Elemi relativisztikus szabad részecskék

Egyéni kutatómunka 2

Forman Balázs Attila

1 A Minkowski-téridő kauzális automorfizmusai

Definíció: A téridő Minkowski-modellje az $\mathbb{R}^4$ ellátva a Lorentz szimmetriájú

$$\langle x, y\rangle = -x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4$$

bilineáris függvénnyel.

Definíció: Legyen $x < y$, ha $x_4 < y_4$ és $\langle y - x, y - x\rangle > 0$.

Ez a részbenrendezése a téridő pontjainak a kauzalitást hivatott formalizálni: x akkor észleli később történőnek y-t, ha y benne van x jövőbeli félfénykúpjában.

Definíció: Egy $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ f bijekció kauzális automorfizmus, ha ezt a részbenrendezést megtartja. $x < y$ esetén az x és y közti távolság fizikai interpretációja "Az az idő, amit egy olyan óra mér, ami x-ből y-ba egyenletes sebességgel megy.

Definíció: Egy $A: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezés Lorentz-transzformáció, ha $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ minden $x, y \in \mathbb{R}^4$-re.

Észrevehetjük, hogy az eltolások és az időirányítást megtartó Lorentz-transzformációk kauzális automorfizmusok, akárcsak a nemnegatív számmal való szorzások. Az az ötlet tehát, hogy hátha ki lehet fejezni minden szimmetriáját a téridőnek (kauzalitás szempontjából) ezek kompozíciójaként. Ezt igazolja nekünk a következő tétel:

Definíció: $O_\uparrow(3,1)$ az időirányítást megtartó Lorentz-transzformációk csoportja.

Tétel 1.1 *(Zeeman) A teljes kauzális automorfizmuscsoport izomorf az* $\mathbb{R}^4 \rtimes (O_\uparrow(3,1) \times \mathbb{R})$ *csoporttal.*

2 Projektív reprezentációk felemelése unitér reprezentációvá

Definíció: A hullámfüggvények állapottere egy komplex H Hilbert-teret alkot, ezt a nemnulla skalárral való szorzással kifaktorizálva komplex projektív teret kapunk, amit $\hat{H} = H \setminus \{0\}/\mathbb{C}^*$-val jelölünk.

Definíció: Két hullámfüggvény átmeneti valószínűsége legyen:

$$\frac{|\langle \phi, \psi \rangle|^2}{||\phi||^2||\psi||^2} := \langle \hat{\phi}, \hat{\psi} \rangle.$$

Definíció: Az $A : H \to H$ leképezés antiunitér, ha

$$\begin{aligned} A\lambda\psi &= \overline{\lambda} A\psi, \\ A(\phi + \psi) &= A\phi + A\psi, \\ \langle A\phi, A\psi \rangle &= \overline{\langle \phi, \psi \rangle}. \end{aligned}$$

Jelölés: $\tilde{U}(H)$-val jelöljük az unitér vagy antiunitér leképezések csoportját, $Aut(\hat{H})$, illetve $U(\hat{H})$ legyen a $\hat{H}$ projektív térnek az $\tilde{U}(H)$-beli, illetve $U(H)$-beli transzformációk által indukált kollineációinak csoportját.

Tétel 2.1 *(Wigner): Az*

$$1 \to U(1) \to \tilde{U}(H) \to Aut(\hat{H}) \to 1$$

és a

$$1 \to U(1) \to U(H) \to U(\hat{H}) \to 1$$

sorozatok egzaktak.

Állítás 2.2 *Ha a G Lie-csoport összefüggő, akkor bármely $T : G \to Aut(\hat{H})$ homomorfizmusra, $T(G) \subset U(\hat{H})$.*

Tétel 2.3 *$U(H)$ principális nyaláb $U(\hat{H})$ felett $U(1)$ struktúracsoporttal.*

Tétel 2.4 *Ha van egy $T : G \to U(\hat{H})$ projektív reprezentációnk, akkor ezzel visszahúzhatjuk a nyalábot egy $\tilde{G}$ csoportra, ami G bővítése $U(1)$-el. Ha $\tilde{G}$ felbomlik $G \times U(1)$-re, akkor létezik $G \to \tilde{G}$ szelés, ami indukál egy felemelést G-ből $U(H)$-ba.*

Egy Lie-csoport bővítéseinek izomorfizmia osztályait egy 1-dimenziós csoporttal a Lie-agebrák szintjén a csoport Lie-algebrájának második kohomológiája írja le.

Definíció: Jelölje azon $\theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezések halmazást, melyre

$$\theta(x, [y, z]) + \theta(y, [z, x]) + \theta(z, [x, y]) = 0$$

$Z(G,\mathbb{R})$, és jelölje azon $\phi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ ferdén szimmetrikus bilineáris leképezések halmazát $B(G,\mathbb{R})$, melyekre létezik $\xi : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ lineáris, hogy

$$\phi(x,y) = \xi([x,y]).$$

Ekkor $H^2(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = Z(\mathfrak{g},\mathbb{R})/B(\mathfrak{g},\mathbb{R})$.

Tétel 2.5 *Minden G összefüggő és egyszeresen összefüggő Lie csoportra tetszőleges $T : G \to U(\hat{H})$ felemelhető, és ha $H^2(LG,\mathbb{R}) = 0$, akkor a felemelés választható homomorfizmusnak.*

Állítás 2.6 *$SL_2(\mathbb{C})$ kétrétűen fedi $SO(3,1)$-et.*

Tétel 2.7 $H^2(L(R^4 \rtimes SL_2(\mathbb{C}),\mathbb{R}) = 0$

Definíció: $R^4 \rtimes SL_2(\mathbb{C})$ az irreducibilis reprezentációi az elemi relativisztikus szabad részecskék.

Megjegyzés: $SU(2)$ Lie-algebrájának komplexifikáltja éppen $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, ezért az utóbbi minden reprezentációja indukálható az előbbiből.

Megjegyzés: Ha H éppen a Minkowski-téridőn értelmezett Schwarz-tér, az $L\mathbb{R}^4 \rtimes SO(3,1)) = \langle \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, m_{12}, m_{13}, m_{23}, m_{14}, m_{24}, m_{34} \rangle$ Lie-algebrának az első 3 eleme felel meg az iránymenti lendületek, a negyedik a kinetikus energia, az utána következő 3 a perdület, a többi pedig a relativisztikus perdület operátorainak a kanonikus reprezentációnál.

3 Kompakt Lie-csoportok reprezentációi

Definíció: Legyen T a maximális tórusza egy G kompakt Lie-csoportnak. Ekkor AdT közös sajátalterek direkt összegére bontja $\mathfrak{g}$-t: $V_0 \oplus \bigoplus_{i=1}^n V_i$, ahol $\dim V_i = 2$ minden $i > 0$-ra, és ezeken a maximális tórusz t eleme $\theta_i(t)$ szögű forgatással hat. Ezeket a $T \to S^1$ leképezéseket hívjuk gyököknek.

Definíció: Szintén gyököknek hívjuk azokat az $\alpha_j : LT \to \mathbb{R}$ lineáris leképezéseket, melyekre $a \in LT$-re $\theta_j(exp\ a) = e^{i\alpha_j(a)}$.

Definíció: Ad $N(T)$ hatása T-n a Weyl-csoport. Az α_j gyökök merőleges hipersíkjai által határolt gúlák a Weyl-kamrák $\subset LT$.

Tétel 3.1 *A Weyl-csoport tranzitívan hat a Weyl-kamrákon, és a gyökökre merőleges hipersíkokra való tükrözések generálják.*

Definíció: Legyen T a maximális tórusza egy G kompakt Lie-csoportnak, s vagyük $\mathfrak{g}$ egy R reprezentációját V-n. Ekkor $R(T)$ megint sajátalterekre bontja V-t, az ezeken vett forgatásokhoz tartozó homomorfizmusokat, és a hozzájuk tartozó LT^*-beli leképezéseket hívjuk súlyoknak.

Megjegyzés: A gyökök az adjungált reprezentáció súlyai.

Vegyünk most egy tetszőleges bázist LT^*-ban! Ez megad egy rendezést LT^*-n a bázisban vett koordináták lexikografikus rendezésével.

Megjegyzés: Minden reprezentációnak van egy legnagyobb súlya, ami nincs benne a többi konvex burkában.

Jelölés: A komplex reprezentációk formális különbségei a tenzorszorzással és a direktösszeg-képzéssel gyűrűt alkotnak, ezt jelöljük $K(G)$-vel. A formális különbség párok egy ekvivalenciaosztálya, ahol $(\rho_1, \rho_2) \simeq (\rho_3, \rho_4)$, ha $\rho_1 \oplus \rho_4 \simeq \rho_2 \oplus \rho_3$.

Tétel 3.2 *Ha G egy kompakt, összefüggő csoport, akkor $K(G) \simeq K(T)_W$, ahol az utóbbi a maximális tórusz azon reprezentációi, amelyek a Weyl-csoportra invariánsak.*

Tétel 3.3 *Ha G egyszeresen összefüggő is, akkor $K(G)$ polinomgyűrű.*

Definíció: $\Lambda^n V$ a V n-edik külső hatványa, ami izomorf a $V^n \to \mathbb{C}$ alternáló lineáris leképezések terével.

G egy ρ reprezentációja V-n indukál egy $\Lambda^k \rho$ reprezentációt $\Lambda^k V$-n $\forall k \in \mathbb{Z}$-re.

Tétel 3.4 *K(U(n)) a $\Lambda^1\rho, \dots \Lambda^{n-1}\rho$ által generált polinomgyűrű és a $\Lambda^n\rho$-beli véges Laurent-sorok tenzorszorzata, ahol ρ az $U(n)$ természetes reprezentációja $\mathbb{C}^n$-en.*

Tétel 3.5 *K(SU(n))-t generálják $\Lambda^1\rho, \dots \Lambda^{n-1}\rho$, ahol ρ az $SU(n)$ természetes reprezentációja $\mathbb{C}^n$-en.*

Tétel 3.6 *K(Sp(n))-t generálják $\Lambda^1\rho, \dots \Lambda^n\rho$, ahol ρ az $Sp(n)$ természetes reprezentációja $\mathbb{C}^{2n}$-en.*

Tétel 3.7 *K(SO(2n+1))-t generálják $\Lambda^1\rho, \dots \Lambda^n\rho$, ahol ρ az $SO(2n+1)$ természetes reprezentációja $\mathbb{R}^{2n+1}$-en.*

Tétel 3.8 *K(SO(2n))-t generálják $\Lambda^1\rho, \dots \Lambda^n\rho$, ahol ρ az $SO(2n)$ természetes reprezentációja $\mathbb{R}^{2n}$-en.*

Érdekes tétel szól arról is, hogy hogy lehet meghatározni egy komplex reprezentációról, hogy az vajon egy valós reprezentáció komplexifikáltjaként is előáll-e, vagy hogy kiterjed-e kvaterniók feletti reprezentációvá.

Tétel 3.9 *Legyen G egy kompakt Lie.csoport, és ξ egy ρ irreducibilis komplex reprezentációjának nyoma. Ekkor $\int_G \xi(g^2)dg = \pm 1$ vagy 0. Ha 1, akkor a reprezentáció valós típusú, ha 0, akkor önadjungált, ha -1, akkor pedig kvaternió típusú.*

Tétel 3.10 $K(G \times H) \simeq K(G) \otimes K(H)$.

4 Kvantummechanikai szimmetriák

Legyen $\hat{H}$ egy kvantummechanikai rendszer Hamilton-operátora, azaz egy önadjungált kompakt operátor egy H Hilbert téren, melynek sajátaltér felbontása $H = \bigoplus_n H_n$, ahol $Hv = E_n v$ minden $v \in H_n$-re, ahol az E_n-ek az energiaszintek.

Definíció: A $\hat{H}$ operátorral felcserélhető folytonos lineáris önadjungált operátorokat nevezzük megmaradó mennyiségeknek.

Definíció: Szimmetriatranszformációnak nevezünk egy U unitér operátort, ha $\hat{U}\hat{H}\hat{U}^* = \hat{H}$.

Tétel 4.1 *Ha $\hat{I}$ megmaradó mennyiség, akkor $\hat{U} = exp(is\hat{I})$, $s \in \mathbb{R}$ egy szimmetriatranszformáció.*

Tétel 4.2 *A megmaradó mennyiségek egy véges dimenziós rész Lie-algebrája hűen reprezentálódik véges sok H_n unitér csoportjának Lie-algebráinak direkt szorzatán. Ha ennek a képét az exponenciális leképezésnél lezárjuk ezen U_n-ek direkt szorzatán belül, egy kompakt Lie-csoportot kapunk, ami hat $\hat{H}$ összes sajátalterén egy véges dimenziós unitér reprezentációval.*

Megjegyzés: Legyen $\hat{I}$ az izospin, és $\hat{Y}$ a hipertöltés. Mérések azt mutatják, hogy ezek éppen egy $\mathfrak{su}(2)$-t generálnak, aminek egy R_1 reprezentációjában él a proton és a neutron, és egy másikban π-mezonok.

5 Harmonikus analízis Lie-csoportokon

Definíció: Legyen G kompakt Lie-csoport és $H = L^2(G)$, legyen $\lambda : G \to B(H)$ $\lambda(g)f(t) = f(g^{-1}t)$.

Definíció: Legyen π a G Lie-csoport egy irreducibilis komplex reprezentációja, és képterének ortonormált bázisa $(e_1, \ldots e_n)$, ekkor ennek a reprezentációinak a mátrixelemei a $\langle e_i, \pi(g)e_j\rangle := \phi_{ij}(g)$ függvények.

Jelölés: Legyen G egy kompakt Lie-csoport, ekkor az irreducibilis unitér reprezentációi ekvivalenciaosztályainak halmazát jelöljük $\hat{G}$-vel.

Állítás 5.1 *Legyen π_n és π_m két irreducibilis reprezentációja a G kompakt Lie csoportnak, és ϕ^n_{ij} valamint ϕ^m_{kl} ezek mátrixelemei ekkor*

$$\int_G \phi^n_{ij}\overline{\phi^m_{kl}}dg = \delta_{nm}\delta_{ik}\delta_{jl}\frac{1}{dim\pi_n}.$$

Tétel 5.2 *(Peter-Weyl) Legyen G egy kompakt Lie-csoport, ekkor*

1. *G minden irreducibilis unitér reprezentációja véges dimenziós,*
2. $\lambda \simeq \oplus_{\pi \in \hat{G}} dim_\pi \pi$,
3. $\forall g \in G\ \exists \pi \in \hat{G}$, *hogy* $\pi(g) \neq I$,
4. *A mátrixelemek sűrűek a folytonos függvények terében (és L^p-ben is),*
5. $f \in L^2(G) \Rightarrow \|f\|_2^2 = \sum_{\pi \in \hat{G}} dim_\pi \| \int_G f(g)\pi(g)dg\|_{H.S.}^2$.

Források

[1] Simms, D.J., (1968). Lie Groups and Quantum Mechanics. Springer-Verlag.

[2] Dorey, N., Kirklin, J., (2015). Symmetries, Fields and Particles. Cambridge Part III Maths, Michaelmas.

[3] Adams, J.F., (1969). Lectures on Lie groups. W.A.Benjamin, Inc.

[4] Williams, D.P., (1991). The Peter-Weyl Theorem for Compact Groups. https://math.dartmouth.edu/ dana/bookspapers/pw.pdf