Morse-Bott függvények az unitér csoporton

Beke Márton

2021/22/1.

1. Bevezető

A kutatómunka célja az unitér csoportok homológiájának megértése Morse-Bott függvények segítségével. A számítások nagyban leegyszerűsödnek, ha az ember konjugálásinvariáns függvényeket tekint, hiszen elegendő a diagonális mátrixokkal foglalkozni, viszont azzal a hátránnyal jár, hogy nem kritikus pontokat, hanem nemelfajult kritikus sokaságokat találunk, tehát nem elegendő az "egyszerű" Morse elméletet alkalmazni.

2. A Bott-féle általánosítás

2.1. Kritikus sokaságok és integrálgörbék

2.1. Definíció. Legyen M^m egy kompakt sima sokaság, $f : M^m \to \mathbb{R}$ egy sima függvény, melynek kritikus ponthalmaza beágyazott sima részsokaságok uniójaként áll elő és a második deriváltja nem elfajult ezen sokaságok normálnyalábjain.

A Morse esethez hasonlóan definiáljuk egy kritikus pont *indexét* a normálnyalábon értelmezett második derivált negatív alterének dimenziójaként. Világos hogy ez az érték lokálisan konstans, így a kritikus sokaságok összefüggő komponensein állandó, ezzel felosztva $\mathrm{Crit}(f)$-et $\bigcup_{i=0}^{m} N_i$ alakban, ahol $\forall p \in N_i \subset M : \mathrm{ind}(p) = i$. Vegyünk egy g Riemann-metrikát M-en és jelöljük a $-\operatorname{grad} f$ vektormező által generált folyamot ϕ_t-vel. Az $U(N_i) = \{p \in M : \lim_{t\to-\infty} \phi_t(p) \in N_i\}$ halmazt az N_i *instabil (leszálló) sokaságának* nevezzük, hasonlóan definiáljuk az $S(N_i)$ *stabil (felszálló) sokaságokat* is (ahol $t \to \infty$). [Mil63, 3.5 tétel]-ből tudjuk, hogy az instabil sokaságban N_i minden pontjához egy index dimenziós nyílt gömb tartozik, tehát $U(N_i)$ a normálnyaláb (f_{**} szerinti) negatív részének egy beágyazása (különböző pontokba futó integrálgörbék nem metszhetnek). A továbbiakban kulcsszerepet fognak játszani az egyes kritikus sokaságok között menő integrálgörbék alkotta terek.

$$M(N_i, N_j) := (U(N_i) \cap S(N_j))/\mathbb{R},$$

ahol a faktorizáció a gradiens folyam hatásával történik. A definícióból adódóan van két természetes leképezés

$$M(N_i, N_j) \to N_i \quad p^- : \gamma \mapsto \lim_{t\to-\infty} \gamma(t),\ M(N_i, N_j) \to N_j \quad p^+ : \gamma \mapsto \lim_{t\to\infty} \gamma(t)$$

melyek kiterjednek sima leképezésekké a kompaktifikált modulusterekre is, $p^+ \pitchfork p^-$, továbbá p^- egy fibrálás ([AB95, A.3 szekció]). Ha generikusan választjuk f-et és g-t a fel- és leszálló sokaságok is tranzverzálisan fogják metszeni egymást és az $M(N_i, N_j)$-k sima ($\mathrm{ind}^-(N_i) - \mathrm{ind}^+(N_j) + \dim(N_i) - 1$ dimenziós [BH10, 10. lemma]) sokaságok lesznek ($\mathrm{ind}^\pm f_{**}$ pozitív és negatív altérének dimenzióit jelöli).

2.2. Tétel ([Hut02, 2.1 tétel],[AB95, 2.5 lemma])**.** *Az $M(N_i, N_j)$ sokaság kompaktifikálható M-ben egy "sarkos"*[1] *sima sokasággá.*

A kompaktifikáció abból áll, hogy tekintjük a "törött" integrálgörbéket, vagyis $p = a_1, a_2, .., a_k = q \in Crit(f)$ pontokat és γ_i integrálgörbéket, melyek a_i-ből a_{i+1}-be haladnak. Ha nem egypontúak a kritikus halmazok, akkor persze megköveteljük, hogy egy törött integrálgörbe a töréspontjában a kritikus sokaságnak ugyanazon pontjából induljon ki, mint ahova beérkezett, ezt a $p^+ : M(N_i, N') \to B'$, $p^- : M(N', N_j)$ függvények visszahúzásával (2.5. definíció) érjük el.

2.2. A Morse homológia

A lánckomplexust a Morse esetben a kritikus pontok fogják generálni az indexük szerint értékelve, a határleképezés pedig megszámolja (mod 2, vagy a lent taglalt előjeles módon), hogy hány integrálgörbe fut egy kritikus pontból az eggyel kisebb indexűekbe:

$$\partial p = \sum_{\substack{q \in \mathrm{Crit}(f) \\ \mathrm{ind}(q) = \mathrm{ind}(p) - 1}} \# M(p, q) q.$$

Az előző tétel értelmében ez értelmes, hiszen ha az indexek különbsége 1, az integrálgörbék modulustere kompakt 0-sokaság lesz. Az irányítható esetben választunk még tetszőleges irányításokat az instabil sokaságokon, M irányításával együtt ez ad egy egyértelmű irányítást a stabil sokaságokra, és az integrálgörbék tereire. Ezzel a határleképezés annyiban változik, hogy az irányítás által kapott előjelek szerint kell összeadni a tagokat. A kompaktifikációs tételből következik, hogy valóban egy lánckomplexust kapunk. $\partial^2(p)$-ben minden $q : \mathrm{ind}(q) = \mathrm{ind}(p) - 2$ generátor együtthatója a p-ből q-ba folyó tört integrálgörbék számát adja meg, ugyanakkor $M(p, q)$ egy kompakt 1-sokaság melynek pereme pontosan a tört integrálgörbékből áll, ezekből pedig páros sok van (irányítható esetben ellenkező előjelű a két végpont).

Hasonló módon definiálható egy kohomológia M-en, a kohatárleképezés szintén a két kritikus pont közötti integrálgörbéket számolja (előjelesen):

$$\mathrm{d}\, p = \sum_{\substack{q \in \mathrm{Crit}(f) \\ \mathrm{ind}(q) = \mathrm{ind}(p) + 1}} \# M(q, p) q.$$

2.3. Tétel ([Hut02, 3.1 tétel])**.** *Az imént definiált homológia (és kohomológia) megegyezik a sokaság szinguláris homológiájával (kohomológiájával).*

Ezen tételből azonnal adódik az ismert állítás:

2.4. Következmény (Poincaré dualitás [AB95, 2.4 következmény])**.** *Legyen M^n egy kompakt összefüggő n-sokaság, ekkor*

$$H_i(M^n, \mathbb{Z}_2) = H^{n-i}(M^n, \mathbb{Z}_2)$$

Bizonyítás. Legyen f generikus Morse-függvény M^n-en, g pedig egy generikus metrika, a kritikus pontok lánckomplexusa $(\oplus C_{(i)}, \partial^+)$. Tekintsük most a $-f$ függvényt, világos hogy erre is teljesülni fognak a genericitási feltételek, viszont a kritikus pontok indexe a komplementerére változik ($i \leftrightarrow n - i$). Az ezen függvény által meghatározott lánckomplexus $(\oplus D_{(i)}, \partial^-)$ ahol világos, hogy $C_{(i)} = D_{(n-i)}$. A határleképezés pedig $\partial^- p = \sum_{q:\mathrm{ind}(q)=\mathrm{ind}(p)+1} \# M(q, p) q$ lesz ha átírjuk az eredeti f szerinti modulusterekre és indexekre. Ez pont

[1] T^2 és M^2, de nem $\mathbb{R}^n$-en, hanem $\mathbb{R}^{n-k} \times [0, \infty)^k$-n van modellezve

az f által nyert Morse kohomológia kohatárleképezése, ugyanakkor ennek a komplexusnak is M szinguláris homológiáját kell adnia, tehát valóban $H_i(M^n, \mathbb{Z}_2) = H^{n-i}(M^n, \mathbb{Z}_2)$. □

Megemlítendő végül, hogy a Poincaré polinom $P_M(t)$ mintájára definiálható a *Morse polinom*: $Q_M(t) = \sum_i \#\{p \in M : \mathrm{ind}(p) = i\}t^i$, az iménti 2.3 tétel értelmében $Q_M \geq P_M$ együtthatónként, ezek a *gyenge Morse egyenlőtlenségek.*

2.3. A Morse-Bott homológia

A Morse-Bott esetben több különböző leírást találtam a szakirodalomban ([BH10, 5.1. szekció],[AB95, 3.2. szekció],[Hut02, 6.2.4. szekció]), ez utóbbin alapszik a fejezet.

2.5. Definíció. E_1, E_2, B topologikus terek és adva van két leképezés $f_i \in C(E_i, B)$ akkor a

$$E_1 \times_B E_2 := \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 : f_1(e_1) = f_2(e_2)\}$$

teret nevezzük a két függvény visszahúzottjának.

Ez egy hasznos formalizmus a fent leírt kompaktifikáció kezelésére, a tér iterált visszahúzásokból fog állni a "középső" kritikus sokaságok felett, vagyis összefüggő törött integrálgörbékből. Az irányításkévéket és egyéb kellemetlenségeket elkerülendő a továbbiakban (is) főleg *mod* 2 adjuk meg a konstrukciót, a fő problémát az okozza, hogy még ha a sokaság és a kritikus részsokaságok irányíthatóak is, a normálnyalábnál erre nincs garancia.

A Morse-Bott homológia alapötlete, hogy a kritikus sokaságok homológiájával akarjuk leírni a teljes sokaság homológiáját úgy, hogy egy kritikus sokaságbeli szimplex helyett a teljes leszálló orbitját tekintjük, ez elvezet a lánckomplexus definíciójához.

2.6. Definíció. Legyen C egy lánckomplexus. Jelölje $C[i]$ azt a C-ből nyert lánckomplexust, melyre $C_{(k)} = C[i]_{(k-i)}$ (tehát a k értékelésű részcsoport $k-i$ értékelésű lesz $C[i]$-ben), hasonlóan a határleképezésekre. Legyen továbbá $C(M)$ az M sokaság szinguláris homológiájának lánckomplexusa, ekkor a Morse-Bott homológia lánckomplexusa

$$\bigoplus_{\substack{N \text{ összefüggő} \\ \text{kritikus sokaság}}} C(N)[\mathrm{ind}(N)]$$

alakú lesz.

A határleképezést a fenti megjegyzés figyelembevételével a következő formulával definiáljuk:

$$\partial\sigma = \partial_N \sigma + \sum_{N' \neq N} p^+(M(\sigma, N'))$$

A lánckomplexus dimenziócsúsztatása miatt ez valóban egy -1 fokú leképezés, illetve a Morse esethez hasonló érvelés a peremekről mutatja hogy valóban lánckomplexust kaptunk, az ehhez tartozó homológiát nevezzük a sokaság Morse-Bott homológiájának.

2.7. *Megjegyzés.* A határleképezést technikai okok miatt valójában csak bizonyos szimplexekre definiáljuk, simának kell lenniük és minden lapnak transzverznek az összes p^- leképezésre. A sima sokaságokra érvényes approximációs és transzverzalitási tételek tükrében ezzel persze az általánosságot nem szorítjuk meg, ezen szimplexek altere is a szinguláris homológiát generálja.

A lánckomplexus ismeretében kiterjeszthetjük a Morse polinom definícióját erre az esetre is:

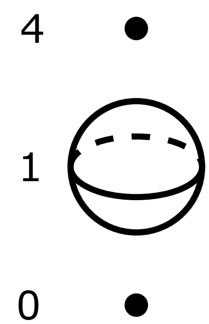
2.8. Definíció. Az M sokaság Morse-Bott polinomját a következő formulával definiáljuk:

$$Q_M(t) = \sum_{\substack{N_i \text{ összefüggő} \\ \text{kritikus sokaság}}} t^{\mathrm{ind}(N_i)} P_{N_i}(t)$$

(ez természetesen függ az f függvény választásától).

A várt egyenlőtlenségek ezesetben is teljesülni fognak, hiszen meglepően egyszerűen ellenőrizhetjük, hogy ezúttal is a szinguláris homológiával izomorf elméletet kaptunk. Az $f \equiv 0$ függvénynek egyetlen kritikus sokasága van, maga M, az extra tagok nem fognak megjelenni a határleképezésben. Megemlítendő továbbá, hogy egy generikus homotópiát véve két Morse-Bott pár (függvény és metrika) f_i, g_i között definiálható egy láncleképezés a két függvény által meghatározott homológia között mely lánchomotóp az identitással. Következik, hogy a Morse-Bott homológia független f, g-től.

2.9. *Példa.* Tekintsük az $\mathrm{im}\,\mathrm{tr} : U(2) \to \mathbb{R}$ függvényt. Egy kétdimenziós unitér mátrix általános alakja $\begin{pmatrix} a & b \\ -e^{i\phi}\bar{b} & e^{i\phi}\bar{a} \end{pmatrix}$ ahol $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vektorok kifeszítik az egységelem érintőterét, nevezzük ezeket $v_1, .., v_4$-nek. $g \in U(2)$-re $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\mathrm{im}\,\mathrm{tr}(g \exp t v_i))|_{t=0} = 0$ egyenleteket tekintve a kritikus pontokra a következő adódik az előbbi paraméterezés szerint: $\begin{pmatrix} ia_2 & b \\ -\bar{b} & -ia_2 \end{pmatrix}$ egy kritikus $\mathbb{CP}^1 = S^2$ a 0 kritikus értékhez, továbbá egy maximum és egy minimum pont a ± 1 értékekhez $\begin{pmatrix} \pm i & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix}$.



1. ábra. A kritikus sokaságok sematikus képe

A paraméterezésből egyszerű deriválással kiszámolható továbbá, hogy a kritikus gömb diag(i, -i) pontjában a Hesse mátrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

alakú, vagyis a kritikus gömb indexe 1. Következik, hogy a Morse-Bott lánc $C(*)[4] \oplus C(S^2)[1] \oplus C(*)$ alakú lesz, ami S^2 homológiájának ismeretében a

$$0_{(5)} \to \mathbb{Z}_{(4)} \to \mathbb{Z}_{(3)} \to 0_{(2)} \to \mathbb{Z}_{(1)} \to \mathbb{Z}_{(0)} \to 0$$

lánckomplexust adja, ebből a homológia már kiszámolható:

i	0	1	2	3	4	$5 \leq$
$H_i(U(2))$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0

A Gram-Schmidt ortogonalizációból tudjuk, hogy $U(n)$ összefüggő, vagyis $H_0(U(n)) = \mathbb{Z}$. Ebből azonnal kapjuk, hogy $\partial_1 = 0$, hiszen másképp nem lehetne a megfelelő faktorcsoport $\mathbb{Z}$, ezért pedig $H_1(U(2)) = \mathbb{Z}$ is teljesül persze. $-f$-et tekintve (vagyis a Poincaré-dualitás miatt) hasonlóan kapjuk $H_4 = H_3 = \mathbb{Z}$-t is, végül $H_2 = C_{(2)} = 0$.

3. Konjugáltosztályok és centralizátorok

Ahogy a bevezetőben is említettük, hasznos számolási technika az unitér és egyéb Lie-csoportokra ha osztályfüggvényeket tekintünk (mint az előbbi példában), mert a kritikussági és indexszámolásokat elegendő a konjugálással speciális (esetünkben diagonális) alakra hozott elemeken elvégezni. [Fra11, Appendix E]-ben az ehhez szükséges alapvető tételek és ötletek megtalálhatóak, ezeket röviden taglaljuk, az egyszerűség kedvéért az unitér csoport speciális esetére szorítkozva.

3.1. Definíció. Egy Lie-csoport legbővebb összefüggő kommutatív részcsoportjait *maximális tóruszoknak* hívjuk. Az unitér esetben ez a diagonális mátrixok alkotta részcsoport, illetve az ezzel konjugált részcsoportok.

Egy g elem centralizátora C_g egy beágyazott részsokaság[2], mivel ez egy zárt részcsoport, a konjugáltosztályokból álló $U(n)/C_g$ tér is egy sima sokaság, melyen $U(n)$ balszorzással hat simán, tranzitíven. A konjugáltosztályok sokasága nem csak faktorként jelenik meg, hanem részsokaságként is.

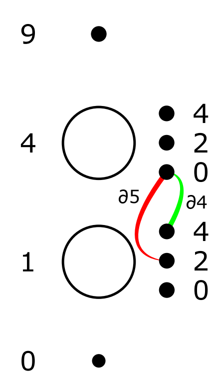
3.2. Tétel. *A $\psi : hC_g \mapsto hgh^{-1}$ leképezés egy sima begyazás $\psi : U(n)/C_g \hookrightarrow U(n)$.*

Ezt a beágyazott sokaságot a továbbiakban M_g-vel fogjuk jelölni.

3.3. Tétel ([Fra11, E.2 tétel])**.** *Az összes beágyazott M_g sokaság páros dimenziós, tranzverzálisan[3] metszi a maximális tóruszt és $\chi(M_g) = \#M_g \cap T$.*

Speciálisan tehát véges sok metszéspont van. Ha f osztályfüggvény, akkor a kétoldali invariáns metrika szerinti gradiense érinti a maximális tóruszt ([Fra65, 1. lemma]), így elegendő ezen kritikus pontokat keresni, mivel a konjugálás izometria, ezek teljes orbitja kritikus lesz. Ezen észrevételekből kiindulva [Fra65, 3. fejezet] szerint az $U(n)$ diagonális mátrixaiból álló maximális tóruszon könnyen láthatóan a $g_k = \mathrm{diag}(1, 1, ..., 1, -1, -1, ..., -1)$-al konjugált mátrixok lesznek kritikusak a $f = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}$ függvényt tekintve. C_{g_k} blokkdiagonális mátrixokból áll: $U(k) \times U(n-k)$, ha az első tagban az egységmátrixot vesszük f-nek lokális minimuma lesz g_k-ban, illetve maximuma ha a második tagban fixáljuk az egységmátrixot. Mivel $\dim M_{g_k} + \dim C_{g_k} = 2n$ ezzel látjuk hogy $U(k) \times -I$ a leszálló sokaság ebben a pontban, így az index k^2, a faktorizációt elvégezve pedig következik, hogy a kritikus sokaságok $W_{n,k}$ komplex Grassmann sokaságok. Ez egybevág az imént kiszámított példánkkal ($W_{2,1} = \mathbb{CP}^1 = S^2$), azonban csak a Betti-számok meghatározásához elegendő, a teljes homológiát nem tudjuk általában leolvasni.

3.4. *Példa.* Ha általában nem is, a következő dimenzióhoz még van elég információnk. Az f függvény kritikus sokaságai tehát két pont és két komplex projektív sík. Az ötlet[4] ezúttal az lesz, hogy f-et approximáljuk egy Morse függvénnyel úgy, hogy a kritikus sokaságokon veszünk ilyeneket és egy tubuláris környezetben konstansként, majd egy kissé bővebb környezeten kívül már nullaként kiterjesztjük az egész sokaságra, ezeket az $N_i \subset M \to \mathbb{R}$ függvényeket nevezzük f_i-nek. Kellően kis ϵ-ra $f + \epsilon \sum f_i$ Morse lesz, a kritikus pontok az egyes f_i-k kritikus pontjaiból állnak, az index pedig $\mathrm{ind}_f(p) + \mathrm{ind}_{f_i}(p)$ lesz a konstans kiterjesztés miatt. Továbbá ha két kritikus pont egyazon kritikus sokaságon helyezkedik el, ϵ-t kellően kicsinek választva a határleképezés egyezni fog az f_i által kapottal N_i-ben. Végül két különböző kritikus sokaság N_i, N_j között a perturbált függvény határleképezését úgy határozhatjuk meg, hogy az f_i és f_j szerinti le- és felszálló sokaságok közötti integrálgörbéket számoljuk meg.



2. ábra. $U(3)$ a perturbált függvényből kapott felbontással

[2] az $f(h) = hgh^{-1}$ sima leképezésnél $f^{-1}(g) = C_g$

[3] A dimenziók összege nem feltétlenül maximális, de az érintőtérben maximális dimenziós alteret generál $T_gT + T_gM_g \leq T_gU(n)$

[4] [Hut02, 6.5], [AB95, 3.4], [Bou02, 2.2 11.o]

A konkrét esetben tekintsük a $\phi_1 : [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto 2|z_0|^2 + |z_1|^2 + 3|z_2|^2$, $\phi_4 : [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto 3|z_0|^2 + 2|z_1|^2 + |z_2|^2$ függvényeket a két komplex projektív síkon, könnyen láthatóan 3 kritikus pontjuk van, $0, 2, 4$ indexekkel (ld. [Mil63, §4.]), elvégezve az imént leírt perturbációt a következő lánckomplexust látjuk:

$$C(*) \oplus C(\mathbb{CP}^2)[1] \oplus C(\mathbb{CP}^2)[4] \oplus C(*)[9] \tag{1}$$

Ismét tudjuk, hogy összefüggő a tér, tehát $\partial_1 = 0$. A fenti függvényből kapott lánckomplexus szerint $C(\mathbb{CP}^2) = \mathbb{Z}_{(4)} \to 0 \to \mathbb{Z}_{(2)} \to 0 \to \mathbb{Z}_{(0)} \to 0$. Tekintsük (az (1) komplexusban) ∂_5-öt, legyen $\mathbb{Z}_{(5)} = \langle \alpha \rangle$ és hasonlóan $\mathbb{Z}_{(4)} = \langle \beta \rangle$. A Morse homológia definíciója szerint meg kell számolnunk a $-\operatorname{grad} f$ szerint $\alpha \to \beta$ integrálgörbéket, azonban egy ilyen görbére megszorítva f monoton csökken, továbbá $f(\alpha) = -1 < 1 = f(\beta)$, következésképp ∂_5 is nulla. Szükségünk van még ∂_4-re, a fenti leírás szerint megszámoljuk a p 4 indexű kritikus pontból a q 3 indexű kritikus pont felszálló gömbjébe tartó integrálgörbéket (a 4 indexű kritikus pont minimum, így a leszálló sokasága csak önmagából áll). q a fenti függvény megválasztása miatt a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ mátrix lesz. Az első oszlopot kiválasztó $pr_1 : U(3)/U(1) \times U(2) \to \mathbb{CP}^2$ leképezés diffeomorfizmus (az inverzéhez egy $[z_0 : z_1 : z_2]$ elem merőleges kiegészítőjéhez tetszőleges ortonormált bázist véve jóldefiniált leképezést kapunk). ϕ_1-nek 2 indexű kritikus pontja az $[1 : 0 : 0]$, a $z_0 \neq 0$ környezetet koordinátázzuk $\frac{|z_0|}{z_0} z_i$ valós és komplex részével (x_i, y_i, $i = 1, 2$). Ebben a bázisban felírva $-\operatorname{grad} f = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 & -2x_2 & -2y_2 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ adódik, vagyis a 2 indexű kritikus pont felszálló sokasága a $[z_0 : 0 : z_2]$ alakú pontokból áll. A 3.2 beágyazást és az imént megadott diffeomorfizmust használva beágyazzuk ezt a kritikus gömböt $U(3)$-ba.

$$[z_0 : 0 : z_2] \mapsto \begin{bmatrix} z_0 & -\overline{z_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ z_2 & \overline{z_0} & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} |z_0|^2 - |z_2|^2 & 0 & 2z_0\overline{z_2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 2\overline{z_0}z_2 & 0 & |z_2|^2 - |z_0|^2 \end{bmatrix}$$

A 4 indexű sokaságot hasonlóan azonosítjuk a projektív síkkal (ezúttal az utolsó oszlopát fölhasználva), így $p = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ lesz. A példa előtt taglalt [Fra65, 3. fejezet] szerint a(z f szerinti) leszálló sokaság ebben a pontban $U(2) \times (-1)$ lesz, ez az imént kiszámolt (ϕ_1 szerinti) q-ból felszálló gömböt a $z_0 = 0 \vee z_2 = 0$, $|z_2|^2 + |z_0|^2 = 1$ feltételek miatt csak q-ból kiinduló trajektóriában metszheti, q mostmár f szerinti felszálló sokasága pedig $(1) \times U(2)$. A metszetben csak diagonális mátrixok lehetnek, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\pi \pm t)} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ szolgáltatja a két ellenkező előjelű[5] görbét, tehát $\partial_4 = 0$. Kifejtve az (1) komplexust a következő adódik:

$$\mathbb{Z}_{(9)} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_{(8)} \to 0 \to \mathbb{Z}_{(6)} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_{(5)} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_{(4)} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_{(3)} \to 0 \to \mathbb{Z}_{(1)} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_{(0)}$$

Ebből már leolvashatjuk a homológiákat:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$10 \leq$
$H_i(U(3))$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0

□

[5] Az elemenkénti konjugálás $U(3)$ irányítását megtartja, a fel- és leszálló sokaságokét megfordítja, a két görbét pedig egymásba viszi. q-ban a két görbe iránya ellentétes előjelű, mivel a fel- és leszálló sokaság irányítása is megfordul, ugyanazon irányítás-osztályhoz kell viszonyítanunk, a görbék irányát viszont megfordítja tehát valóban ellenkezőek (ld. [Hut02, 2.2 (3)], [AB95, 131. o.]).

Hivatkozások

[AB95] David M Austin and Peter J Braam. Morse-bott theory and equivariant cohomology. In The Floer memorial volume, pages 123–183. Springer, 1995. doi:10.1007/978-3-0348-9217-9_8.

[BH10] Augustin Banyaga and David Hurtubise. Morse-bott homology. Transactions of the American Mathematical Society, 362(8):3997–4043, 2010.

[Bot82] Raoul Bott. Lectures on morse theory, old and new. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 7(2):331–358, 1982. doi:10.1090/S0273-0979-1982-15038-8.

[Bou02] Frédéric Bourgeois. A Morse-Bott approach to contact homology. PhD thesis, Stanford university, 2002.

[Fra65] Theodore Frankel. Critical submanifolds of the classical groups and stiefel manifolds. In Stewart Scott Cairns, editor, Differential and Combinatorial Topology: A Symposium in Honor of Marston Morse, pages 37–54. Princeton University Press, 1965. doi:10.1515/9781400874842-004.

[Fra11] Theodore Frankel. The Geometry of Physics: An Introduction. Cambridge University Press, 3. edition, 2011. doi:10.1017/CBO9781139061377.

[Hut02] Michael Hutchings. Lecture notes on morse homology (with an eye towards floer theory and pseudoholomorphic curves), 2002. `https://math.berkeley.edu/~hutching/teach/276-2010/mfp.ps`.

[Mil63] John Milnor. Morse Theory.(AM-51), Volume 51. Princeton university press, 1963. doi:10.1515/9781400881802.