

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
MATEMATIKAI INTÉZET



Végh László

Connectivity augmentation algorithms

(Összefüggőség-növelési algoritmusok)

című doktori értekezésének tézisei

Matematika Doktori Iskola
Vezető: Laczkovich Miklós

Alkalmazott Matematika Doktori Program
Vezető: Michaletzky György

Témavezető: Frank András

ELTE Operációkutatási Tanszék
MTA-ELTE Egerváry Jenő Kombinatorikus Optimalizálási Kutatócsoport

2010. január

Bevezetés

Az értekezés fő témája az összefüggőség-növelés: egy adott gráfot szeretnénk minimális számú él hozzávételével k -szorosán összefüggővé tenni. Ez négy alapkérdést foglal magában, mivel él- és pontösszefüggőség növelése is felvethető mind irányított, mind irányítatlan gráfokban. A minimális költségű változat mindegyik esetben NP-teljes; ismert viszont három esetben polinomiális algoritmus a minimális élszámú megoldás megkeresésére. Elsőként az irányítatlan élösszefüggőség esetét oldotta meg 1987-ben Watanabe és Nakamura [19]. Ezt követte az irányított élösszefüggőség megoldása 1992-ben (Frank [8]), majd az irányított pontösszefüggőségé 1995-ben (Frank és Jordán [10]).

Az értekezésben a négy alaprobléma közül hárommal foglalkozunk: az irányított és irányítatlan pontösszefüggőség, valamint az irányítatlan élösszefüggőség növelésével. Irányított élösszefüggőség-növelésről ugyan nem esik szó, viszont az utolsó részben ezzel az összefüggőség-fogalommal kapcsolatban adunk egy konstruktív karakterizációs eredményt. Az értekezés fő eredményei a következők.

- *Megadjuk az első kombinatorikus polinomiális algoritmust irányított pontösszefüggőség-növelésre.* Erre a problémára Frank és Jordán 1995-ben adtak min-max formulát. Nyitott maradt azonban a kérdés: hogyan található meg egy optimális megoldás kombinatorikus algoritmus segítségével. Az értekezésben megadunk két, teljesen különböző kombinatorikus algoritmust. A második rész az összefüggőség eggyel való növelésének speciális esetét oldja meg algoritmikusan (Frank Andrással közös eredmény), a negyedik rész pedig az általános problémára ad algoritmust (ifj. Benczúr Andrással közös eredmény). Valójában még általánosabb problémát oldunk meg: új, algoritmikus bizonyítást adunk Frank és Jordán általános halmazpárfedési tételére is.
- *Megadunk egy min-max formulát és egy kombinatorikus polinomiális algoritmust az irányítatlan pontösszefüggőség eggyel való növelésére.* Tetszőleges gráfok irányítatlan pontösszefüggőség-növelésének bonyolultsága nyitott kérdés; az eggyel való növelés önmagában is sokat vizsgált terület. A harmadik részben bizonyított formula Frank és Jordán 1994-ből származó sejtése.
- *Megadjuk a (k, ℓ) -élösszefüggő gráfok egy konstruktív karakterizációját.* A hatodik részben bemutatott, Kovács Erika Renátával közös eredmény Frank 2003-as sejtését bizonyítja be. A tétel több korábbi karakterizáció közös általánosítását adja, és természetesen illeszkedik az eddigi leemelési és irányítási tételek rendszerébe.
- *Részleges eredményeket adunk a partíciókorlátos irányítatlan lokális élösszefüggőség-növelési problémára.* Az ötödik részben irányítatlan élösszefüggőség-növeléssel kapcsolatban tárgyalunk néhány klasszikus eredményt egységes keretben, az élátbillentési technikát használva. A partíciókorlátos problémával kapcsolatban megfogalmazzuk és részben bebizonyítunk egy sejtést.

Irányított pontösszefüggőség-növelés

Az irányított pontösszefüggőség-növelés megoldása valójában Frank és Jordán [10] egy általánosabb tételének speciális esete. Ez az eredmény halmazpárokon értelmezett pozitívan keresztező szupermoduláris függvények fedésére vonatkozik, megfogalmazásához szükségünk lesz a következő fogalmakra.

Egy adott V alaphalmaz diszjunkt nemüres K^- és K^+ részhalmazaiból álló $K = (K^-, K^+)$ párt **halmazpárnak** hívunk. \mathcal{S} jelöli az összes halmazpár halmazát. Egy $xy \in V^2$ irányított él¹ **fedí** a K halmazpárt, ha $x \in K^-$ és $y \in K^+$. **Függetlennek** nevezzük a $K = (K^-, K^+)$ és $L = (L^-, L^+)$ halmazpárokat, ha $K^- \cap L^- = \emptyset$ vagy $K^+ \cap L^+ = \emptyset$. Ez éppen akkor teljesül, hogyha nincs mindkettejüket fedő V^2 -beli él. A nem független párokat **függőnek** hívjuk. Halmazpárok egy \mathcal{F} halmazát **függetlennek** mondjuk, ha páronként független elemekből áll.

\mathcal{S} -en megadható egy természetes részbenrendezés: legyen $K \preceq L$ akkor, ha $K^- \subseteq L^-$ és $K^+ \supseteq L^+$. A K és L halmazpárokat akkor nevezzük **összehasonlíthatónak**, ha $K \preceq L$ vagy $L \preceq K$. Két függő, de nem összehasonlítható halmazpárt **keresztezőnek** mondunk. Egy halmazpárokból álló \mathcal{F} halmaz **keresztezésmentes**, ha nem tartalmaz keresztező halmazpárokat, azaz bármely két eleme vagy független, vagy összehasonlítható.

K és L függő halmazpárookra definiálhatjuk a $K \wedge L = (K^- \cap L^-, K^+ \cup L^+)$ és $K \vee L = (K^- \cup L^-, K^+ \cap L^+)$ halmazpárokat. A \mathcal{S} -en értelmezett, nemnegatív egészértékű p függvényt akkor nevezzük **pozitívan keresztező szupermodulárisnak**, ha

$$p(K) + p(L) \leq p(K \wedge L) + p(K \vee L)$$

fennáll, amennyiben $K, L \in \mathcal{S}$, K és L függők, továbbá $p(K), p(L) > 0$.

Jelölje $\delta_F(K)$ a K -t fedő F -beli élek számát egy F él-multihalmaz és egy $K \in \mathcal{S}$ halmazpár esetén. F **fedí** a p függvényt, ha $\delta_F(K) \geq p(K)$ teljesül minden $K \in \mathcal{S}$ párra. Jelölje τ_p a p -t fedő élek minimális számát, és legyen $\nu_p = \max\{\sum_{K \in \mathcal{F}} p(K) : \mathcal{F} \text{ független}\}$. Világos, hogy $\nu_p \leq \tau_p$, hiszen egy él egy független rendszernek legfeljebb egy tagját fedheti. Az alábbi tétel szerint itt valójában egyenlőség áll fenn.

1. Tétel (Frank és Jordán, 1995 [10]). *Ha p pozitívan keresztező szupermoduláris függvény egy V alaphalmaz halmazpárjain, akkor $\tau_p = \nu_p$.*

A tétel alkalmazásai között szerepel mind az él-, mind a pontösszefüggőség-növelés irányított gráfokban, az ST -élösszefüggőség-növelés, Győri útrendszer-generálási tétele, valamint maximális K_{tt} -mentes t -párosítás keresése páros gráfokban.

Tekintsük most az irányított pontösszefüggőség-növelés problémáját. Adott $D = (V, A)$ irányított gráf és k összefüggőségi igény esetén nevezzük a $K \in \mathcal{S}$ halmazpárt **egyirányú párnak**, ha $\delta_D(K) = 0$, azaz D egyetlen éle sem fedí K -t. $\mathcal{O} = \mathcal{O}_D$ -val jelöljük az egyirányú párok halmazát. Legyen $s(K) := |V - (K^- \cup K^+)|$.

¹ V^2 -tel a V halmazon levő összes irányított él halmazát jelöljük, $\binom{V}{2}$ pedig az összes irányítatlan él halmaza.

2. Tétel. Egy $D = (V, A)$ irányított gráfban azon élek minimális száma, melyeket D -hez adva k -pontösszefüggő gráfot kapunk, megegyezik a $\sum_{i=1}^{\ell} (k - s(K_i))$ összeg maximumával, ahol K_1, \dots, K_{ℓ} páronként független egyirányú párok.

Tegyük most fel, hogy D már eleve $(k - 1)$ -pontösszefüggő; ezt az esetet az eggyel való növelés problémájának nevezzük. Ekkor minden egyirányú párra $s(K) \geq k - 1$ teljesül. **Szorosnak** hívjuk azon egyirányú párokat, melyekre $s(K) = k - 1$, ezek halmazát pedig $\mathcal{O}^1 = \mathcal{O}_D^1$ -vel jelöljük. Ekkor a tétel az alábbi formára egyszerűsíthető:

3. Tétel. Egy $(k - 1)$ -pontösszefüggő $D = (V, A)$ irányított gráf esetén azon élek minimális száma, melyeket D -hez adva k -pontösszefüggő gráfot kapunk, megegyezik a páronként független szoros egyirányú párok maximális számával.

Az 1. Tétel eredeti bizonyítása nem volt algoritmikus. Az eredeti cikk tartalmazott egy polinomiális algoritmust, amelyik azonban az ellipszoid módszeren alapult. Nyitva maradt tehát a kérdés, hogy adható-e kombinatorikus polinomiális algoritmus. Az első kapcsolódó eredményt Enni adta 1-ST-élösszefüggőség-növelésre 1999-ben [5]. Rögzített k -ra Frank és Jordán adtak szintén 1999-ben [11] kombinatorikus összefüggőség-növelési algoritmust, melynek futásideje n polinomjának és k exponenciális függvényének szorzata.

Az értekezés második részében az összefüggőség eggyel való növelésére adunk kombinatorikus algoritmust; a negyedik részben leírt, teljesen más megközelítést használó algoritmus tetszőleges irányított gráf pontösszefüggőség növelésére szolgál. Ez egyben az általános 1. Tételre is új, algoritmikus bizonyítást szolgáltat.

Az összefüggőség növelése eggyel

A második részben két algoritmust is adunk az eggyel való növelésre. Az első egy egyszerű duális orákulumot használ, a második pedig új bizonyítást is ad a 3 Tételre. A duális orákulum a következő tételre alapul. **Váz** alatt egy maximális keresztezésmentes rendszert értünk.

4. Tétel (Frank, V. [V1]). Egy tetszőleges $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{O}^1$ vázra a \mathcal{K} -beli páronként független egyirányú párok maximális száma ugyanannyi, mint \mathcal{O}^1 -ben, vagyis $\nu(\mathcal{K}) = \nu(\mathcal{O}^1) = \nu(D)$.

Egy váz esetén $\nu(\mathcal{K})$ értékét egyszerűen meg tudjuk határozni Dilworth tételének segítségével. A duális optimum értékének kiszámításához tehát mindössze egy vázat kell építenünk. Ugyan tetszőleges maximális keresztezésmentes rendszer megfelel, a feladat mégsem triviális, mivel \mathcal{O}^1 exponenciális méretű lehet. A vázépítő eljárás központi fogalma a **stabil keresztezésmentes rendszer**.

Általános összefüggőség-növelés

A 4. részben leírt, [V4]-ben megjelent eredmény Benczúr korábbi, eggyel növelő algoritmusát [2] terjeszti ki. Az 1. Tétel ekvivalens átfogalmazását adjuk részbenrendezett halmazokra. A vizsgált probléma bizonyos fajta részbenrendezett halmazok súlyozott fedése minimális számú intervallummal. **Intervallum** alatt itt egy minimális és egy maximális elem közti elemek halmazát értjük; két elem akkor **függő**, ha van mindkettejüket tartalmazó intervallum, egyébként pedig **függetlenek**. A részbenrendezett halmazoktól az ún. **erős intervallum tulajdonságot** várjuk el, amely a függő elemeken értelmezi a \vee és \wedge operációkat, és ezekre szab bizonyos feltételeket.

A halmazpárokhoz analóg módon értelmezzük részbenrendezett halmazokon is a **pozitívan keresztező szupermoduláris** függvényeket. p akkor rendelkezik e tulajdonsággal, ha bármely függő x és y elemekre $p(x) > 0$ és $p(y) > 0$ esetén $p(x) + p(y) \leq p(x \wedge y) + p(x \vee y)$ teljesül.

Legyen \mathcal{I} intervallumok egy multihalmaza. \mathcal{I} **fed**i a p függvényt, ha minden x elem legalább $p(x)$ intervallumban szerepel. A következő tétel az 1. Tétel megfelelője részbenrendezett halmazokra, sőt, kimutatható a két tétel ekvivalenciája is.

5. Tétel (V. és Benczúr [V4]). *Legyen (\mathcal{P}, \preceq) az erős intervallum tulajdonsággal rendelkező részbenrendezett halmaz, p pedig egy \mathcal{P} -n értelmezett pozitívan keresztező szupermoduláris függvény. A p -t fedő intervallumok minimális száma egyenlő a páronként független elemek p értékei összegének maximumával.*

Algoritmusunk primál-duál módszert használ. Kiindulunk egy tetszőleges fedésből, és megpróbálunk minden intervallumhoz egy tanúelemet keresni. Ha találunk olyan tanúkat, melyek független rendszert alkotnak, akkor készen vagyunk. Amennyiben nem ez a helyzet, a tanúkat kisebbekre próbáljuk cserélni egy bizonyos szabály alapján. Ha elakadunk, akkor a tanúk addigi sorozatának segítségével tudunk eggyel kisebb méretű fedést találni.

Amikor ezt a részbenrendezett halmazokra vonatkozó, általános algoritmust összefüggőség-növelésre alkalmazzuk, óvatosnak kell lennünk, mivel a halmazpárok száma exponenciálisan nagy lehet. Az algoritmus elemi lépéseit maximális folyam számítások és szélességi keresések segítségével tudjuk implementálni.

Irányítatlan pontösszefüggőség-növelés

Máig nyitott probléma, hogy az irányítatlan pontösszefüggőség-növelés polinomiális időben megoldható-e. A korábban ismert legjobb eredmény Jacksontól és Jordántól származik ([14], 2005): rögzített k -ra megadtak egy polinomiális algoritmust az optimális megoldás megkeresésére.

A harmadik részben min-max formulát és polinomiális algoritmust² adunk az eggyel való növelés speciális esetére, bebizonyítva ezzel Frank és Jordán 1994-ben megfogalmazott sejtését.

Egy $(k-1)$ -pontösszefüggő $G = (V, E)$ irányítatlan gráfban a csúcsok egy $X = (X_1, \dots, X_t)$ részpartícióját **darabolásnak** nevezzük, ha $t \geq 2$, $|V - \bigcup X_i| = k-1$ és $d(X_i, X_j) = 0$ minden $i \neq j$ esetén. Az X_i halmazokat **daraboknak** hívjuk. $t = 2$ esetén a darabolást **durvának**, $t \geq 3$ esetén **finomnak** nevezzük. Egy $uv \in \binom{V}{2}$ él **összeköti** az X darabolást, ha u és v különböző darabokba esnek. Két darabolás **független**, ha nincs mindkettőt fedő él $\binom{V}{2}$ -ben.

Némi képzavarral élve, egy \mathcal{B} halmazt **bokornak** nevezünk, ha páronként különböző durva darabolásokból áll úgy, hogy minden $\binom{V}{2}$ -beli él legfeljebb kettőt köt össze közülük. **Cserje** alatt páronként független darabolások halmazát értjük (amelyek közt lehetnek durvák és finomak is). Egy \mathcal{B} bokor esetén legyen $def(\mathcal{B}) = \left\lceil \frac{|\mathcal{B}|}{2} \right\rceil$, egy \mathcal{S} cserjére pedig legyen $def(\mathcal{S}) = \sum_{K \in \mathcal{S}} (|K| - 1)$.

Egy **liget** néhány bokorból és egy cserjéből áll; a bokrok száma lehet akár nulla, a cserje pedig lehet az üres halmaz is. Megköveteljük továbbá, hogy a különböző bokrokba tartozó darabolások függetlenek legyenek egymástól és a cserjében levő darabolásoktól. Egy \mathcal{B}_0 cserjéből és $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_\ell$ bokrokból álló ligetre legyen $def(\Pi) = \sum_i def(\mathcal{B}_i)$. Egy $(k-1)$ -pontösszefüggő $G = (V, E)$ gráfra jelölje $\tau(G)$ az olyan élek minimális számát, melyeket G -hez adva k -pontösszefüggő gráfot kapunk, $\nu(G)$ pedig legyen a Π ligeteken vett maximális $def(\Pi)$ érték.

6. Tétel (V. [V3]). *Ha $G = (V, E)$ egy $(k-1)$ -pontösszefüggő gráf és $|V| \geq k+1$, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.*

A bizonyítás és az algoritmus alapjául az irányított esetre vonatkozó második rész ötletei szolgálnak. Itt is értelmezni lehet a keresztezésmentes rendszer és a váz fogalmát, és a 4. Tétellel analóg állítás is igaz lesz. Vázak esetén Dilworth tétele helyett Fleiner tételét [6] alkalmazzuk, amely szimmetrikus részbenrendezett halmazok láncfedéseiről szól.

Konstruktív karakterizációk

A \mathcal{P} gráftulajdonság konstruktív karakterizációja alatt a következő eljárást értjük. Adott néhány \mathcal{P} -t megőrző műveletünk, úgy, hogy \mathcal{P} minden eleme előállítható ilyen lépések sorozatával, néhány egyszerű \mathcal{P} -beli gráf egyikéből indulva. A konstruktív karakterizációk gyakran hasznos eszköznek bizonyulnak a \mathcal{P} -beli gráfok további tulajdonságainak bizonyításához. Klasszikus példák a 2-él- illetve 2-pontösszefüggő gráfok konstruktív karakterizációi. Egy fontos eredmény a következő:

7. Tétel (Lovász, 1976 [16]). *Egy irányítatlan gráf akkor és csak akkor $2k$ -élösszefüggő, ha egyetlen csúcsból kiindulva felépíthető az alábbi két művelet ismételt alkalmazásával:*

²A futási idő becslés $O(kn^7)$, vagyis k -ban és n -ben is polinomiális.

(i) hozzáadunk egy új élt (esetleg hurkot);

(ii) k meglévő élt felosztunk, és az osztópontokat egy új z ponttá egyesítjük.

Mader később hasonló karakterizációt adott $2k + 1$ élösszefüggő gráfokra is [17]. A 7. Tétel segítségével könnyedén levezethetjük például Nash-Williams irányítási tételének gyenge változatát, miszerint egy irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor létezik k -élösszefüggő irányítása, ha (irányítatlan értelemben) $2k$ -élösszefüggő. Irányított esetben a következő, igen hasonló karakterizáció adható.

8. Tétel (Mader, 1982 [18]). *Egy irányított gráf akkor és csak akkor k -élösszefüggő, ha egyetlen csúcsból kiindulva felépíthető a 7. Tételben szereplő két művelet (irányított gráfokra értett) ismételt alkalmazásával.*

A (ii) műveletet a k él z -vel való **összecsípésének** hívjuk. Nulla él összecsípése alatt egy új (izolált) pont hozzáadását értjük. A bizonyítás kulcsfontosságú eszköze Mader irányított leemelési tétele [18]. Nash-Williams gyenge irányítási tétele segítségével a 7. Tétel egyszerűen levezethető a 8. Tételből.

A (k, ℓ) -élösszefüggőség a k -élösszefüggőség és a gyökeres k -élösszefüggőség természetes közös általánosítása. A $D = (V, A)$ irányított gráf **(k, ℓ) -élösszefüggő** valamely $0 \leq \ell \leq k$ egészekre és $r_0 \in V$ gyökérpontra, ha r_0 -ból létezik k éldiszjunkt irányított út minden $v \neq r_0$ csúcsra, v -ből pedig létezik r_0 -ba ℓ éldiszjunkt irányított út. A (k, k) -élösszefüggőség azonos a k -élösszefüggőséggel, a $(k, 0)$ -élösszefüggőség pedig a gyökeres k -élösszefüggőséget adja vissza. Egy irányítatlan gráf (k, ℓ) -partíció-összefüggő, ha a csúcsok minden $t \geq 2$ osztályú partíciójára legalább $k(t - 1) + \ell$ él megy a különböző osztályok között. A két fogalmat az alábbi tétel kapcsolja össze:

9. Tétel (Frank, 1980 [7]). *A G irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor létezik valamely $0 \leq \ell \leq k$ esetén (k, ℓ) -élösszefüggő irányítása, ha a G gráf (k, ℓ) -partíció-összefüggő.*

Mader irányított leemelési tétele is kiterjeszthető (k, ℓ) -élösszefüggőségre:

10. Tétel (Frank, 1999 [9]). *Legyen $D = (U + z, A)$ egy U -ban (k, ℓ) -élösszefüggő irányított gráf ($r_0 \in U$), és tegyük fel, hogy $\rho(z) = \delta(z)$. Ekkor létezik a z -re illeszkedő éleknek egy teljes leemelése úgy, hogy a kapott gráf (k, ℓ) -élösszefüggő.*

A hatodik rész fő eredménye a következő tétel, Frank 2003-ban megfogalmazott sejtése.

11. Tétel (Kovács, V. [V2]). *A $D = (V, A)$ irányított gráf pontosan akkor (k, ℓ) -élösszefüggő az $r_0 \in V$ gyökérpontra nézve ($0 \leq \ell \leq k - 1$), ha az r_0 pontból kiindulva felépíthető az alábbi két művelet segítségével:*

(i) hozzáadunk egy új élt;

(ii) valamely $\ell \leq i \leq k - 1$ esetén i meglévő élt felosztunk és az osztópontokat összecsípjük egy új z ponttá; ezután hozzáadunk $k - i$ új élt, melyeknek kezdőpontja egy korábbi pont, végpontja pedig z .

A 9. Tétel segítségével ebből könnyen levezethető az irányítatlan karakterizáció.

12. Tétel. *A $G = (V, E)$ irányítatlan gráf pontosan akkor (k, ℓ) -partíció-összefüggő ($0 \leq \ell \leq k - 1$), ha egyetlen pontból kiindulva felépíthető a 11. Tételben szereplő két művelet irányítatlan változatának ismételt alkalmazásával.*

Az $\ell = 0$ eset mellett ismert volt korábbról az $\ell = 1$ (Frank és Szegő [13]), valamint az $\ell = k - 1$ eset (Frank és Király [12]). Tételünk bizonyításához ez utóbbi szolgáltatja a kiindulópontot, azonban az általános eset jelentősen bonyolultabb. Egyebek mellett használunk egy új, absztrakt leemelési eredményt is.

Lokális élösszefüggőség-növelés

Élösszefüggőség esetén a **lokális élösszefüggőség-növelés** sokkal általánosabb problémáját is meg lehet oldani. Ez azt jelenti, hogy minden $u, v \in V$ pontpárra külön-külön megadhatunk egy $r(u, v) = r(v, u)$ összefüggőség-igényt. A $G = (V, E)$ irányítatlan gráfot r -élösszefüggőnek hívjuk, ha $\lambda(u, v) \geq r(u, v)$ minden $u, v \in V$ pontpárra teljesül. Legyen $R(X) := \max\{r(u, v) : u \in X, v \notin X\}$ ha $\emptyset \neq X \subsetneq V$ és $R(\emptyset) = R(V) = 0$. Legyen továbbá $p(X) := (R(X) - d_G(X))^+$. Egy $C \subseteq V$ halmaz **marginális**, ha $R(C) \leq 1$ és $d_F(C) = 0$.

13. Tétel (Frank, 1992 [8]). *Legyen adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és egy r összefüggőség-igény úgy, hogy a gráf nem tartalmaz marginális halmazt.³ Azon élek minimális száma, melyeket G -hez véve r -élösszefüggő gráfot kapunk, megegyezik $\lceil \frac{1}{2}p(\mathcal{X}) \rceil$ értékének maximumával a csúcsok \mathcal{X} részpartícióira nézve.*

A tétel nemtriviális iránya Mader irányítatlan leemelési tételének [17] segítségével bizonyítható. Egy hasonló eredmény Benczúr és Frank 1999-es tétele [3] szimmetrikus pozitívan keresztező supermoduláris függvények fedéséről.

A 13. Tétel és a Benczúr-Frank tétel is viszonylag egyszerűen levezethető a fokszámelőírt változatából. Egy $m : V \rightarrow \mathbb{Z}_+$ vektort **fokszámelőírásnak** nevezünk, ha $m(V)$ páros; F egy m -előírt élhalmaz, ha minden $v \in V$ csúcsban $d_F(v) = m(v)$ teljesül. A dolgozatban új bizonyításokat adunk e két tétel fokszámelőírt változataira, a szokásos leemelési módszer helyett az élátbillentés technikáját véve alapul. Az $xy, uv \in F$ élek **átbillentésén** azt értjük, hogy F -et kicseréljük az $F' = F - \{xy, uv\} + \{xv, uy\}$ élhalmazra. A bizonyításokat egységes keretben mondjuk el; a két bizonyítás jelentős része közös, és csak annyit használ, hogy az

³Az eredeti tétel némileg általánosabb, és csak az ún. marginális komponenseket tiltja.

igényfüggvény szimmetrikus pozitívan ferdén szupermoduláris, azaz minden $X \subseteq V$ ponthalmazra $p(X) = p(V - X)$, és amennyiben $p(X), p(Y) > 0$, a következő két egyenlőtlenség közül legalább az egyik fennáll.

$$p(X) + p(Y) \leq p(X \cup Y) + p(X \cap Y) \quad (1a)$$

$$p(X) + p(Y) \leq p(X - Y) + p(Y - X). \quad (1b)$$

Az értekezés ötödik részének fő kérdése a **partíciókorlátos lokális élösszefüggőség-növelés**. Az r összefüggőség-igény mellett adott a csúcsoknak egy $\mathcal{Q} = (Q_1, \dots, Q_t)$ partíciója is. Egy élt \mathcal{Q} -megengedettnek hívunk, ha végpontjai \mathcal{Q} különböző osztályaiba esnek. Célunk \mathcal{Q} -megengedett élek egy minimális méretű F halmazának megkeresése, amelyet G -hez véve r -élösszefüggő gráfot kapunk. Globális összefüggőség-igény (azaz $r \equiv k \geq 2$) esetén a problémát Bang-Jensen, Gabow, Jordán, és Szigeti oldották meg 1999-ben [1].

A növelő élhalmaz méretére az első természetes alsó korlát az, amelyikkel a 13. Tételben találkoztunk, azaz $\alpha(G) = \max \left[\frac{1}{2} p(\mathcal{X}) \right]$, a maximumot a csúcsok \mathcal{X} részpartícióira véve. \mathcal{X} egy h -részpartíció valamely h -ra ($1 \leq h \leq t$), ha \mathcal{X} a Q_h egy részpartíciója. Legyen $\beta_h(G) = \max p(\mathcal{X})$, ahol \mathcal{X} egy h -részpartíció. Legyen $\Psi_{\mathcal{Q}}(G)$ az $\alpha(G)$ és $\beta_h(G)$ értékek maximuma $h = 1, \dots, t$ -re. Bang-Jensen és szerzőtársai azt mutatták meg, hogy globális összefüggőség-igény esetén az optimum vagy $\Psi_{\mathcal{Q}}(G)$, vagy $\Psi_{\mathcal{Q}}(G) + 1$, attól függően, hogy bizonyos speciális konfigurációk előfordulnak-e a gráfban. A partíciókorlátos lokális összefüggőség-növelési problémára először egy approximációs eredményt adunk.

14. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf, \mathcal{Q} a csúcsok egy partíciója, r pedig az összefüggőség-igény úgy, hogy a gráf ne tartalmazzon marginális halmazt. Ekkor azon \mathcal{Q} -megengedett élek minimális száma, melyeket G -hez véve r -élösszefüggő gráfot kapunk, legfeljebb $\Psi_{\mathcal{Q}}(G) + r_{\max}$.*

Itt r_{\max} az r függvény maximális értékét jelöli. Az eredmény egy gyengébb változatát Lau és Yung is bebizonyította 2009-ben [15] (két partíció-osztályra és $2r_{\max}$ -szal).

Az alábbiakban megfogalmazzuk egy sejtést $t = 2$ esetén az optimum értékére. Ehhez a következő bonyolult struktúrát szükséges definiálnunk. Egy $\mathcal{H} = \{X^*, Y^*, C_1, C_2, \dots, C_\ell\}$ partícióját a csúcsoknak **hidrának** nevezzük X^* és Y^* **fejekkel** és C_i **csápokkal**, ha minden $1 \leq i < j \leq \ell$ esetén $d_G(C_i, C_j) = 0$ teljesül, valamint tetszőleges diszjunkt $\emptyset \neq I, J \subseteq \{1, \dots, \ell\}$ indexhalmazokra (1a) egyenlőséggel áll fenn az $X^* \cup (\bigcup_{i \in I} C_i)$ és $X^* \cup (\bigcup_{j \in J} C_j)$, valamint az $Y^* \cup (\bigcup_{i \in I} C_i)$ és $Y^* \cup (\bigcup_{j \in J} C_j)$ halmazokra.

Legyen $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2\}$ a partíciós feltétel. Egy rögzített $h \in \{1, 2\}$ értékre legyen \mathcal{Z} egy olyan h -részpartíció, amelyik a $\{C_1, \dots, C_\ell\}$ részpartíció finomítása. A C_i csapot **h -mérgezőnek** nevezzük, ha

$$p(C_i \cup X^*) - p(X^*) + \sum (p(Z) : Z \in \mathcal{Z}, Z \subseteq C_i)$$

páratlan. Jelölje χ'_h a h -mérgező csápok számát, és legyen

$$\tau'_h(G, r, \mathcal{Z}, \mathcal{H}) = \frac{1}{2} (\chi'_h + p(X^*) + p(Y^*) + p(\mathcal{Z})).$$

Jelölje $\tau'(G, r, \mathcal{Q})$ a $\tau'_h(G, r, \mathcal{Z}, \mathcal{H})$ mennyiség maximumát h , \mathcal{H} és \mathcal{Z} összes, a fenti feltételeket kielégítő választására.

15. Sejtés. *Legyen adott a $G = (V, E)$ gráf, az r összefüggőség-igény és a csúcsok egy $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2\}$ partíciója; tegyük fel, hogy a gráfban nincs marginális halmaz. Ekkor az olyan \mathcal{Q} -megengedett élek minimális száma, melyeket G -hez véve r -élösszefüggő gráfot kapunk, megegyezik a $\Psi_{\mathcal{Q}}(G)$ és $\tau'(G, r, \mathcal{Q})$ mennyiségek maximumával.*

A sejtést fokszámelőírt változatban is megfogalmazzuk, amelyből ez következne. A fokszámelőírt sejtésre részleges bizonyítást adunk az élátbillentési módszerrel.

Az értekezés alapjául szolgáló közlemények

- [V1] A. Frank and L. A. Végh. An algorithm to increase the node-connectivity of a digraph by one. *Discrete Optimization*, 5:677–684, 2008.
- [V2] E. R. Kovács and L. A. Végh. The constructive characterization of (k, ℓ) -edge-connected digraphs. *Combinatorica*. (accepted); available as EGRES Tech. Report TR-2008-14 at <http://www.cs.elte.hu/egres>.
- [V3] L. A. Végh. Augmenting undirected node-connectivity by one. Technical Report TR-2009-10, Egerváry Research Group, Budapest, 2009. <http://www.cs.elte.hu/egres>.
- [V4] L. A. Végh and A. A. Benczúr. Primal-dual approach for directed vertex connectivity augmentation and generalizations. *ACM Transactions on Algorithms*, 4(2), 2008.

Hivatkozások

- [1] J. Bang-Jensen, H. N. Gabow, T. Jordán, and Z. Szigeti. Edge-connectivity augmentation with partition constraints. *SIAM J. Discrete Math.*, 12(2):160–207, 1999.
- [2] A. A. Benczúr. Pushdown-reduce: an algorithm for connectivity augmentation and poset covering problems. *Discrete Appl. Math.*, 129(2-3):233–262, 2003.
- [3] A. A. Benczúr and A. Frank. Covering symmetric supermodular functions by graphs. *Mathematical Programming*, 84(3):483–503, 1999.
- [4] A. Bernáth and T. Király. A new approach to splitting-off. In *Proceedings of the 13th IPCO*, volume 5035 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 401–415. Springer, 2008.

- [5] S. Enni. A 1- (S, T) -edge-connectivity augmentation algorithm. *Mathematical Programming*, 84, 1999.
- [6] T. Fleiner. Covering a symmetric poset by symmetric chains. *Combinatorica*, 17(3):339–344, 1997.
- [7] A. Frank. On the orientation of graphs. *J. Comb. Theory, Ser. B.*, 28(3):251–261, 1980.
- [8] A. Frank. Augmenting graphs to meet edge-connectivity requirements. *SIAM J. Discrete Math.*, 5(1):25–53, 1992.
- [9] A. Frank. Connectivity augmentation problems in network design. In J. Birge and K. Murty, editors, *Mathematical Programming: State of the Art*, pages 34–63. The University of Michigan, 1999.
- [10] A. Frank and T. Jordán. Minimal edge-coverings of pairs of sets. *J. Comb. Theory Ser. B*, 65(1):73–110, 1995.
- [11] A. Frank and T. Jordán. Directed vertex-connectivity augmentation. *Math. Prog.*, 84:537–553, 1999.
- [12] A. Frank and Z. Király. Graph orientations with edge-connection and parity constraints. *Combinatorica*, 22(1):47–70, 2002.
- [13] A. Frank and L. Szegő. Constructive characterizations for packing and covering with trees. *Discrete Appl. Math.*, 131(2):347–371, 2003.
- [14] B. Jackson and T. Jordán. Independence free graphs and vertex connectivity augmentation. *J. Comb. Theory Ser. B*, 94(1):31–77, 2005.
- [15] L. C. Lau and C. K. Yung. Efficient edge splitting and constrained edge splitting. manuscript, 2009.
- [16] L. Lovász. *Combinatorial Problems and Exercises*. Akadémiai Kiadó - North Holland, Budapest, 1979.
- [17] W. Mader. A reduction method for edge-connectivity in graphs. *Annals of discrete Math*, 3:145–164, 1978.
- [18] W. Mader. Konstruktion aller n -fach kantenzusammenhängenden digraphen. *Europ. J. Combinatorics*, 3:63–67, 1982.
- [19] T. Watanabe and A. Nakamura. Edge-connectivity augmentation problems. *J. Comput. Syst. Sci.*, 35(1):96–144, 1987.