Diplomamunka

Konvex politópok stabilitásvizsgálata két és három dimenzióban

Visy Balázs
Témavezető: Dr. Bezdek Károly

ELTE TTK, 2000.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Képzeljük el, hogy valaki két pálcát tart a kezében, melyek keresztezik egymást. A pálcák vége egy gumiszalaggal van összefűzve. Amikor a két pálcát elengedjük, akkor a rendszer beáll egy adott állapotba, amelyet nevezhetünk egyensúlyi állapotnak. Bárhogy is mozgatjuk el a két pálcát, mindig ez az állapot lesz az egyensúlyi állapot. Másképpen úgy is fogalmazhatunk, hogy ez az állapot stabil, ebből kimozdulva a rendszer ismét ezen állapot felvételére törekszik.

Másik példa lehet, hogy fából elkészítünk egy állványzatot, tehát egy rácsszerű szerkezetet. A farudak illesztési pontjaiban bármilyen irányú elfordulást megengedve feltehetjük azt a kérdést, hogy mennyi új rudat kell a rács átlóiba elhelyeznünk, hogy a szerkezet stabil legyen, azaz például ne dőljön össze. Hasonló stabilitáselméleti kérdések fontos szerepet játszanak a fizikában, a kémiában és az építészetben is.
Az első példa az egyik legegyszerűbb stabil szerkezet, általánosításaival több helyen találkozhatunk az egyes fejezetekben.

A dolgozat célja az, hogy bizonyos két- és háromdimenziós konvex politópok stabilitását vizsgálja. Pontosabban olyan konvex politópokról lesz szó, melyek éleit kötelekből készítjük el, belülre, néhány átló helyére pedig rugókat teszünk, ezzel mintegy kifeszítve a politópot.

Először megismerkedünk a stabilitáselmélet definícióival, alapvető eredményeivel és néhány egyszerű, de fontos példával. Központi szerepet kap az, hogy definiáljuk a rendszer energiáját, melyről kiderül majd, hogy pontosan az egyensúlyban veszi fel minimumát, és hogy értéke stabil szerkezetek esetén nem lehet negatív.

A következő fejezetben a téma irányvonalával kapcsolatos legfontosabb síkbeli eredményekkel találkozunk, melyeket a múlt század elején Cauchy kezdett vizsgálni. Fő célunk itt is, és az utolsó fejezetben is az, hogy a rendszer energiájának előjelét és nullhelyeit írjuk le.

Az utolsó fejezetben ezen eredményeket próbáljuk meg speciális esetekben általánosítani a három-dimenziós térben, egy gráfelméleti-algebrai irányból közelítve meg a problémát.

2. Szerkezetek stabilitásának fogalma és néhány általános eredmény

2.1. Definíciók, jelölések

2.1. Definíció. *Legyenek $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, ..., \boldsymbol{p}_n$ a d-dimenziós Euklideszi-tér pontjai, G pedig egy gráf a $\boldsymbol{p}_i$ pontokon, úgy, hogy az éleket köteleknek, rugóknak, illetve rudaknak tekintjük. A $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, ..., \boldsymbol{p}_n) \in \mathbb{E}^{nd}$ jelölés mellett a $(G, \boldsymbol{p})$ párt szerkezetnek nevezzük és $G(\boldsymbol{p})$-vel jelöljük.*

A konstrukció alapötlete az, hogy a szerkezet tetszőleges deformációja során a kötelek hossza nem nőhet, a rugók hossza nem csökkenhet, míg a rudak hossza egyáltalán nem változhat.

2.2. Definíció. *A $G(\boldsymbol{q})$ szerkezetet (a $G(\boldsymbol{p})$ szerkezetre vonatkozóan) megengedettnek nevezzük, ha $G(\boldsymbol{q})$ kötelei nem hosszabbak, rugói nem rövidebbek, mint a megfelelő $G(\boldsymbol{p})$-beli kötelek, illetve rugók és a megfelelő rudak ugyanolyan hosszúak.*

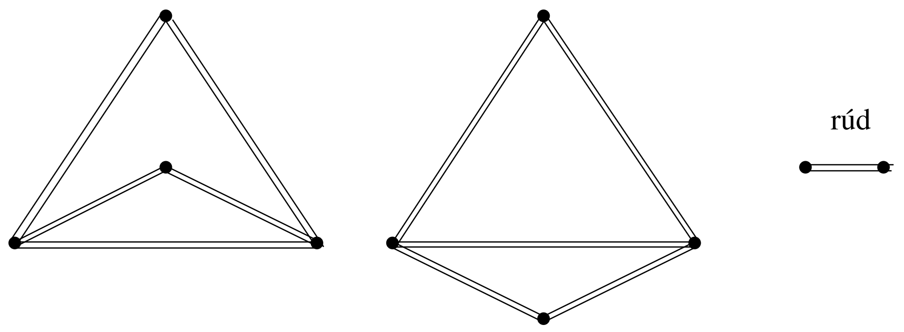
Ha a szerkezet a távolsági feltételek megtartása mellet, egybevágósági transzformációktól eltekintve nem deformálható, akkor stabilnak nevezzük. Szemléletesen tehát egy ilyen szerkezetnek a csúcsait mozgatva, majd elengedve, a szerkezet mindig visszaáll eredeti állapotába.

2.3. Definíció. *A $G(\boldsymbol{p})$ szerkezet megengedett mozgásán egy olyan folytonos $p(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ utat értünk $\mathbb{E}^{nd}$-ben, melyre $p(0)=\boldsymbol{p}$ és minden $G(p(t))$ szerkezet megengedett. A mozgást triviálisnak nevezzük, ha egy $\mathbb{E}^n$-beli egybevágósági transzformáció megszorítása, a $G(\boldsymbol{p})$ szerkezetet pedig (lokálisan) stabilnak, ha minden megengedett mozgása triviális.*

2.4. Definíció. *A $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, ..., \boldsymbol{p}_n)$ és a $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, ..., \boldsymbol{q}_n)$ $\mathbb{E}^{nd}$-beli pontok kongruensek, ha a két ponthalmaz egy egybevágósági transzformációval átvihető egymásba. A $G(\boldsymbol{p})$ szerkezetet globálisan stabilnak mondjuk, ha bármely hozzá képest megengedett $G(\boldsymbol{q})$ szerkezet esetén teljesül, hogy $\boldsymbol{p}$ és $\boldsymbol{q}$ kongruensek.*

A stabilitásnak több, különböző követelményrendszernek eleget tevő definíciója ismert. Megkülönböztetünk például infinitezimálisan, generikusan, első-, illetve másodrendben stabil szerkezeteket. A dolgozatban csak az előbb ismertetett két osztállyal fogunk foglalkozni.

2.5. Megjegyzés. *Nyilvánvaló, hogy a globálisan stabil szerkezetek stabilak is, a megfordítás azonban nem igaz, amint azt az alábbi példa is szemlélteti:*



1. ábra

Világos, hogy mindkét szerkezet lokálisan stabil, hiszen az egyes háromszög elemek is azok. Globálisan azonban egyik sem az, mivel mindkettő megengedett szerkezet a másikhoz képest.

2.2. Az energia-függvény és a súlymátrix

2.6. Definíció. *A $G(\boldsymbol{p})$ szerkezet súlyozásán az egyes $(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j)$ élekre írt $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ skalárokat értjük, melyekkel teljesül:*

$$\sum_{j \in N(i)} \omega_{ij}(\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_j) = \boldsymbol{o} \qquad (i = 1, 2, ..., n), \tag{1}$$

ahol N(i) az i-edik csúcs szomszédait jelöli a G gráfban.
Az ω_{ij} súlyozást egyetlen $\omega \in \mathbb{E}^e$ jelöli, ahol $e = |E(G)|$, a gráf éleinek száma. Valódi súlyozáson olyan súlyozást értünk, melyben a kötelekhez nemnegatív, a rugókhoz nempozitív skalárokat rendelünk. (A rudakra nem írunk elő feltételt.)

Legyen $\omega_{ij} = 0$, ha $(i, j) \notin E(G)$. Ezzel minden (i, j) párra értelmeztük a súlyozást, így az úgynevezett egyensúlyi feltételt leíró (1) egyenlet a következő alakban is értelmes:

$$\sum_{j} \omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = \mathbf{o} \qquad (i = 1, 2, ..., n). \tag{2}$$

Bevezetünk egy úgynevezett energiafüggvényt, melynek segítségével elégséges feltétel adható $G(\mathbf{p})$ globális stabilitására. Annak, hogy egy szerkezeten energiát adunk meg, a következő szemléletes jelentése van. A szerkezet úgymond ennek az energiának a minimalizálására törekszik, azaz elmozgatva a csúcsokat, majd elengedve a szerkezetet, $G(\mathbf{p})$ olyan helyzetbe áll vissza, ahol az energiája lehetőleg minimális. Mint a későbbiekben látni fogjuk, egy szerkezet megengedett állapotai mind nempozitív energiájú pontokban vannak, tehát $G(\mathbf{p})$ mindig ilyen helyzetbe kerül. Ha tehát az energiafüggvénynek a lokális, vagy a globális minimumhelyeit ismernénk, és ezekben a pontokban a függvény értéke nulla lenne, akkor lokálisan, illetve globálisan stabil lenne a szerkezetünk.
Az energiafüggvényeket pókhálószerű szerkezetek stabilitásvizsgálatánál alkalmazták először. (Ezek olyan szerkezetek, ahol bizonyos csúcsok rögzítve vannak és minden él kötél. Ebben az esetben könnyen belátható, hogy ha $G(\mathbf{p})$-n nemnulla valódi súlyozás adható meg, akkor ezek stabilak. (részletesebben lásd **[4]**)) Később kezdték alkalmazni az energiát egyéb szerkezetek esetén is, és kiderült, hogy ott is jól használható.
Legyen tehát $H(\mathbf{q}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\sum_{i,j}\omega_{ij}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)^2$, ahol $\mathbf{q} \in \mathbb{E}^{nd}$ és ω $G(\mathbf{p})$ egy súlyozása. $H(\mathbf{q})$ tehát egy nd-változós kvadratikus funkcionál.

2.7. Állítás. *A $H(\boldsymbol{q})$ funkcionál rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*
- ***(i)*** *$\nabla H(\boldsymbol{q})$ $\boldsymbol{q}$-nak lineáris függvénye.*
- ***(ii)*** *$\nabla H(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{o}$*
- ***(iii)*** *$H(\boldsymbol{q}) = 0$, ha $\nabla H(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{o}$*
- ***(iv)*** *H kritikus pontjai ($\nabla H(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{o}$) és nullhelyei invariánsak affin lineáris transzformációkra.*

Bizonyítás.
- **(i)** $\nabla H(\mathbf{q}) = (..., \sum_j \omega_{ij}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j), ...)$, tehát $\mathbf{q}$-ban valóban lineáris.
- **(ii)** Mivel ω $G(\mathbf{p})$-nek súlyozása, ezért **(i)** alapján $\nabla H(\mathbf{p}) = \mathbf{o}$
- **(iii)** A $g(t) = H(t\mathbf{q}) = t^2 H(\mathbf{q})$ valós függvényt deriválva:
  $g'(t) = \nabla H(t\mathbf{q})\mathbf{q} = \nabla H(\mathbf{q})\mathbf{q}t = 0\ \forall t$, mivel $\mathbf{q}$ kritikus pont volt.
  Azaz g(t) konstans, tehát $H(\mathbf{q}) = g(1) = g(0) = 0$
- **(iv)** Egy $T\colon \mathbb{E}^d \to \mathbb{E}^d$ affin lineáris transzformáció a következő alakban írható fel: $T(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$, ahol L lineáris, $\mathbf{b}$ pedig konstans.
  Tehát
  $$\begin{aligned}\nabla H(T(\mathbf{q})) &= (..., \textstyle\sum_j \omega_{ij}(T(\mathbf{q}_i) - T(\mathbf{q}_j), ...) = \\ &= (..., \textstyle\sum_j \omega_{ij}(L(\mathbf{q}_i) - L(\mathbf{q}_j), ...) = \\ &= (..., L(\textstyle\sum_j \omega_{ij}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)), ...) = \mathbf{o}.\end{aligned}$$
  Itt felhasználtuk, hogy $\mathbf{q}$ kritikus pont, azaz ω-val $G(\mathbf{q})$ egyensúlyi helyzetben van, valamint hogy L a $\mathbf{o}$ vektort fixen hagyja.
  Ebből pedig már következik a nullhelyek invarianciája is. □

2.8. Megjegyzés. *Amint azt az* ***(ii)*** *pont bizonyításából láttuk, igaz az alábbi észrevétel:*

$$\nabla H(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{o} \iff \omega\ G(\boldsymbol{q})\text{-nak egy súlyozása.}$$

Valamint ezáltal az is igaz, hogy ha $G(\mathbf{p})$ ω-val egyensúlyi helyzetben van, akkor ez teljesül minden affin lineáris transzformáltjára is.

Az energia-függvény viselkedését egy mátrix segítségével fogjuk vizsgálni, melyet egy súlyozás elemeivel adunk meg. Pontosabban ennek a mátrixnak a sajátértékeire lesz szükségünk, melyek ismeretében az energia-függvény null-helyei, minimumhelyei és előjelének változásai könnyebben áttekinthetőek lesznek.

2.9. Definíció. *Legyen Ω egy $n \times n$-es szimmetrikus mátrix, melynek i-edik sorának a j-edik eleme $-\omega_{ij}$, ha $i \neq j$ és $\sum_{k,k\neq i} \omega_{ik} = \sum_{k,k\neq j} \omega_{kj}$, ha $i = j$. Ekkor Ω-t az ω súlyozáshoz tartozó súlymátrixnak nevezzük.*

Ha $\mathbf{q}_k \in \mathbb{E}^d$ koordinátákkal való felírása $(q_{k1}, q_{k2}, ..., q_{kd})$, akkor könnyen látható, hogy H a következő alakba írható:

$$H(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^{d} (q_{1k}, q_{2k}, ..., q_{nk}) \Omega (q_{1k}, q_{2k}, ..., q_{nk})^T \tag{3}$$

A felírás alapján rögtön következik, hogy ha Ω pozitív szemidefinit, akkor $H(\mathbf{q})$ nemnegatív, és hogy a nulla biztosan sajátértéke Ω-nak, hiszen mivel a sorösszegek nullát adnak, az $(1, 1, ..., 1) \in \mathbb{E}^n$ vektor eleme lesz a nulltérnek. Mint az a következő állításból kiderül, ennél több is igaz.

2.10. Állítás. ***(i)*** *Legyen $G(\boldsymbol{p})$ egy d-dimenziós szerkezet ω súlyozással, és tegyük fel, hogy a $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, ..., \boldsymbol{p}_n$ csúcsok affin burka k-dimenziós. Ekkor Ω nullterének dimenziója legalább $k + 1$.*
(ii) *Megfordítva: ha Ω nullterének dimenziója m, akkor létezik egy olyan $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, ..., \boldsymbol{q}_n) \in \mathbb{E}^{n(m-1)}$, hogy ω $G(\boldsymbol{q})$-nak is súlyozása, továbbá mindegyik $\boldsymbol{q}_i$-nek a $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, ..., \boldsymbol{p}_n$ vektorok affin burkára való merőleges vetítése pontosan $\boldsymbol{p}_i$ lesz.*

Bizonyítás. (i) Tekintsük a $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_n$ vektorokból, mint sorvektorokból képzett P^T $n \times d$-es mátrix oszlopait. Mivel ω $G(\mathbf{p})$-nek egy súlyozása volt, ezért P^T minden oszlopa a nulltér eleme lesz, hiszen a $(p_{1i}, p_{2i}, ..., p_{ni})$ vektort Ω-nak a j-edik sorával szorozva kapjuk, hogy:

$$\sum_{l=1, l\neq j}^{n} p_{li}(-\omega_{jl}) + p_{ji}(\sum_{k,k\neq j} \omega_{jk}) = \sum_{k} \omega_{jk}(p_{ji} - p_{ki}) \tag{4}$$

ami az egyensúlyi feltétel i-edik koordinátája, ezért nulla. Ezen d vektor közül pontosan k lesz lineárisan független, hiszen P^T sorrangja az állítás feltételének értelmében k, tehát az oszloprangja is ennyi. Ehhez a k db vektorhoz hozzávéve a tőlük nyilvánvalóan független $(1, 1, ..., 1) \in \mathbb{E}^n$ vektort kapjuk a nulltér egy k+1 elemű bázisát.
(ii) A fenti k+1 db sajátvektort kiegészítve egy m darabból álló, a nullteret feszítő vektorrendszerré, a kapott vektorokból, mint oszlopvektorokból készített $n \times m$-es mátrix soraiban kapjuk a $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_n$ vektorokat, melyek a konstrukció alapján teljesítik az állításban foglaltakat. (Így ugyan egy m-dimenziós realizációt kapunk, de ebben minden pont ugyanazon koordinátája 1, tehát mégiscsak egy $(m-1)$-dimenziós hipersíkba esnek a pontok.) □

Ezzel megismertük $H(\mathbf{q})$ nullhelyeinek elhelyezkedését. Amint azt már az energiafüggvények szemléletes ismertetésében említettük, azt szeretnénk, hogy a függvényünk nemnegatív lenne. A következő tétel pontosan azt mondja ki, hogy ilyen esetekben affin lineáris transzformációktól eltekintve valóban globálisan merev szerkezeteket kapunk.

2.11. Tétel. *Legyen $G(\boldsymbol{p}) \in \mathbb{E}^d$ egy szerkezet n csúccsal, melyek nem esnek mind egy $(d-1)$-dimenziós altérbe. Tegyük fel, hogy a szerkezetnek létezik olyan valódi ω súlyozása, melyben a súlyok nem nullák a köteleken és a rugókon. Ha az ehhez a súlyozáshoz tartozó Ω súlymátrix pozitív szemidefinit és nullterének dimenziója pontosan d+1, akkor egy tetszőleges megengedett $G(\boldsymbol{q})$ szerkezetben a megfelelő élek (kötelek, rugók is) ugyanolyan hosszúak, mint $G(\boldsymbol{p})$-ben, továbbá $\boldsymbol{q}$ affin lineáris képe $\boldsymbol{p}$-nek.*

Bizonyítás. Mivel Ω pozitív szemidefinit, így a **2.8** megjegyzés és a **2.7** állítás (iii) pontja szerint $H(\mathbf{q}) \geq 0 = H(\mathbf{p})$. Ha az egyenlőtlenség éles lenne, akkor valamely kötél hossza megnőtt volna, vagy valamely rugó hossza csökkent volna, ami lehetetlen. Így minden megengedett $G(\mathbf{q})$ szerkezetre $H(\mathbf{q}) = 0$, és mivel a 0 globális minimuma H-nak, ezért igaz $\nabla H(\mathbf{q}) = \mathbf{o}$ is. A **2.8** megjegyzés szerint azonban ez azt jelenti, hogy ω $G(\mathbf{q})$-nak is súlyozása. Ha tehát lenne olyan kötél (vagy rugó) $G(\mathbf{p})$-ben, hogy a mefelelő $G(\mathbf{q})$-beli kötél (vagy rugó) hossza rövidebb (illetve hosszabb), akkor $H(\mathbf{q}) < H(\mathbf{p})$, ami ellentmondás.
A tétel második felének belátásához tekintsük az előző állítás bizonyításában látott, a $\mathbf{p}$-hez tartozó P^T, illetve a $\mathbf{q}$-hoz tartozó Q^T $n \times (d+1)$-es mátrixokat. Mivel ω valódi súlyozása mind $G(\mathbf{p})$-nek, mind $G(\mathbf{q})$-nak, ezért P^T és Q^T oszlopai külön-külön Ω nullterének egy bázisát adják, tehát Q^T oszlopvektorai P^T oszlopvektorainak lineáris kombinációi.

Azaz létezik egy $d \times d$-es L mátrix és $b_1, b_2, ..., b_d$ skalárok, hogy:

$$P^T \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & & L & & \vdots \\ & & & & 0 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_d & 1 \end{bmatrix} = Q^T.$$

Amiből:

$$\begin{bmatrix} & & & b_1 \\ & & & b_2 \\ & L^T & & \vdots \\ & & & b_d \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} P = Q,$$

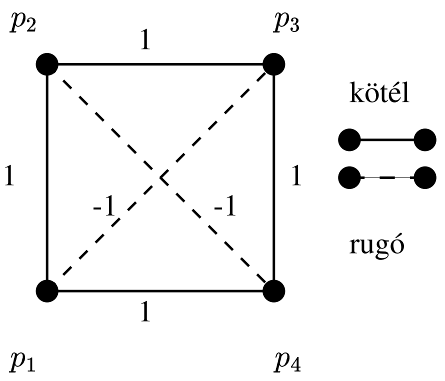
A $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_d) \in \mathbb{E}^d$ jelölés mellett ez azt jelenti, hogy az $L^T(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$ affin lineáris leképezés a $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_n$ pontokat a $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_n$ pontokba viszi. $\square$

A valódi súlyozás definíciójából nem világos, hogy létezik e ilyen súlyozás egy tetszőleges $G(\mathbf{p})$ szerkezetre. A fenti tétel ezenkívül azt is megköveteli, hogy a súlyozás bizonyos elemei nemnullák legyenek. Amint az a következő fejezetekből kiderül, speciális körülmények esetén megadható ilyen súlyozás, viszont általában egyáltalán nem biztosított a létezése.
Az előző tétel affin lineáristranszformációk erejéig ad elégséges feltételt szerkezetek globális stabilitására. Kettő és három dimenzióban be fogjuk látni, hogy ezek tulajdonképpen csak az egybevágósági transzformációk lehetnek.

2.3. Példák

A következő 3 példában speciális szerkezeteknek vizsgáljuk meg a súlymátrixát, amikről kiderül, hogy teljesítik a fenti tétel feltételeit, majd később az is, hogy valóban globálisan stabilak.

2.12. Példa. *Legyenek $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ egy négyzet csúcsai a síkban. Könnyen látható, hogy ha 1-et írunk súlyként a kötelekre és -1-et a rugókra, akkor a (2) egyensúlyi feltételt kielégítő valódi súlyozást kapunk:*



2. ábra

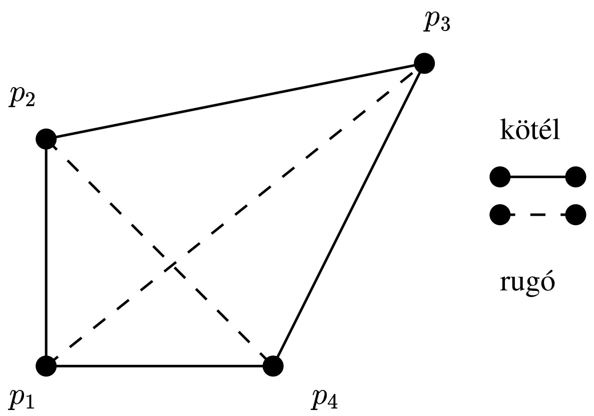
A súlymátrix ebből a következő:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy Ω-nak a nulla 3-szoros sajátértéke és pozitív szemidefinit. (A 3 db nulla mellet a 4 a negyedik sajátértéke.) Az is nyilvánvaló, hogy egy olyan síkbeli realizáció, amelyben minden oldal egyforma hosszú és az átlók hossza is ugyanakkora, csak a négyzet lehet. A **2.** ábrán látható szerkezet tehát globálisan stabil.

2.13. Példa. *Most a $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ pontok egy tetszőleges konvex négyszög csúcsai.*

A **2.7** állítás szerint egy affin lineáris transzformációt alkalmazva $\mathbf{p}$-re ∇H ott is eltűnik, tehát a **2.8** megjegyzés alapján ω az új ponton felvett szerkezetre is ugyanúgy valódi súlyozás marad. Feltehetjük tehát, hogy $\mathbf{p}_1 = (0,0)$, $\mathbf{p}_2 = (1,0)$, $\mathbf{p}_3 = (a,b)$ és $\mathbf{p}_4 = (1,0)$. Ezzel minden olyan 4 csúcsú szerkezetet leírtunk, melynek a határán kötelek vannak, belül, az átlók helyén pedig rugók. Egy adott négyszöget ugyanis el lehet transzformálni ilyen helyzetbe, itt triviálisan megadhatunk egy valódi nemnulla súlyozást, majd a transzformáció inverzével visszakapjuk az eredeti állapotot, ahol a megadott súlyozással szintén egyensúlyi állapot teljesül.



3.ábra

Mivel egy súlyozás csak skalárral való szorzás erejéig meghatározott, ezért feltehetjük azt is, hogy $\omega_{13} = -1$. Ebből már egyértelműen meghatározható a súlymátrix:

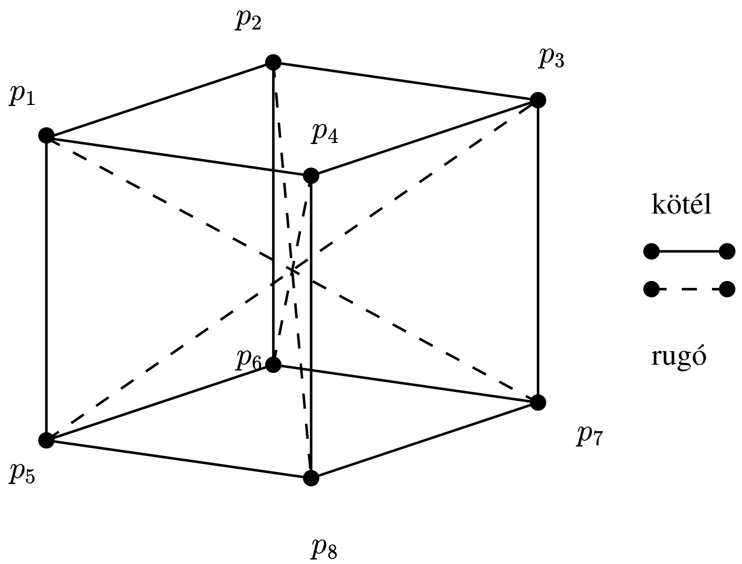
$$\Omega = \begin{bmatrix} a+b-1 & \text{-b} & 1 & \text{-a} \\ \text{-b} & \frac{b^2}{a+b-1} & \frac{-b}{a+b-1} & \frac{ab}{a+b-1} \\ 1 & \frac{-b}{a+b-1} & \frac{1}{a+b-1} & \frac{-a}{a+b-1} \\ \text{-a} & \frac{ab}{a+b-1} & \frac{-a}{a+b-1} & \frac{a^2}{a+b-1} \end{bmatrix}$$

Mivel a négyszögünknek konvexnek kell lennie, ezért $a+b > 1$, tehát a főátlóban csupa pozitív elem áll, így összegük is pozitív. Azaz az egyetlen nemnulla sajátérték pozitív, így a mátrix pozitív szemidefinit. A nullteret feszítő 3 vektor pedig:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A szerkezet globális stabilitását a **3.** fejezetben bizonyítjuk.

2.14. Példa. *A **2.12** példa mintájára most egy kocka esetén adjuk meg a súlymátrixot. A $\boldsymbol{p}_1, ..., \boldsymbol{p}_8$ pontok legyenek a csúcsok, az élek kötelek és a 4 testátló rugó:*



4.ábra

A súlymátrix most:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

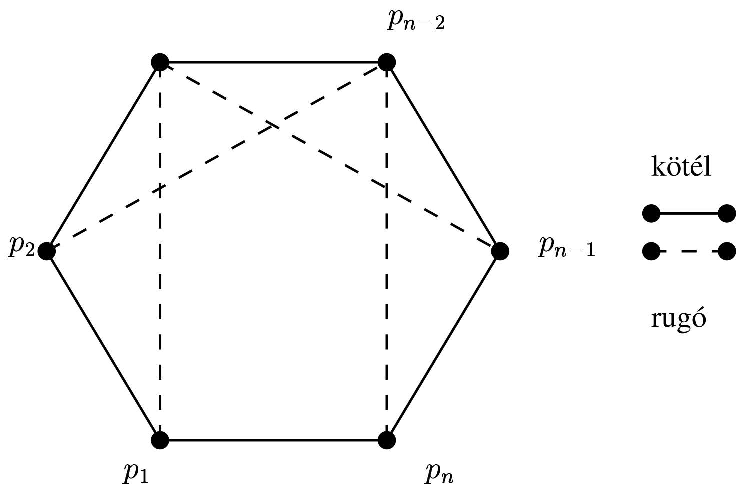
Erre az Ω mátrixra is igaz, hogy pozitív szemidefinit, és hogy nulltere négy dimenziós. Ezt most nem számoljuk ki, viszont a **4.** fejezet végén általánosabban is belátjuk majd hasonló szerkezetek globális stabilitását.

3. Konvex sokszögek stabilitása

Ebben a fejezetben R. Connelly eredményeit felhasználva bizonyos speciális 2-dimenziós szerkezetek stabilitását igazoljuk a **2.11** tétel segítségével. Pontosabban szólva szigorúan konvex sokszögekről lesz szó, ahol a sokszög határán levő élek mind kötelek, és belül néhány átló helyén rugó van.

3.1. A Cauchy-poligon

3.1. Definíció. *Legyen* $G(\boldsymbol{p})$ *egy olyan síkbeli szerkezetet, amelyben a* $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, ..., \boldsymbol{p}_n$ *pontok egy szigorúan konvex sokszög csúcsai ciklikusan indexelve, és minden (i,i+1),* $(i = 1, 2, ...n)$ *párra a* $(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_{i+1})$ *él kötél, és minden (i,i+2),* $(i = 1, 2, ..., n-2)$ *párra a* $(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_{i+2})$ *átló rugó, ezenkívül G-nek más éle nincs. Ekkor* $G(\boldsymbol{p})$*-t Cauchy-poligonnak nevezzük.*

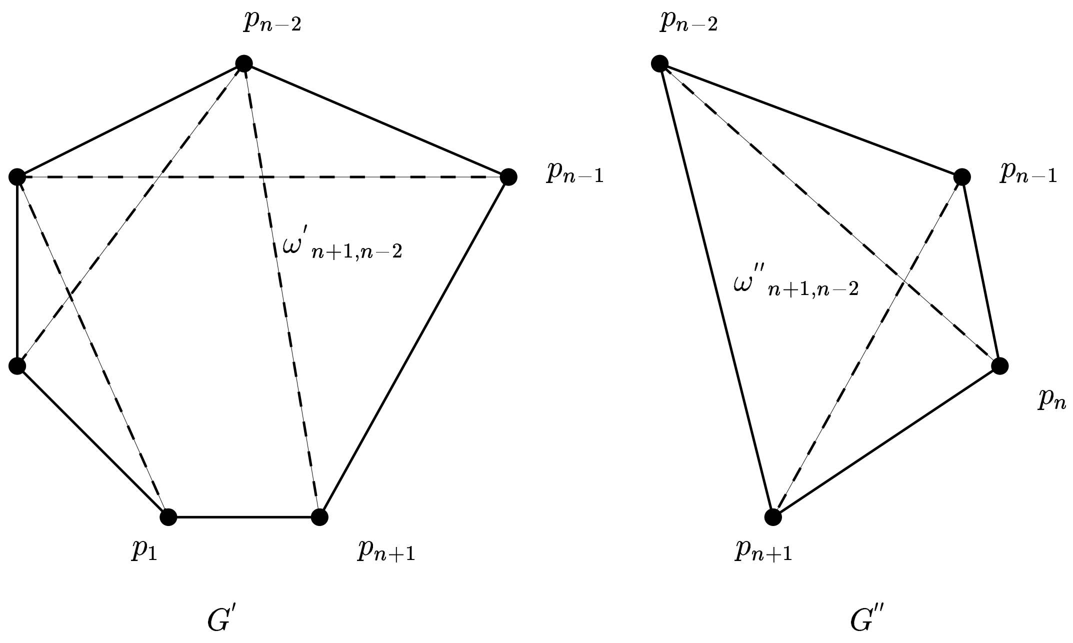


5. ábra

A Cauchy-poligon szerkezete persze nem véletlenszerű. Figyeljük meg benne ugyanis a kötelek és a rugók számát. Egy n csúcsú szerkezetben n kötél és $n-2$ rugó van, tehát ha egy valódi súlyozást szeretnénk megadni, akkor $2n-2$ ismeretlenünk lesz, amihez pontosan $2n-2$ egyenlet adott. Ennek az az oka, hogy ha már $n-1$ csúcsban teljesül az egyensúlyi feltétel, akkor az utolsóban automatikusan teljesül, hiszen ha az egyensúlyt biztosító összegeket ezen $n-1$ csúcsra összeadjuk, akkor egyrészt nullát kapunk, másrészt minden olyan élet egyszer pozitív, egyszer negatív előjellel számolunk, melyek ezen $n-1$ csúcs halmazán belül mennek, így ezek kiesnek, és csak olyanok maradnak, melyek az utolsó csúcsba mennek. Másrészt persze - mivel 2 dimenzióban vagyunk - minden csúcsban 2 egyenletet is felírhatunk. A Cauchy-poligonban tehát pontosan annyi rugó van, amennyi minimálisan szükséges ahhoz, hogy az egész szerkezet egyensúlyban legyen. Ebből persze még nem következik, hogy ez az egyensúlyi állapot létezik is, de a következő tételből az derül ki, hogy a Cauchy-poligonra valóban található valódi súlyozás, és az ebből kapott súlymátrix teljesíti a **2.11** tétel követelményeit.

3.2. Tétel. *Minden Cauchy-poligonnak létezik valódi, nemnulla súlyozása, és az ebből készített súlymátrix pozitív szemidefinit, valamint nullterének dimenziója 3.*

Bizonyítás. A csúcsok számára vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Ha n=4, akkor a **2.13** példa alapján minden 4 pontú Cauchy-poligon teljesíti a feltételt. Feltesszük tehát, hogy minden n, vagy annál kevesebb pontú Cauchy-poligonnak van olyan nemnulla súlyozása, hogy a hozzá tartozó súlymátrix pozitív szemidefinit és nullterének dimenziója 3. Ennek segítségével szeretnénk megmutatni ezt $n+1$-re.
Legyen tehát $G(\mathbf{p}) = G(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_n, \mathbf{p}_{n+1})$ egy $n+1$ csúcsú Cauchy-poligon és képezzük a következő 2 szerkezetet $G(\mathbf{p})$ csúcsain:
$G^{'}(\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_{n-1}, \mathbf{p}_{n+1})$ legyen a $\mathbf{p}_n$ csúcs elhagyásával keletkező, míg
$G^{''}(\mathbf{p}_{n-2}, \mathbf{p}_{n-1}, \mathbf{p}_n, \mathbf{p}_{n+1})$ az utolsó 4 csúcson képzett Cauchy-poligon.
A $G^{'}$-hez rendelt $\Omega^{'}$, valamint a $G^{''}$-höz rendelt $\Omega^{''}$ mátrixok az indukció szerint pozitív szemidefinitek és nullterük 3 dimenziós. (**6.** ábra) Legyen $\widehat{\Omega}'$ egy olyan $(n+1) \times (n+1)$-es mátrix, melyet $\Omega^{'}$-ből kapunk úgy, hogy egy csupa nulla n. oszlopot és egy csupa nulla n. sort teszünk hozzá, $\widehat{\Omega''}$ pedig egy olyan $(n+1) \times (n+1)$-es mátrix, melyet $\Omega^{''}$-ből kapunk n-3 db csupa nulla oszlopot írva elé és n-3 db csupa nulla sort írva fölé.
Tekintsük a $\Omega = \omega^{'}{}_{n+1,n-2}\widehat{\Omega''} - \omega^{''}{}_{n+1,n-2}\widehat{\Omega}'$ mátrixot, ahol $\omega^{''}{}_{n+1,n-2}$ az $\widehat{\Omega''}$ mátrix n+1. sorának n-2. eleme, és mivel $G^{''}$-ben itt kötél van, ezért negatív, $\omega^{'}{}_{n+1,n-2}$ pedig az $\widehat{\Omega}'$ mátrixban ugyanezen elem, s mivel $G^{'}$-ben itt rugó van, ezért pozitív. (Erdetileg fordított előjellel vannak a súlyok, de a mátrixban megcserélődnek az előjelek.)



6.ábra

Belátjuk, hogy Ω pozitív szemidefinit és nullterének dimenziója 3.
Mivel Ω két pozitív szemidefinit mátrix pozitív súlyokkal vett összege, ezért nyilván pozitív szemidefinit. Ebből az is következik, hogy nulltere $\widehat{\Omega'}$ és $\widehat{\Omega''}$ nullterének metszete. (Egy nemnulla $\mathbf{x}$ vektorral szorozva az összeget akkor és csak akkor kaphatunk nullát, ha mindkét tag nullát ad.)
$\widehat{\Omega'}$ nullterét a következő 4 vektor feszíti:

$$\begin{bmatrix} p_{1,1} \\ p_{2,1} \\ \vdots \\ p_{n,1} \\ 0 \\ p_{n+1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{2,1} \\ p_{2,2} \\ \vdots \\ p_{n,2} \\ 0 \\ p_{n+1,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\widehat{\Omega''}$ nullterét pedig a következő n:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ p_{n-2,1} \\ \vdots \\ p_{n+1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ p_{n-2,2} \\ \vdots \\ p_{n+1,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ebből nyilvánvaló, hogy a két nulltér metszete legalább 3 dimenziós. Ha 4 dimenziós lenne, akkor a fenti nulltér benne van a lentiben, tehát $\widehat{\Omega''}$-t szorozva a 4 vektor bármelyikével a nullvektort kapjuk, ami nem lehetséges, hiszen pl. ha az utolsóval szorzunk, akkor $\widehat{\Omega''}$ n. oszlopát kapjuk, ami nemnulla, mivel G''-n valódi, nemnulla súlyozásunk volt az indukció szerint. Ezzel ellentmondásra jutottunk, Ω nulltere tehát pontosan 3 dimenziós.
Hátra van még annak belátása, hogy a Ω-hoz tartozó ω valódi súlyozás.
Az egyensúlyi feltétel azért teljesül minden csúcsban, mert a nullterek fenti felírásából látható, hogy a két nulltér metszetében benne vannak a

$$\begin{bmatrix} p_{1,1} \\ p_{2,1} \\ \vdots \\ p_{n+1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,2} \\ p_{2,2} \\ \vdots \\ p_{n+1,2} \end{bmatrix}$$

vektorok. Ez pedig pontosan az egyensúlyi feltétellel ekvivalens.
Az ábráról jól látható, hogy a $\mathbf{p}_{n-2}, \mathbf{p}_{n-1}, \mathbf{p}_n, \mathbf{p}_{n+1}$ csúcsok közötti élek kivételével a G súlyozása nem változik G'-éhez képest, és ezekre az élekre:
A $(\mathbf{p}_{n-2}, \mathbf{p}_{n-1})$ kötélre két pozitív szám összege kerül.
A $(\mathbf{p}_{n-2}, \mathbf{p}_n)$ rugón negatív érték marad.
A $(\mathbf{p}_{n-2}, \mathbf{p}_{n+1})$ pontok között nincs él, és ide a konstrukció folytán valóban nulla jön.
A $(\mathbf{p}_{n-1}, \mathbf{p}_n)$, valamint a $(\mathbf{p}_n, \mathbf{p}_{n+1})$ közötti kötelek súlya nem változik, tehát pozitív marad.

A $\mathbf{p}_{n+1}$ csúcsnál lévő egyetlen rugóra pedig azért kerül negatív érték, mert - mint láttuk - ezzel a súlyozással minden pontban teljesül az egyensúlyi feltétel, így mivel a két kötél pozitív súlyokkal vett vektoriális összege a sokszög belsejébe mutat, ezért a szintén befelé mutató rugónak csak negatív lehet a súlya. $\square$

3.2. Általánosabb konvex sokszögek

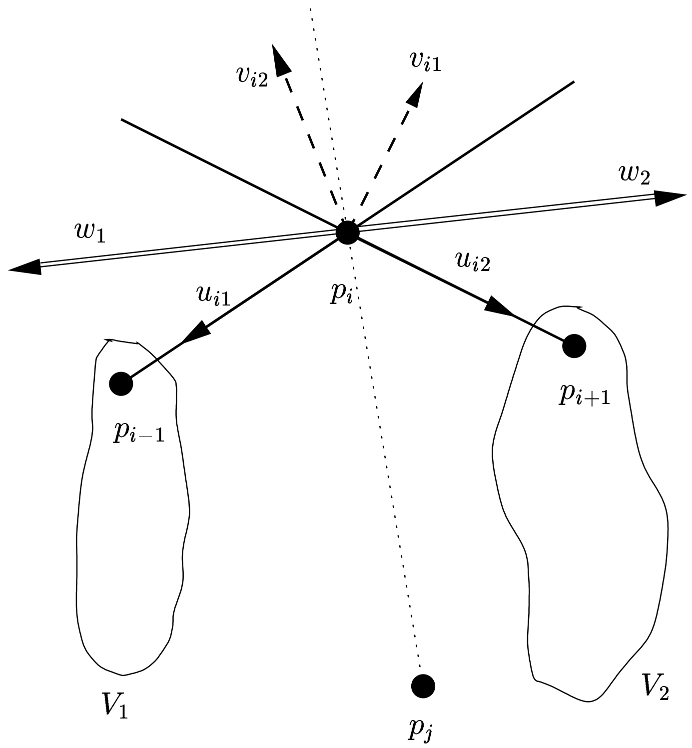
Ebben a részben továbbra is csak olyan konvex sokszögekkel fogunk foglalkozni, melyekben kötelek csak a határon lehetnek és rugók csak az átlók helyén. Tehát a később szereplő $G(\mathbf{p})$ szerkezetek alatt mindig ilyet értünk. Először két lemmát bizonyítunk be, melyek segítségével aztán ezekre az általánosabb sokszögekre is belátjuk a Cauchy-poligonra vonatkozó tétel analógját.

3.3. Lemma. *Legyen $A(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ egy $n \times n$-es szimmetrikus mátrix, melynek elemei t-nek folytonos függvényei. Tegyük fel, hogy $A(t)$ nulltere ugyanaz minden t-re. Ekkor ha $A(1)$ pozitív szemidefinit, akkor $A(0)$ is az.*

Bizonyítás. Jelölje a közös nullteret Y. Tegyük fel indirekt, hogy A(0) nem pozitív szemidefinit, azaz $\exists\ x \notin Y$, hogy $x^T A(0) x < 0$. Ekkor mivel $x^T A(t) x$ t-nek folytonos függvénye és $x^T A(1) x > 0$, ezért $\exists\ t_0$, hogy $x^T A(t_0) x = 0$, azaz $x \in Y$, ami ellentmondás. $\square$

3.4. Lemma. *Tegyük fel, hogy a $G(\boldsymbol{p})$ szerkezetnek létezik valódi, nemnulla súlyozása. Ekkor ha $\boldsymbol{p}_i$ és $\boldsymbol{p}_j$ a sokszög két nem szomszédos csúcsa, akkor létezik a $\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_j$ élet átmetsző rugó. Más szóval ha V_1, illetve V_2 jelöli a $\boldsymbol{p}_i$ és a $\boldsymbol{p}_j$, illetve a $\boldsymbol{p}_j$ és a $\boldsymbol{p}_i$ közötti csúcsok halmazát az óramutató járásával megegyező irányban, akkor a V_1 és a V_2 halmazok között megy rugó.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy léteznek olyan $\mathbf{p}_i$ és $\mathbf{p}_j$ csúcsok, hogy $\overline{\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j}$-t nem metszi rugó. Tekintsük a $\mathbf{p}_i$ csúcsot és vezessük be a következő jelöléseket!
Legyen $\mathbf{u}_{i1}$ a $\mathbf{p}_i$-ből a V_1 felé, $\mathbf{u}_{i2}$ pedig a V_2 felé induló kötél súlyozott vektora. Hasonlóan definiálható $\mathbf{u}_{j1}$ és $\mathbf{u}_{j2}$ is. Ezenkívül jelölje $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{p}_i$-ből a V_1 halmazba, $\mathbf{v}_2$ pedig a V_2 halmazba mutató rugók súlyozott összegét.
Képletekkel kifejezve tehát:
$\mathbf{u}_{i1} = \omega_{i-1,i}(\mathbf{p}_{i-1} - \mathbf{p}_i)$, és $\mathbf{u}_{j1} = \omega_{j+1,j}(\mathbf{p}_{j+1} - \mathbf{p}_j)$
$\mathbf{u}_{i2} = \omega_{i+1,i}(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i)$, és $\mathbf{u}_{j2} = \omega_{j-1,j}(\mathbf{p}_{j-1} - \mathbf{p}_j)$
$\mathbf{v}_1 = \sum_{p_l \in V_1} \omega_{li}(\mathbf{p}_l - \mathbf{p}_i)$ és $\mathbf{v}_2 = \sum_{p_k \in V_2} \omega_{ki}(\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_i)$



7.ábra

Ekkor mivel a szerkezet egyensúlyban van $\mathbf{p}_i$-ben, ezért teljesül, hogy

$$\mathbf{o} = (\mathbf{u}_{i1} + \mathbf{v}_{i1}) + (\mathbf{u}_{i2} + \mathbf{v}_{i2}) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \tag{5}$$

Ennek alapján nyilvánvaló, hogy $\mathbf{w}_1$ a $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j$ egyenes V_1 felőli, míg $\mathbf{w}_2$ a V_2 felőli oldalára esik. (**7.**ábra)
Hasonlóan felírhatóak $\mathbf{p}_j$ esetében a megfelelő $\mathbf{z}_1$, illetve $\mathbf{z}_2$ vektorok, melyek összege szintén nulla, és $\mathbf{z}_1$, illetve $\mathbf{z}_2$ az egyenes ugyanazon oldalára esik, mint $\mathbf{w}_1$, illetve $\mathbf{w}_2$.
Másrészt adjuk össze az egyensúlyi feltételeinket V_1 csúcsaira:

$$\mathbf{o} = \sum_{p_k \in V_1} \sum_{l} \omega_{lk}(\mathbf{p}_l - \mathbf{p}_k) = -\mathbf{w}_1 - \mathbf{z}_1 \tag{6}$$

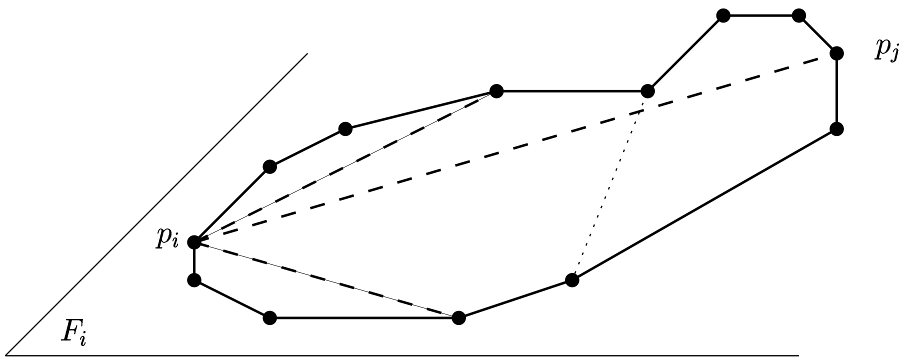
hiszen az összes V_1-en belül haladó él kiesik az összegzésben.
Tehát $\mathbf{z}_1$ és $\mathbf{w}_1$ olyan vektorok, hogy összegük nulla, de egy egyenes ugyanazon oldalára esnek. Ez pedig csak úgy lehet, hogy mindkettő ebbe az egyenesbe esik (egyik vektor sem nullvektor). Ez viszont nem teljesülhet, hiszen egyikük sem mutathat a sokszög belsejébe, ha $\mathbf{p}_i$ és $\mathbf{p}_j$ nem szomszédos csúcsok. $\square$

3.5. Tétel. *Legyen $G(\boldsymbol{p})$ most egy tetszőleges konvex sokszög, kötelekkel a határon és rugókkal belül. Ha a szerkezetnek létezik egy valódi, nemnulla súlyozása, akkor az ehhez tartozó súlymátrix pozitív szemidefinit és nulltere 3 dimenziós.*

Bizonyítás. A **2.10** állítás **(i)** pontja szerint a nulltér legalább 3 dimenziós. Tegyük fel indirekt, hogy legalább 4 dimenziós. Ekkor ugyanezen állítás **(ii)** pontja szerint a szerkezetnek létezik olyan realizációja, melyben a $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_n$ pontok affin burka 3 dimenziós és ez a realizáció is egyensúlyban van ω-val. Legyen H ennek az $\mathbb{E}^3$-beli halmaznak a konvex burka. H tehát egy konvex, n csúcsú poliéder. Az Euler-poliéder tétel alapján

$$2e = 2n + 2l - 4, \tag{7}$$

ahol l H lapjainak, e pedig H éleinek száma. Jelölje továbbá F_i az i. lapot, mely legyen egy konvex k_i-szög.
Számoljuk össze, hogy F_i-ben hány kötél (azaz G-ben szomszédos pont) van. Nem lehet k_i, hiszen ekkor a csúcsok affin burka 2 dimenziós lenne.
$k_i - 1$ sem lehet, ugyanis ekkor pontosan egy éle marad ki F_i-nek. Erre az élre alkalmazva a **3.4** lemmát azt kapjuk, hogy van olyan rugó, mely (legalábbis G-ben) metszi ezt az élet. Más szóval létezik egy olyan $\mathbf{p}_i \in F_i$ és egy olyan $\mathbf{p}_j \notin F_i$, hogy $\mathbf{p}_i$ és $\mathbf{p}_j$ között rugó megy. Mivel azonban H minden pontja F_i síkjának ugyanazon oldalán van, mint $\mathbf{p}_j$, ezért nem lehet egyensúly a $\mathbf{p}_i$ pontban, ugyanis a rugók súlyozott összege biztosan nem F_i síkjában lesz, míg a kötelek eredője igen. (**8**.ábra)



8.ábra

Így tehát minden lapra összegezve a kötelek számát:

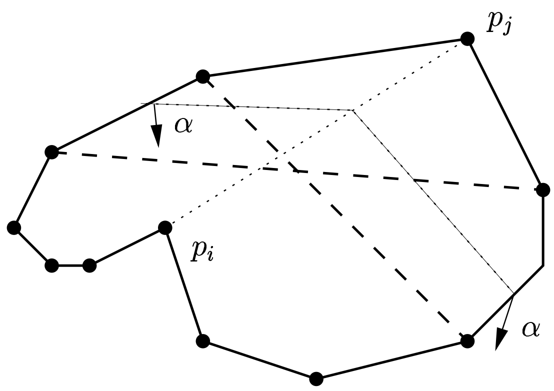
$$2n = \sum_{i=1}^{l} n_i \leq \sum_{i=1}^{l} (k_i - 2) = (\sum_{i=1}^{l} k_i) - 2l, \tag{8}$$

ahol n_i jelöli az F_i-ben levő kötelek számát.
Ugyanis minden kötelet kétszer számoltunk, és n darab kötél van összesen. A k_i-k összege viszont éppen $2e$, hiszen itt minden élet kétszer kapunk meg. Végeredményben, (7)-et felhasználva a következőt kapjuk:

$$2n \leq 2e - 2l = 2n - 4, \tag{9}$$

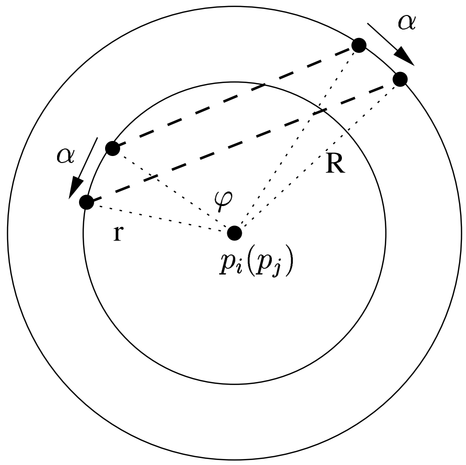
ami ellentmondás.
Beláttuk tehát, hogy Ω nulltere pontosan 3 dimenziós.
Legyen most $\Omega^{'}$ annak a Cauchy-poligonnak a súlymátrixa, melyet a $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_n$ pontokon írunk fel. Tekintsük a következő mátrixokat:
$\Omega(t) = (1-t)\Omega + t\Omega^{'} \qquad (0 \leq t \leq 1)$
Mivel $\Omega(t)$ nulltere minden t-re Ω és $\Omega^{'}$ nullterének metszete, és ez a két nulltér ugyanaz (a $\mathbf{p}_i$ pontok első, illetve második koordinátájából álló vektorok, valamint a csupa 1 vektor által feszített altér), ezért $\Omega(t)$ nulltere minden t-re ugyanaz. Ezenkívül $\Omega(1) = \Omega^{'}$ pozitív szemidefinit, így a **3.3** lemma miatt pozitív szemidefinit lesz $\Omega(0) = \Omega$ is. □

2.Bizonyítás. Connelly eredeti bizonyítása azért érdekes, mert kizárólag az energiafüggvény segítségével látja be, hogy a sokszög térbeli realizációja nem lehet egyensúlyi állapotban.
Láttuk, hogy a 3 dimenziós realizációt egy bizonyos síkra vetítve az eredeti konvex sokszöget kapjuk vissza. Tekintsük H-nak egy olyan $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j$ élét, mely az erre a síkra merőleges irányból látszik és eredetileg nem kötél! A **3.4** lemma alapján létezik olyan rugó, melynek vetülete metszi ennek az élnek a vetületét. Továbbá igaz az is, hogy létezik olyan, a $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j$ élet tartalmazó L sík, hogy a szerkezetnek minden csúcsa ennek a síknak az egyik oldalára esik. Ha tehát a lemmában definiált V_1 és V_2 jelöléssel a $V_1 \bigcup \mathbf{p}_i \bigcup \mathbf{p}_j$ halmazt, illetve a $V_2 \bigcup \mathbf{p}_i \bigcup \mathbf{p}_j$ halmazt a $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j$ él mentén $+\alpha$, illetve $-\alpha$ szöggel elforgatjuk, akkor csak a $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j$ élet metsző rugók hossza változik, méghozzá nő.(**9.**ábra)



9.ábra

Egészen pontosan egy pont egy, a $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j$ élre merőleges síkban fekvő körön mozog. Vizsgáljuk meg, hogy mennyit változik egy rugó hossza a forgatás során. Legyen a két kör távolsága l, sugaraik pedig r, valamint R és tekintsük a két kört a $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j$ él irányából:



10.ábra

Ekkor tehát a rugó hossznégyzete α függvényében:

$$f(\alpha) = r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi + 2\alpha) + l^2 \tag{10}$$

Ebből következően $f(\alpha)$ α szerinti deriváltja:

$$f'(\alpha) = 4rR\sin(\varphi + 2\alpha) \tag{11}$$

A derivált tehát a 0-ban pozitív, ugyanis φ nem lehet sem nulla, sem π. Nulla azért nem lehet, mert ekkor a két pont vetülete egy egyenesbe esne a $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j$ él vetületével, így a sokszög nem lenne konvex. π pedig azért nem lehet, mert láttuk, hogy minden pont L egyik oldalán van. φ ugyanezen okból nem lehet nagyobb π-nél sem.
Egy elforgatás viszont lokálisan ekvivalens egy iránymenti elmozdulással, ami viszont a $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_n)$ pontnak egy iránymenti elmozdulása, mely irányban a fentiek szerint nulla a derivált. Ez pedig ellentmond annak, hogy a realizáció egyensúlyban volt, hiszen a **2.8** megjegyzés alapján egyensúlyi állapotban az energiafüggvény minden iránymenti deriváltja nulla. □

Ezzel a tétellel a **2.11** tétel értelmében azt láttuk be, hogy ha létezik nemnulla valódi súlyozása egy ilyen szerkezetnek, akkor minden hozzá képest megengedett szerkezet csúcsait egy affin lineáris transzformációval kapjuk, és a megfelelő kötelek, illetve rugók ugyanolyan hosszúak. Ebből a következő állítás segítségével már következni fog, hogy ezek a szerkezetek globálisan is stabilak, azaz hogy az ilyen affin lineáris leképezések csak az egybevágósági transzformációk lehetnek.

3.6. Állítás. *Ha a $G(\boldsymbol{p})$ szerkezet olyan, mint az előző tételben, akkor globálisan stabil.*

Bizonyítás. Legyen tehát T egy olyan affin lineáris transzformáció, mely a $G(\mathbf{p})$ szerkezet csúcsait a $G(\mathbf{q})$ szerkezet csúcsaiba viszi. Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változtatja meg a transzformáció egy $\mathbf{x}$ vektor hosszát:
Ezt pontosan a

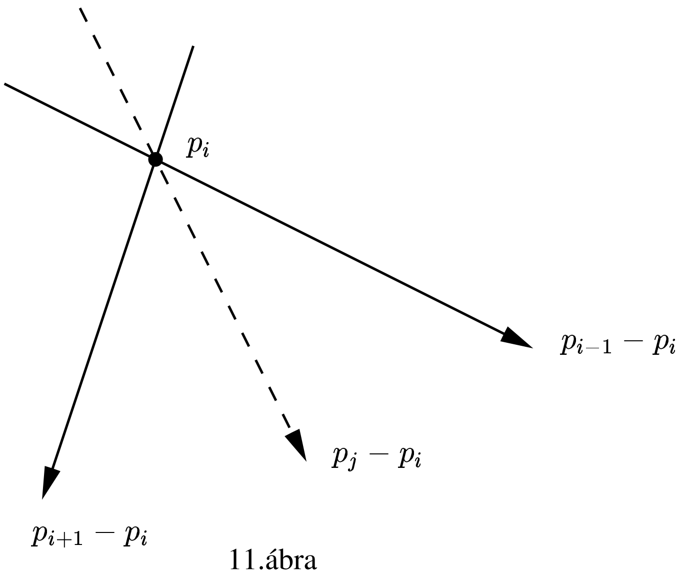
$$|T\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{x}|^2 = (T\mathbf{x})^T(T\mathbf{x}) - \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(T^TT)\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(T^TT - I)\mathbf{x}$$

kifejezés előjele adja meg: ha pozitív, akkor T növelte, ha negatív, akkor csökkentette $\mathbf{x}$ hosszát.

4 esetet fogunk megkülönböztetni, attól függően, hogy a $T^TT - I$ 2×2-es, szimmetrikus mátrixnak milyen előjelű sajátértékei vannak:
-Ha mindkét (nemnulla) sajátértékének ugyanaz az előjele, azaz a mátrix definit, akkor T minden vektort vagy növel, vagy csökkent, ami ellentmond annak, hogy minden kötél és rugó hossza fixen maradt.

-Ha egy nulla sajátértéke van, azaz szemidefinit, akkor csak egy bizonyos irányban hagyja fixen a vektorokat, tehát két szomszédos kötél vagy 0, vagy 180 fokos szöget zár be egymással, ami annak mond ellent, hogy a szerkezet csúcsai egy szigorúan konvex sokszög csúcsai voltak.

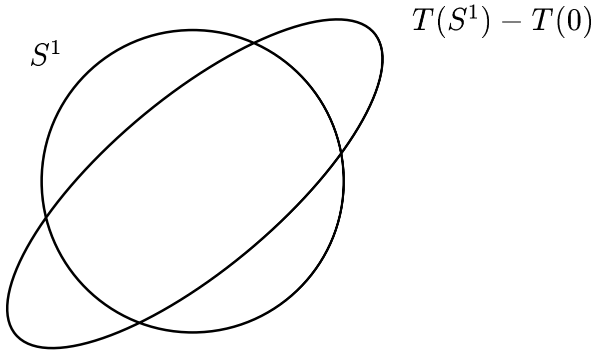
-Ha egy pozitív és egy negatív sajátértéke van, akkor T két irányba eső vektorokat hagy fixen. Ekkor egy tetszőleges csúcsból kiinduló két kötél 'lefoglalja' ezt a két irányt, így ebből a csúcsból kiinduló, a szerkezet belsejébe mutató rugó irányának valamelyik kötél irányába kell esnie, ami megint a szigorú konvexitásnak mond ellent. (**11.**ábra)



11.ábra

-Már csak az az eset maradt hátra mikor mindkét sajátérték nulla, azaz T minden vektor hosszát fixen hagyja, ekkor viszont T egybevágósági transzformáció.
Ezzel tehát beláttuk, hogy minden megengedett szerkezetet egybevágósági transzformációval kapunk meg, azaz $G(\mathbf{p})$ globálisan stabil. $\square$

Kiegészítés. Az előbb látott esetszétválasztást szemléletesen az fejezi ki, hogy az S^1 síkbeli egységkörnek a T általi képe egy ellipszis. Ha tekintjük tehát a $T(S^1) - T(0)$ origó középpontú ellipszist akkor annak helyzete a körhöz viszonyítva kiadja a fenti 4 esetet.
Pontosabban a következő esetek lehetségesek az előző sorrendnek megfelelően:
-Ha az egyik síkidom teljes egészében tartalmazza a másikat.
-Ha a kör belülről érinti az ellipszist, vagy az ellipszis érinti belülről a kört.
-Ha a kör elmetszi az ellipszist (4 metszéspont). (**12.**ábra)



12.ábra

-Negyedik esetként marad az, amikor az egységkör képe is egységkör lesz. Ekkor tehát csak az elforgatás jöhet szóba, s ha figyelembe vesszük, hogy az 'ellipszist' az origóba toltuk el, valóban minden egybevágósági transzformációt megkapunk.

4. Konvex poliéderek stabilitása

Mint azt már az előző fejezetben is láttuk, szerkezetek stabilitásvizsgálatához célszerű volt bizonyos mátrixok sajátértékeit megfigyelni. Kiderült azonban az is, hogy már kétdimenziós esetben is meglehetősen bonyolult volt ezek kiszámítása. Magasabb dimenzióban még nagyobb, több nemnulla elemmel rendelkező mátrixok nullterét kellene meghatározni, és ez természetesen még nehezebbé teszi a problémát. A kétdimenziós esetben mondhatjuk szerencsénk volt abból a szempontból, hogy többé-kevésbé geometriai bizonyításokra volt csak szükségünk. Talán nem meglepő, hogy a bonyolultabb, 3 dimenziós eset vizsgálatában már inkább algebrai eszközök használatával juthatunk eredményre. Ebben fejezetben is lesznek azért geometriai részletek, viszont kiindulási pontunk egy gráfelméletben definiált fogalom lesz, melynek Lovász László által bizonyotított tulajdonágait felhasználva jutunk el speciális konvex poliéderek stabilitásának vizsgálatához.
Hasonlóan az előző fejezetben tárgyalt esethez, most olyan szerkezetekkel fogunk foglalkozni, ahol a $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_n$ pontok egy konvex poliéder csúcsai, és a poliéderben kötelek vannak a határon, rugók pedig belül.
A **3.5** tételből az derült ki, hogy síkban elég volt az, hogy létezett a szerkezetnek egy nemnulla, valódi súlyozása. Ez sajnos 3 dimenzióban már nem elég, Branko Grünbaum mutatott egy meglehetősen bonyolult ellenpéldát, melynek bár volt megfelelő súlyozása, mégsem bizonyult stabilnak. Amint azonban a fejezet végén kiderül, bizonyos esetekben elég lesz 3 dimenzióban is nemnulla, valódi súlyozás létezése. Speciálisan centrálszimmetrikus konvex poliéderekről lesz szó a fejezet végén, melyekben rugók csak az origóra szimmetrikus pontok között lesznek. Az ilyen szerkezetek stabilitása Bezdek Károly sejtése alapján merült fel, és a dolgozat végén sikerül is ezt bebizonyítani.

4.1. Gráfok Colin de Verdière száma

4.1. Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ egy n csúcsú, irányítatlan gráf, és jelölje $\mathcal{M}_G$ azon $n \times n$-es szimmetrikus $M = (M_{ij})$ mátrixok halmazát, melyek kielégítik a következő feltételeket:*

(M1) $M_{ij} < 0$, ha $ij \in E$
$M_{ij} = 0$, ha $ij \notin E$, $i \neq j$

(M2) M-nek pontosan 1 negatív sajátértéke van.

Ezenkívül M 'Strong Arnold' tulajdonságú, ha teljesül:

(M3) Ha $X = (X_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olyan szimmetrikus mátrix, melyre $MX = 0$ és $X_{ij} = 0$, ha $i = j$, vagy $ij \in E$, akkor $X = 0$.

Ez a feltétel ugyan szerepel az eredeti definícióban, de - mint majd nemsokára kiderül - nem lesz lényeges a továbbiakban.

4.2. Definíció. *Tekintsük az $\mathcal{M}_G$-beli mátrixok nullterei közül azt, amelyiknek maximális a dimenziója. A dimenziónak ezt az értékét nevezzük a G gráf Colin de Verdière számának és $\mu(G)$-vel jelöljük. Továbbá minden olyan mátrixot, mely nullterének dimenziója eléri ezt a maximumot G Colin de Verdière mátrixának nevezzük.*

A G gráfnak egy adott M Colin de Verdière mátrixából könnyen készíthetünk újabbakat. Ugyanis ha az oszlopokat, illetve a sorokat pozitív skalárokkal szorozzuk, úgy, hogy a mátrix szimmetriája megmaradjon, akkor továbbra is teljesülnek a feltételek. Egy ilyen konstrukciót egy pozitív diagonális mátrix segítségével valósíthatunk meg, jobbról és balról is szorozva M-et vele.

4.3. Állítás. *Ha D egy pozitív diagonális $n \times n$-es mátrix, és $M \in \mathcal{M}_G$, akkor $DMD \in \mathcal{M}_G$, sőt, ha M Colin de Verdière mátrix volt, akkor DMD is az lesz.*

Bizonyítás. Mivel M-nek egy m_{ij} eleméből $d_i d_j m_{ij}$ lesz, és a D mátrix elemei pozitívak voltak, nyilvánvaló, hogy az (M1) tulajdonság érvényben marad.

Tekintsük egy A szimmetrikus mátrix két sajátvektorát, $\mathbf{x}$-et és $\mathbf{y}$-t. Ekkor teljesül:

$$\lambda_y \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \mathbf{y}^T A \mathbf{x} = \lambda_x \mathbf{y}^T \mathbf{x} \tag{12}$$

Vagyis ha λ_x és λ_y különböznek, akkor $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ merőlegesek egymásra. Ebből az is következik, hogy:

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})^T A (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda_x |\mathbf{x}|^2 + \lambda_y |\mathbf{y}|^2 \tag{13}$$

Így tehát ha λ_x és λ_y két negatív sajátérték, akkor a $\mathbf{z}^T A \mathbf{z}$ kvadratikus alak az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ által kifeszített egész altéren negatív.

D egy lineáris transzformáció, hiszen determinánsa nem nulla, tehát D egy k-dimenziós alteret egy k-dimenziós altérbe visz, ami igaz D^{-1}-re is. Ezenkívül az, hogy M-nek pontosan egy negatív sajátértéke van azt jelenti, hogy a $\mathbf{z}^T M\mathbf{z}$ kvadratikus alak nem lehet egy teljes kétdimenziós altéren negatív. Mivel $\mathbf{z}^T DMD\mathbf{z} = (D\mathbf{z})^T M(D\mathbf{z})$, ezért ha lenne DMD-nek 2 negatív sajátértéke, vagy egy negatív sajátértékének egynél nagyobb lenne a multiplicitása (vagyis egy legalább kétdimenziós altéren negatív lenne a $\mathbf{z}^T DMD\mathbf{z}$ kvadratikus alak), akkor ez teljesülne $\mathbf{z}^T M\mathbf{z}$-re is, ami ellentmondás.
Ezzel tehát beláttuk (M2) teljesülését is, valamint azt, hogy ha M nulltere r dimenzós, akkor DMD nulltere is r dimenziós, így Colin de Verdière mátrixból Colin de Verdière mátrixot kapunk.

Az (M3) tulajdonság igazolása is könnyű:
Tegyük fel, hogy $(DMD)X = 0$, ahol X megfelelő elemei nullák. Mivel D invertálható, ezért igaz $(MD)X = M(DX) = 0$ is. DX megfelelő elemei szintén nullák lesznek, így mivel M-re teljesül (M3), ezért $DX = 0$, azaz $X = 0$. □

A $\mu(G)$ számnak sok érdekes gráfelméleti tulajdonsága van. Ezek közül talán a legfontosabbak a következők:
(i) Ha H részgráfja G-nek akkor $\mu(H) \leq \mu(G)$
(ii) $\mu(G) \leq 1 \iff$ G egy egyszerű út.
(iii) $\mu(G) \leq 2 \iff$ G 'outerplanar'(*).
(iv) $\mu(G) \leq 3 \iff$ G síkgráf.

Ezeket a tulajdonságokat most nem igazoljuk, a bizonyítások megtalálhatóak a **[3]** cikkben. Fontos lesz a továbbiakban, hogy H. van der Holst (lásd **[5]**) az **(iv)** pont 'akkor' részét 3-összefüggő síkbeli gráfokra az (M3) tulajdonság használata nélkül is igazolta, azaz teljesül:

4.4. Állítás. *Ha G egy 3-összefüggő síkbeli gráf és $M \in \mathcal{M}_G$, akkor M nullterének dimenziója legfeljebb 3.*

Esetünkben ez azért lesz fontos, mert Steinitz tétele szerint minden konvex, 3 dimenziós poliltóp élhálózata izomorf egy 3-összefüggő, síkgráffal.

A (*) tulajdonság jelentése a következő: a G olyan síkgráf, hogy létezik olyan lapja (esetleg a végtelen, külső lap), hogy minden csúcs ezen a lapon van. Más szóval a gráf csúcsait fel lehet írni egy olyan körbe, hogy a körön kívül már nem megy él.

4.2. Nulltér-reprezentáció

Legyen $G = (V, E)$ egy n csúcsú tetszőleges gráf és $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olyan mátrix, mely teljesíti az (M1) és az (M2) feltételeket. Tegyük fel, hogy M nulltere r dimenziós és legyenek az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_r$ vektorok a nulltér egy bázisa. Tekintsük a következő vektorokat: $\mathbf{u}_i = (a_{1,i}, a_{2,i}, ..., a_{r,i})^T \in \mathbb{R}^r$
Az $\mathbf{u}_i$ $(i \in V)$ vektorokat nevezzük az M mátrixból származtatott nulltér-reprezentációnak. A definíció alapján igaz a következő észrevétel:

$$\sum_j M_{ij}\mathbf{u}_j = \mathbf{o} \tag{14}$$

Ez azért igaz, mert a fenti összegnek a k. koordinátája $\sum_j M_{ij}a_{kj}$, ami pedig éppen az $\mathbf{a}_k$ vektor és M i. sorának a skaláris szorzata, így nulla.
Az $(\mathbf{u}_i, i \in V)$ vektorok csak $\mathbb{R}^r$ egy lineáris transzformációjának erejéig vannak meghatározva, hiszen az $\mathbf{a}_i$ vektorokat szabadon választhattuk. Továbbá egy pozitív diagonális D mátrixal a **4.3** állítás szerint $DMD \in \mathcal{M}_G$ teljesül. Mivel $DMD(D^{-1}\mathbf{a}_k) = DM\mathbf{a}_k = 0$, tehát DMD nullterének $(D^{-1}\mathbf{a}_k,\ k = 1, ..., r)$ egy bázisa lesz. Ezzel tehát az $\mathbf{u}_i$ vektorok mindegyikét egy pozitív skalárral szoroztuk, így a $d_i = 1/|\mathbf{u}_i|^2$ választással elérhetjük, hogy a nulltér reprezentáció minden vektora egységvektor legyen.

Legyen most G egy 3-összefüggő síkbarajzolható gráf és M ennek egy Colin de Verdière mátrixa, 3 dimenziós nulltérrel. Tekintsünk egy olyan $(\mathbf{u}_i, i \in V)$ nulltér-reprezentációt, melyben $|\mathbf{u}_i| = 1$ $(i \in V)$. Ezáltal V-nek egy leképezését kapjuk az egységgömbre. Kiterjeszthetjük ezt a leképezést G-nek egy leképezésévé úgy, hogy két V-beli pont képét összekötjük egy őket tartalmazó főkör rövidebbik ívével. Könnyen látható, hogy ez mindig megtehető, ugyanis a csúcsok leképezésénél nem kerülhet két csúcs a gömb átellenes pontjaiba, így a főkörív egyértelműen meghatározott. Ezt a leképezést G nulltér-leképezésének hívjuk. Lovász és Schrijver bizonyította a következőket: (a bizonyítást lásd **[10]**)

4.5. Tétel. *A nulltér leképezés G-nek egy beágyazása a gömbhéjba, továbbá a beágyazás minden f lapja a gömbhéj és a C_f konvex kúp metszete.*

4.6. Definíció. *Azt mondjuk egy G 3-összefüggő síkbarajzolható gráf M Colin de Verdière mátrixáról, hogy megfelelően súlyozott, ha a nulltér reprezentáció vektorai egy konvex politóp csúcsai, melynek élhálózata az eredeti G gráf.*

A célunk az lesz, hogy belássuk: minden 3-összefüggő síkbarajzolható gráf Colin de Verdière mátrixa megfelelően súlyozható. A bizonyítás kiindulópontja G-nek a duális $G^* = (V^*, E^*)$ gráfja lesz. Szükségünk van a következő lemmákra:

4.7. Lemma. *V^* minden f csúcsához rendelhető egy olyan $\mathbf{w}_f$ vektor, hogy ha $ij \in E$, és a megfelelő él G^*-ban $fg \in E^*$, akkor teljesül:*

$$\mathbf{w}_f - \mathbf{w}_g = M_{ij}(\boldsymbol{u}_i \times \boldsymbol{u}_j) \tag{15}$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{v}_{fg} = M_{ij}(\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j)$. Azt kellene belátnunk, hogy a $\mathbf{v}_{fg}$ vektorokat G^* egy tetszőleges körének éleire összeadva nullát kapunk. Ekkor ugyanis $\mathbf{v}_{fg}$-t különbség alakban is előállíthatjuk, hiszen így az előbbi összeg teleszkópikussá válik. Mivel G^* síkbarajzolható gráf, ezért elég ezt csak G^* lapjaira igazolni. Ugyanis ha ezt minden lapra tudjuk, akkor egy kört felbonthatunk lapok diszjunkt uniójára (pontosabban a lapok belsejei diszjunktak), és a felbontás olyan élei, melyek nincsenek az eredeti körben, az ellentétes irányítás miatt kiesnek. A feladatot most G-re megfogalmazva azt kapjuk, hogy elég minden $i \in V$ csúcs N(i) szomszédaira belátni, hogy:

$$\sum_{j \in N(i)} M_{ij}(\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j) = \mathbf{o} \tag{16}$$

Ez viszont könnyen látható a (14) egyenlőségből, hiszen azt balról vektoriálisan szorozva $\mathbf{u}_i$-vel pontosan ezt kapjuk, mivel $\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_i = \mathbf{o}$ és $M_{ij} = 0$, ha $ij \notin E$. □

A $\mathbf{w}_f$ vektorok rendelkeznek azzal a fontos tulajdonsággal, hogy ha f és g két szomszédos csúcs G^*-ban úgy, hogy a nekik megfelelő G-beli lapok tartalmazzák az $i \in V$ csúcsot, akkor: ${\mathbf{u}_i}^T\mathbf{w}_f = {\mathbf{u}_i}^T\mathbf{w}_g$,
hiszen ${\mathbf{u}_i}^T\mathbf{w}_f - {\mathbf{u}_i}^T\mathbf{w}_g = {\mathbf{u}_i}^T(\mathbf{w}_f - \mathbf{w}_g) = {\mathbf{u}_i}^T M_{ij}(\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j) = 0$
Más szóval a ${\mathbf{u}_i}^T\mathbf{w}_f$ skaláris szorzat ugyaznazt az α_i számot adja minden olyan f lapra, mely tartalmazza az i csúcsot. Azaz ezek a $\mathbf{w}_f$ vektorok mind az ${\mathbf{u}_i}^T\mathbf{x} = \alpha_i$ síkban fekszenek.
Jelölje P^* a $\mathbf{w}_f$ vektorok konvex burkát.

4.8. Lemma. *Legyen $f \in V^*$, és legyen $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ egy nemnulla vektor. A $\mathbf{w}_f$ vektor akkor és csak akkor maximalizálja az $\boldsymbol{u}^T\mathbf{x}$ skaláris szorzatot P^* felett, ha $\boldsymbol{u} \in C_f$.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\mathbf{w}_f$ maximalizálja $\mathbf{u}^T\mathbf{x}$-et P^* felett. Legyenek $i_1, i_2, ..., i_s$ az f-nek megfelelő G-beli lap csúcsai. A **4.5** tétel szerint az $\mathbf{u}_{i_t}$ vektorok valódi feszítői lesznek a C_f kúpnak.
Jelölje fg_t az $i_t i_{t+1}$ élnek megfelelő G^*-beli élet. Ekkor mivel $\mathbf{w}_f$ maximalizálta $\mathbf{u}^T\mathbf{x}$-et, ezért $\mathbf{u}^T(\mathbf{w}_f - \mathbf{w}_{g_t}) \geq 0$ $(t = 1, ..., s)$,
így (15) alapján:

$$\mathbf{u}^T M_{i_t i_{t+1}}(\mathbf{u}_{i_{t+1}} \times \mathbf{u}_{i_t}) \geq 0, \tag{17}$$

vagy mivel $M_{i_t i_{t+1}} \leq 0$, ezért

$$\mathbf{u}^T(\mathbf{u}_{i_t} \times \mathbf{u}_{i_{t+1}}) \geq 0. \tag{18}$$

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy $\mathbf{u}$ az $\mathbf{u}_{i_t}, \mathbf{u}_{i_{t+1}}$ vektorok által feszített sík ugyanazon oldalán van, mint C_f. Mivel ez teljesül a $t = 1, ..., s$ indexek mindegyikére, ezért $\mathbf{u} \in C_f$.

A másik irány bizonyításához legyen $\mathbf{u} \in C_f$. Ekkor $\mathbf{u}$-hoz tetszőlegesen közel választható olyan $\mathbf{u}^{'}$, amely a C_f kúp belsejében van. Legyen $\mathbf{w}_g$ egy olyan vektor, mely az $(\mathbf{u}^{'})^T\mathbf{x}$ szorzatot maximalizálja P^* felett. A lemma előző része miatt ekkor $\mathbf{u}^{'} \in C_g$. Mivel a C_h $(h \in V^*)$ kúpok belseje diszjunkt, ezért $f = g$. Azt kaptuk tehát, hogy pontosan $\mathbf{w}_f$ maximalziálja az $(\mathbf{u}^{'})^T\mathbf{x}$ szorzatot, így - mivel $\mathbf{u}^{'}$ tetszőlegesen közel volt $\mathbf{u}$-hoz - maximalizálja $\mathbf{u}^T\mathbf{x}$-et is. □

Ebből a lemmából rögtön következik, hogy az összes $\mathbf{w}_f$ vektor valóban csúcsa lesz P^*-nak, ugyanis a **4.5** tétel alapján a C_f kúp belseje nemüres. Így $\mathbf{w}_f$ nem lehet sem P^* belsejében, sem egy lapjának belső pontjában, sem egy élének belső pontjában, hiszen ezekben az esetekben C_f affin burka rendre 0,1 és 2 dimenziós lenne.

4.9. Lemma. *A $\mathbf{w}_f$ és a $\mathbf{w}_g$ csúcsok akkor és csak akkor alkotnak élet P^*-ban, ha f és g élet alkotnak G^*-ban.*

Bizonyítás. Legyen először $fg \in E^*$ és $ij \in E$ a neki megfelelő G-beli él. Legyen továbbá $\mathbf{u} \in relint(C_i \bigcap C_j)$. Ekkor az előző lemma alapján $\mathbf{u}^T\mathbf{x}$-et $\mathbf{w}_f$ és $\mathbf{w}_g$ is maximalizálja. P^*-nak egy másik, $\mathbf{w}_h$ csúcsa már nem maximalizálhatja, ugyanis ebben az esetben - szintén az előző lemma alapján - $\mathbf{u} \in C_h$, ami a kúpok belsejének diszjunktsága miatt nem lehetséges. Tehát $\mathbf{w}_f$ és $\mathbf{w}_g$ valóban egy élet feszítenek.

Másrészt ha $\mathbf{w}_f$ és $\mathbf{w}_g$ egy élet feszítenek, akkor létezik olyan $\mathbf{u}$ vektor, amely benne van C_f-ben, C_h-ban is, de nincs benne más kúpban. Ez viszont azt jelenti, hogy C_f és C_h egy lapban metszik egymást, tehát $fg \in E^*$. $\square$

4.10. Tétel. *Egy tetszőleges 3-összefüggő síkgráf Colin de Verdière mátrixa megfelelően súlyozható.*

Bizonyítás. Tekintsük az előzőekben megkonstruált $\mathbf{w}_f$ vektorokat. A (15) feltétel még nem definiálja őket egyértelműen, mindegyiket eltolhatjuk ugyanazon konstans vektorral, így elérhető, hogy az origó P^* belsejében legyen. Ekkor P^* duálisa, P, jóldefiniált és az előző három lemma alapján élhálózata izomorf az adott G gráffal. Ezenkívül P csúcsai (mint vektorok) merőlegesek P^* lapjaira, tehát az **4.7** lemma utáni gondolatmenet alapján $\mathbf{u}_i$-k pozitív skalárszorosai. Találtunk tehát egy olyan poliédert, amely a megfelelő súlyozás definíciójában szükséges. $\square$

Az előzőekben egy adott Colin de Verdière mátrix segítségével konstruáltunk egy olyan poliédert, melynek élhálózata izomorf volt az erdeti G gráffal. A továbbiakban az eljárást megfordítva egy adott poliéder élgráfjához, tehát egy adott 3-összefüggő síkgráfhoz szeretnénk egy Colin de Verdière mátrixot készíteni.

Legyen tehát P egy tetszőleges konvex poliéder a térben, $G = (V, E)$ a poliéder élgráfja, és legyen P^* a poliéder duálisa, melynek élgráfja $G^* = (V^*, E^*)$. Ha $\mathbf{u}_i$ és $\mathbf{u}_j$ P két szomszédos csúcsa, és a nekik megfelelő csúcsok P^*-ban $\mathbf{w}_f$ és $\mathbf{w}_g$, akkor a duális definíciója alapján teljesül:

$$\mathbf{u}_i{}^T\mathbf{w}_f = \mathbf{u}_i{}^T\mathbf{w}_g = \mathbf{u}_j{}^T\mathbf{w}_f = \mathbf{u}_j{}^T\mathbf{w}_g. \tag{19}$$

Ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{w}_f - \mathbf{w}_g$ vektor merőleges mind $\mathbf{u}_i$-ra, mind $\mathbf{u}_j$-re, tehát párhuzamos $\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j$-vel, azaz írható:

$$\mathbf{w}_f - \mathbf{w}_g = M_{ij}(\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j), \tag{20}$$

ahol $\mathbf{w}_f$ és $\mathbf{w}_g$ sorrendje olyan, hogy $M_{ij} < 0$ legyen.
Legyen $i \in V$ és tekintsük az

$$\mathbf{u}_i{}' = \textstyle\sum_{j \in N(i)} M_{ij}\mathbf{u}_j$$

vektort. Ekkor

$$\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_i' = \sum_{j \in N(i)} M_{ij}(\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j) = \sum (\mathbf{w}_f - \mathbf{w}_g), \tag{21}$$

ahol az utolsó összegzés az i-nek megfelelő P^*-beli lap összes élére történik, az óramutató járásával ellentétes irányban, így az összeg nulla. Tehát $\mathbf{u}_i$ és $\mathbf{u}_i'$ párhuzamosak, így írható:

$$\mathbf{u}_i' = -M_{ii}\mathbf{u}_i \tag{22}$$

Végül legyen $M_{ij} = 0$, ha $ij \notin E$. Ezzel definiáltuk egy $M = M(P)$ $n \times n$-es mátrix minden elemét.

4.11. Tétel. *Az M(P) mátrix egy megfelelően súlyozott Colin de Verdière mátrixa a G gráfnak.*

Bizonyítás. A konstrukcióból nyilvánvaló, hogy az (M1) tulajdonság teljesül. (22) a következő alakba írható:

$$\sum_j M_{ij}\mathbf{u}_j = \mathbf{o}, \tag{23}$$

azaz az $\mathbf{u}_i$ vektorok minden koordinátája a nulltér egy vektorát adja, tehát a nullter legalább 3 dimenziós.
Egy alkalmasan nagy $C > 0$ konstanssal a $CI - M$ mátrix irreducibilis és nemnegatív, a Perron-Frobenius tétel alapján tehát a legnagyobb abszolútértékű sajátértékének multiplicitása 1. Mivel a fenti mátrixnak $C - \lambda$ alakú sajátértékei vannak (ahol λ az M-nek sajátértéke), ezért ha C elég nagy, akkor az előbb említett sajátérték pozitív. Tehát ebből az is következik, hogy M-nek a legkisebb sajátértéke is 1 multiplicitású. Ez a legkisebb sajátérték viszont nem lehet a nulla, hiszen - mint láttuk - a nulltér legalább 3 dimenziós. M-nek tehát biztosan létezik legalább 1 negatív sajátértéke.
Tegyük fel, hogy a G gráf egy $\overline{M}$ Colin de Verdière mátrixából kiindulva elkészítjük hozzá a **4.10** tételben leírt módon a $\overline{P}$ poliédert, majd ehhez az $M(\overline{P})$ mátrixot. Ekkor nyilvánvaló a konstrukció alapján, hogy (pozitív skalárral való szorzástól eltekintve) visszakapjuk az eredeti $\overline{M}$ Colin de Verdière mátrixot. Tehát $M(\overline{P})$-ról biztosan tudjuk, hogy pontosan egy negatív sajátértéke van.

Steinitz bebizonyította, hogy bármely két 3-dimenziós poliéder, melyeknek váza izomorf, folytonosan áttranszformálhatók egymásba olyan poliédereken keresztül, melyeknek izomorf a vázuk. (lásd **[12]**) Mivel minden csúcs folytonosan mozog, ezért a poliéderek súlypontja is. A transzformáció minden 'közbeeső' P poliéderét eltolhatjuk tehát úgy, hogy súlypontjuk végig az origóban legyen. Ekkor a poliéderek duálisa egyértelmű, és szintén folytonosan mozog, ezért az M(P) mátrix elemei is, és így sajátértékei is folytonosan változnak.
Tegyük fel indirekt, hogy $M(P_0)$-nak egynél több negatív sajátértéke van. Láttuk, hogy biztosan van olyan P_1 poliéder is, melyre $M(P_1)$-nek pontosan egy negatív, és (multiplicitással) 3 nulla sajátértéke van, és a két poliéder élgráfja ugyanaz a G gráf. Ekkor a fenti gondolatmenetet alkalmazva P_0-at P_1-be transzformálva lesz egy olyan utolsó P_t poliéder, melynek legalább 5 nempozitív sajátértéke van. Ez pedig a folytonos transzformáció miatt csak úgy lenne lehetséges, hogy egy negatív és 4 darab nulla sajátértékkel rendelkezne, hiszen a transzformáció során M(P) nulltere végig legalább 3 dimenziós volt. Ez viszont ellentmond a **4.4** állításnak.
Végül az (M3) tulajdonságot bizonyítjuk be. Legyen tehát $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy szimmetrikus mátrix, mellyel $MX = 0$. X minden oszlopa M nullterében van tehát, amiről már tudjuk, hogy 3 dimenziós, vagyis pontosan az $\mathbf{u}_i$ vektorok koordinátáiból képzett vektorok feszítik. Ez pedig azt jelenti, hogy léteznek $\mathbf{h}_i \in \mathbb{R}^3$ $(i \in V)$ vektorok, hogy $X_{ij} = \mathbf{u}_i{}^T\mathbf{h}_j$. X_{ij} viszont nulla, ha $i = j$, vagy ha $j \in N(i)$, így a $\mathbf{h}_i$ vektorok merőlegesek $\mathbf{u}_i$-ra és összes szomszédjára. Ezek a vektrok pedig kifeszítik az egész 3 dimenziós teret, tehát $X = 0$.
A konstrukció alapján az is világos, hogy M megfelelően súlyozott. $\square$

A következő érdekes tételből az derül ki, hogy (M1) és (14) teljesülése maga után vonja (M2) érvényességét. Mint láttuk ebben az esetben (M3) is teljesül, tehát végeredményben egy megfelelően súlyozott Colin de Verdière mátrixot kapunk.

4.12. Tétel. *Legyen P egy n csúcsú konvex poliéder a térben, mely tartalmazza az origót. Legyen továbbá $G = (V, E)$ az élgráfja és $\mathbf{u}_i$ $(i \in V)$ a csúcsai. Ha M egy olyan szimmetrikus $n \times n$-es mátrix, mely teljesíti (M1)-et és $\sum_j M_{ij}\mathbf{u}_j = \mathbf{o}$, akkor M-nek pontosan egy negatív sajátértéke van és nulltere pontosan 3 dimenziós.*

Bizonyítás. Hasonlóan az előző tétel bizonyításához (M1) és (14) alapján M-nek legalább 1 negatív sajátértéke van és nulltere legalább 3 dimenziós. Ezenkívül a **4.4** állítás értelmében ha a negatív sajátértékek száma pontosan 1, akkor nulltere is pontosan 3 dimenziós. Tegyük fel indirekt, hogy az

M_1 mátrixnak 1-nél több negatív sajátértéke van. Az előző tétel segítségével konstruálhatunk P-hez olyan M_0 mátrixot, mely (M2)-t is kielégíti. Ekkor az összes $M_t = tM_0 + (1-t)M_1$ $(0 \leq t \leq 1)$ mátrix eleget tesz (M1)-nek valamit (14)-nek. Az előbbi bizonyításhoz hasonlóan t_0 legyen a legkisebb érték, melyre M_{t_0}-nak legalább 5 nempozitív sajátértéke van. Ekkor M_{t_0}-nak pontosan 1 negatív és (multiplicitással számolva) 4 nulla sajátértéke van, ami megint ellentmond a **4.4** állításnak. □

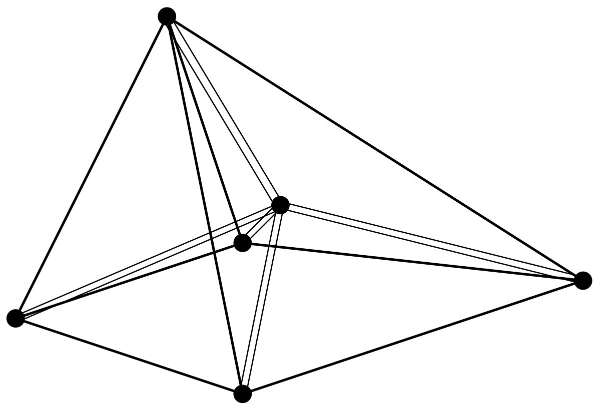
4.3. Centrálszimmetrikus konvex poliéderek.

Ebben a részben visszatérünk eredeti célunkhoz, szerkezetek vizsgálatához. Jelölje most Ω helyett $S = S_{ij}$ a súlymátrixokat. A nulltér-reprezentációk esetén látott Colin de Verdière mátrixok sokban hasonlítanak szerkezetek súlymátrixához. A szerkezetekre vonatkozó (2) egyensúlyi feltétel ugyanis a következő alakba írható:

$$\sum_{j} S_{ij}\mathbf{p}_j = \sum_{j \neq i} S_{ij}\mathbf{p}_j + S_{ii}\mathbf{p}_i = \sum_{j \in N(i)} S_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = 0. \tag{24}$$

Így pontosan a (14) egyenlőséget kaptuk, ami persze nem meglepő, hiszen mindkét egyenlet azt írja le, hogy a $\mathbf{p}_i$ vektorok koordinátái benne vannak az adott mátrix nullterében.

Tekintsük a következő speciális szerkezetet. Legyen P egy konvex poliéder, mely tartalmazza az origót. $G(\mathbf{p})$ csúcsai legyenek P csúcsai, valamint az origó, élei pedig P élei, valamint a csúcsokat az origóval összekötő szakaszok. Az utóbbiak legyenek rudak, P élei pedig kötelek. (**13.**ábra)



13.ábra

Az ilyen szerkezetekre teljesül a következő:

4.13. Tétel. *Ha a fenti szerkezetnek létezik valódi súlyozása, amely a köteleken nemnulla, akkor súlymátrixának pontosan egy negatív sajátértéke van és nulltere 4 dimenziós.*

Bizonyítás. Tekintsük S-nek azt az M részmátrixát, melyet úgy kapunk, hogy elhagyjuk az origónak megfelelő oszlopot és sort. Az M mátrix nyilván teljesíti az (M1) feltételt, hiszen a kötelek pozitív súlyt kaptak, így a mátrixban a megfelelő helyen negatív értékek állnak. Ezenkívül:

$$\sum_j M_{ij}\mathbf{p}_j = \sum_{j\in N(i)} S_{ij}\mathbf{p}_j + S_{ii}\mathbf{p}_i = \sum_{j\in N'(i)} S_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = 0, \qquad (25)$$

ahol N(i) az i pont szomszédait jelöli P élgráfjában, N'(i) pedig az i pont $G(\mathbf{p})$-beli szomszédait jelöli, azaz ha 0 az indexe az origónak, akkor $N'(i) = N(i)\bigcup 0$. M tehát teljesíti (14)-et is, így a **4.12** tétel alapján pontosan 1 negatív és 3 nulla sajátértéke van. Biztosan S nullterében lesznek azok a vektorok, melyeket M nullához tartozó sajátvektoraiból kapunk úgy, hogy első koordinátának nullát írunk. Ezenkívül a csupa 1 vektor is a nulltérben van, tehát M nulltere legalább 4 dimenziós. S-nek lesz negatív sajátértéke is, ugyanis ha $\mathbf{x}$ M-nek a negatív sajátértékhez tartozó sajátvektora volt, akkor az $\mathbf{y}^T = [0, \mathbf{x}^T]$ vektorral $\mathbf{y}^T S\mathbf{y} = \mathbf{x}^T M\mathbf{x} < 0$, tehát S indefinit. Nem lehet azonban S-nek 5-nél több nempozitív sajátértéke, ugyanis ekkor M-nek is legalább 5 nempozitív sajátértéke lenne, ami ellentmondás. S-nek tehát pontosan 4 nulla és 1 negatív sajátértéke van. □

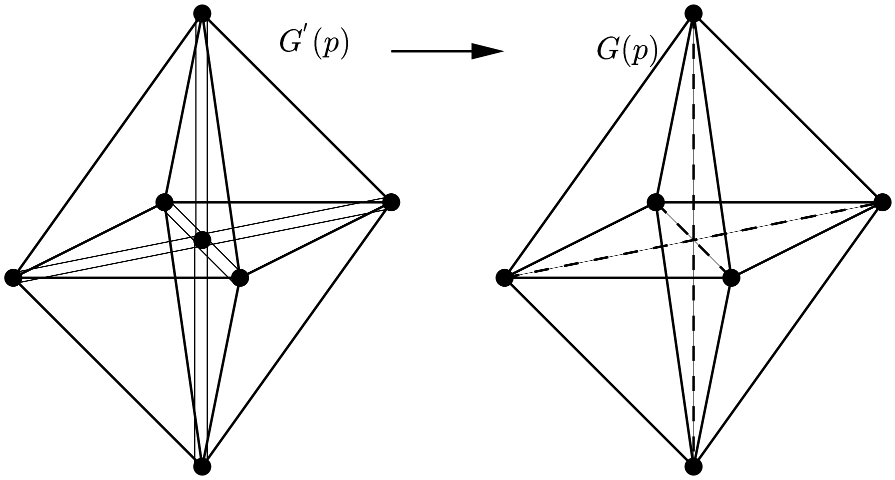
4.14. Állítás. *Az előző, origóból rudakkal feszített szerkezeteknek mindig létezik valódi súlyozása, mely nemnulla a köteleken.*

Bizonyítás. Készítsük el a P poliéderhez az M(P) mátrixot, melyről a **4.11** tételben beláttuk, hogy teljesíti (14)-et, így megfordíthatjuk az előző tétel gondolatmenetét. M-et egy $(n+1)\times(n+1)$-es szimmetrikus mátrixá egészítjük ki, úgy, hogy a sor-, illetve oszlopösszegek nullák legyenek. Az így kapott S mátrixra (25) is megfordítható, ami éppen az egyensúlyi állapotot biztosítja minden csúcsra. □

Elérkeztünk célunkhoz, azaz hogy a **2.** és a **4.** fejezet eredményeit összekapcsolva bizonyos speciális poliéderek stabilitását igazoljuk.

4.15. Tétel. *Legyenek a $G(\mathbf{p})$ szerkezet pontjai egy centrálszimmetrikus konvex P poliédernek a csúcsai. A határán legyenek kötelek, a szemközti csúcsokat pedig rugó kösse össze. Ennek a szerkezetnek létezik olyan nemnulla valódi súlyozása, hogy az ehhez tartozó súlymátrix pozitív szemidefinit és nullterének dimenziója 4.*

Bizonyítás. Tekintsünk először a poliéderünkön azt a $G^{'}(\mathbf{p})$ szerkezetet, melynek a határán kötelek vannak, és az origóból rudakkal feszítjük (**14.**ábra).



14.ábra

Az előző állítás szerint ennek a szerkezetnek létezik a köteleken nemnulla, valódi súlyozása. Tekintsük most az új szerkezet $S^{'}$ súlymátrixát. Amint azt a **4.13** tételben láttuk, elkészítjük az $M^{'}$ részmátrixot, melyről biztosan tudjuk, hogy pontosan 1 negatív és 3 nulla sajátértéke van.
Használjuk ki a mátrixok felírásához a P poliéder szimmetriáját.
Először is számozzuk úgy P 2n darab csúcsát, hogy az i-edik csúcs tükörképét $n+i$ jelölje. A szimmetria miatt ha (i,j) $(1 \leq i, j \leq n)$, akkor (n+i,n+j) is él, és M(P) definíciója miatt ugyanakkora súlyt kapnak. Ha (i,n+j) él, akkor (n+i,j) is az, szintén ugyanakkora súllyal. Mivel S_1 'nulladik' sorát, illetve oszlopát úgy konstruáltuk, hogy a sor-, illetve oszlopösszegek nullát adjanak, ezért ha ennek az oszlopnak az elemeit $s_0, s_1, ..., s_{2n}$ jelöli, akkor igaz lesz $s_i = s_{n+i}$ $(i \neq 0)$. $S^{'}$ tehát a következő alakú:

$$P' = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & & & & & & \\ \vdots & & M_1 & & & M_2 & \\ s_n & & & & & & \\ s_1 & & & & & & \\ \vdots & & M_2 & & & M_1 & \\ s_n & & & & & & \end{bmatrix}$$

ahol M_1 és M_2 maguk is szimmetrikus mátrixok.
M'-ből viszont már könnyen elkészíthetjük $G(\mathbf{p})$ valódi nemnulla súlyozását. Mivel a poliéderünk konvex volt, ezért a rudakra mindenhol negatív érték került, így $s_i > 0$ $i \neq 0$. Az origót rúd kötötte össze az i-edik és az (n+i)-edik csúccsal is, s ezen két (egy egyenesbe eső) rudat helyettesítsük egy rugóval, így erre a rugóra $s_i/2$-t írva egy valódi nemnulla súlyozását kapjuk $G(\mathbf{p})$-nek. Ennek a súlyozásnak az M súlymátrixa annyiban tér el M'-től, hogy az i. sor (n+i). eleme $s_i/2$-vel nő, és hogy a sorösszegek nullák legyenek az i. sor i. eleme is nő $s_i/2$-vel. Tehát M felírható

$$M' + \begin{bmatrix} \frac{s_1}{2} & & & & \frac{s_1}{2} & & & \\ & \frac{s_2}{2} & & & & \frac{s_2}{2} & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & \frac{s_n}{2} & & & & \frac{s_n}{2} \\ \frac{s_1}{2} & & & & \frac{s_1}{2} & & & \\ & \frac{s_2}{2} & & & & \frac{s_2}{2} & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & \frac{s_n}{2} & & & & \frac{s_n}{2} \end{bmatrix} = M' + M''$$

alakban, ahol a felírt mátrixban a nem jelölt helyeken nullák állnak.
M'' pozitív szemidefinit, ugyanis:

$$\mathbf{x}^T M'' \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{2}(x_i + x_{n+i})^2. \qquad (26)$$

Ezenkívül M' egy (2n-1)-dimenziós H hipersíkon pozitív szemidefinit, így itt nyilvánvalóan M is az.

Másrészt az $\mathbf{e} = (1, 1, ..., 1)^T \in \mathbb{R}^n$ vektor biztosan nincs H-ban, hiszen

$$M^{'}\mathbf{e} = (-s_1, -s_2, ..., -s_n, -s_1, ..., -s_n)^T, \tag{27}$$

így $\mathbf{e}M^{'}\mathbf{e} = 2s_0 < 0$.
Ekkor viszont $\mathbb{R}^n$ minden $\mathbf{x}$ vektora előáll $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{h} + \beta\mathbf{e}$ alaban, ahol $\mathbf{h} \in H$.
Így pedig $M\mathbf{x} = \alpha M\mathbf{h} + \beta M\mathbf{e} = \alpha M\mathbf{h}$, vagyis $\mathbf{x}^T M\mathbf{x} = \alpha^2\mathbf{h}^T M\mathbf{h} \geq 0$.
Beláttuk tehát, hogy M pozitív szemidefinit.
Hátra van még annak belátása, hogy M-nek pontosan 4 nulla sajátértéke van. A P csúcsainak első, második, illetve harmadik koordinátáiból képzett $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorok benne vannak (14) miatt $M^{'}$ és (26) miatt $M^{''}$ nullterében is, így természetesen M nullterének is elemei. M negyedik nullához tartozó sajátvektora pedig $\mathbf{e}$. Ugyanakkor $M^{'}$ szimmetrikus mátrix, ezért sajátvektorai merőlegesek egymásra, tehát van egy olyan (2n-4)-dimenziós L altér, ahol $M^{'}$, így nyilván M is pozitív definit. Minden egyéb $\mathbf{x}$ vektor felírható viszont a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{e}$ vektorok és egy L-beli vektor lineáris kombinációjaként.
Így pedig $M\mathbf{x} = \alpha_l M\mathbf{l}$, ami nem lehet nulla, hiszen M itt poztitív definit.
M-nek tehát pontosan 4 nulla sajátértéke van. □

Hasonlóan a konvex sokszögek esetéhez itt is be kell még látni, hogy a pozitív szemidefinitség és a nulltér megfelelő dimenziója elég a globális stabilitáshoz.

4.16. Állítás. *A fenti $G(\boldsymbol{p})$ szerkezet valóban globálisan stabil.*

Bizonyítás. A **2.11** tétel szerint létezik egy olyan T affin lineáris transzformáció, mely egy $G(\mathbf{p})$-hez képest megengedett $G(\mathbf{q})$ szerkezet esetén a $\mathbf{p}$ pontot a $\mathbf{q}$ pontba viszi, úgy, hogy a szerkezet éleinek hossza nem változik. Ugyanúgy, mint a **3.6** állításban láttuk, elég a $T^T T - I$ szimmetrikus 3×3-as mátrix sajátértékeinek előjelét vizsgálni:
-Most sem lehet a mátrix definit.
-Ha szemidefinit, akkor vagy egy egyenesben, vagy egy síkban hagyja fixen a vektorok hosszát. Mivel az egy csúcsból kiinduló élek nem eshetnek sem egy egyenesbe, sem egy síkba, ezért ezt az esetet is kizárhatjuk.
-Ha két pozitív és egy negatív, vagy két negatív és egy pozitív sajátértéke lenne a mátrixnak, akkor mivel a sajátvektorok merőlegesek, könnyen látható, hogy a megfelelő kvadratikus alak egy kúp felszínén, valamint tükörképének felszínén lesz nulla. Viszont ha egy csúcsból kiinduló élek egy ilyen kúp felszínén vannak, akkor ez a kúp teljes egészében tartalmazza az élek által kifeszített kúpot, így ez utóbbiban haladó rugó már nem eshet az előbbi kúp felszínére.
-Utolsó esetként a mátrix mindhárom sajátértéke nulla, ekkor T minden vektor hosszát fixen hagyja, így egybevágósági transzformáció, mint ahogy igazolni akartuk. □

5. Irodalomjegyzék

[1] L. Asimow, B. Roth: *The rigidity of graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. **245** (1978), 279-289.

[2] Y. Colin de Verdière: *On a new graph invariant and criterion for planarity*, Graph Structure Theory (N. Robertson, P. Seymour, eds.) Contemporary Math. Amer. Math. Soc. Rhode Island (1993), 137-147.

[3] R. Connelly: *The rigidity of certain cabled frameworks and the second order rigidity of arbitrarily triangulated convex surfaces*, Advances in Math. **37** (1980), 272-299.

[4] R. Connelly: *Rigidity and Energy*, Invent. Math. **66** New York (1982), 11-33.

[5] H. van der Holst: *A short proof of the planarity characterization of Colin de Verdiẽre*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, **65** (1995), 269-272.

[6] H. van der Holst, L. Lovász, A. Schrijver: *On the invariance of Colin de Verdiẽre's graph parameter under clique sums*, Linear Algebra and its Applications, **226** (1995), 509-517.

[7] A. Kotlov, L. Lovász, A. Vempala: *The Colin de Verdiẽre number and sphere representations of a graph*, Combinatorica **17** (1997) 483-521.

[8] L. Lovász: *Steinitz representations of polyedra and the Colin de Verdiẽre number*

[9] L. Lovász, A. Schrijver: *A Borsuk theorem for antipodal links and a spectral characterization of linklessly embeddable graphs*, Proceedings of the Amer. Math. Soc. **126** (1998) 1275-1285.

[10] L. Lovász, A. Schirjver: *On the null space of the Colin de Verdiẽre matrix*, Annales de l'Institute Fourier **49**, 1017-1026.

[11] B. Roth, W. Whiteley: *Tensegrity frameworks*, Trans. Amer. Math. Soc. (1981), 419-446.

[12] J. Richter-Gebert: *Realization spaces of polytopes*, Lecture Notes in Mathematics **1643**, (1996) Springer-Verlag, Berlin

[13] W. Whiteley: *Conjectures on rigid frameworks*, letter for A.M.S. special session on rigidity in Washington. D.C. (1979)