A stabil párosítás probléma általánosításai

Csáji Gergely

ELTE

May 18, 2021

Stabil párosítás

- $G = (S \cup T, E)$ páros gráf
- Adott minden $v \in S$-re egy $<_v$ rendezés T-n és fordítva
- A feladatunk egy stabil párosítás keresése

Definíció

Egy (f, l), $f \in T, l \in S$ pár **blokkoló μ-re nézve**, ha $l >_f \mu(f)$ és $f >_l \mu(l)$.

Definíció

Egy μ párosítás **stabil**, ha nem tartalmaz blokkoló párt.

Gale-Shapley algoritmus

- Minden párral nem rendelkező fiú felkéri a preferencialistája szerint legjobb, még nem felkért lányt
- Minden lány a beérkezett kérők közül kiválasztja a legjobbat, a többieket elutasítja
- Minden lányból az aktuális párjánál rosszabb fiúba mutató éleket töröljük
- Iteráljuk, amíg már nem marad pár nélküli fiú, vagy minden párnélküli fiút már minden lány elutasított.

Tétel

A lánykérő Gale-Shapley fiúoptimális stabil párosítást ad

Tétel

Ha a preferencialisták szigorúak, akkor minden stabil párosításban ugyanazon fiúknak és lányoknak van párjuk

A stabil hozzárendelés probléma

- Most az egyik oldal csúcsaihoz megadunk valamilyen egész k_h kapacitásokat
- Olyan hozzárendelést keresünk, ami stabil és elfogadható.

Tétel

Ha a preferencialisták szigorúak, akkor mindig létezik stabil hozzárendelés, és ez egy módosított Gale-Shapley algoritmussal lineáris időben megtalálható

Matching with couples

- Egyik oldalt kórházak, másik oldalt orvosok
- Az orvosok között lehetnek párok is, közös preferencialistával (általánosabban $1, 2, \ldots, n$ méretű ügynökök is)
- Nem lesz többé igaz, hogy mindig létezik stabil párosítás

Szétválaszthatatlan modell

- Az ügynökök szétválaszthatatlanok
- Az ügynököknek adott H-n egy szigorú preferencialistájuk
- A kórházaknak az U ügynökök halmazán adott egy szigorú rendezésük

Definíció

Egy (u, h) pár **blokkoló μ-re nézve** , ha $h >_u \mu(u)$, és vagy h telítetlen, vagy $\exists v \in \mu(h) : u >_h v$.

Definíció

Egy μ párosítás **stabil**, ha elfogadható és nem tartalmaz blokkoló párt.

Tétel (Dean)

Léteznek olyan k'_h kapacitások, hogy $k_h \leq k'_h \leq k_h + (n-1)$, amikre nézve létezik μ stabil hozzárendelés, és ez a stabil hozzárendelés a Gale Shapley algoritmus módosításával lineáris időben megtalálható. Továbbá ez a hozzárendelés ügynökoptimális.

Szétválasztható modell, $n = 2$ eset

- Orvosok és orvospárok
- Az orvosoknak adott egy szigorú preferencialistája H'-n
- A pároknál $H' \times H'$-n
- A kórházaknak most az egyéneken van rendezése, azaz egy $c = (l, f)$ pár két tagját nem ugyanannyira szereti

Definíció

Egy (d, h) pár **blokkoló μ-re nézve**, ha $h >_d \mu(d)$ és $d \in Choice_h(\mu(h) \cup d)$ (ha $h \neq \emptyset$), ahol $Choice_h(S)$=S legjobb k_h orvosa. Egy (c, h, h') hármas ($c = (c_l, c_f)$) **blokkoló μ-re nézve**, ha $(h, h') >_c \mu(c)$, valamint $c_l \in Choice_h(\mu(h) \cup c_l)$ (ha $h \neq \emptyset$) és $c_f \in Choice_{h'}(\mu(h') \cup c_f)$ (ha $h' \neq \emptyset$). (Itt megengedjük, hogy $h = h'$ legyen)

Tétel (Nguyen, Vohra)

Ha a preferencialisták szigorúak, akkor léteznek olyan k'_h kapacitások, hogy $max_{h \in H}|k_h - k'_h| \leq 2$, $\sum k_h \leq \sum k'_h \leq \sum k_h + 4$, és amikre nézve már létezik stabil hozzárendelés és ez az IR algoritmussal meg is található.

Scarf Lemma

Legyen Q $n \times m$-es nemnegatív mátrix, aminek minden sorában van nemnulla elem, illetve minden i sornak van egy $>_i$ szigorú rendezése azokon a j oszlopokon, amikre $Q_{ij} > 0$, illetve $q \in \mathrm{R}^n_+$. Ekkor létezik olyan extrém pontja $\{x \in \mathrm{R}^m_+ : \ Qx \leq q\}$-nak, ami minden oszlopot dominál valamelyik sorban, ahol egy $x \geq 0$ akkor dominál egy j oszlopot egy i sorban, ha $Q_i x = q_i$, illetve $k \geq_i j$ minden olyan $k \in \{1, \ldots, m\}$-re, amire $Q_{ik} x_k > 0$.

Egyéni eredmények

Tétel

Ha minden ügynök és kórház preferencialistája szigorú, akkor léteznek olyan k'_h kapacitások, amikre igaz, hogy
a) $|k_h - k'_h| \leq 2n - 2 \ \forall h \in H$, illetve $\sum k_h \leq \sum k'_h \leq \sum k_h + 2n - 1$ vagy
b) $|k_h - k'_h| \leq 2n - 1 \ \forall h \in H$, illetve $\sum k_h \leq \sum k'_h \leq \sum k_h + n - 1$,
amikre nézve már létezik stabil hozzárendelés és ezt az IR algoritmus módosításával meg is lehet találni.

Tétel

Ha az ügynökök szétválaszthatatlanok, és a preferencialisták szigorúak, akkor léteznek olyan k'_h kapacitások, amikre igaz, hogy $|k_h - k'_h| \leq n - 1$ $\forall h \in H$, illetve $\sum k_h \leq \sum k'_h \leq \sum k_h + 2n - 1$ és amikre nézve már létezik stabil hozzárendelés és ezt az IR algoritmus módosításával meg is lehet találni.

Egyéni eredmények

Állítás

A gyenge, szétválaszthatatlan esetben létezik olyan példa, ahol az egyéni kapacitásokat legalább $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$-el módosítani kell, de minden esetben elég legfeljebb $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-el.
Az erősebb szétválaszthatatlan esetben létezik olyan példa, amikor az egyéni kapacitásokat legalább $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-el módosítani kell és ez minden esetben elég is. Ha szabunk bármilyen $f(n)$ összkapacitáskorlátot, akkor ugyanez $n-1$-el.
A szétválasztható esetben az alsó korlát legalább $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, de ha összkapacitásváltozás korlátot is megszabunk, akkor $n-1$, illetve minden esetben tudunk találni olyat, ahol az összkapacitás is korlátozva van és az egyéni legfeljebb $2n-2$.

Stabil szobatárs probléma

- Adott egy $G = (V, E)$ gráf, illetve minden $v \in V$ csúcsra egy $>_v$ preferencialista az őt tartalmazó éleken.
- Keresünk egy olyan párosítást G-ben, ami stabil, azaz nem tartalmaz blokkoló élt.

Definíció

Egy $e = uv$ él **blokkoló μ-re nézve**, ha $e \notin \mu$, $u >_v \mu(v)$ és $v >_u \mu(u)$.

- Irving adott egy algoritmust a problémára, ami polinomiális időben eldönti, hogy létezik-e teljes stabil párosítás és ha igen, akkor talál egyet.
- Tan belátta, hogy mindig létezik félegész stabil megoldás, Király és Pap pedig adott egy új bizonyítást erre a Scarf Lemma segítségével.

Hipergráfos változat

- Adott egy $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf,
- Minden $v \in V$-re adott egy $>_v$ szigorú preferencialista az őt tartalmazó hiperéleken és egy k_v kapacitás.
- Keresünk olyan $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ élhalmazt, ami stabil, azaz egyik csúcs sem lépi át a kapacitását, és nem létezik blokkoló él.

Definíció

$e \in \mathcal{E}$ **blokkoló $\mathcal{F}$-re nézve**, ha $e \notin \mathcal{F}$ és minden $v \in e$ vagy nem telített, vagy létezik $f_v \in \mathcal{F}$, hogy $v \in f_v$ és $e >_v f_v$.

Tétel

Mindig létezik stabil törtmegoldás.

Egyéni eredmények

Tétel

Tegyük fel, hogy minden v csúcs preferencialistája szigorú és $|e| \leq n$ $\forall e \in \mathcal{E}$. Ekkor léteznek olyan k'_v kapacitások, hogy $|k_v - k'_v| \leq n - 1$ $\forall v \in V$, illetve $\sum k_v - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \sum k'_v \leq \sum k_v + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ amikre nézve már létezik stabil párosítás, továbbá egy ilyen algoritmikusan megtalálható.

Tétel

Tegyük fel, hogy a stabil k-párosítás feladatban minden csúcs preferencialistája szigorú. Ekkor léteznek olyan k'_v kapacitások, hogy $|k_v - k'_v| \leq 1$ $\forall v \in V$, illetve $\sum k_v \leq \sum k'_v \leq \sum k_v + 1$ amikre nézve már létezik stabil párosítás, továbbá egy ilyen algoritmikusan megtalálható.