Operátoralgebrák rendezés automorfizmusai

Göde Ábel

2021. május 12.

1. Bevezetés

Hilbert-terek önadjungált operátorai felett természetes módon definiálnak egy részbenrendezést a pozitív operátorok. Munkám során Peter Šemrl és Roman Dronvšek cikkeit dolgoztam fel, melyek ezen operátoralgebra, illetve ennek bizonyos kitüntetett részhalmazainak rendezés-automorfizmusait jellemzik.

2. Összehasonlíthatóságot megtartó leképezések

Legyen H komplex Hilbert-tér, $dimH \geq 2$. $B_s(H)$ jelöli H önadjungált, korlátos, lineáris operátorainak halmazát.
$A, B \in B_s(H)$ operátorok esetén azt mondjuk, hogy $A \leq B$, amennyiben a $B - A$ operátor pozitív, vagy másképpen, ha minden $x \in H$ elemre fennáll $(Ax|x) \leq (Bx|x)$. Az így definiált részbenrendezést megtartó lineáris leképezésekkel a C*-algebrák elmélete foglalkozik. Amennyiben feltesszük a bijektivitást, jellemezhetjük ezen leképezéseket anélkül is, hogy a linearitást feltennénk. A következőt állíthatjuk:

2.1. Tétel. *Legyen H Hilbert-tér, $dimH > 1$, és $\phi : B_s(H) \to B_s(H)$ olyan bijekció, melyre fennáll*

$$A \leq B \Leftrightarrow \phi(A) \leq \phi(B), \qquad A, B \in B_s(H)$$

Ekkor létezik egy $C \in B_s(H)$ operátor és egy $T : H \to H$ invertálható, korlátos, lineáris vagy konjugáltan lineáris operátor, melyekkel minden $A \in B_s(H)$ operátorra

$$\phi(A) = TAT^* + C.$$

Azt mondjuk, hogy az $A, B \in B_s(H)$ operátorok összehasonlíthatóak, ha $A \leq B$ vagy $A \geq B$. Ekkor az $A \sim B$ jelölést használjuk. Megfogalmazhatunk az előzőnél erősebb állítást:

2.2. Tétel. *Legyen H Hilbert-tér, $\dim H > 1$, és $\phi : B_s(H) \to B_s(H)$ olyan bijekció, melyre fennáll*

$$A \sim B \Leftrightarrow \phi(A) \sim \phi(B), \qquad A, B \in B_s(H)$$

Ekkor létezik $c \in \{-1, 1\}$ skalár, egy $C \in B_s(H)$ operátor és egy $T : H \to H$ invertálható, korlátos, lineáris vagy konjugáltan lineáris operátor, melyekkel minden $A \in B_s(H)$ operátorra

$$\phi(A) = cTAT^* + C.$$

Speciálisan, minden összehasonlíthatóságot megőrző bijektív leképezés rendezés automorfizmus vagy rendezés anti-automorfizmus, azaz minden összehasonlítható $A, B \in B_s(H)$ pár rendezését megfordítja.
A fenti tétel bizonyítása felhasználja Hua klasszikus eredményét az hermitikus mátrixok geometriájáról. Megjegyezzük hogy az hermitikus mátrixok éppen a véges dimenziós Hilbert-terek önadjungált operátorai. Az $n \times n$-es hermitikus mátrixok H_n vektorterén definiálhatunk egy metrikát a

$$d(A, B) := rank(A - B)$$

egyenlőséggel. Azt mondjuk, hogy a $T, S \in H_n$ hermitikus mátrixok szomszédosak, amennyiben $d(T, S) = 1$. A H_n vektortér adjacencia automorfizmusairól a következőt állíthatjuk.

2.3. Tétel. *Legyen $n \geq 2$ egész szám, és $\phi : H_n \to H_n$ olyan bijekció, melyre tetszőleges $A, B \in H_n$ hermitikus mátrixok akkor és csak akkor szomszédosak, ha $\phi(A)$ és $\phi(B)$ szomszédosak. Ekkor létezik egy c nemnulla valós szám, egy T invertálható $n \times n$-es komplex mátrix, és $S \in H_n$, melyekre*

$$\phi(A) = cTAT^* + S, \qquad A \in H_n,$$

vagy

$$\phi(A) = cT\bar{A}T^* + S, \qquad A \in H_n,$$

ahol $\bar{A}$ jelöli az A elemenkénti konjugálásával kapott mátrixot.

A 2.2. Tétel bizonyításakor fontos szerepet kap az alábbi segédtétel.

2.4. Tétel. *Legyen H Hilbert-tér, $\dim H \geq 2$, és $A, B \in B_s(H)$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

(i) *A és B szomszédosak,*

(ii) *$A \sim B$ és létezik olyan $C \in B_s(H) \setminus \{A, B\}$, hogy minden $T \in B_s(H)$ operátorra $T \sim A$ és $T \sim B$ esetén teljesül $T \sim C$.*

3. Az effekt algebra rendezés automorfizmusai

Ebben a részben a

$$[0,I] = \left\{A \in B_s(H) \,\middle|\, 0 \leq A \leq I\right\}$$

egyenlőséggel definiált effekt algebra rendezés automorfizmusairól lesz szó, ahol I a H Hilber-tér identikus operátora. Először kimondjuk a korábbi tételünk egy speciális esetét a pozitív önadjungált operátorok $[0,\infty)$ halmazának rendezés automorfizmusaira.

3.1. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ rendezés automorfizmus. Ekkor létezik $T : H \to H$ invertálható, korlátos, lineáris vagy konjugáltan lineáris operátor, melyre tetszőleges A pozitív, önadjungált operátor esetén*

$$\phi(A) = TAT^*.$$

Tekintsük minden $p < 1$ valós szám esetén az

$$f_p(x) := \frac{x}{px + 1 - p}$$

egyenlőséggel definiált függvényt. Legyen $p \in [0,1)$ esetén az f_p függvény értelmezési tartománya $[0,\infty)$, míg $p < 0$ esetén legyen az értelmezési tartomány $\left[0, 1 - \frac{1}{p}\right)$. Könnyen látszik, hogy a $[0,1]$ intervallumra megszorítva minden f_p függvény szigorúan monoton növő bijekció a $[0,1]$ intervallumra. Az effekt algebra rendezés automorfizmusairól a következőt állíthatjuk:

3.2. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy $\phi : [0,I] \to [0,I]$ rendezés automorfizmus. Ekkor létezik p negatív szám, és $T : H \to H$ invertálható, korlátos, lineáris vagy konjugáltan lineáris operátor, melyekkel minden $A \in [0,I]$ operátorra fennáll*

$$\phi(A) = \phi_{p,T}(A) = f_p((I + (TT^*)^{-1})^{\frac{1}{2}}(I - (I + TAT^*)^{-1})(I + (TT^*)^{-1})^{\frac{1}{2}}).$$

A továbbiakban adunk egy másik lehetséges jellemzést ezen rendezés automorfizmusokra.

3.3. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy $\phi : [0,I] \to [0,I]$ rendezés automorfizmus. Ekkor létezik p negatív szám, egy $r \in (0,1)$ valós és $T : H \to H$ invertálható, korlátos, lineáris vagy konjugáltan lineáris operátor, melynek operátornormájára $\|T\| \leq 1$, és amelyekkel minden $A \in [0,I]$ operátorra fennáll*

$$\phi(A) = f_p((f_r(TT^*))^{\frac{1}{2}} f_r(TAT^*)(f_r(TT^*))^{\frac{1}{2}}).$$

A fenti tételek bizonyítása egyben csoportelméleti jellemzést is ad az effekt algebra rendezés automorfizmusaira. Jelölje $CGL(H)$ a H invertálható, korlátos, lineáris vagy konjugáltan lineáris operátorainak multiplikatív csoportját. Az $S^1 = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1\right\}$

komplex egységkör multiplikatív csoportja természetes módon ágyazható a $CGL(H)$ csoportba a $z \mapsto zI$ leképezés segítségével. Tekintsük a $G_1 := CGL(H)/S^1$ faktorcsoportot. Ennek elemei $[T] = \left\{ zT \,\middle|\, z \in S^1 \right\}$ alakban állnak elő, ahol T invertálható, korlátos, lineáris vagy konjugáltan lineáris operátor. Azt állítjuk, hogy az effekt algebra rendezés automorfizmusainak csoportja az így definiált G_1 csoporttal izomorf.

Hivatkozások

[1] Peter Šemrl
Comparability Preserving Maps on Bounded Observables
Integral Equations and Operator Theory 62 (2008), 441-454

[2] Heydar Radjavi, Peter Šemrl
A Short Proof of Hua's Fundamental Theorem of the Geometry of Hermitian Matrices
Expo. Math. 21 (2003), 83-93

[3] Roman Drnovšek
On order automorphisms of the effect algebra
Acta Scientarum Mathematicarum (Szeged) 84 (2018), 431-437