Önhasonló halmazok és mértékek a számegyenesen

Egyéni kutatómunka I.

Gáspár Attila
Témavezető: Keleti Tamás

2021. december 17.

Önhasonló halmazok

Definíció

Iterált függvényrendszer (IFS): $\mathbb{R}^d$ hasonlóságainak egy

$$\Phi = \{\varphi_i \mid i \in \Lambda\}$$

véges rendszere, ahol minden φ_i hasonlósági aránya 1-nél kisebb.

Definíció

Φ *attraktora*: az egyetlen kompakt K, amelyre teljesül, hogy

$$K = \bigcup_{i \in \Lambda} \varphi_i(K).$$

Példa

A Cantor-halmaz az $\left\{x \mapsto \frac{x}{3}, x \mapsto \frac{x}{3} + \frac{2}{3}\right\}$ attraktora.

Önhasonló halmaz Hausdorff-dimenziója

Definíció

A Φ IFS nem tartalmaz *pontos átfedést*, ha a Φ-beli hasonlóságok az általuk generált félcsoportot szabadon generálják.

Sejtés (Simon (1996))

Legyen $\Phi = \{x \mapsto \lambda_i x + t_i \mid i \in \Lambda\}$ *egy IFS* $\mathbb{R}$*-en, amelynek* K *az attraktora. Tegyük fel, hogy* Φ *nem tartalmaz pontos átfedést. Legyen* $s > 0$ *az*

$$1 = \sum_{i \in \Lambda} |\lambda_i|^s$$

egyenlet megoldása. Ekkor

$$\dim K = \min(1, s),$$

ahol $\dim K$ *a* K *Hausdorff-dimenziója.*

Önhasonló mértékek

Adott a $(p_i)_{i\in\Lambda}$ valószínűségi vektor ($p_i > 0$, $\sum p_i = 1$)
$\lambda_i > 0$ a φ_i hasonlósági aránya

Állítás

Létezik egy egyértelmű μ valószínűségi mérték, amelyre

$$\mu = \sum_{i\in\Lambda} p_i \varphi_i(\mu),$$

ahol $\varphi_i(\mu)(A) = \mu(\varphi_i^{-1}(A))$.

Állítás

A μ tartója a K attraktor.

Önhasonló mérték dimenziója

Tétel (Feng, Hu (2010))

Van olyan $\dim \mu$ *szám, hogy* μ*-majdnem minden* x*-re*

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} = \dim \mu.$$

Definíció

A μ *hasonlósági dimenziója*

$$\text{s-dim}\,\mu = \frac{\sum p_i \log p_i^{-1}}{\sum p_i \log \lambda_i^{-1}}.$$

Sejtés

Ha Φ *IFS* $\mathbb{R}$*-en, és nem tartalmaz pontos átfedést, akkor*

$$\dim \mu = \min(1, \text{s-dim}\,\mu).$$

Exponenciális elválasztási tulajdonság

Legyen $\Phi = \{\varphi_i \mid i \in \Lambda\}$ IFS $\mathbb{R}$-en.

Definíció

$$d(x \mapsto \lambda_1 x + t_1, x \mapsto \lambda_2 x + t_2) = \begin{cases} |t_1 - t_2| & \text{ha } \lambda_1 = \lambda_2 \\ \infty & \text{ha } \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$

$$\Delta_n(\Phi) = \min_{(i_1,\dots,i_n) \neq (\tilde{i}_1,\dots,\tilde{i}_n)} d(\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}, \varphi_{\tilde{i}_1} \circ \dots \circ \varphi_{\tilde{i}_n})$$

A Φ teljesíti az *exponenciális elválasztási tulajdonságot*, ha van olyan $c > 0$, hogy végtelen sok n-re $\Delta_n(\Phi) > c^{-n}$.

Tétel (Hochman (2014))

Ha Φ teljesíti az exponenciális elválasztási tulajdonságot, akkor a sejtések igazak Φ-re.

Algebrai paraméterű IFS-ek

Tétel (Hochman (2014))

Legyen $\Phi = \{\lambda_i x + t_i \mid i \in \Lambda\}$ *pontos átfedés nélküli IFS. Ha minden* λ_i *és* t_i *algebrai, akkor* Φ *teljesíti az exponenciális elválasztási tulajdonságot.*

Következmény

Ha minden λ_i *és* t_i *algebrai, akkor* Φ*-re igazak a sejtések.*

Tétel (Rapaport (2020))

Ha minden λ_i *algebrai, akkor* Φ*-re igazak a sejtések. ha minden* λ_i *algebrai.*

Bernoulli-konvolúciók

Tétel (Varjú (2019))

Legyen $\lambda \in (0,1)$ *tetszőleges. Ekkor a*

$$\Phi_\lambda = \{x \mapsto \lambda x, x \mapsto \lambda x + 1\}$$

IFS-re teljesülnek a sejtések.

Definíció

ν_λ a Φ_λ-hoz és az $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ valószínűségi vektorhoz tartozó mérték.

Bernoulli-konvolúciók

Definíció

Legyen (ξ_i) független, $\frac{1}{2}$ paraméterű Bernoulli-eloszlású változók sorozata. A Φ_λ *entrópiarátája*

$$h(\Phi_\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(\sum_{j=0}^{n} \xi_j \lambda^j)}{n},$$

ahol H a Shannon-entrópia.

Tétel (Hochman (2014))

Legyen $\lambda \in (0,1)$ *algebrai. Ekkor*

$$\dim \nu_\lambda = \min\left(1, \frac{h(\Phi_\lambda)}{\log \lambda^{-1}}\right)$$

3 leképezésből álló homogén IFS-ek

Tétel (Rapaport, Varjú (2021))

Definiáljuk a

$$\Phi_{\lambda,t} = \{x \mapsto \lambda x, x \mapsto \lambda x + 1, x \mapsto \lambda x + t\}$$

IFS-t. Ha $\lambda \in (2^{-2/3}, 1)$*, akkor* $\Phi_{\lambda,t}$*-re igazak a sejtések.*

Tetszőlegesen kicsi elválasztás

Tétel

Legyen (η_n) *tetszőleges pozitív valósakból álló sorozat. Ekkor van olyan homogén* Φ *IFS, ami nem tartalmaz pontos átfedést, de* $\Delta_n(\Phi) \leq \eta_n$ *minden n-re.*

- Baker (2021): minden hasonlósági arány $\frac{1}{2}$
- Bárány, Käenmäki (2020):
  $\Phi_{\lambda,t} = \{x \mapsto \lambda x, x \mapsto \lambda x + 1, x \mapsto \lambda x + t\}$ alakú