.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $U_n \supseteq D_n^X$ nyílt minden n-re és be kell látnunk, hogy $\cap_n U_n$ nem üres.

Azt fogjuk belátni, hogy létezik $f \in \Pi_{n>1}\aleph_n$, melyre igaz, hogy minden h > f X-ben a metszethez tartozik.

Elég látni, hogy minden n > 1-re van $f_n \in \Pi_{n>1}\aleph_n$, melyre igaz, hogy $\forall h \in X[h > f_n \Rightarrow h \in U_n]$, hiszen f=sup$\{f_n : 1 < n < \omega\}$ pont megfelelő számunkra.

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy m>1 rögzített esetén minden $f \in \Pi_{n>1}\aleph_n$ esetén van h_f>f $X \setminus U_m$-ban. Mivel $h_f \notin D_m$, tudjuk, hogy $h_f(n) < \aleph_n$ minden n≥m-re.

Egy adott f-re legyen g_f= sup $\{h_{f'} \in \Pi_{n>1}\aleph_n \wedge (m, \omega) \subseteq E(f^{'}, f)\}$ A szuprémum $\aleph_m$ darab $h_{f'}$ függvényen fut végig és a fentiekből következik, hogy $g_f(n) < \aleph_n$ minden n>m-re. Az is nyílvánvaló, hogy $g_f(i) = \aleph_i$ 1 < i≤m-re.

Legyen $\langle M_\zeta : \zeta < \omega_1\rangle$ egy elemi részmodellekből álló folytonos sorozata H(Θ)-nak, melyre teljesül, hogy

∘$\bar{f}, X$ és $f \mapsto h_f, f \mapsto g_f$ függvények M_0-hoz tartoznak.

∘M_ζ számossága $\aleph_1$ és $\langle M_\xi : \xi < \zeta\rangle \in M_{\zeta+1}$ minden $\zeta < \omega_1$-re.

Minden ζ-ra legyen $\chi_\zeta(n) = sup(M_\zeta \cap \aleph_n)$ minden n>1-re. Mivel $\mid M_\zeta \mid = \aleph_1$, $\chi_\zeta(n) < \aleph_n$ minden n-re és ezért $\chi_\zeta \in \Pi_{n>1}\aleph_n$.

$\chi_\xi \in M_\zeta$ minden $\xi < \zeta < \omega_1$-re, így az elemiség miatt h_{χ_ξ} és g_{χ_ξ} is M_ζ-hoz tartozik és ebből következően $h_{\chi_\xi}, g_{\chi_\xi} < \chi_\zeta$.

Tehát ha $\xi < \zeta < \omega_1$, akkor $\chi_\xi < h_\xi < \chi_\zeta < h_{\chi_\zeta} < \chi_{\omega_1}$. Ebből következően $\langle h_{\chi_\zeta} : \zeta < \omega_1\rangle$ egy sorozat X-ben, < szerint monoton növő, melynek szuprémuma χ_{ω_1}. A 7.3. tétel szerint $\chi_{\omega_1} \in X$.

Legyen $\chi^{'}$ olyan, melyre $\chi^{'}(n) = \chi_{\omega_1}(n)$ minden n>m-re és $\chi^{'}(i) = \aleph_i$ 1 < i≤m. Így $\chi^{'} \in D_m^X \subseteq U_m$ és ezért (f,$\chi^{'}$] $\subseteq U_n$ valamely f < $\chi^{'}$-re, hiszen U_m nyílt.

Ezután keressünk $\zeta < \omega_1$-et, melyre $f \restriction (m, \omega) < \chi_\zeta \restriction (m, \omega)$. Legyen $f^{'} = f \restriction (m+1) \cup \chi_\zeta \restriction (m, \omega)$. g_{χ_ζ} definíciója miatt $f^{'} < h_{f'} \leq g_{\chi_\zeta} \leq \chi^{'}$ és persze $h_{f'} \notin U_m$. Ez ellentmond $h_{f'} \in (f, \chi^{'}] \subseteq U_m$-nek.
□

Hivatkozások

[1] Benkő Pál pcf szakdolgozata(1995)

[2] Komjáth Péter honlapjáról letölthető pcf jegyzet

[3] Menachem Kojman: The A,B,C of PCF: A companion to PCF theory, 1
letölthető Kojman honlapjáról: www.math.bgu.ac.il/ kojman

[4] Menachem Kojman, Saharon Shelah: A ZFC Dowker space in $\aleph_{\omega+1}$: an application of pcf theory to topology
szintén megtalálható Kojman honlapján

[5] M.E. Rudin : A normal space X for which $X \times I$ is not normal, Fund.Math. 73(1971) 186-189

[6] Saharon Shelah: Cardinal Arithmetic , Oxford University Press 1994