Euler irányítások páratlan reguláris gráfokban

Borbényi Márton
Eötvös Loránd Tudományegyetem

Témavezető: Csikvári Péter

Részgráf számláló polinom

Definíció (Részgráf számláló polinom)

Egy G gráf esetén, aminek maximális foka d, definiálhatjuk az alábbi többváltozós függvényt, amit részgráf számláló polinomnak nevezünk:

$$F_G(x_0, \ldots, x_d) = \sum_{A \subseteq E(G)} \prod_{v \in V(G)} x_{d_A(v)} \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_d]$$

Részgráf számláló polinom

Definíció (Részgráf számláló polinom)

Egy G gráf esetén, aminek maximális foka d, definiálhatjuk az alábbi többváltozós függvényt, amit részgráf számláló polinomnak nevezünk:

$$F_G(x_0, \ldots, x_d) = \sum_{A \subseteq E(G)} \prod_{v \in V(G)} x_{d_A(v)} \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_d]$$

Példa

Ha $G = K_3$, akkor

Részgráf számláló polinom

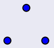
Definíció (Részgráf számláló polinom)

Egy G *gráf esetén, aminek maximális foka* d*, definiálhatjuk az alábbi többváltozós függvényt, amit részgráf számláló polinomnak nevezünk:*

$$F_G(x_0, \ldots, x_d) = \sum_{A \subseteq E(G)} \prod_{v \in V(G)} x_{d_A(v)} \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_d]$$

Példa

Ha $G = K_3$*, akkor*



$F_G(\underline{x}) = x_0^3$

Részgráf számláló polinom

Definíció (Részgráf számláló polinom)

Egy G gráf esetén, aminek maximális foka d, definiálhatjuk az alábbi többváltozós függvényt, amit részgráf számláló polinomnak nevezünk:

$$F_G(x_0, \ldots, x_d) = \sum_{A \subseteq E(G)} \prod_{v \in V(G)} x_{d_A(v)} \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_d]$$

Példa

Ha $G = K_3$, akkor

$$F_G(\underline{x}) = x_0^3 + x_0 x_1^2 + x_0 x_1^2 + x_0 x_1^2$$

Részgráf számláló polinom

Definíció (Részgráf számláló polinom)

Egy G gráf esetén, aminek maximális foka d, definiálhatjuk az alábbi többváltozós függvényt, amit részgráf számláló polinomnak nevezünk:

$$F_G(x_0,\dots,x_d) = \sum_{A\subseteq E(G)} \prod_{v\in V(G)} x_{d_A(v)} \in \mathbb{C}[x_0,x_1,\dots,x_d]$$

Példa

Ha $G = K_3$, akkor

$$F_G(\underline{x}) = x_0^3 + x_0x_1^2 + x_0x_1^2 + x_0x_1^2 + x_1^2x_2 + x_1^2x_2 + x_1^2x_2$$

Részgráf számláló polinom

Definíció (Részgráf számláló polinom)

Egy G gráf esetén, aminek maximális foka d, definiálhatjuk az alábbi többváltozós függvényt, amit részgráf számláló polinomnak nevezünk:

$$F_G(x_0, \dots, x_d) = \sum_{A \subseteq E(G)} \prod_{v \in V(G)} x_{d_A(v)} \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_d]$$

Példa

Ha $G = K_3$, akkor

$$F_G(\underline{x}) = x_0^3 + x_0x_1^2 + x_0x_1^2 + x_0x_1^2 + x_1^2x_2 + x_1^2x_2 + x_1^2x_2 + x_2^3$$

Példák: helyettesítési értékek

Példa

4-reguláris G gráf esetén
$F_G(1,0,1,1,0)$ az olyan részgráfokat számolja, amiben minden csúcs foka 0, 2 vagy 3.

Gauge transzformáció

Tétel (Borbényi M. és Csikvári P.)

Van a mátrixoknak egy olyan $\left\{ \boldsymbol{R}_t \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ *részhalmaza, hogy* $\boldsymbol{R}_0 = \mathrm{Id}$, $\boldsymbol{R}_{t_1}\boldsymbol{R}_{t_2} = \boldsymbol{R}_{t_1+t_2}$ *és minden* d*-reguláris gráfra*

$$F_G(\underline{x}) = F_G(\boldsymbol{R}_t \underline{x}),$$

ahol $\underline{x} = (x_0, \ldots, x_d)$.

Gauge transzformáció

Tétel (Borbényi M. és Csikvári P.)

Van a mátrixoknak egy olyan $\left\{\boldsymbol{R}_t \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)} \mid t \in \mathbb{R}\right\}$ *részhalmaza, hogy* $\boldsymbol{R}_0 = \mathrm{Id}$*,* $\boldsymbol{R}_{t_1}\boldsymbol{R}_{t_2} = \boldsymbol{R}_{t_1+t_2}$ *és minden* d*-reguláris gráfra*

$$F_G(\underline{x}) = F_G(\boldsymbol{R}_t\underline{x}),$$

ahol $\underline{x} = (x_0, \ldots, x_d)$*.*

Példa

$$\boldsymbol{R}_{\pi/4} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Minden 4*-reguláris* G *gráfra*

$$F_G(0,0,1,0,0) = F_G\left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right).$$

Irányítások és részgráfok kapcsolata

Definíció (Irányítás polinom)

$$H_G(y_{-d}, y_{-(d-2)}, \ldots, y_d) = \sum_{\mathcal{O}} \prod_{v \in V} y_{(d_{\mathcal{O}}(v))}$$

Irányítások és részgráfok kapcsolata

Definíció (Irányítás polinom)

$$H_G(y_{-d}, y_{-(d-2)}, \ldots, y_d) = \sum_{\mathcal{O}} \prod_{v \in V} y_{(d_{\mathcal{O}}(v))}$$

Példa

G 4-reguláris gráf esetén $H_G(0,0,1,0,0)$ az Euler irányításokat számolja, ahol $y_{(0)} = 1$.

Irányítások és részgráfok kapcsolata

Definíció (Irányítás polinom)

$$H_G(y_{-d}, y_{-(d-2)}, \ldots, y_d) = \sum_{\mathcal{O}} \prod_{v \in V} y_{(d_{\mathcal{O}}(v))}$$

Példa

G 4-reguláris gráf esetén $H_G(0,0,1,0,0)$ az Euler irányításokat számolja, ahol $y_{(0)} = 1$.

Tétel (Borbényi M. és Csikvári P.)

$$H_G(y_{-d}, y_{-(d-2)}, \ldots, y_d) = F_G(x_0, \ldots, x_d),$$

valamely $\underline{x}$ vektorra,
ami lineáris kombinációja az $y_{-d}, y_{-(d-2)}, \ldots, y_d$ változóknak.

Euler irányítások

Példa

Legyen $\varepsilon(G)$ Euler-irányítások száma a G d-reguláris gráfban, aminek n csúcs van, d pedig páros. Ekkor ha $d = 4$

$$\varepsilon(G) = H_G(0,0,1,0,0) = F_G\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right).$$

Tétel

$$\varepsilon'(G) = c_d^n H_G(1, 0, \frac{1}{d-1}, 0, \frac{1}{d-1}\frac{3}{d-3}, 0, ...).$$

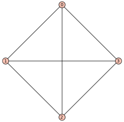
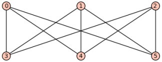
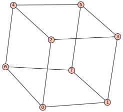
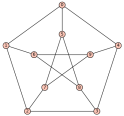
Definíció

$$\varepsilon(G) = c_d^n H_G(1, 0, \frac{1}{d-1}, 0, \frac{1}{d-1}\frac{3}{d-3}, 0, ..)$$

értelmes páratlan d-re is.

Kérdés

Jó c_d esetén mér-e valamit? Mik a tulajdonságai?

Gráf	Név	n	$F_G(s)$	$c_3 = 2$	Prímfelbontás
		2	$\frac{9}{4}$	9	3^2
	K_4	4	$\frac{27}{16}$	27	3^4
	$K_{3,3}$	6	$\frac{53}{32}$	106	$2 \cdot 53$
	Kocka	8	$\frac{425}{256}$	425	$5^2 \cdot 19$
	Petersen	10	$\frac{837}{512}$	1674	$2 \cdot 3^3 \cdot 31$

Köszönöm a figyelmet!