Gauss-Markov véletlen mezők és a Sidorenko-sejtés determinánsokra vonatkozó alakja

Felsmann Dániel
Témavezető: Csikvári Péter

2021 május 20

Gauss-Markov véletlen mezők

- Adott egy $G = (V, E)$ véges gráf
- G minden csúcsához tartozik egy-egy X_v valószínűségi változó
- $(X_v)_{v \in V}$ többdimenziós normális eloszlású
- $(X_v)_{v \in V}$ térbeli Markov tulajdonságú, ha tetszőleges marginálisának az eloszlása csak a szomszédos csúcsoktól függ

Gauss-Markov véletlen mezők

- feltesszük, hogy $X_v \sim \mathcal{N}(0,1)$
- (X_i, X_j) eloszlása minden $(i,j) \in E$ esetén azonos (a mező homogén)
- ilyenkor a Σ pozitív szemidefinit kovariancia mátrix főátlójában minden elem 0, az éleknek megfelelő helyeken $x \in (-1,1)$
- az ilyen, pozitív definit kovariancia mátrixok halmaza $\mathcal{A}(G,x)$
- a Markov-tulajdonsággal ekvivalens: $\det(\Sigma)$ maximális, Σ^{-1} minden olyan eleme 0, ahol G-ben nincs él
- az $(X_v)_{v \in V}$ mező entrópiája csak $\det(\Sigma)$-tól függ

$$\tau(G,x) = \max_{A \in \mathcal{A}(G,x)} \det(A)$$

Kapcsolat a gráfelmélettel

homomorfizmus sűrűség: $t(G, H)$ annak a valószínűsége, hogy egy véletlen $\varphi : V(G) \to V(H)$ függvény homomorfizmus

Sejtés (Sidorenko)

Ha G páros gráf, akkor $t(G, H) \geq t(K_2, H)^{|E(G)|}$ minden H nem üres gráfra.

Tétel

Ha rögzített $G_1, \ldots, G_n$ és tetszőleges H gráfok esetén $\prod_{i=1}^{n} t(G_i, H)^{\alpha_i} \geq 1$, akkor $\prod_{i=1}^{n} \tau(G_i, x)^{\alpha_i} \geq 1$ minden $x \in (-1, 1)$-re.

Következmény

Ha G d-reguláris páros gráf, akkor $\tau(G, x)^{1/|V(G)|} \leq \tau(K_{d,d}, x)^{1/2d}$.

Sidorenko sejtés determinánsokra

Tétel

Tetszőleges G és $x \in [0,1)$ esetén
$\tau(G,x) \geq \tau(K_2,x)^{|E(G)|} = (1-x^2)^{|E(G)|}$. Ha G páros, akkor ez minden x mellett teljesül.

A mező entrópiája csak Σ determinánsától függ, így a fenti egyenlőtlenséggel becsülhető:

Következmény

$$\mathbb{D}\left((X_v)_{v\in V}\right) \geq \sum_{(i,j)\in E} \mathbb{D}(X_i, X_j) - \sum_{v\in V} (\deg(v)-1)\mathbb{D}(X_v)$$

Egy alkalmazás

d-reguláris gráfok esetén a gráf Laplace-mátrix sajátértékeinek szorzatát is becsülhetjük a Sidorenko jellegű egyenlőtlenséggel

Tétel

Egy n csúcsú d-reguláris gráf feszítőfáinak száma legfeljebb

$$\frac{e(d-1)}{d(d-2)}\left(\frac{(d-1)^{d-1}}{(d^2-2d)^{d/2-1}}\right)^n$$

Az egyenlőtlenség élessége

Tétel

A $\frac{\tau(G,x)}{(1-x^2)^{|E(G)|}}$ függvény monoton nő az $\left[0, \frac{1}{\Delta-1}\right]$ és $\left[\frac{1}{\overline{d}-1}, 1\right]$ intervallumokon, ahol Δ a gráf legnagyobb fokszáma, $\overline{d}$ pedig az átlagos fokszám.

Nyitott kérdés: teljesül-e ez az egész $(0,1)$ intervallumon?

Tétel

a) Ha $x \in \left[0, \frac{1}{\Delta-1}\right)$, és G legrövidebb körének hossza g, akkor

$$\left|\frac{\ln \tau(G,x)}{|E(G)|} - \ln(1-x^2)\right| \leq 2\frac{((\Delta-1)x)^g}{1-(\Delta-1)x}$$

b) Ha pedig $x \in \left[\frac{1}{\bar{d}-1}, 1\right]$, akkor létezik olyan G-től független, pozitív $\alpha(\bar{d}, x)$ függvény, amellyel

$$\left|\frac{\ln \tau(G,x)}{|E(G)|} - \ln(1-x^2)\right| \geq \alpha(\bar{d}, x)$$

Ez azt jelenti, hogy kis x és nagy g mellett az egyenlőtlenség aszimptotikusan éles, nagy x-ek mellett viszon nem lehet az.

Az előző állítás a) részének következménye, hogy

Ha (G_n) olyan d reguláris gráfokból álló sorozat, amelyben a legrövidebb körök hossza $g(G_n) \to \infty$ és $x \in (0, d)$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \tau(G_n, x)}{|V(G_n)|} = \frac{d}{2} \ln(1 - x^2)$$

Két hasonló nyitott kérdés:

- Igaz-e ez a teljes $(0, 1)$ intervallumon?
- Mi lehet $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \tau(G_n,x)}{|V(G_n)|}$, ha $G_n \to \mathbb{Z}^d$?

Köszönöm a figyelmet!