# Mérhető keresztmetszet

## Egyéni kutatómunka 2

Geng Máté

ELTE

**Tétel.**
Legyen $A$ egy $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}$-mérhető halmaza $\mathbb{R}^+ \times \Omega$-nak, és legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy teljes valószínűségi mértéktér. Ekkor:

(i) A projekció $\pi_\Omega(A) := \{\omega \in \Omega : (t, \omega) \in A \text{ valamely } t \in \mathbb{R}^+\text{-re}\}$ $\mathcal{F}$-beli.

(ii) Létezik $\mathcal{F}$-mérhető valószínűségi változó $\Psi : \Omega \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, amelyre $\Psi(\omega) < \infty$ és $\big(\Psi(\omega), \omega\big) \in A$ $\pi_\Omega(A)$ majdnem minden pontjára, és $\Psi(\omega) = \infty$ minden $\omega \notin \pi_\Omega(A)$ pontra.

# Kompakt halmazok

$T = [0, \infty]$.

$\mathcal{K}(T)$ a $T$ kompakt részhalmazainak rendszere.

$\mathcal{K}(T) \times \mathcal{F} := \{K \times F : K \in \mathcal{K}(T), F \in \mathcal{F}\}$

Legyen $\mathcal{R}$ a $\mathcal{K}(T) \times \mathcal{F}$ elemeiből az összes lehetséges módon véges unióval képzett halmazrendszer.

$\pi_\Omega(\cup_i A_i) = \cup_i \pi_\Omega(A_i)$, DE $\pi_\Omega(\cap_i A_i) \subseteq \cap_i \pi_\Omega(A_i)$ általában.

$R \in \mathcal{R}$ $\omega$-keresztmetszetei kompaktak.

# Kompakt halmazok

**Állítás.** Tegyük fel, hogy $\mathcal{K}$ egy metrikus tér kompakt részhalmazainak rendszere, amelyre igaz, hogy bármely véges sok elemének a metszete nemüres. Ekkor $\mathcal{K}$ összes elemének metszete sem üres.

$\square$

**Következmény.** Tegyük fel, hogy $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ csökkenő sorozata $T \times \Omega$ részhalmazainak úgy, hogy
$K_i(\omega) := \{t \in T : (t, \omega) \in A_i\}$ kompakt. Ekkor
$\pi_\Omega\big(\cap_{i\in\mathbb{N}} A_i\big) = \cap_{i\in\mathbb{N}} \pi_\Omega(A_i)$

$\square$

**Következmény.** Ha $R_i \in \mathcal{R}$ mellett $B = \cap_{i\in\mathbb{N}} R_i$, akkor
$\pi_\omega B = \cap_{i\in\mathbb{N}} \pi_\Omega R_i \in \mathcal{F}$.

$\square$

Tehát $\mathcal{R}_\delta$ elemeinek a vetületei $\Omega$-ra $\mathcal{F}$-beliek.

# Mérhetőség

**Definíció.** Egy $A \subseteq \Omega$ halmaz külső mértékét az alábbi módon definiáljuk:
$\overline{\mathbb{P}}(A) := \inf\{\mathbb{P}(F) : A \subseteq F : F \in \mathcal{F}\}$
**Állítás.**
(i) Ez az infimum egyben minimum is, azaz $\exists F \in \mathcal{F}$, amire $A \subseteq F$ és $\mathbb{P}(F) = \overline{\mathbb{P}}(A)$

(ii) Tegyük fel, hogy $\{D_i : i \in \mathbb{N}\}$ $\Omega$ részhalmazainak növő sorozata, amelyek nem feltétlen elemei az $\mathcal{F}$ szigma-algebrának és $D = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_i$
Ekkor igaz, hogy $\lim_{i \to \infty} \overline{\mathbb{P}}(D_i) = \sup_{i \in \mathbb{N}}\{\overline{\mathbb{P}}(D_i)\} = \overline{\mathbb{P}}(D)$

(iii) Tegyük fel, hogy $D$ egy részhalmaza $\Omega$-nak, amelyre

$\overline{\mathbb{P}}(D) = \sup\{\overline{\mathbb{P}}(F) : F \subseteq D, F \in \mathcal{F}\}$. Ekkor $D$ benne van a $\mathbb{P}$ teljessé tételével kapott szigma-algebrában.

$\square$

# Mérhetőség

Mely $B \in \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$ halmazokra lesz igaz, hogy $\pi_\Omega(B) \in \mathcal{F}$?

Legyen minden $D \subseteq T \times \Omega$ esetén $\overline{\Psi}(D) := \overline{\mathbb{P}}(\pi_\Omega(D))$, a $D$ vetületének $\Omega$-ra vett külső mértéke.

**Lemma.** Ha $A \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$, akkor $\overline{\Psi}(A) = \sup\{\overline{\Psi}(B) : A \supseteq B \in R_\delta\}$. Következésképpen $\pi_\Omega \in \mathcal{F}$.

# Analitikus halmazok

**Definíció.** Legyen $\emptyset \in \mathcal{S}$ $S$ részhalmazainak egy rendszere. Egy $A \subseteq S$ halmazra azt mondjuk, hogy $\mathcal{S}$-analitikus, ha létezik kompakt metrikus tér $E$ és annak $D \subseteq (\mathcal{K} \times \mathcal{S})_{\sigma\delta}$ részhalmaza, amire $A = \pi_S(D)$. Jelöljük $\mathcal{A}(\mathcal{S})$-lal $S$ $\mathcal{S}$-analitikus részhalmazait.

$\pi_\Omega(A) \in \mathcal{F}$ minden $A \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$-re.

**Állítás.**
Ha $A \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$, akkor $\overline{\Psi}(A) = \sup\{\overline{\Psi}(B) : A \supseteq B \in \mathcal{R}_\delta\}$.

# Tétel

(i)
$\mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{R})$-ból következik, hogy minden $B \in \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$-nak $\Omega$-ra vett vetülete benne van az $\mathcal{F}$ szigma-algebrában.

(ii)
Legyen $A$ a $T \times \Omega$-nak egy $\mathcal{R}$-analitikus részhalmaza, ahol $T = [0, \infty]$. $\alpha_1 := \mathbb{P}(\pi_\Omega(A)) > 0$ feltehető. Legyen $B_1 \subseteq A$, $B \in \mathcal{R}_\delta$ és $\overline{\Psi}(B_1) \geq \frac{\alpha_1}{2}$.

$$\psi_1(\omega) := \inf\{\in \mathbb{R}^+ : (t, \omega) \in B_1\}$$

$B_1$-nek kompaktak a keresztmetszetei, így az infimum igazából el is érődik minden $\omega \in \pi_\Omega(B_1)$-re. $\omega \notin \pi_\Omega(B_1)$ esetén az infimum $\infty$ lesz.

# Tétel

$A_2 := \{(t,\omega) \in A : \omega \notin \pi_\Omega(B_1)\} = A \cap (T \times (\pi_\Omega(B_1))^c)$. $A_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ és $\alpha_2 := \mathbb{P}(\pi_\Omega(A_2)) \leq \frac{\alpha_2}{2}$. Feltehető, hogy $\alpha_2 > 0$.

Legyen $B_2 \subseteq A_2$, $B \in \mathcal{R}_\delta$, hogy $\overline{\Psi}(B_2) \geq \frac{\alpha_2}{2}$. Legyen $\psi_2(\omega)$ a $\psi_1$-hez hasonlóan a $B_2$ első elérése...stb.

Ezeket a lépéseket ismételgetve kapjuk $A_i$-t, $B_i$-t, $_i$-t és $\psi_i$-t. A $\{\pi_\Omega(B_i) : i \in \mathbb{N}\}$ halmazrendszer páronként diszjunkt halmazokból áll a konstrukció miatt. $F := \cup_{i\in\mathbb{N}}\pi_\Omega(B_i)$-re $F \subseteq \pi_\Omega(A)$. A konstrukció miatt $\alpha_i$ szigorú monoton csökkenően tart 0-hoz, amiből $\mathbb{P}(\pi_\Omega(A) \setminus F) = 0$. Legyen $\psi := \inf_{i\in\mathbb{N}} \psi_i$. Erre a $\psi$ függvényre teljesülni fog $B$-n, hogy $(\psi(\omega), \omega) \in A$.